МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розрахунково-графічного завдання

«Визначення напружень і переміщень при простих і складних деформаціях»

по дисциплінам “Прикладна механіка” і “Технічна механіка” для студентів всіх немашинобудівних спеціальностей

Харків
НТУ «ХПІ»

ВСТУП

Методичні вказівки до розрахунково-графічного завдання "Визначення напружень і переміщень при простих і складних деформаціях" з дисциплін "Прикладна механіка" та "Технічна механіка" розроблені для студентів немеханічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Методичні вказівки включають в себе чіткий виклад процесів розрахунку центрального розтягування і стиснення прямолінійних стрижнів, розрахунки на міцність і жорсткість при крученні, вигину та складних видах деформації. Робота закінчується розробкою технічної документації у вигляді розрахунково-пояснювальної записки.

Методичні вказівки, крім російської, викладені ще туркменською мовою, що дуже важливо в умовах прийняття НТУ ”ХПІ” умов навчання за Болонським процесом. Цей значний внесок розширює можливості студентів при їх стажуванні та їх подальшій роботі в країнах Євросоюзу.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ.

Данное расчетно-графическое задание оформляется на листах белой? бумаги формата А4. Рисунки выполняются при помощи любого графического редактора или вручную карандашом (допускается исполнение на миллиметровой бумаге), текстовая часть – пастой (фломастером) синего или черного цвета, четким почерком или набрана на компьютере. Изменение условий задания без согласования с преподавателем не допускается.

Работа должна иметь титульный лист и выполняется по мере изложения материала на лекциях – для закрепления полученных навыков.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

1.Для данной схемы (рис. 1) по одному из вариантов, приведенному в табл. 1,

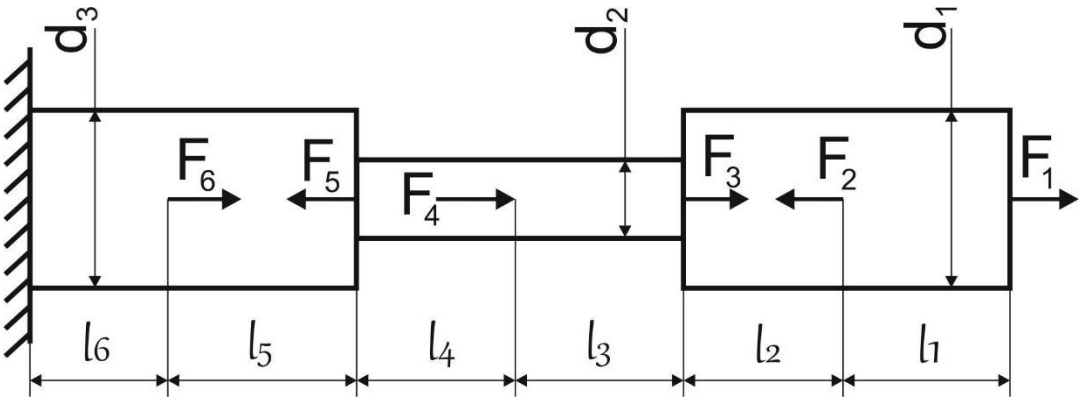


Рис.1 Схема ступенчатого стержня.

1) построить эпюру продольных сил;
2) построить эпюру нормальных напряжений;
3) определить перемещение свободного конца стального стержня ($E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм^2);
4) построить эпюру перемещений;
5) вычислить коэффициент запаса n_T по отношению к пределу текучести ($\sigma_T = 240$ Н/мм^2).

2. Для одной из схем (рис. 2) по варианту, приведенному в табл. 2

1) построить эпюру крутящих моментов;
   При построении эпюры крутящих моментов принять, что
   $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$, или $P_0 = P_1 + P_2 + P_3$. Полученные расчетные значения диаметров вала
   округлить до ближайшего большего, оканчивающегося на 0, 2, 5, 8;
2) определить диаметр вала на каждом участке ;
3) построить эпюру углов поворота сечений вала;
4) начертить эскиз вала.

3. Для одной из схем рис. 3 ,по варианту, приведенному в табл. 3,

1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для трех случаев нагружеиия балок (длину всех балок изобразить отрезком 10 см независимо от величины заданного пролета. Масштаб поперечных сил и изгибающих моментов для каждой балки выбрать с учетом места, отведенного для построения эпюр);
   – на каждой балке показать направление реакций и указать их величины;
   – на построенных эпюрах поперечных сил и изгибающих моментов указать на рисунках их характерные значения;

2) для консольной балки 1 определить перемещение и угол поворота свободного конца, если $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм^2
3) для балки 2 с поперечным сечением указанного вида (рис. 4) определить:
   – положение центра тяжести сечения ;
   – момент инерции сечения относительно нейтральной оси X ;
   – значения наибольших растягивающих напряжений и построить эпюру σ ;
   – значение наибольших касательных напряжений и построить эпюру τ ;
4) для балки 3:
   – из условия прочности по нормальным напряжениям при $[\sigma] = 200$ МПа произвести подбор сечений балки различной формы:
   – прямоугольное с $\frac{h}{b} = \beta$ и $\frac{h}{b} = \frac{1}{\beta}$;
   – круглое;
   – кольцевое с $\frac{d}{D} = \alpha$;
   – двутавровое.
   – все сечения изобразить в одном масштабе;
   – сопоставить величины площадей различных сечений;
   – для выбранного двутаврового сечения построить в масштабе 1 см – 40 МПа эпюры распределения нормальных напряжений в сечении, где $M = M_{\max}$, и касательных напряжений в сечении, где $Q = Q_{\max}$;

4. Для одной из схем (рис. 4) по варианту, приведенному в табл. 4:
   1) построить эпюры изгибающих моментов от усилий, которые действуют в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также эпюру суммарных изгибающих моментов.
   2) построить эпюру крутящих моментов.
   3) в опасном сечении определить эквивалентный момент по IV-ой теории прочности и подобрать диаметр вала при условии, что известен предел текучести материала σ_T и коэффициент запаса n_T .
   4) определить диаметр вала ;

Данные для расчета задачи 1 Таблица 1

Вари-ант	Сила, кН						Длина, м						Диаметр стержня, мм		
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	d_1	d_2	d_3
1	40	10	0	40	0	10	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5	1,5	20	20	30
2	60	20	40	0	40	60	1,5	1,0	0,5	0	1,0	0,5	25	30	35
3	70	0	30	20	90	0	0,5	1,5	0,5	0,5	1,0	0	30	32	40
4	50	60	50	0	70	80	0,5	2,0	0	0,5	1,0	0,5	25	20	25
5	60	20	20	40	0	60	0,5	1,0	0,5	1,5	1,5	0,5	30	40	30
6	100	50	0	20	80	0	1,0	0,5	1,5	2,0	0	1,0	35	30	20
7	0	100	40	60	0	40	0	2,0	0,5	1,5	0,5	0,5	35	35	40
8	30	0	20	40	60	120	1,0	0	0,5	1,5	1,0	0,5	20	30	35
9	20	60	80	0	10	50	0,5	0,5	0,5	0	1,0	0,5	20	25	30
10	40	20	50	40	20	0	1,5	0,5	1,0	0,5	1,5	0	25	30	20
11	80	40	0	10	20	100	0,5	1,0	1,0	0,5	0,5	0,5	30	25	35
12	0	60	20	40	0	80	0	1,0	1,2	0,6	0,3	1,5	25	30	35
13	100	0	20	30	20	60	0,8	0	1,0	1,2	0,8	1,0	32	30	40
14	90	30	20	0	40	70	1,5	0,5	0	0,5	1,5	1,0	30	28	35
15	70	80	40	20	90	0	0,6	0,5	1,5	0,5	2,0	0,5	25	25	30
16	0	40	60	40	60	40	0	1,0	0,5	1,5	0,8	0,6	20	20	30
17	40	80	100	40	0	80	1,2	0,8	0,5	0,5	0,8	1,2	20	25	30
18	100	80	20	0	20	70	0,8	0,5	0,6	0,6	1,2	0,8	30	20	30
19	20	0	40	20	20	50	1,5	0	0,5	1,2	0,5	0,8	20	25	30
20	60	20	40	0	20	20	0,5	0,8	1,5	0,7	1,0	1,2	25	25	25
21	30	80	40	20	30	0	1,0	0,5	1,5	0,8	0,6	0	24	20	25
22	70	30	20	40	0	80	1,2	1,5	0,6	0,6	1,5	1,2	30	25	35
23	40	0	20	0	80	40	0,6	0	0,6	1,5	0,5	0,8	20	20	25
24	0	60	30	20	50	20	0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,5	25	30	35
25	40	20	40	20	90	0	1,0	1,5	0,8	0,6	0	1,0	20	25	25
26	60	40	0	80	20	40	1,5	0,6	0,5	0,8	1,5	1,0	25	30	35
27	50	20	20	100	0	20	1,0	0,8	0,6	0,6	0,5	1,2	25	28	30
28	10	0	20	10	60	50	0,8	0	1,0	0,8	0,5	0,8	30	20	20

Данные для расчёта задачи 2 Таблица 2

Вари-ант	Расстояние, м			Скручивающие моменты, кНм			Мощность, кВт			Угловая скорость		Допускаемое напряже-ние на кручение
	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	P_3	рад/с	об/мин	Н/ì ì ^{2}
1	0,4	0,1	0,7	300	400	220						25
2	0,5	0,2	0,6				2,0	3,5	2,8	25	238	28
3	0,6	0,3	0,5	320	380	250						30
4	0,1	0,4	0,4				2,5	3,2	3,0	30	286	32
5	0,2	0,5	0,3	350	350	280						35
6	0,3	0,6	0,8				2,8	3,0	3,5	35	334	40
7	0,4	0,6	0,7	380	320	300						25
8	0,5	0,5	0,6				3,0	2,8	2,2	40	382	28
9	0,6	0,4	0,5	400	300	320						30
10	0,1	0,3	0,4				3,2	2,5	2,5	26	248	32
11	0,2	0,2	0,7	420	280	350						35
12	0,3	0,1	0,6				3,5	2,0	2,8	28	267	40
13	0,4	0,2	0,5	450	200	380						25
14	0,5	0,3	0,4				4,0	2,0	3,2	30	286	28
15	0,6	0,4	0,3	300	400	220						30
16	0,2	0,5	0,7				4,2	2,2	3,0	35	334	32
17	0,3	0,6	0,5	320	380	250						35
18	0,4	0,7	0,4				4,5	2,5	3,5	40	382	40
19	0,5	0,2	0,3	350	320	280						25
20	0,6	0,3	0,7				2,0	2,8	2,2	45	430	28
21	0,1	0,4	0,6	380	350	300						30
22	0,2	0,5	0,5				2,5	3,0	2,5	50	477	32
23	0,3	0,6	0,4	400	380	220						35
24	0,4	0,7	0,6				2,8	3,2	2,6	60	572	40
25	0,5	0,7	0,5	420	400	250						25
26	0,6	0,6	0,4				3,0	3,5	2,8	70	667	28
27	0,1	0,5	0,6	300	220	280						30
28	0,2	0,4	0,5				3,2	2,0	2,6	80	765	32

Данные для расчета задачи 3 Таблица 3

Вари-ант	Длина, м			Внешние силовые факторы						Соотношения и размеры			
	a	b	c	F_1, кН	F_2, кН	q_1, кН/м	q_2, кН/м	M_1, кН/м	M_2 кНм	β	α	m, см	Сечение балки
1	1	1	2	20	25	10	8	30	20	1,4	0,40	5	A
2	2	3	6	15	30	12	14	40	20	1,5	0,45	6	B
3	3	1	4	30	35	14	16	50	20	1,6	0,50	7	C
4	3	2	4	25	35	16	10	30	30	1,7	0,55	4	D
5	2	2	5	35	40	18	10	40	40	1,8	0,60	5	E
6	3	2	4	30	40	20	10	50	20	1,9	0,65	5	J
7	1	3	2	35	45	10	12	30	40	2,0	0,70	7	A
8	2	3	3	40	40	12	16	40	50	2,1	0,75	8	L
9	3	3	5	50	40	14	18	50	30	2,2	0,80	9	M
10	1	2	4	45	35	16	18	30	50	2,3	0,85	4	N
11	2	3	6	45	40	18	20	40	20	1,6	0,60	5	A
12	3	2	3	50	40	20	14	50	40	1,7	0,65	6	B
13	1	2	3	40	45	10	14	30	20	1,8	0,70	7	C
14	2	3	2	45	50	12	18	40	30	1,9	0,75	8	D
15	3	1	3	35	50	14	20	50	30	2,0	0,80	9	E
16	1	2	4	30	45	16	20	30	40	2,1	0,70	5	J
17	2	3	3	50	45	18	14	40	40	1,8	0,75	6	A
18	3	1	4	40	50	20	16	50	40	1,9	0,80	7	L
19	1	1	3	20	15	5	15	20	10	2,0	0,85	8	M
20	2	1	6	25	20	10	5	30	10	2,1	0,40	9	N
21	3	2	4	30	25	15	5	40	10	2,2	0,45	4	A
22	1	2	2	35	30	20	5	50	20	2,3	0,50	5	B
23	2	2	5	40	35	5	10	20	30	1,4	0,55	6	C
24	3	2	4	45	40	10	15	30	20	1,5	0,60	7	D
25	1	3	2	50	45	15	10	40	20	1,6	0,65	8	E
26	2	3	1	20	50-	20	10	50	20	1,7	0,70	9	J
27	3	1	5	25	45	5	15	20	30	1,8	0,75	4	A
28	1	2	4	30	40	10	15	30	40	1,9	0,80	5	L

Данные для расчёта задачи 4 Таблица 4

Вари-ант	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	M	D_1	D_2	D_3	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	σ_T	n_T
	кН							м				кНм			МПа	
1	-	40	10	-	20	10	2,4	6	8	10	8	20	50	15	300	1,8
2	-	30	15	-	15	10	1,2	8	6	10	10	30	40	12	340	2,0
3	20	10	-	25	5	-	0,6	10	8	6	12	40	30	10	360	2,1
4	20	20	-	15	10	-	2,0	6	10	8	15	50	20	8	220	2,2
5	-	30	20	-	5	15	2,4	8	6	8	10	30	30	12	650	2,3
6	20	30	30	10	10	25	1,5	10	6	10	8	40	40	15	240	2,4
7	30	20	10	15	10	5	1,2	10	6	8	15	50	20	8	380	2,5
8	20	20	-	10	5	-	2,4	8	8	8	12	20	50	10	320	2,6
9	35	50	-	5	10	-	4,0	8	10	6	12	40	20	10	270	2,7
10	10	20	-	10	5	-	0,6	6	8	10	15	30	30	8	340	2,8
11	45	20	30	15	15	25	1,2	6	6	8	8	20	40	15	360	2,7
12	20	20	-	10	5	-	2,2	10	8	8	10	30	50	12	260	2,6
13	-	20	10	-	10	5	2,0	10	8	6	15	40	30	8	800	2,5
14	20	40	-	10	20	-	1,6	8	10	8	8	20	40	10	320	2,4
15	30	20	30	15	5	10	1,0	6	8	10	10	30	30	12	250	2,3
16	10	20	-	5	5	-	2,6	8	6	10	12	40	10	15	800	2,2
17	20	30	10	15	20	10	1,2	10	6	8	15	30	20	10	380	2,5
18	10	30	-	5	15	-	0,6	6	10	10	15	20	30	15	340	2,8
19	20	30	40	10	5	20	2,0	8	10	8	15	30	20	8	220	2,2
20	30	30	20	10	5	15	1,0	8	8	10	10	20	30	12	250	2,3
21	10	50	40	5	30	20	2,4	6	10	6	8	30	20	15	300	1,8
22	20	-	30	10	-	5	2,4	6	6	10	10	20	50	10	350	2,4
23	-	40	40	-	15	25	2,0	10	8	8	12	30	20	12	250	2,0
24	20	30	40	5	20	25	2,1	8	8	6	10	20	40	15	300	2,5
25																
26																
27																
28																

