

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ХАРКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ”

В.И. Конохов

В.Л. Хавин

РАСЧЕТЫ БРУСА ПРИ КРУЧЕНИИ

Учебно-методическое пособие
к курсу „Сопротивление материалов”
для студентов машиностроительных специальностей,
в том числе для иностранных студентов

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 1 от 19.02.2020

Харьков
НТУ „ХПИ”
2020

УДК 620.17

К64

Рецензенты:

Д.В. Лавинский, канд. техн. наук, доц.,
Национальный технический университет
„Харківський політехнічний інститут”

В.Б. Гринёв, д-р техн. наук, проф.,
Харьковский национальный университет
строительства и архитектуры

Конохов В.И.

К64 Расчеты бруса при кручении : учебно-методическое пособие по курсу «Сопrotивление материалов» для студентов машиностроительных специальностей (на русском языке) / В. И. Конохов, В. Л. Хавин – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2020. – 75 с.

ISBN

Розглядаються теоретичні основи розрахунків на кручення бруса різноманітного поперечного перерізу, наведена методика розкриття статичної невизначуваності стержневих систем; надаються розрахункові схеми і чисельні дані для виконання індивідуальних розрахунково-проектувальних завдань, а також приклади їх розв’язання.

Призначено для студентів-інострaнців машинобудівних спеціальностей. Може бути корисним для викладачів, а також для аспірантів та наукових працівників.

Рассматриваются теоретические основы расчетов на кручение брусев разнообразного поперечного сечения, приведена методика раскрытия статической неопределимости систем; предоставляются расчетные схемы и численные данные для выполнения индивидуальных расчетно-проектировочных задач, а также примеры их решения.

Предназначено для студентов-иностранцев машиностроительных специальностей. Может быть полезным для преподавателей, а также для аспирантов и научных работников.

Ил. 25. Табл. 4. Библиогр: 3 назв.

УДК 620.17

ISBN

© В.И. Конохов, В.Л. Хавин, 2020

Введение

Реальные тела могут деформироваться, то есть изменять свою форму и размеры. Деформации тел происходят вследствие приложения к ним внешних нагрузок. При деформации тела его точки, а также линии или сечения перемещаются в плоскости или в пространстве относительно своего исходного положения. Одной из важнейших задач сопротивления материалов является оценка прочности и жесткости конструкции при произвольных нагрузках.

В данном пособии рассматривается одно из основных простых видов деформации стержня: кручение.

Кручение возникает при воздействии на стержень внешних сил, которые образуют момент относительно оси стержня. Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня друг относительно друга и вокруг его оси.

Учебно-методическое пособие состоит из 2 разделов: расчеты на прочность и жесткость при кручении и расчетно-проектировочное задание.

В первом разделе приведены основы теоретических расчетов различных конструкций при действии на них кручения. При этом рассматриваются аспекты поведения конструкций при действии на них различных параметров.

Во втором разделе даются различные схемы и численные данные для самостоятельных расчетов различных конструкций при действии на них кручения. Также приведены образцы расчетов типовых конструкций.

1. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

1.1. Основные понятия и определения

Распространенным стержневым элементом конструкций машин, работающих на кручение, является вал. Если нагрузка на прямолинейный брус (вал) состоит только из моментов, плоскости действия которых перпендикулярны к оси стержня, то из шести усилий и моментов в произвольном сечении остается лишь один – крутящий момент.

Отметим, что чаще всего внешний крутящий момент возникает в валах, вращающихся с угловой скоростью n , об./мин, и передают мощность K , кВт, (распределительные, передающие валы зубчатых, ременных передач). В этом случае на валу в местах посадки зубчатых колес, шкивов возникает сосредоточенный крутящий момент,

$$M_{\kappa} = 9,55 \frac{K}{n}. \quad (1.1)$$

Построение эпюр крутящих моментов основывается на том, что внутренний крутящий момент $M_{\kappa}(z)$ в данном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов относительно оси стержня всех сил, расположенных по одну сторону от сечения. Если вал вращается равномерно, то алгебраическая сумма всех моментов равна нулю. Поэтому при определении $M_{\kappa}(z)$ будем получать один и тот же результат, независимо от того, будем брать сумму моментов, расположенных слева или справа от сечения.

Правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при наблюдении с торца вдоль оси отсеченной рассматриваемой части, он пытается повернуть рассматриваемую область (отсеченную часть) против часовой стрелки и наоборот.

Сформулируем правила для построения и проверки правильности эпюр крутящих моментов:

1. При построении эпюр следует проверять равновесие вала, то есть $\sum M_{zi} = 0$.
2. На участке с интенсивностью распределенного момента $m = \text{const}$ эпюра M_{κ} линейная, а если $m = 0$, то эпюра M_{κ} по длине вала является кусочно-постоянной по участкам вала, то есть $M_{\kappa i} = \text{const}$.

3. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре M_k наблюдается скачок на величину внешнего момента.

