УДК 621.313.322

В.С. Шпатенко, аспирант, В.И. Милых, д-р техн. наук., В.В. Кузьмин, д-р техн. наук

Национальный технический университет

«Харьковский политехнический институт»

# ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

В статье приведен обзор современных методов расчета электродинамических сил в электротехнических устройствах.

**Ключевые слова**: электротехнические устройства, электродинамические силы, методы расчета.

В современной практике подавляющее большинство электрических машин всех типов относятся к классу «индуктивных», действие которых основано на законе электромагнитной индукции. Силовые взаимодействия в активной зоне таких машин является неотъемлемой особенностью процесса преобразования энергии. Их расчет основывается на силовом взаимодействии контуров электрического тока всех видов [1].

Исторически Амперу принадлежит первая формулировка его закона в дифференциальной форме, согласно которому сила взаимодействия двух элементов проводников с током составляет:

$$d\overrightarrow{F_{12}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left(d\overline{l_2} \times \left(d\bar{l}_1 \times \bar{r}\right)\right), \tag{1}$$

где $r$ – радиус-вектор, направленный от первого элемента ко второму, $d\bar{l}_1$ и $d\overline{l_2}$ – элементы длины данных проводников с токами $I_1$ и $I_2$.

Уже самого Ампера тревожило то обстоятельство, что выражение (1) несимметрично относительно взаимодействующих элементов, вследствие чего для них нарушается третий закон Ньютона, когда в ряде случаев (например, для перпендикулярно расположенных элементов) силы не равны:

$$d\overrightarrow{F_{12}} \neq d\overrightarrow{F_{21}} \tag{2}$$

В этой связи Ампер ввел в рассмотрение «симметрированный» закон электромагнитного взаимодействия

$$d\overrightarrow{F_{12}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left(-2\left(d\bar{l}_1 \times d\bar{l}_2\right)\bar{r} + \frac{3}{r^2}\left(d\bar{l}_1 \times \bar{r}\right)\left(d\bar{l}_2 \times \bar{r}\right)\bar{r}\right), \tag{3}$$

который устраняет дефект метода (1) в части нарушения третьего закона Ньютона, но, как отмечает ряд авторов, приводит к результатам, не соответствующим эксперименту. В частности, для бесконечно длинных параллельных проводников дает удельную силовую нагрузку $\sigma$ в два раза большую, чем по классическому закону (1):

$$\sigma = \frac{dF_{12}}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{2I^2}{d} \qquad (4)$$

где $d$ – расстояние между проводниками.

В электродинамике принято обходить эти трудности, доказывая, что при взаимодействии между контурами с током (электрический заряд также представляет собой токовый контур) принцип «равенства действия и противостояния» соблюдается, поэтому нет смысла в отступлении от классического (1), ибо в целом по контуру закон (3) дает те же самые значения сил.

Вскоре после появления закона (1) была предложена зависимость, определяющая напряженность магнитного поля $\overline{dH}$ элемента тока $I\overline{dl}$ на расстоянии $r$ от него:

$$\overline{dH} = \frac{1}{4\pi r^3}\left(\overline{dl} \times \bar{r}\right), \qquad (5)$$

которая получила название закона Био-Савара-Лапласа.

По существу, последнее выражение есть лишь форма представления внутреннего векторного произведения в законе Ампера (1), но оно позволяет перейти к «полевому» представлению влияния первого элемента.

Обобщенную формулу для силы, действующего на частицу с зарядом $q$, движущуюся со скоростью $\bar{v}$ с индукцией $\overline{B}$, дал Лоренц:

$$\overline{dF} = q\left(\bar{v} \times \overline{B}\right), \qquad (6)$$

что в случае воздействия магнитного поля на элемент тока $\mathrm{I_2 d\overline{l_2}}$ преобразуется в

$$\overline{dF}_{12} = I_2 d\bar{l}_2 \times \overline{B}, \qquad (7)$$

С использованием последнего соотношения можно, например, показать, что в случае, когда поле источника создается замкнутым контуром $l$ законы (1) и (5) становятся эквивалентными:

$$\overline{dF}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left(d\bar{l}_2 \times \int_l \left(d\bar{l}_1 \times \bar{r}\right)\right) = \mu_0 I_2 d\bar{l}_2 \times \overline{B}. \qquad (8)$$

Если же задачей расчета является анализ взаимодействия элементов одного и того же контура, то по причинам, изложенным в [2], закон Лоренца теряет эту эквивалентность.

Классический арсенал дифференциальных законов может быть дополнен методом магнитных натяжений, разработанным Максвеллом, но он пригоден только для расчета сил, действующих на ферримагнитное тело в магнитном поле воздушного зазора [3].

В связи с отмечавшейся некоторыми авторами «неуниверсальностью» перечисленных выше классических законов, они выдвигали альтернативные варианты законов силового взаимодействия, которые в той или иной мере позволяли [4]:

– соблюсти третий закон Ньютона;

– избежать расходимостей при расчетах сил в плоских контурах;

– разрешить ряд парадоксов.