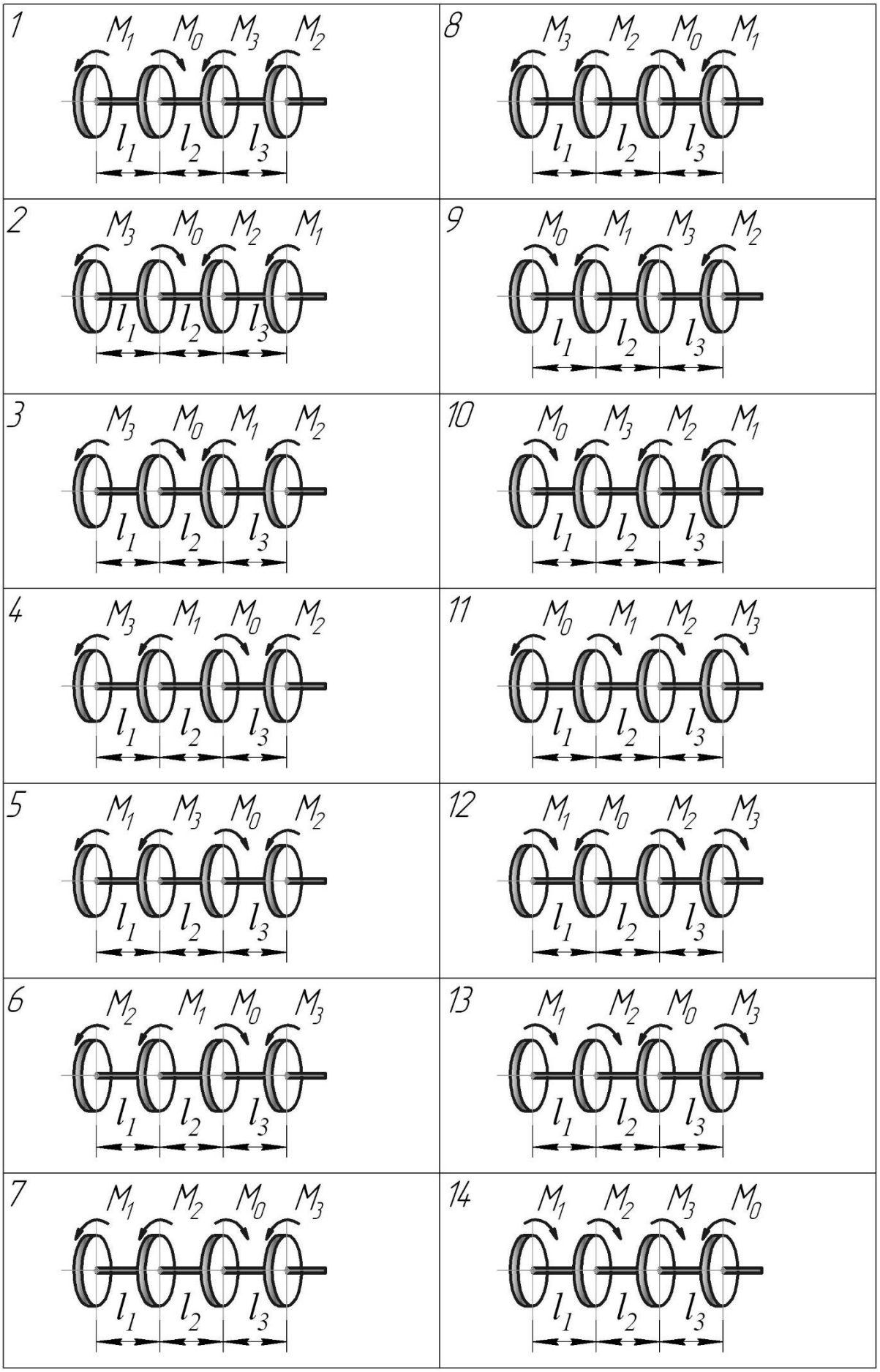
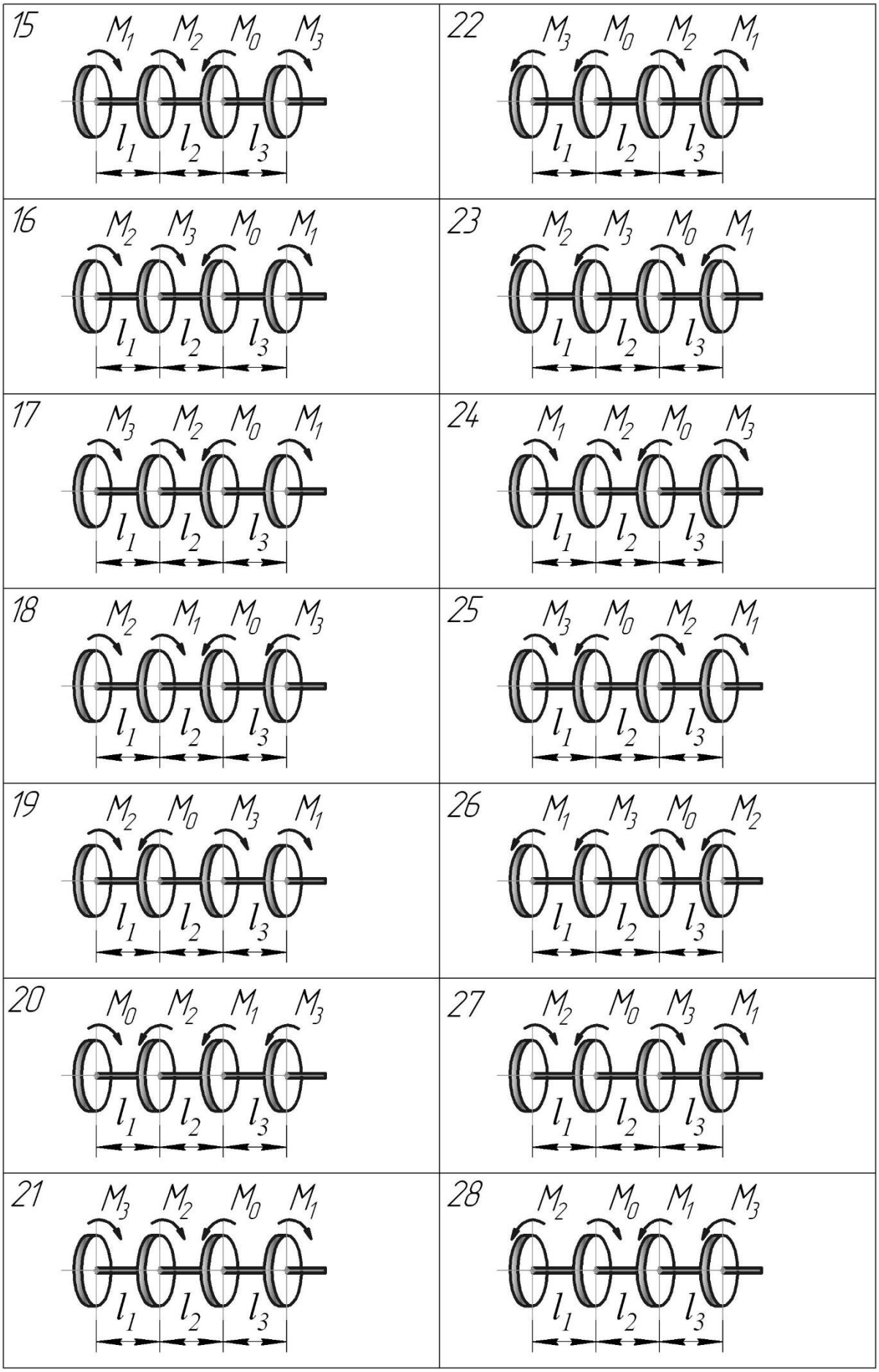

1
M1 M0 M3 M2
l1 l2 l3
8
M3 M2 M0 M1
l1 l2 l3
2
M3 M0 M2 M1
l1 l2 l3
9
M0 M1 M3 M2
l1 l2 l3
3
M3 M0 M1 M2
l1 l2 l3
10
M0 M3 M2 M1
l1 l2 l3
4
M3 M1 M0 M2
l1 l2 l3
11
M0 M1 M2 M3
l1 l2 l3
5
M1 M3 M0 M2
l1 l2 l3
12
M1 M0 M2 M3
l1 l2 l3
6
M2 M1 M0 M3
l1 l2 l3
13
M1 M2 M0 M3
l1 l2 l3
7
M1 M2 M0 M3
l1 l2 l3
14
M1 M2 M3 M0
l1 l2 l3

Рис.2



Продолжение Рис. 2

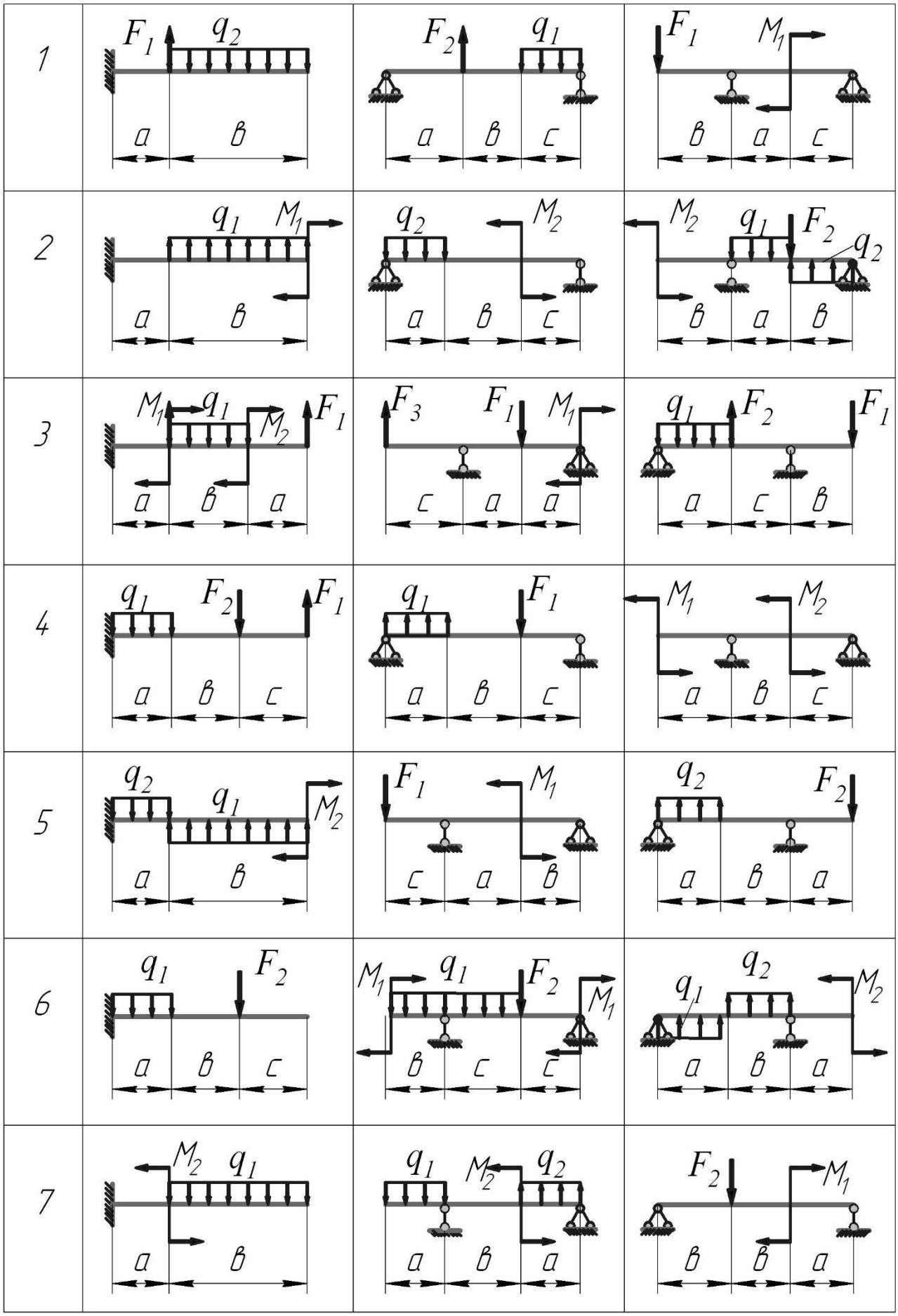
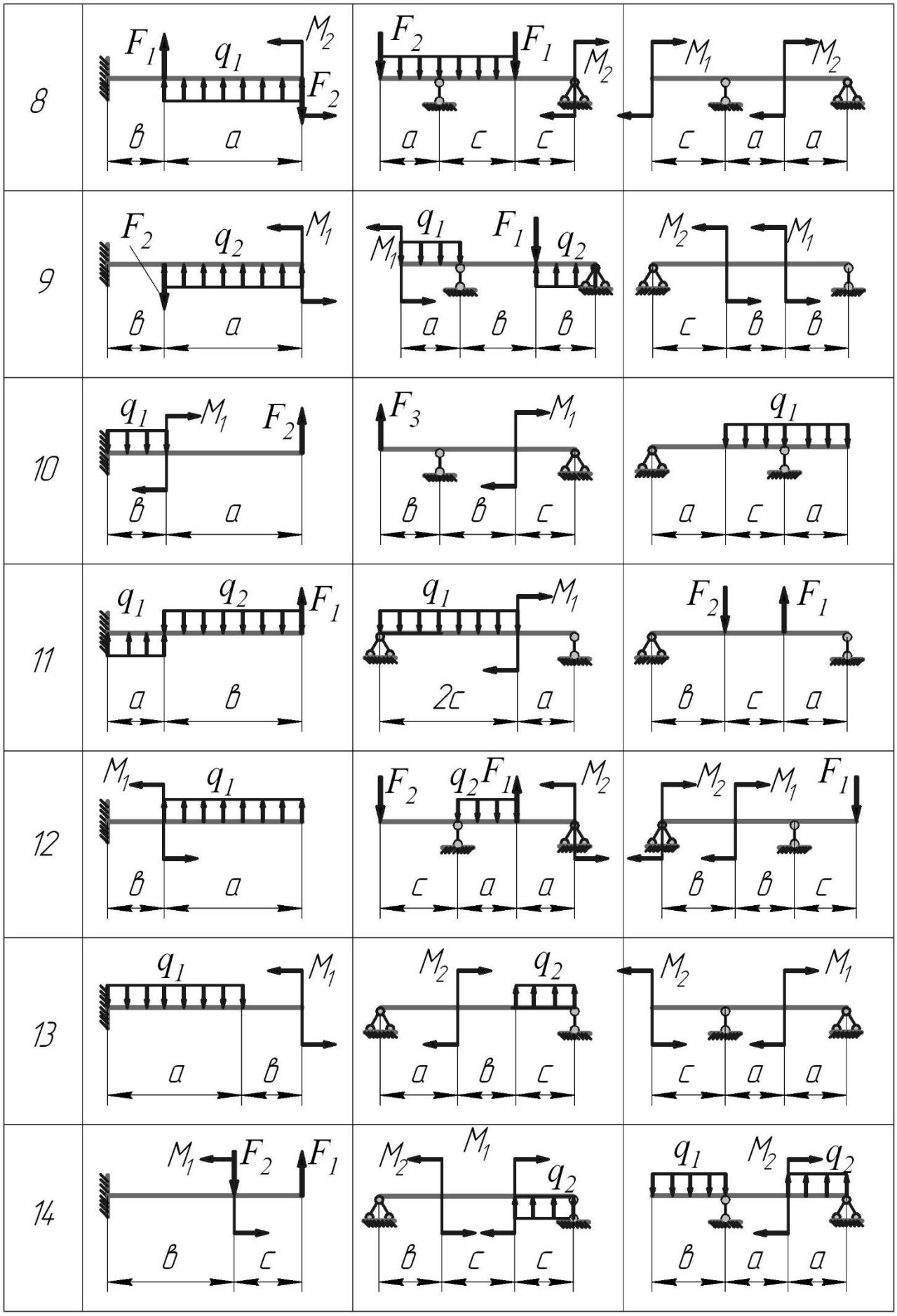
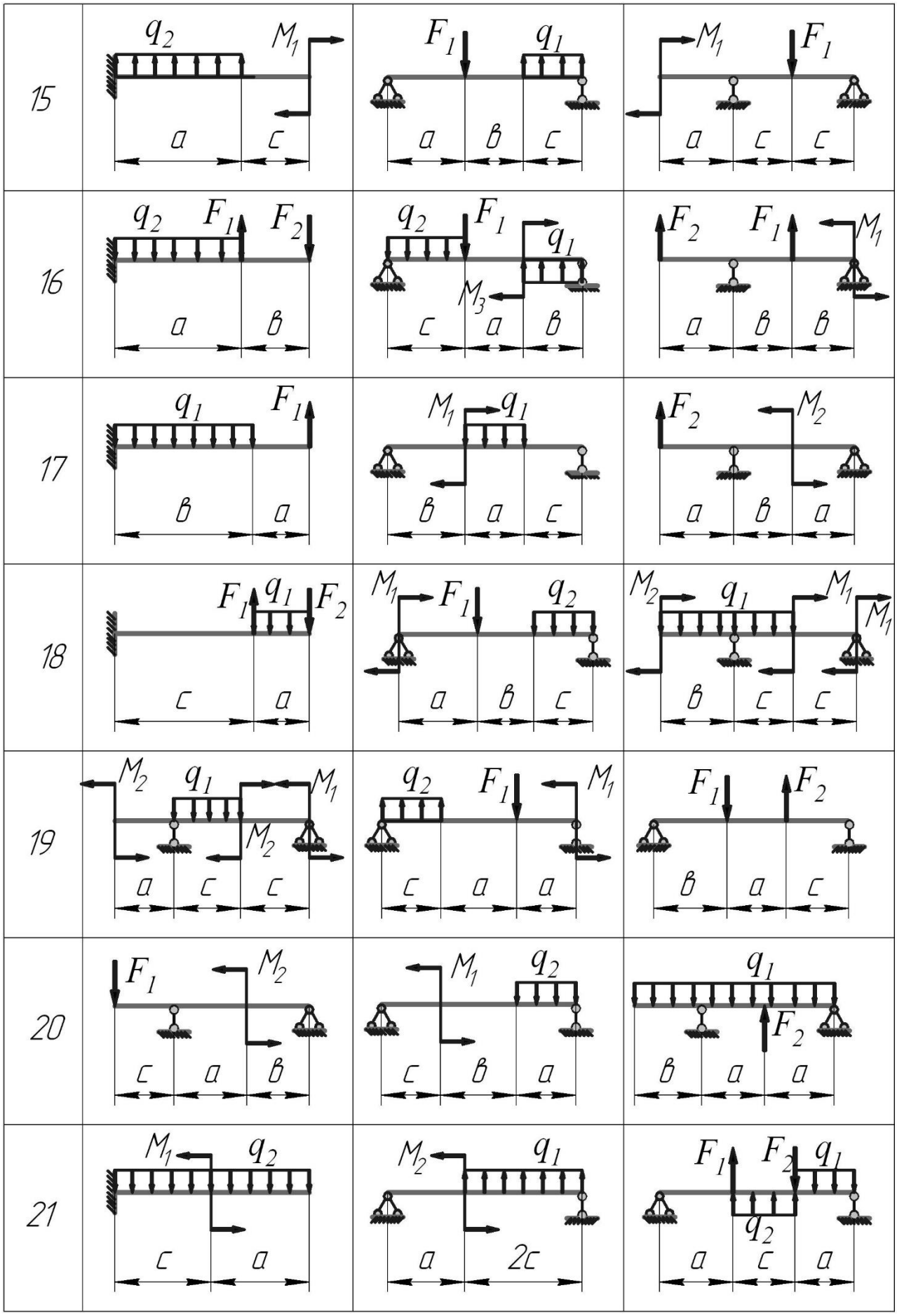