Экспериментально установлено, что при воздействии на вал двух противоположно направленных крутящих моментов M_k , приложенных на его концах (рис. 1), вал будет закручиваться, то есть одни сечения вала будут поворачиваться к другим вокруг оси, в то время как длина вала остается неизменной.

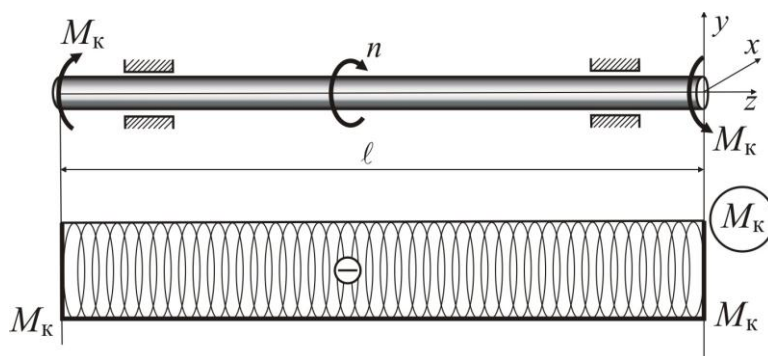


Рисунок 1

Если закручивать вал до разрушения и представить графически зависимость крутящего момента от угла закручивания, то получим диаграмму кручения, что в случае пластического материала имеет вид диаграммы, показанной на рис. 2. На этой диаграмме так же, как и на диаграмме растяжения, можно отметить ряд характерных точек, отвечающих характеристикам материала при кручении: точка 1 соответствует максимальному значению момента $M_{пл}$, до которого сохраняется линейная зависимость между нагрузкой M_k и углом закручивания φ ; в точке 2 наблюдается явление текучести материала при кручении, когда при практически постоянном моменте M_T увеличивается угол закручивания; точка 3 соответствует максимальному значению момента M_{max} , при котором происходит разрушение образца.

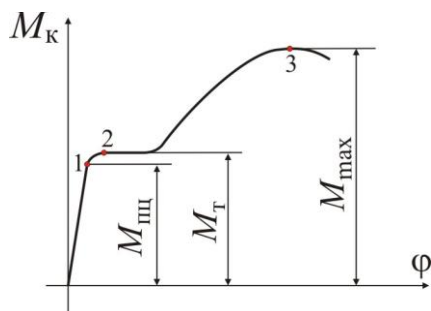


Рисунок 2

1.2. Касательные напряжения при кручении для бруса круглого или кольцевого сечения

Предварительно рассмотрим экспериментальные результаты кручения бруса круглого сечения. На валу (рис. 3 а) отметим образующие (меридианы) и поперечные сечения (параллели):

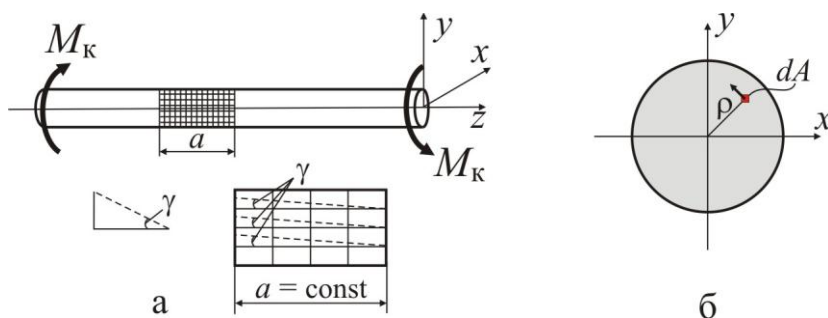


Рисунок 3

1. При кручении поперечные сечения бруса поворачиваются вокруг своей оси и относительно друг друга.

2. Образующие поворачиваются на один и тот же угол γ . Квадраты превращаются в ромбы, прямые углы меняются, как и в случае чистого сдвига (рис. 3 а). Это свидетельствует о том, что выделенный элементарный объем любого слоя вала находится в условиях чистого сдвига.

3. При кручении бруса круглого сечения придерживается гипотеза плоских сечений: сечение плоское и нормальное к оси до деформации остается плоским и нормальным к оси в процессе деформации.

4. Расстояния между сечениями в процессе деформации не изменяются ($a = \text{const}$), это подтверждает отсутствие в сечении нормальных напряжений.

5. Длина и прямолинейность радиусов сечений не нарушается, то есть касательные напряжения τ в любой точке сечения перпендикулярны радиусу ρ (рис. 3 б).

Рассмотрим брус диаметром d , длиной ℓ , нагруженный моментом M (рис. 4 а). На расстоянии z выделим элемент длиной dz и рассмотрим его равновесие (рис. 4 б). В левом сечении приложим действующий в нем крутящий момент M_k , а в правом сечении заменим M_k напряжением, действующим на элементарной площадке dA с координатами x, y , как показано на рис. 4 б.