– модифицированный закон Ампера по Николаеву с использованием векторного магнитного потенциала $\overline{A}$ [5]:

$$\overline{dF}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left(d\bar{l}_2 \times \left(d\bar{l}_1 \times \bar{r}\right)\right) - I_2 div\overline{A}\left(I_1 \times d\overline{I}_1\right) \times d\overline{I}_2; \tag{9}$$

– модифицированный закон Ампера по нашим предположениям [6]:

$$\overline{dF}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{8\pi r^3}\begin{bmatrix} d\overline{I}_2 \times \left(d\overline{I}_1 \times \bar{r}\right) + \\ + d\overline{I}_1 \times \left(d\overline{I}_2 \times \bar{r}\right) \end{bmatrix}; \tag{10}$$

– закон Лоренца-Маринова

$$\begin{gathered} \overline{dF}_{12} = q_2 \overline{E}_1 - q_2 \frac{\partial \overline{A}_1}{\partial t} + q_2\left(\bar{v}_2 \times rot\overline{A}\right) - q_2 \bar{v}_2 div\frac{\overline{A}}{2} - \\ \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \dfrac{q_2}{2v_2^2 r^3} \times \\ \times \displaystyle\int_V \left(q_1 \bar{v}_1 \times \bar{v}_2\right)\left(\bar{r} \times \bar{v}_2\right) \end{pmatrix} - \bar{v}_2 \frac{q_2}{2v_2^2 r^3}\int_V \left(q_1 \bar{v}_1 \times \bar{v}_2\right)\left(\bar{r} \times \bar{v}_2\right), \end{gathered} \tag{11}$$

где $q_1$ и $q_2$ – заряды в объеме $V$; $v_1$ и $v_2$ – скорости их движения;

И наконец, соотношение, основанное на расширении сферы применения известного закона

$$\overline{dF}_{12} = q_2 \overline{E}_1 = -q_2 \frac{\partial \overline{A}_1}{\partial t} \tag{12}$$

за счет перехода от частной к общей производной во времени, которая включает в себя вектор-градиент поля $\overline{A}$ в направлении движения заряда $q_2$ со скоростью $v_2$ [7]

$$\overline{dF}_{12} = q_2 \overline{E}_1 = q_2 \frac{d\overline{A}_1}{dt} = q_2 \left[ \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \left( \overline{v}_2 grad \right) \overline{A} \right]. \tag{13}$$

Выполненный в [4] теоретический анализ эффективности перечисленных выше подходов к расчету силовых взаимодействий во внешнем поле бесконечно длинного (кольцевого) соленоида показал, что в отличие от классических законов ненулевые результаты дают только некоторые альтернативные варианты дифференциальных законов.

Правомерность «альтернативных» подходов и их применимость к решению прикладных задач современного электромашиностроения требовала экспериментальной апробации.

Для этих целей было принято повторить опыт №29 [5], где, согласно утверждению автора, « две расположенные на одной оси тороидальные обмотки с магнитопроводом при наличии однонаправленных магнитных потоков в них испытывают силы продольного притяжения вместо ожидаемого отталкивания ( при допущении наличия в пространстве около них магнитных полей рассеяния)».

В нашем варианте опыта использовались два одинаковых обмотанных тороида с магнитопроводом прямоугольного поперечного сечения 14х20 мм$^2$ и диаметром по центральной части 114 мм. Один из тороидов был закреплен на стойке, а второй – на подвижной платформе.

Аналогичный опыт был проведен в Институте высоких температур (Москва) д-ром техн. наук С.М. Городиным. Здесь также использовались два обмотанных тороида, подвешенные на нитях (с точностью до 0,01 Н), что позволяет сделать заключения о физической бессодержательности «альтернативных» гипотез.

Выводы:

1. Дифференциальный закон Ампера взаимодействия двух элементов тока является универсальной основой для расчета электродинамических сил в электрических машинах.

2. «Альтернативные» подходы к выполнению таких расчетов физически бессодержательны, а многие из них ясно ошибочны.

## БИБЛИОГРАФИЧЕКИЙ СПИСОК

1. Физическая энциклопедия: в 5т. М., 1988–1998.

2. Кузьмин В.В. Об эффективности методов расчета внутренних силовых взаимодействий в элементах магнитопроводов/ В.В. Кузьмин, Т.В. Шпатенко, В.С. Шпатенко // Електроінформ.Львів.2007.№2.

3. Кузьмин В.В. К расчету осевых сил в сердечнике мощного двухполюсного турбогенератора / В.В. Кузьмин, В.С. Шпатенко // Электротехника и электромеханика.2010.№2

4. Кузьмин В.В. К проблеме расчета силового взаимодействия магнитопровода на обмотки электрических машин / В.В. Кузьмин, В.С. Шпатенко //Электротехника и электромеханика.2007.№4