1
F1 q2 a в
F2 q1 a в c
F1 M1 в a c
2
q1 M1 a в
q2 M2 a в c
M2 q1 F2 q2 в a в
3
M1 q1 M2 F1 a в a
F3 F1 M1 c a a
q1 F2 F1 a c в
4
q1 F2 F1 a в c
q1 F1 a в c
M1 M2 a в c
5
q2 q1 M2 a в
F1 M1 c a в
q2 F2 a в a
6
q1 F2 a в c
M1 q1 F2 M1 в c c
q2 q1 M2 a в a
7
M2 q1 a в
q1 M2 q2 a в a
F2 M1 в в a

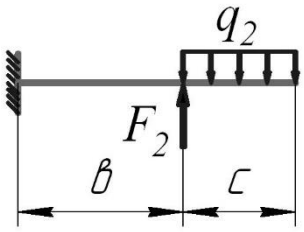
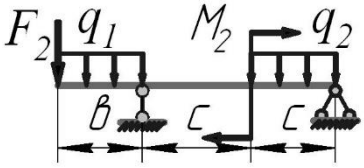
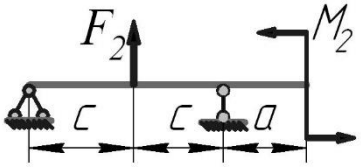
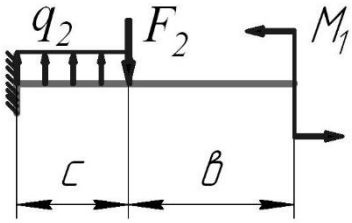
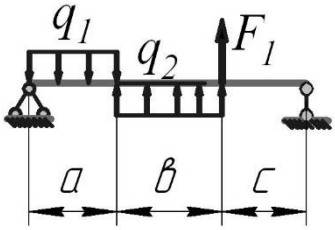
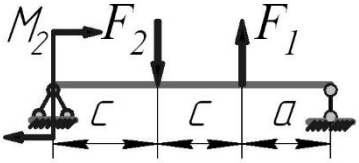
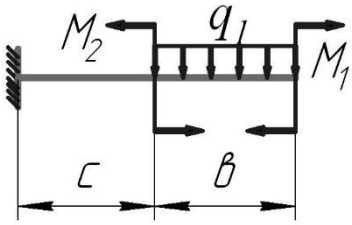
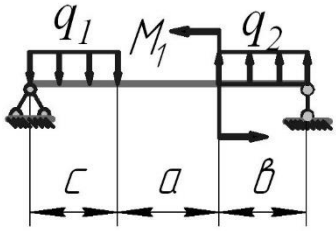
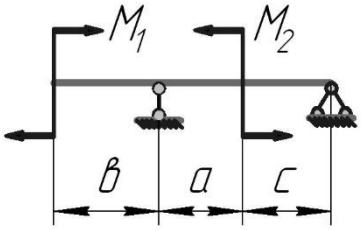
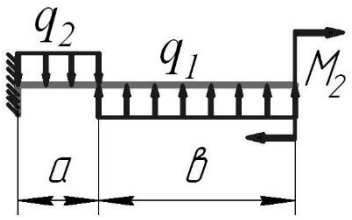
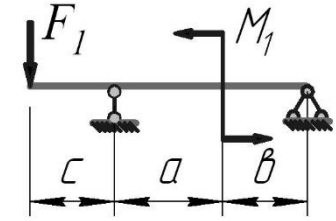
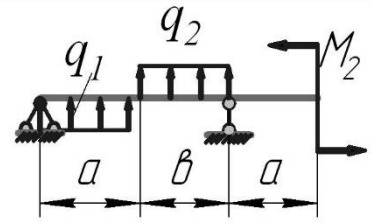
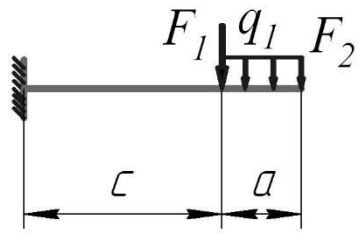
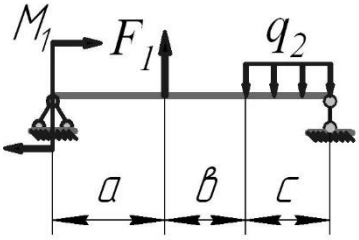
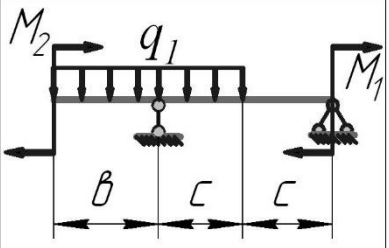
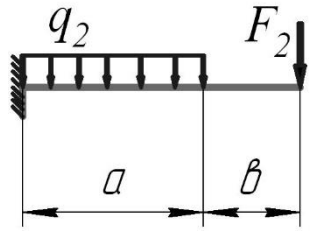
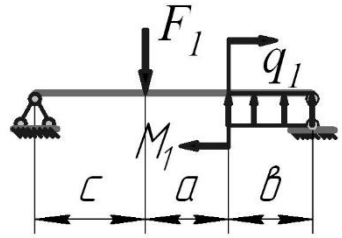
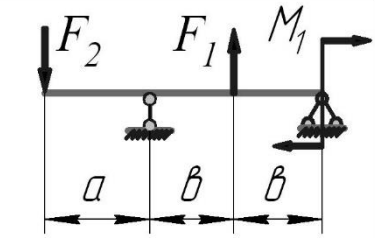
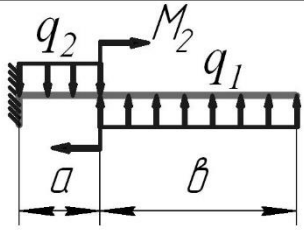
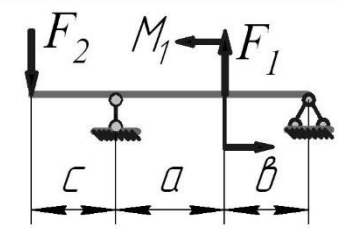
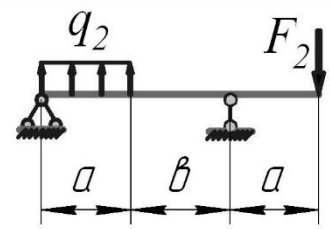
Рис.3



Продолжение Рис.3



Продолжение Рис.3

22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			

Продолжение Рис.3

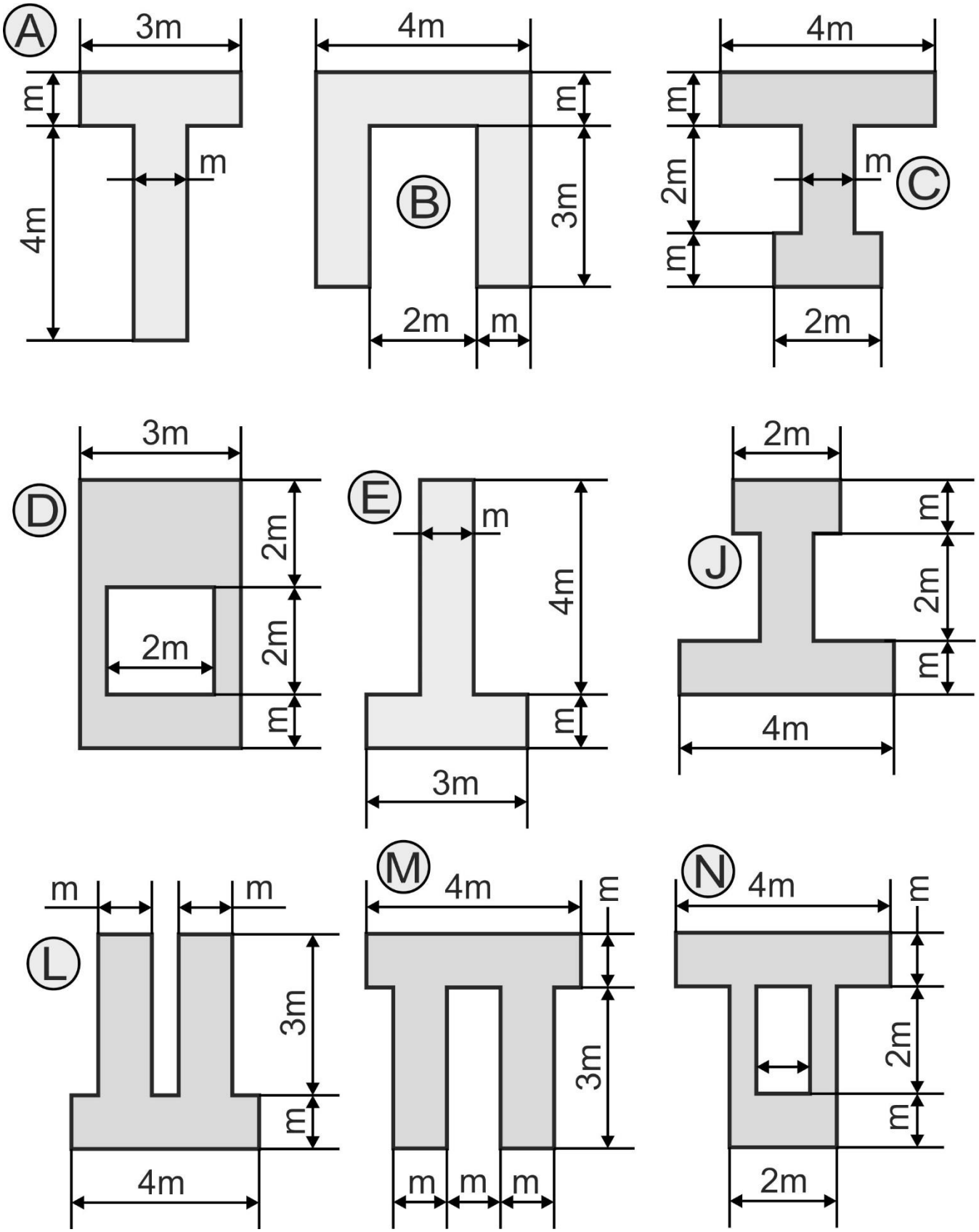


Рис.4 Варианты сечений балок

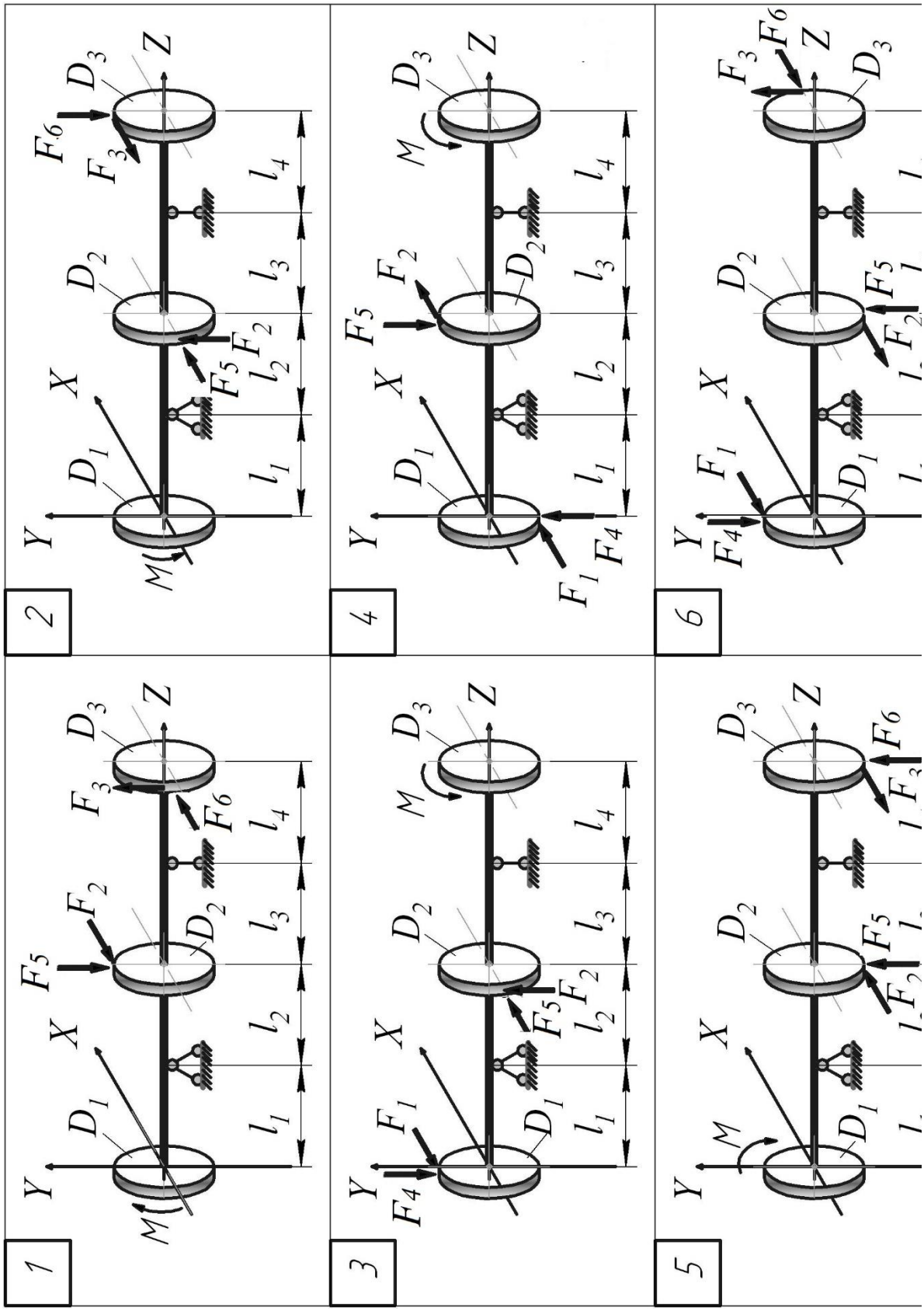
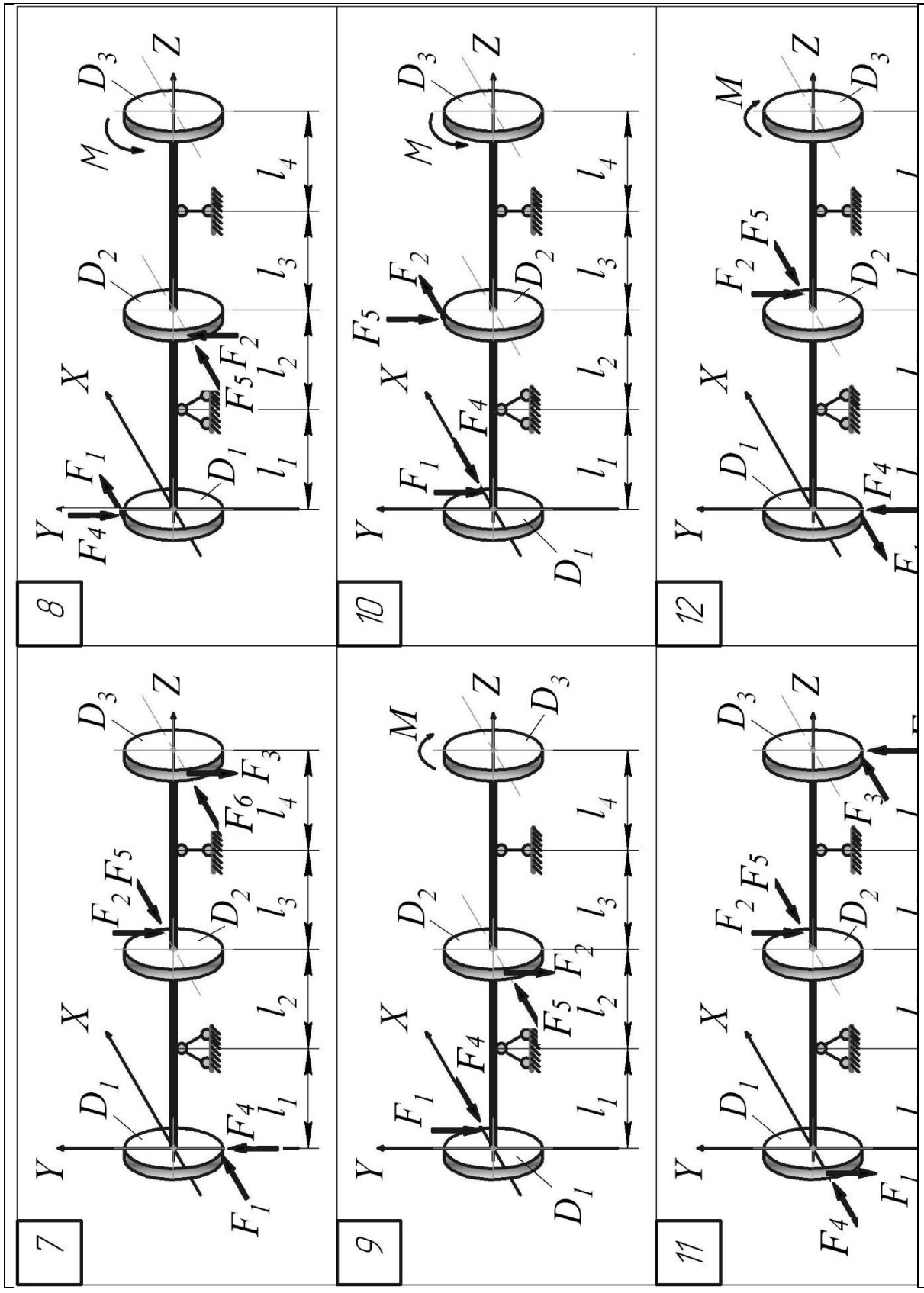
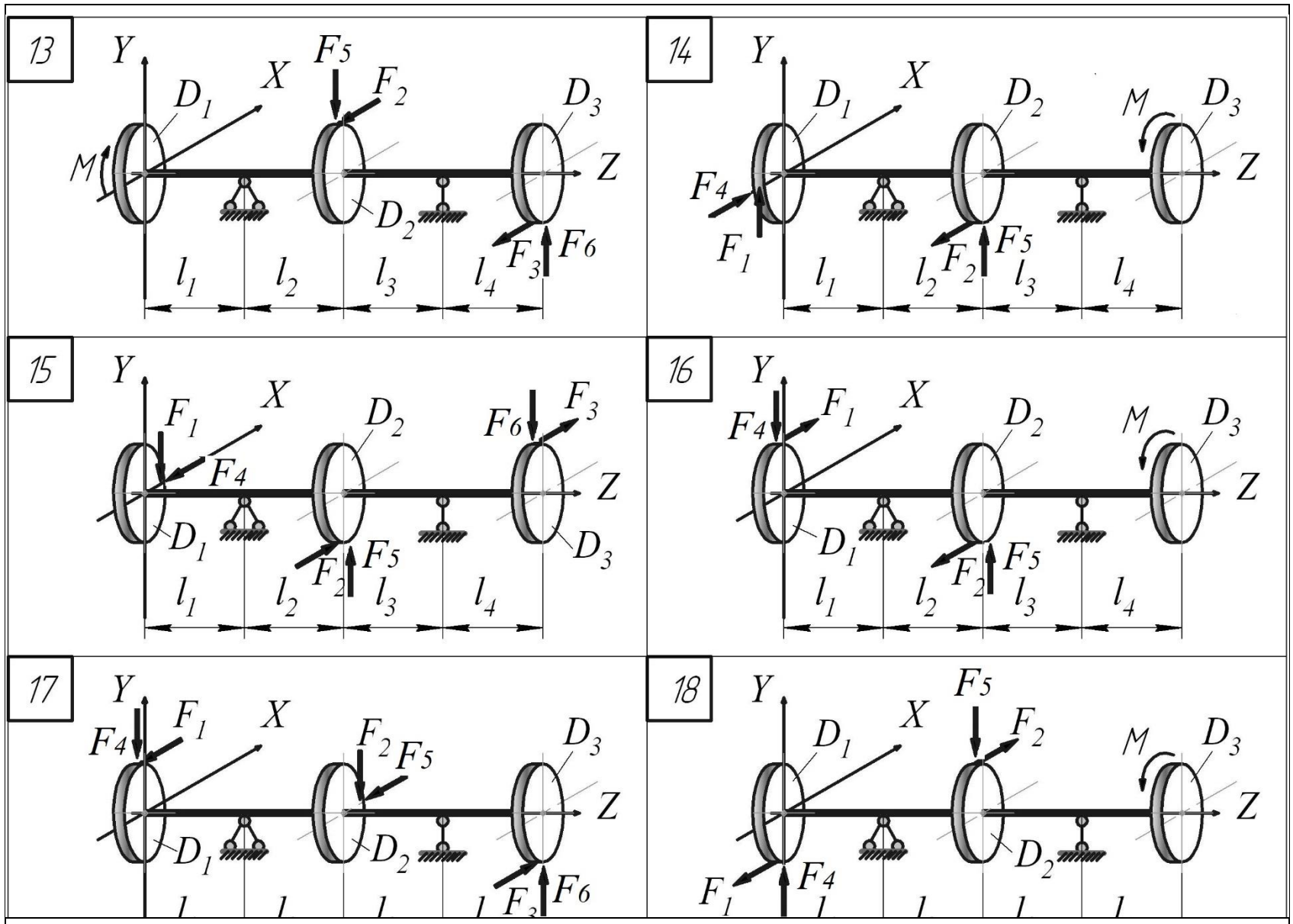


Рис. 5

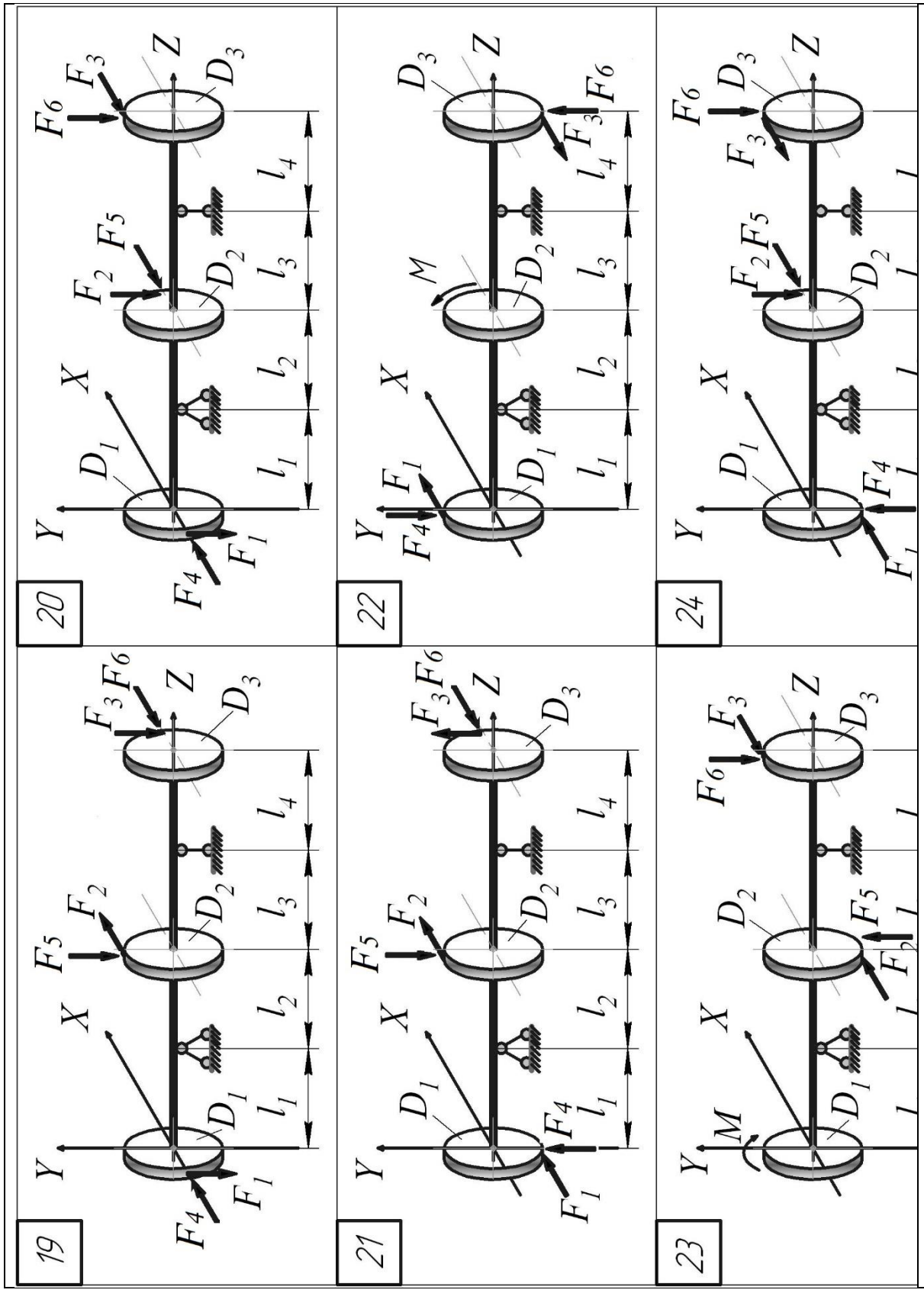


Продолжение Рис. 5



Продолжение Рис. 5

18



Продолжение Рис. 5

Примеры расчетов.

Пример 1.Растяжение-сжатие

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений для ступенчатого стержня

Дано: $F_1 = 0\ кН; F_2 = 40\ кН; F_3 = 60\ кН; F_4 = 40 кН\ ; F_5 = 60\ кН; F_6 = 40\ кН;$

$l_1 = 0\ м; l_2 = 1{,}0\ м; l_3 = 0{,}5\ м; l_4 = 1{,}5 м; l_5 = 0{,}8\ м; l_6 = 0{,}6\ м;$

$d_1 = 30\ ì\ ì\ ; d_2 = 20\ ì\ ì\ ; d_3 = 30\ ì\ ì\ ; E = 2 \cdot 10^5\ Ì\ \ Ï\ à; \sigma_T = 240 Ì\ \ Ï\ à.$

Пользуясь методом сечений, находим продольные силы на каждом участке.

$N_I = -F_2 = -40\ êÍ\ ;$

$N_{II} = F_3 - F_2 = 60 - 40 = 20\ êÍ\ ;$

$N_{III} = F_4 - F_2 + F_3 = 40 - 40 + 60 = 60\ êÍ\ ;$

$N_{IV} = F_4 - F_2 + F_3 - F_5 = 40 - 40 + 60 - 60 = 0\ êÍ\ ;$

$N_V = F_4 - F_2 + F_3 - F_5 + F_6 = 40 - 40 + 60 - 60 + 40 = 40\ êÍ\ .$

По полученным значениям строим эпюру N.

Определяем напряжения в сечениях каждого участка.

Значения продольной силы берём из эпюры N.

Определяем площади сечений, мм^2:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 30^2}{4} = 706{,}5;$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 20^2}{4} = 314;$$

$$A_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 30^2}{4} = 706{,}5.$$

Тогда напряжения, МПа:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-40 \cdot 10^3}{706{,}5} = -57;$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{314} = 64;$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_3} = \frac{60 \cdot 10^3}{314} = 191;$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IY}}{A_3} = \frac{0}{706{,}5} = 0;$$

$$\sigma_V = \frac{N_V}{A_3} = \frac{40 \cdot 10^3}{706{,}5} = 57.$$

По полученным данным строим эпюру нормальных напряжений σ.

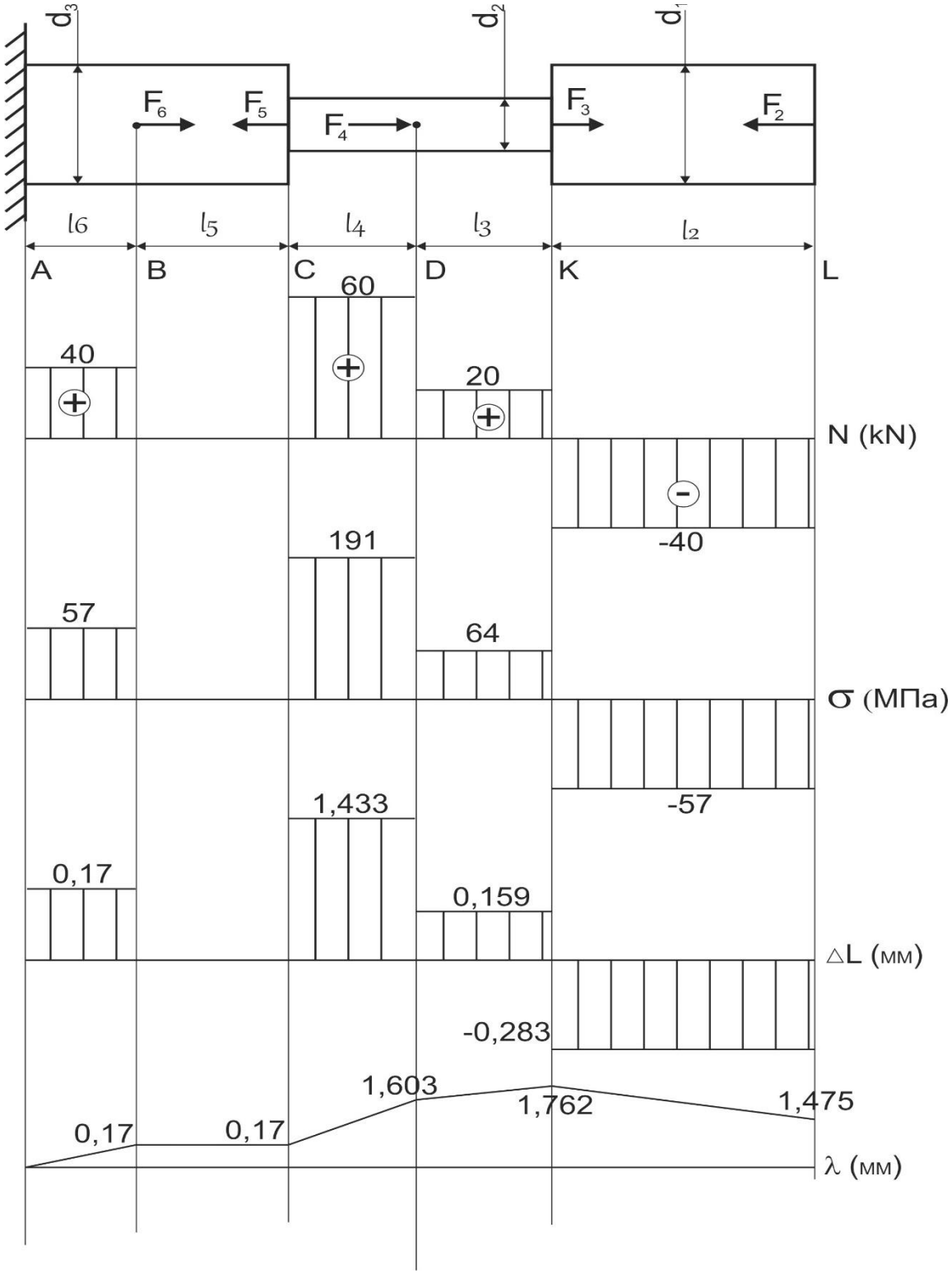


Рис.6

Максимальные напряжения возникают в сечении третьего участка

$\sigma_{\max} = \sigma_{III} = 191$ МПа

Следовательно, коэффициент запаса относительно границы текучести равняется

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{191} = 1,26.$$

Находим изменение длины каждого участка бруса, мм

$$\Delta l_I = \frac{N_I l_2}{EA_1} = \frac{-40\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^3}{2\cdot 10^5 \cdot 706,5} = -0,283;$$

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} l_3}{EA_2} = \frac{20\cdot 10^3 \cdot 0,5\cdot 10^3}{2\cdot 10^5 \cdot 314} = 0,159;$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} l_4}{EA_2} = \frac{60\cdot 10^3 \cdot 1,5\cdot 10^3}{2\cdot 10^5 \cdot 314} = 1,433;$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{N_{IV} l_5}{EA_3} = \frac{0\cdot 0,8\cdot 10^3}{2\cdot 10^5 \cdot 706,5} = 0;$$

$$\Delta l_V = \frac{N_V l_6}{EA_3} = \frac{40\cdot 10^3 \cdot 0,6\cdot 10^3}{2\cdot 10^5 \cdot 706,5} = 0,17.$$

Перемещение свободного конца бруса равняется сумме деформаций всех его участков, мм

$$\lambda = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} + \Delta l_V = -0,283 + 0,159 + 1,433 + 0 + 0,17 = 1,479.$$

Весь брус удлинился на 1,479 мм.

Построение эпюры перемещений.

Построение эпюры перемещений сечений бруса начинаем от закрепленного конца бруса,

последовательно складывая деформации отдельных участков, мм:

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \Delta l_{VI} = 0,17$$

$$\lambda_C = \Delta l_{VI} + \Delta l_V = 0,17 + 0 = 0,17$$

$$\lambda_D = \Delta l_{VI} + \Delta l_V + \Delta l_{IV} = 0,17 + 0 + 1,433 = 1,603$$

$$\lambda_K = \Delta l_{VI} + \Delta l_V + \Delta l_{IV} + \Delta l_{III} = 0,17 + 0 + 1,433 + 0,159 = 1,762$$

$$\lambda_L = \Delta l_{VI} + \Delta l_V + \Delta l_{IV} + \Delta l_{III} + \Delta l_{II} =$$
$$= 0,17 + 0 + 1,433 + 0,159 - 0,283 = 1,479.$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений.

Пример 2.Кручение.

По условиям прочности определить диаметры ступенчатого вала (Рис.7). Построить эпюры крутящих моментов, относительных углов закручивания и углов поворота вала.

Выполнить эскиз вала.

Дано:

ℓ_1=0,4 м; ℓ_2=0,1 м; ℓ_3=0,7 м;

M_1=300 Нм; M_2=400 Нм; M_3=220 Нм;

Допустимые касательные напряжения [τ]=25 МПа

Модуль упругости стали при сдвиге $G=8\cdot 10^4$ МПа

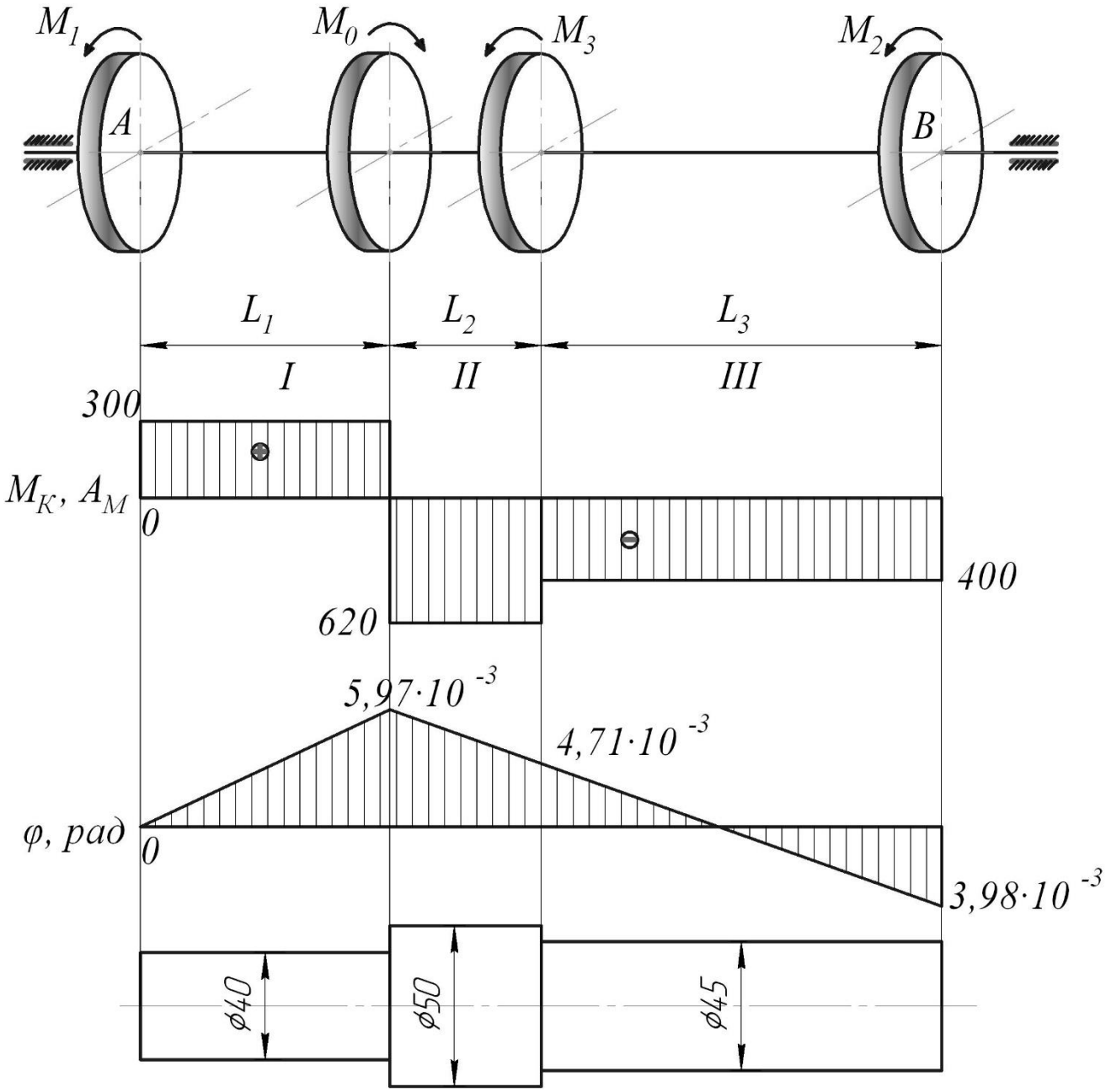


Рис.7

1. Построение эпюры крутящих моментов.

   Определяем крутящие моменты в сечениях

   $M_0=M_1+M_2+M_3=300+400+220=920$ Нм

   $M_{KI}=M_1=300$ Нм

   $M_{KII}=M_1-M_2=300-920=-620$ Нм

   $M_{KIII}=M_1-M_0+M_3=300-920+220=-400$ Нм

   Строим эпюру M_K

2. Определяем диаметр вала на каждом отрезке из условия прочности

$$\frac{M_K}{W_p} = \frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot d^3} \le [\tau];$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot [\tau]}}$$

$$d_I = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 25}} = 39{,}4 мм,$$ принимаем d_I=40мм

$$d_{II} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 620 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 25}} = 50{,}2 мм,$$ принимаем d_{II}=50мм

$$d_{III} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 25}} = 43{,}4 мм,$$ принимаем d_{III}=45мм

2. Изображаем эскиз вала.

3. Определяем углы закручивания каждого участка вала.

$$\varphi = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J_p} = \frac{32 \cdot M_K \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot d^4};$$ $G=8 \cdot 10^4$ МПа

$$\varphi_I = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3{,}14 \cdot 40^4} = 5{,}97 \cdot 10^{-3} рад$$

$$\varphi_{II} = -\frac{32 \cdot 620 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3{,}14 \cdot 50^4} = -1{,}26 \cdot 10^{-3} рад$$

$$\varphi_{III} = -\frac{32 \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 0{,}7 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3{,}14 \cdot 45^4} = -8{,}69 \cdot 10^{-3} рад$$

Строим эпюру углов закручивания.

Определяем углы поворота сечений вала.

Считаем сечение А неподвижным.

$\varphi_A=0$

$\varphi_{I-II}=\varphi_I=5{,}97 \cdot 10^{-3}$ рад

$\varphi_{II-III}=\varphi_I+\varphi_{II}=5{,}97 \cdot 10^{-3}-1{,}26 \cdot 10^{-3}=4{,}71 \cdot 10^{-3}$ рад

$\varphi_B=\varphi_I+\varphi_{II}+\varphi_{III}=5{,}97 \cdot 10^{-3}-1{,}26 \cdot 10^{-3}-8{,}69 \cdot 10^{-3}=-3{,}98 \cdot 10^{-3}$ рад

Строим эпюру углов поворота сечений.

Пример 3: Для консольной балки №1 определить прогиб и угол поворота на свободном конце (сечение *A*) методом Мора и способом Верещагина, если EJ – константа.

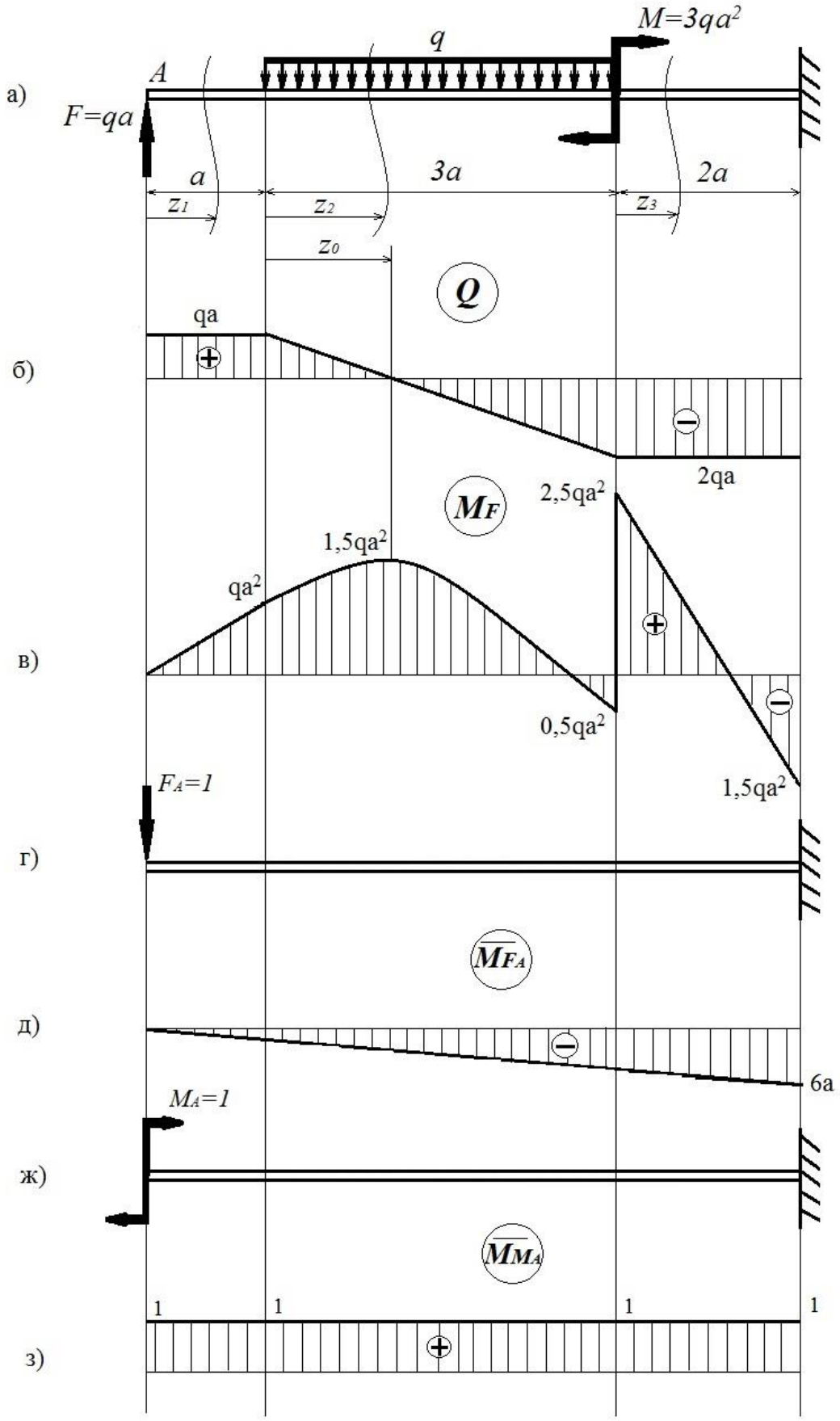


Рис. 8

Определение поперечных сил Q и изгибающих моментов M_F:

Балка имеет три участка (рис. 8, а). Определим функции Q и M_F на каждом из них и вычислим значения функций в характерных точках.

$$0 \le z_1 \le a$$
$$Q(z_1) = F = qa;$$
$$M_F(z_1) = Fz_1 = qaz_1;$$
$$M_F(0) = 0; \quad M_F(a) = Fa = qa^2;$$

$$0 \le z_2 \le 3a$$
$$Q(z_2) = F - qz_2 = qa - qz_2;$$
$$Q(0) = qa; \quad M_F(3a) = -2qa;$$

Значение Q изменяет знак. Определим точку экстремума функции M_F:

$$Q(z_2) = qa - qz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = a;$$
$$M_F(z_2) = F(a + z_2) - q\frac{z_2^{\,2}}{2} = qa^2 + qaz_2 - q\frac{z_2^{\,2}}{2};$$
$$M_F(0) = qa^2; \quad M_F(3a) = 4qa^2 - 4,5qa^2 = -0,5qa^2;$$

$$0 \le z_3 \le 2a$$
$$Q(z_3) = F - q3a = -2qa;$$
$$M_F(z_3) = F(4a + z_3) - q3a(1,5a + z_3) + M = 2,5qa^2 - 2qaz_3;$$
$$M_F(0) = 2,5qa^2; \quad M_F(2a) = -1,5qa^2.$$

По вычисленным результатам строим эпюры (рис. 8, б, в).

Определение прогиба и угла поворота сечения *A* методом Мора:

Так как рассматриваемая балка – прямолинейный брус постоянной жесткости при изгибе, то формула Мора может быть преобразована к следующему виду:

$$\Delta_{KF} = \frac{1}{EJ}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \overline{M}_K M_F dz,$$

где n – число участков балки.

Построим две вспомогательные системы нагруженные единичными усилиями $F_A = 1$ (рис. 8, г) и $M_A = 1$ (рис. 8, ж), прикладываем их по направлению искомых перемещений.

Запишем функции моментов $\overline{M_{F_A}}$ и $\overline{M_{M_A}}$ для вспомогательных систем на рассматриваемых ранее участках:

$0 \le z_1 \le a$

$\overline{M_{F_A}}(z_1) = -F_A z_1 = -z_1;$

$\overline{M_{M_A}}(z_1) = M_A = 1;$

$0 \le z_2 \le 3a$

$\overline{M_{F_A}}(z_2) = -F_A(a + z_2) = -a - z_2;$

$\overline{M_{M_A}}(z_2) = M_A = 1;$

$0 \le z_3 \le 3a$

$M_{F_A}(z_3) = -F_A(4a + z_3) = -4a - z_3;$

$M_{M_A}(z_3) = M_A = 1.$

Для определения прогиба сечения *A* подставим функции $\overline{M_{F_A}}$ и M_F в формулу Мора и проведем интегрирование по всем участкам:

$$y_A = \frac{1}{EJ}[\int_0^a (-z)(qaz)dz + \int_0^{3a} (-a - z)\left(qa^2 + qaz - q\frac{z^2}{2}\right)dz +$$

$$+\int_0^{2a} (-4a - z)\left(2,5qa^2 - 2qaz_3\right)dz] = \frac{qa^4}{EJ}(-\frac{1}{3} - 3 - 9 - \frac{9}{2} + \frac{81}{8} - 20 + 11 + \frac{16}{3}) =$$

$$= -\frac{qa^4}{EJ}10,375.$$

Знак минус указывает на то, что прогиб сечения направлен вверх.

Для определения угла поворота сечения *A* подставим функции $\overline{M_{M_A}}$ и M_F в формулу Мора и проведем интегрирование по всем участкам:

$$\theta_A = \frac{1}{EJ}[\int_0^a (1)(qaz)dz + \int_0^{3a} (1)\left(qa^2 + qaz - q\frac{z^2}{2}\right)dz +$$

$$+\int_0^{2a} (1)\left(2,5qa^2 - 2qaz_3\right)dz] = \frac{qa^3}{EJ}(\frac{1}{2} + 3 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 5 - 4) = \frac{qa^3}{EJ}4,5.$$

Определение прогиба и угла поворота сечения *A* способом Верещагина:

Вычисление интегралов Мора существенно упрощается, если одна из эпюр M_F или $\overline{M}_K$ прямолинейна. Такое условие всегда выполняется для систем, состоящих из прямых брусьев, так как при этом эпюры от единичной нагрузки (сосредоточенной силы или момента) всегда ограничены прямыми линиями. В таких случаях общая формула Мора определения перемещений преобразуется следующим образом:

$$\Delta_{KF} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i y_i}{EJ},$$

где ω_i – площадь эпюры M_F на i-ом участке; y_i – ордината эпюры $\overline{M}_K$ относительно центра тяжести площади ω_i.

Вычисление перемещений по этой зависимости носит название способа Верещагина.

Для определения перемещений сперва построим эпюры от действия единичных усилий F_A и M_A, для этого воспользуемся полученными ранее функциями. Эпюры представлены на рис. 8, д, з.

Перемножив эпюры M_F и $\overline{M_{F_A}}$, определим прогиб сечения *A*:

$$y_A = M_F \cdot \overline{M_{F_A}} = \frac{qa^4}{EJ}(-\frac{1}{3} + (-\frac{1}{8} - \frac{23}{12} - 2 - \frac{7}{3}) - \frac{22}{6}) = -\frac{qa^4}{EJ}10,374.$$

Перемножив эпюры M_F и $\overline{M_{M_A}}$, определим угол поворота сечения *A*:

$$\theta_A = M_F \cdot \overline{M_{F_A}} = \frac{qa^3}{EJ}[\frac{1}{2} + (\frac{1}{12} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + 1) + 1] = \frac{qa^3}{EJ}4,4999.$$

Так как некоторые участки эпюры M_F представляют собой фигуры, площади и центры тяжести которых определить затруднительно, в ходе расчета они разбивались на более простые составляющие.

Пример 4

Построить эпюры Q и M для балки 2 с поперечным сечением В (Рис.**4)**, нагруженной по схеме, которая приведена на рис. 10.

Определить:

- положение центра тяжести сечения ;
- момент инерции сечения относительно нейтральной оси X ;
- значения наибольших растягивающих напряжений и построить эпюру σ ;
- значение наибольших касательных напряжений и построить эпюру τ ;

Дано: M=50 кНм; q=30 кН/м; F=40 кН;

$l_1 = 0,6$ ì ; $l_2 = 1,0$ ì ; $l_3 = 1,0$ ì ; $l_4 = 0,5$ì ; $l_5 = 1,0$ ì ;

и

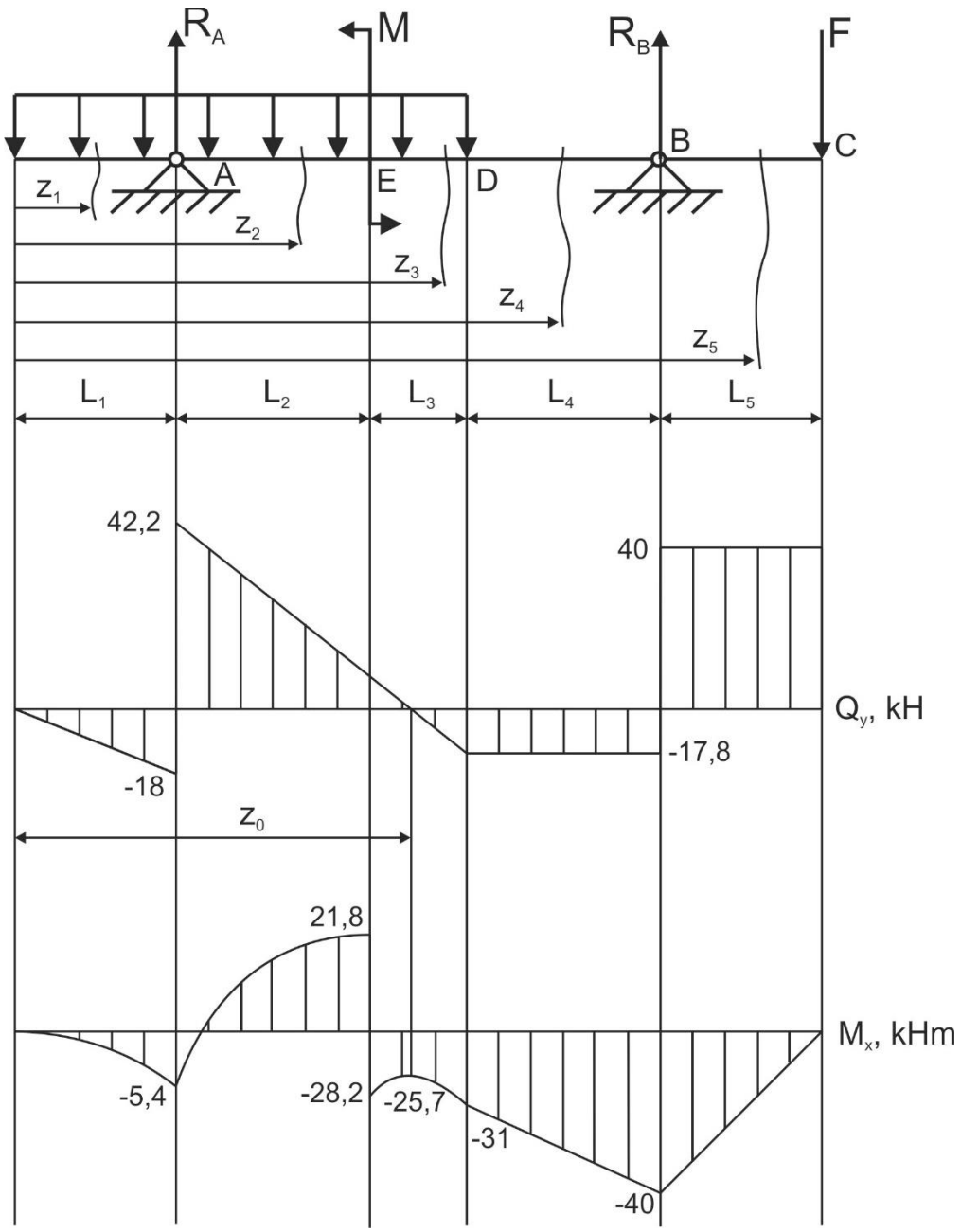


Рис.9
Эпюры Q_Y
M_X балки 2

Прежде всего определим опорные реакции

$$\Sigma M_A = 30 \cdot 2,6 \cdot 0,7 - 50 - R_B \cdot 2,5 + 40 \cdot 3,5 = 0;$$

$$R_B = 57,8 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = -30 \cdot 2,6 \cdot 1,8 + R_A \cdot 2,5 - 50 + 40 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = 60,2 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma F_Y = 0; \quad 60,2 - 30 \cdot 2,6 + 57,8 - 40 = 118 - 118 = 0.$$

Балка имеет пять участков.

В произвольных сечениях любого из них записываем выражения для Q и M, проверяя при этом, выполняется ли равенство $Q = dM / dz$, и вычисляем Q и M в характерных сечениях.

Для участка $KA(0 \le z \le 0,6 \text{ ì})$

$$Q(z) = -g \cdot z; \quad M(z) = -g \cdot \frac{z^2}{2};$$

$$Q_F = Q(0) = 0; \quad M_F = M(0) = 0;$$

$$Q_{\text{Aëºâ}} = Q(0,6) = -30 \cdot 0,6 = -18\ \text{êÍ};$$

$$M_{\text{A}} = M(0,6) = -\frac{30 \cdot 0,6^2}{2} = -5,4\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для участка $AE\left(0,6 \le z \le 1,6\ \text{м}\right)$

$$M(z) = -\frac{30 \cdot z^2}{2} + 60,2(z - 0,6);$$

$$Q_{\text{Апр}} = Q(0,6) = -30 \cdot 0,6 + 60,2 = 42,2\ \text{кН};$$

$$M_{\text{A}} = M(0,6) = -\frac{30 \cdot 0,6^2}{2} + 0 = -5,4\ \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_{\text{E}} = Q(1,6) = -30 \cdot 1,6 + 60,2 = 12,2\ \text{кН};$$

$$M_{\text{Еëåâ}} = M(1,6) = -\frac{30 \cdot 1,6^2}{2} + 60,2(1,6 - 0,6) = 21,8\ \text{êÍ} \cdot \text{ì}.$$

Для участка $ED\left(1,6\ \text{м} \le z \le 2,6\ \text{м}\right)$

$$Q(z) = -30 \cdot z + 60,2; \quad M(z) = -\frac{30 \cdot z^2}{2} + 60,2(z - 0,6) - 50;$$

$$Q_{\text{E}} = Q(1,6) = -30 \cdot 1,6 + 60,2 = 12,2\ \text{кН};$$

$$M_{\text{Епр}} = M(1,6) = -\frac{30 \cdot 1,6^2}{2} + 60,2(1,6 - 0,6) - 50 = -28,2\ \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_{\text{D}} = Q(2,6) = -30 \cdot 2,6 + 60,2 = -17,8\ \text{кН};$$

$$M_{\text{D}} = M(2,6) = -\frac{30 \cdot 2,6^2}{2} + 60,2(2,6 - 0,6) - 50 = -31\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для участка $DB\left(2,6\ \text{м} \le z \le 3,1\ \text{м}\right)$

$$Q(z) = -30 \cdot 2,6 + 60,2 = -17,8\ \text{кН};$$

$$M(z) = -30 \cdot 2,6 \cdot (z - 1,3) + 60,2(z - 0,6) - 50;$$

$$M_{\text{D}} = M(2,6) = -30 \cdot 2,6 \cdot (2,6 - 1,3) + 60,2 \times$$

$$\times (2,6 - 0,6) - 50 = -31\ \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{B}} = M(3,1) = -30 \cdot 2,6(3,1 - 1,3) + 60,2 \times = -17,8\ \text{кН};$$

$$\times (3,1 - 1,3) - 50 = -40\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для участка $BC\left(3,1\ \text{м} \le z \le 4,1\ \text{м}\right)$

$$Q(z) = -30 \cdot 2,6 + 60,2 + 57,8 = 40\ \text{кН};$$

$$M(z) = -30 \cdot 2,6 \cdot (z - 1,3) + 60,2(z - 0,6) - 50 + 58,8(z - 3,1);$$

$$M_{\text{B}} = M(3,1) = -40\ \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{C}} = M(4,1) = 0.$$

Построив по этим данным эпюру Q, видим, что в некотором сечении z_0 на участке ED усилия Q равняется нулю, а итак, там касательная к эпюре M будет горизонтальной. Для построения эпюры M необходимо еще вычислить ординату $M(z_0)$.

Воспользовавшись выражением $Q(z)$ на участке ED, находим z_0 из условия

$$Q(z_0) = -30 \cdot z_0 + 60,2 = 0.$$

Откуда

$$z_0 = \frac{60,2}{30} = 2,01\,\text{м}.$$

Тогда

$$M\left(z_0\right) = -\frac{30\cdot 2,01^2}{2} + 60,2\left(2,01-0,6\right) - 50 = -25,7\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру M (Рис.9).

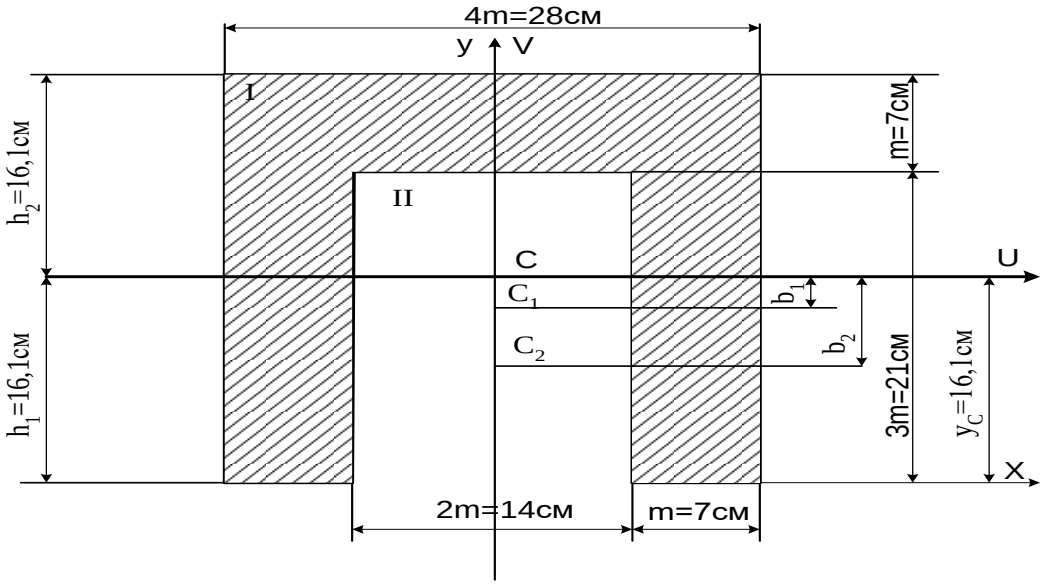


Рис.10 Сечение балки **“В”**

Задано сечение балки **“В”.** Сечение имеет одну ось симметрии, значит, она и будет одной из главных центральных осей “V”.

Сечение представляет собой прямоугольник I площадью-A_1= 28×28 см^2, от которого отрезан прямоугольник площадью A_2= 14×21см^2.

Определяем центры тяжести C_1 и C_2 отдельных частей I и II на осиY.

$$y_1 = 14см;\ \ y_2 = 10,5см;$$

площади прямоугольников:

$$\mathrm{A}_1 = 28\cdot 28 = 784см^3;\ \mathrm{A}_2 = 14\cdot 21 = 294см^2$$

Вычисляем ординату центра тяжести С сечения.

$$y_C = \frac{\mathrm{A}_1 y_1 - \mathrm{A}_2 y_2}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2} = \frac{784\cdot 14 - 294\cdot 10,5}{784-294} = 16,1см;$$

Обозначаем на схеме центр тяжести С сечения и проводим вторую главную центральную ось U. Это и есть центральная ось сечения.

Находим расстояния h_1=16,1см; h_2=11,9см; наиболее отдалённых от оси U точек сечения.

Тогда расстояния от нейтральной оси до центров тяжести сечений I и II будут равны:

$$b_1 = 16,1 - 14 = 2,1см; \qquad b_2 = 16,1 - 10,5 = 5,6см;$$

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси найдём по теореме про моменты инерции относительно параллельных осей (для прямоугольника $I_x = \frac{bh^3}{12}$.)

$$I_X = \left(\frac{28\cdot 28^3}{12} + 28\cdot 28\cdot 2,1^2\right) - \left(\frac{14\cdot 21^3}{12} + 14\cdot 21\cdot 5,6^2\right) = 34654,4\tilde{n}\grave{\imath}^{\ 4}$$

Согласно эпюре М наибольшее растягивающее напряжение возникает в низших точках сечения В

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_X} \cdot h_1;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 161}{34654,4 \cdot 10^4} = 18,6 \text{ Н/мм}^2$$

Максимальное сжимаемое напряжение в этом сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_X} h_2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{-40 \cdot 10^6 \cdot 119}{34654,4 \cdot 10^4} = -13,7 \frac{\text{Н}}{\text{ì ì}^2}$$

Наибольшие касательные напряжения находим по формуле Журавского:

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\text{Н}}}{I_X b};$$

Тут: $Q = Q_{\max} = 42,2$ кН;

$b = 2m = 14$ см; - ширина сечения по нейтральной оси.

$S_{\text{Н}}$- статический момент части сечения с одной из сторон нейтральной оси относительно этой оси.

Находим: $S_{\text{Н}} = h_2 \cdot 4 \cdot m \cdot \frac{h_2}{2} - (h_2 - m) \cdot 2m \frac{h_2 - m}{2};$

$$S_{\text{Н}} = 11,9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{11,9}{2} - (11,9 - 7) \cdot 14 \cdot \frac{11,9 - 7}{2} = 1814,5 \text{ см}^3$$

тогда $\tau_{\max} = \frac{42,2 \cdot 10^3 \cdot 1814,5 \cdot 10^3}{34654,4 \cdot 10^4 \cdot 140} = 1,6$ Н/мм^2

Изображаем характер эпюры σ и τ в сечении.

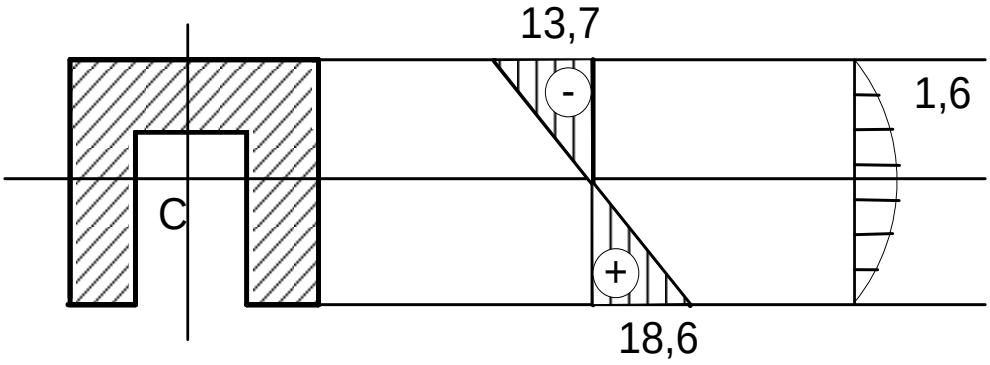


Рис.11 Эпюры нормальных и касательных напряжений.

Пример 5.Балка 3

Подобрать разные варианты сечений и сравнить их между собой для балки 3, если максимальный сгибающий момент M max=20 кНм, максимальная поперечная сила Q_Y=30 кН. Для двутаврового сечения определить нормальные и касательные напряжения.
Подбор сечений производится из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X_{\max}}}{W_X} \le [\sigma];$$

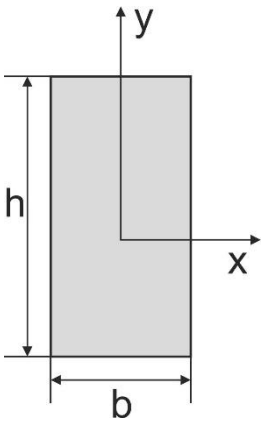
Вычислим расчетное значение момента сопротивления

$$W_X \ge \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6} = 100 \text{ см}^3.$$

По расчётному значению момента сопротивления принимаем согласно ПРИЛОЖЕНИЯ двутавр № 16 соледующими геометрическими характеристиками:

$$I_x = 873 \text{ см}^4, W_x = 109 \text{ см}^3; A = 20,2 \text{ см}^2.$$

$$S_{X_{\max}} = 623 \text{ см}^3, h = 16 \text{ см}; d = 5 \text{ мм}; t = 7,8 \text{ мм}; b = 81 \text{ мм},$$



Для сечения показанного на рисунке $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$

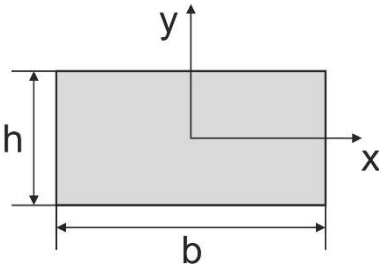
если $\frac{h}{b} = 2,$ тогда

$$W_X = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = 100 \text{ см}^3 \text{ и}$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 100} = 10,6 \text{ см},$$

Принимаем $h = 11$ см, тогда $b = 5,5$ см.

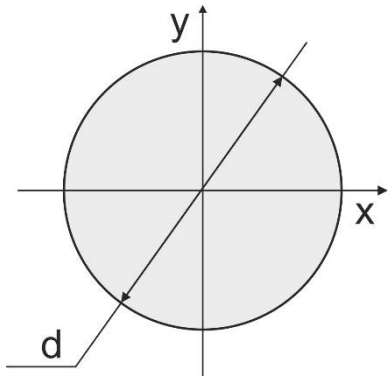
и $A = b \times h = 60,5$ см^2.



При $\frac{h}{b} = \frac{1}{2}, W_X = \frac{2h \cdot h^2}{6} = 100 \text{ см}^3,$

$h = \sqrt[3]{3 \cdot 100} = 6,7$ см, $b = 13,4$ см.

$A = b \times h = 90$ см^2.

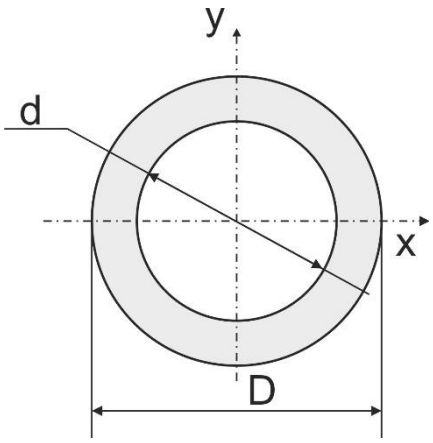


Для круга

$$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 = 100 \text{ см}^3,$$

$$d = \sqrt[3]{10 \cdot 100} = 10 \text{ см}.$$

$$A = \pi d^2 / 4 = 78,5 \text{ см}^2.$$



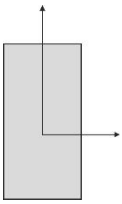
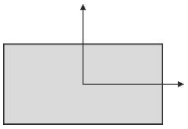
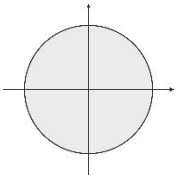
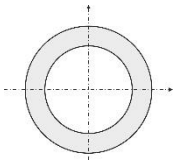
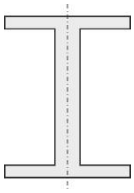
$$W_X = \frac{\pi \cdot D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right) \approx 0{,}1D^3\left(1-\alpha^4\right) = 100\ \text{см}^3,$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 100}{\left(1-0{,}8^4\right)}} = 12\ \text{см},$$

$$d = \alpha D = 0{,}8 \cdot 12 = 9{,}6\ \text{см}.$$

$$A = \pi D^2\left(1-\alpha^2\right)/4 = 40\ \text{см}^2,$$

Выполним сравнительный анализ рациональности подобранных сечений:

					
A, см^2	60,5	90	78,5	40	20,2
A_i / A_I	3	4,45	3,9	1,98	1

Из сравнения видно, что рациональной формой сечения балки является двутавровое сечение.

Определим нормальные и касательные напряжения для балки двутаврового сечения

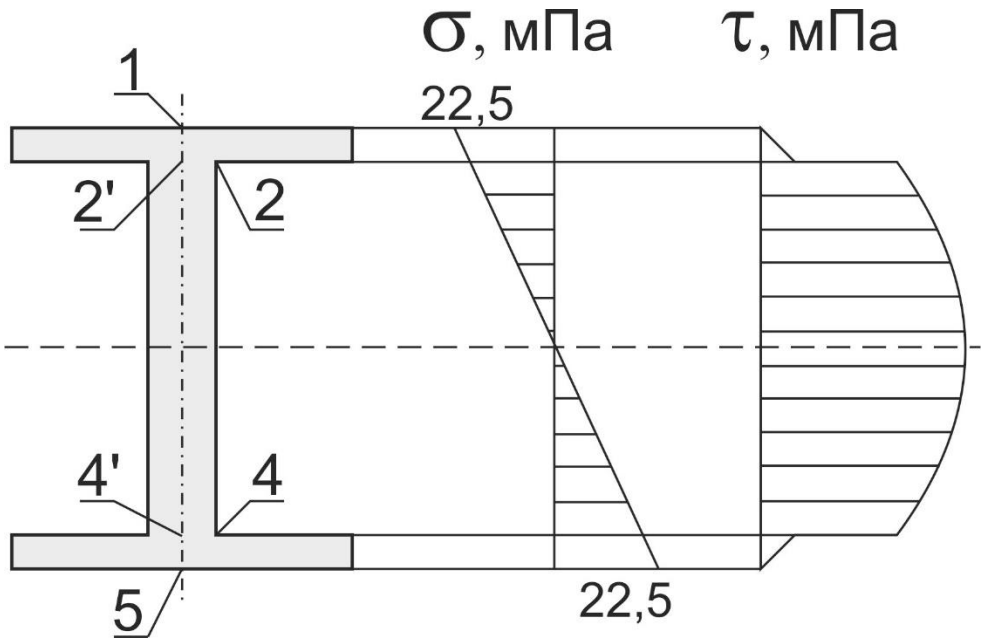


Рис.12 Эпюры нормальных и касательных напряжений в двутавровой балке.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X_{\max}}}{W_X} = \frac{20 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 183 \text{ Ì Ï à};$$

$$\tau_{1,5} = 0;$$

$$\tau_{2',4'} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}51 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 33 \text{ Ì Ï à};$$

$$\tau_{2,4} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}51 \cdot 10^{-2}}{81 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 2 \text{ Ì Ï à};$$

$$\tau_3 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 62{,}3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 43 \text{ Ì Ï à}.$$

Пример расчета на прочность при совместном действии изгиба с кручением.

Пример 6 (Табл.5 рис.5,)**:** Для вала постоянного круглого поперечного сечения с тремя насаженными прямозубыми цилиндрическими колесами диаметрами D_1, D_2, D_3 (рис.13, а) необходимо:

1) Построить эпюры изгибающих моментов от усилий которые действуют в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также эпюру суммарных изгибающих моментов.
2) Построить эпюру крутящих моментов.
3) В опасном сечении определить эквивалентный момент по IV-ой теории прочности и подобрать диаметр вала при условии, что предел текучести материала $\sigma_T = 240$ мПа, коэффициент запаса $n_T = 2$.

Дано: $F_1 = 20$ kH; $F_2 = 10$ kH; $F_3 = 30$ kH;
$F_4 = 10$ kH; $F_5 = 15$ kH; $F_6 = 40$ kH;
$\ell_1 = 10$ см; $\ell_2 = 30$ см; $\ell_3 = 20$ см; $\ell_4 = 15$ см;
$D_1 = 6$ см; $D_2 = 12$ см; $D_3 = 6$ см.

Изгиб в вертикальной плоскости (*YOZ*) (рис. 13, б)

Определение реакций в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$

$$F_1\ell_1 + F_4\ell_2 + F_6\left(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right) - R_B^Y\left(\ell_2 + \ell_3\right) = 0;$$

$$R_B^Y = \frac{F_1\ell_1 + F_4\ell_2 + F_6\left(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right)}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{20 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}65}{0{,}5} = 62 \text{ kH}.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$F_1\left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3\right) - F_4\ell_3 + F_6\ell_4 - R_A^Y\left(\ell_2 + \ell_3\right) = 0;$$

$$R_A^Y = \frac{F_1\left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3\right) - F_4\ell_3 + F_6\ell_4}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{20 \cdot 0{,}6 - 10 \cdot 0{,}2 + 40 \cdot 0{,}15}{0{,}5} = 32 \text{ kH}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad -F_1 + R_A^Y + F_4 - R_B^Y + F_6 = -20 + 32 + 10 - 62 + 40 = 0$

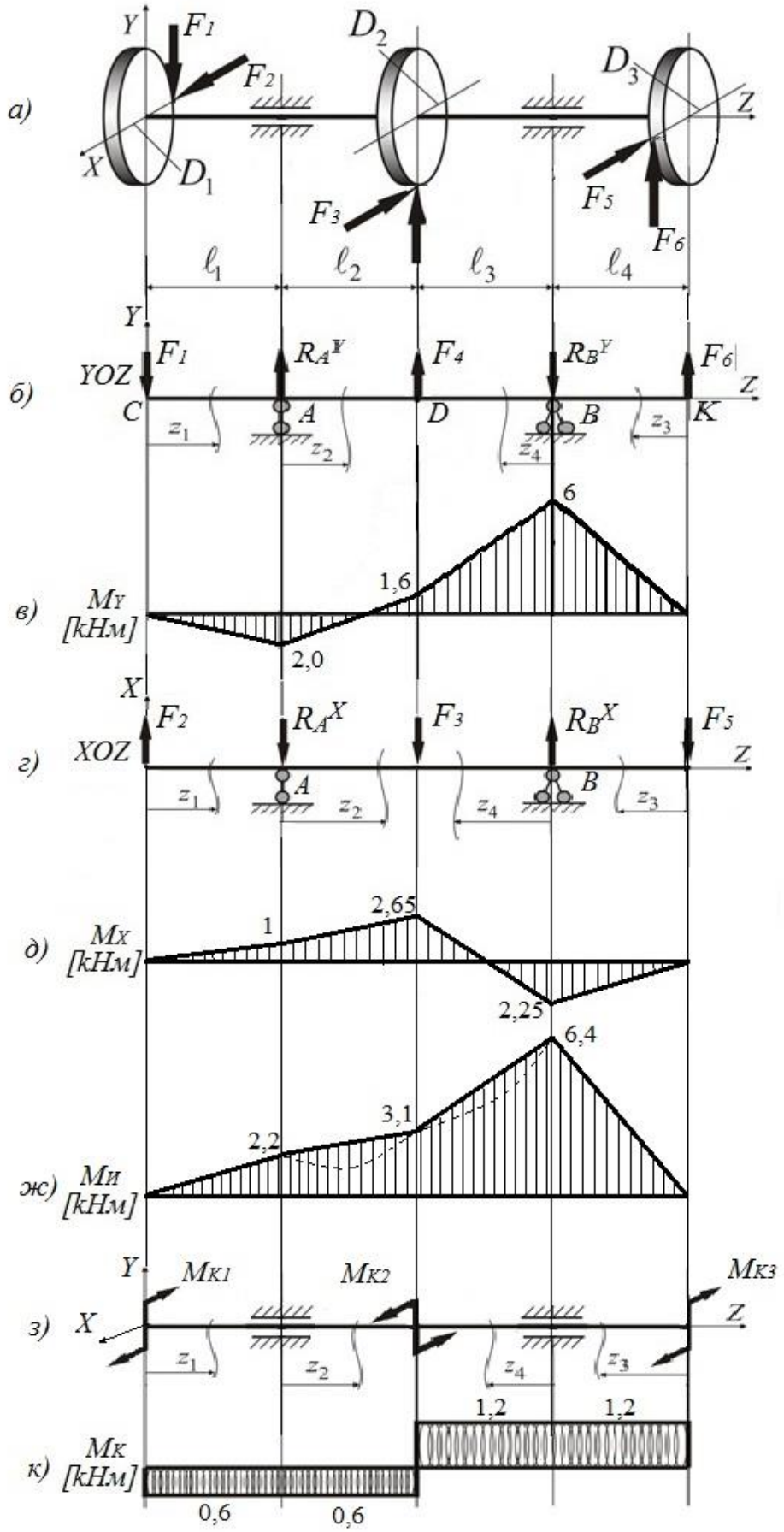

а)
Y
F1
F2
D2
D3
Z
X
D1
F3
F5
F6
ℓ1
ℓ2
ℓ3
ℓ4
б)
Y
YOZ
F1
RAY
F4
RBY
F6
Z
C
A
D
B
K
z1
z2
z4
z3
в)
MY
[kНм]
6
1,6
2,0
г)
X
XOZ
F2
RAX
F3
RBX
F5
Z
A
B
z1
z2
z4
z3
д)
MX
[kНм]
1
2,65
2,25
ж)
Mи
[kНм]
6,4
3,1
2,2
з)
Y
X
Mк1
Mк2
Mк3
Z
z1
z2
z4
z3
к)
Mк
[kНм]
1,2
1,2
0,6
0,6

Рис. 13.

Построение эпюры изгибающих моментов M_Y (рис. 13, в):

$$0 \le z_1 \le \ell_1$$
$$M_Y(z_1) = -F_1 z_1;$$
$$M_Y(0) = 0; \quad M_Y(\ell_1) = -F_1\ell_1 = -20 \cdot 0{,}1 = -2{,}0 \text{ кНм};$$

$$0 \le z_2 \le \ell_2$$
$$M_Y(z_2) = -F_1(\ell_1 + z_2) + R_A^Y z_2;$$
$$M_Y(0) = -F_1\ell_1 = -2{,}0 \text{ кНм};$$
$$M_Y(\ell_2) = -F_1(\ell_1 + \ell_2) + R_A^Y \ell_2 = -20 \cdot 0{,}4 + 32 \cdot 0{,}3 = 1{,}6 \text{ кНм};$$

$$0 \le z_3 \le \ell_4$$
$$M_Y(z_3) = F_6 z_3;$$
$$M_Y(0) = 0; \quad M_Y(\ell_4) = F_6\ell_4 = 40 \cdot 0{,}15 = 6 \text{ кНм};$$

$$0 \le z_4 \le \ell_3$$
$$M_Y(z_4) = F_6(\ell_4 + z_4) - R_B^Y z_4;$$
$$M_Y(0) = F_6\ell_4 = 6 \text{ кНм};$$
$$M_Y(\ell_3) = F_6(\ell_4 + \ell_3) - R_B^Y \ell_3 = 40 \cdot 0{,}35 - 62 \cdot 0{,}2 = 1{,}6 \text{ кНм};$$

Изгиб в горизонтальной плоскости (*XOZ*) (рис. 13, г)
Определение реакций в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$
$$-F_2\ell_1 - F_3\ell_2 - F_5(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4) + R_B^X(\ell_2 + \ell_3) = 0;$$
$$R_B^X = \frac{F_2\ell_1 + F_3\ell_2 + F_5(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{10 \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}65}{0{,}5} = 39{,}5 \text{ kH}.$$
$$\sum M_B = 0;$$
$$-F_2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + F_3\ell_3 - F_5\ell_4 + R_A^X(\ell_2 + \ell_3) = 0;$$
$$R_A^X = \frac{F_2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - F_3\ell_3 + F_5\ell_4}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{10 \cdot 0{,}6 - 30 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}15}{0{,}5} = 4{,}5 \text{ kH}.$$

Проверка: $\sum X = 0; \quad F_2 - R_A^X - F_3 + R_B^X - F_5 = 10 - 4{,}5 - 30 + 39{,}5 - 15 = 0$

Построение эпюры изгибающих моментов M_X (рис. 13, д):

$0 \le z_1 \le \ell_1$

$M_X(z_1) = F_2 z_1;$

$M_X(0) = 0;$

$M_X(\ell_1) = F_2 \ell_1 = 10 \cdot 0{,}1 = 1$ kНм.

$0 \le z_2 \le \ell_2$

$M_X(z_2) = F_2(\ell_1 + z_2) - R_A^X z_2;$

$M_X(0) = F_2 \ell_1 = 1$ kНм;

$M_X(\ell_2) = F_2(\ell_1 + \ell_2) - R_A^X \ell_2 = 10 \cdot 0{,}4 - 4{,}5 \cdot 0{,}3 = 2{,}65$ kНм.

$0 \le z_3 \le \ell_4$

$M_X(z_3) = -F_5 z_3;$

$M_X(0) = 0;$

$M_X(\ell_4) = -F_5 \ell_4 = -15 \cdot 0{,}15 = -2{,}25$ kНм.

$0 \le z_4 \le \ell_3$

$M_X(z_4) = -F_5(\ell_4 + z_3) + R_B^X z_4;$

$M_X(0) = -F_5 \ell_4 = -2{,}25$ kНм;

$M_X(\ell_3) = -F_5(\ell_4 + \ell_3) + R_B^X \ell_3 = -15 \cdot 0{,}35 + 39{,}5 \cdot 0{,}2 = 2{,}65$ kНм.

Построение эпюры суммарных изгибающих моментов (рис. 1, ж):

$M_И = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$

$M_И(C) = 0;$

$M_И(A) = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = 2{,}2$ kНм;

$M_И(D) = \sqrt{(1{,}6)^2 + (2{,}65)^2} = 3{,}1$ kНм;

$M_И(B) = \sqrt{(6)^2 + (-2{,}25)^2} = 6{,}4$ kНм;

$M_И(K) = 0.$

На участках где M_X и M_Y изменяются по различным законам эпюра изгибающих моментов не линейна. Для упрощения построения эпюры моменты вычисляются в отдельных характерных точках, и участки эпюр между этими точками аппроксимируются прямолинейными отрезками.

Кручение (рис. 13, з)

Приведение сил к крутящим моментам:

$$M_{K1} = F_1 \frac{D_1}{2} = 20 \cdot 0,03 = 0,6 \text{ kНм}$$

$$M_{K2} = F_3 \frac{D_2}{2} = 30 \cdot 0,06 = 1,8 \text{ kНм}$$

$$M_{K3} = F_6 \frac{D_3}{2} = 40 \cdot 0,03 = 1,2 \text{ kНм}$$

Проверка равновесия вала:

$$\sum M_Z = 0; \quad -M_{K1} + M_{K2} - M_{K3} = -0,6 + 1,8 - 1,2 = 0$$

Построение эпюры крутящих моментов M_K (рис. 1, к):

$$0 \le z_1 \le \ell_1 \quad M_K(z_1) = -M_{K1} = -0,6 \text{ kНм};$$

$$0 \le z_2 \le \ell_2 \quad M_K(z_2) = -M_{K1} = -0,6 \text{ kНм};$$

$$0 \le z_3 \le \ell_4 \quad M_K(z_3) = M_{K3} = 1,2 \text{ kНм};$$

$$0 \le z_4 \le \ell_3 \quad M_K(z_4) = M_{K3} = 1,2 \text{ kНм}.$$

Определение опасного сечения вала:

Эквивалентные моменты в сечениях по IV-ой теории прочности:

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_И^2 + 0,75 M_K^2}$$

$$M_{экв}^{IV}(C) = \sqrt{0,75 \cdot 0,6^2} = 0,52 \text{ kНм};$$

$$M_{экв}^{IV}(A) = \sqrt{2,2^2 + 0,75 \cdot 0,6^2} = 2,26 \text{ kНм};$$

$$M_{экв}^{IV}(D) = \sqrt{3,1^2 + 0,75 \cdot 1,2^2} = 3,27 \text{ kНм}.$$

$$M_{экв}^{IV}(B) = \sqrt{6,4^2 + 0,75 \cdot 1,2^2} = 6,48 \text{ kНм}.$$

$$M_{экв}^{IV}(K) = \sqrt{0,75 \cdot 1,2^2} = 1,04 \text{ kНм}.$$

$M_{экв\,\max}^{IV} = M_{экв}^{IV}(B) = 6,48$ kНм. – опасное сечение *B*.

Определение диаметра вала из условия прочности:

Допустимое напряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}} = \frac{240}{2{,}0} = 120 \text{ МПа}.$$

Условие прочности согласно IV теории имеет вид:

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma_И^2 + 3\tau_К^2} = \sqrt{\left(\frac{M_И}{W_X}\right)^2 + 3\left(\frac{M_К}{W_P}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{M_И^2 + 0{,}75 M_К^2}}{W_X} = \frac{M_{экв\,\max}^{IV}}{W_X} \le [\sigma].$$

Необходимый диаметр вала находим по формуле:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв\,\max}^{IV}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}48 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0{,}0819 \text{ м}.$$

Ближайшее стандартное значение – $d = 85$ мм.

ПРИЛОЖЕНИЕ.
Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72

Таблица

Номер дву-тавра	Размеры, мм				Пло-щадь сече-ния, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные величины для оси $x-x$		
	h	b	s	t			I_x, см^4	W_x, см^3	S_x, см^3
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	23,0
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	33,7
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	46,8
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	62,3
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	81,4
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	89,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	104,0
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	114,0
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	131,0
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	143,0
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	163,0
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	178,0
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	210,0
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	229,0
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	268,0
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	292,0
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	339,0
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	423,0
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	545,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	708,0
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	919,0
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	1181,0
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76806	2560,0	1491,0

Література

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів: Підручник. −К.: Вища школа, 2004.−655 с.: іл.
2.
3.