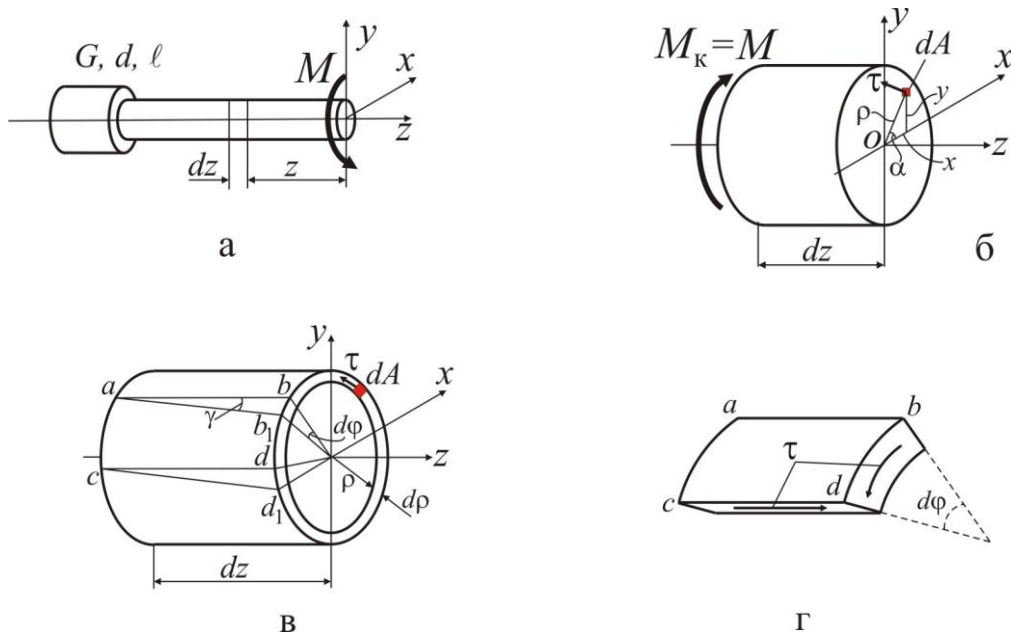


Рисунок 4

Считая, что начало координат совпадает с центром тяжести O сечения, запишем уравнение статического равновесия от элементарной силы $dF = \tau \cdot dA$, действующей на площадке dA (результатирующая сила $F = \int_A \tau dA$):

$$\sum F_x = \int_A \tau \cdot dA \cdot \sin \alpha = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum F_y = \int_A \tau \cdot dA \cdot \cos \alpha = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_z = M_k - \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = 0. \quad (1.4)$$

Поскольку неизвестны величина и закон распределения касательного напряжения τ , угол закручивания, положение нуля напряжений, то уравнение равновесия решить никак невозможно. Таким образом, задача является статически неопределимой.

Для раскрытия статической неопределимости проведем геометрический анализ деформаций при кручении. Для этого с бесконечно малого участка вала длиной dz выделим бесконечно тонкое кольцо толщиной $d\rho$ (рис. 4 в). Условно считаем, что левое сечение неподвижно. Правое сечение бесконечно малого цилиндра повернется вокруг оси z на угол $d\varphi$, причем φ назовем абсолютным углом закручивания, который является перемещением при кручении. Обра-

зующие ab и cd на боковой поверхности цилиндра перемещаются в положение ab_1 и cd_1 соответственно, смещаясь на угол сдвига.

Вычислим длину дуги $\tilde{b}b_1$ (рис. 4в), рассматривая сначала криволинейный треугольник abb_1 : $\tilde{b}b_1 = dz \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \cdot dz$, так как в пределах малых упругих деформаций $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$. Рассматривая затем криволинейный треугольник Obb_1 , выявим, что величина дуги $\tilde{b}b_1$ равна $\tilde{b}b_1 = (\rho + d\rho) \cdot d\varphi$. Пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, получаем $\gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi$, откуда $\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}$. Вводя относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (1.5)$$

получим уравнение совместности деформаций при кручении:

$$\gamma = \rho \cdot \theta. \quad (1.6)$$

Поскольку в бесконечно малом элементе $abcd$ возникает напряженное состояние (рис. 4г), то в пределах малых деформаций выполняется закон Гука при сдвиге:

$$\tau = \gamma \cdot G. \quad (1.7)$$

Подставляя выражение (1.6) в (1.7), получим

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta. \quad (1.8)$$

Последняя зависимость выражает закон Гука при кручении, на основании которого можно сделать вывод о том, что касательные напряжения в сечении изменяются по линейному закону пропорционально радиусу ρ .

Подставляя зависимость (1.8) в уравнение (1.2) и с учетом того, что G и θ являются постоянными величинами, а $\rho \sin \alpha = y$, получим:

$$\int_A \tau \cdot \sin \alpha dA = \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \sin \alpha dA = G \cdot \theta \cdot \int_A y dA = G \cdot \theta \cdot S_x = 0.$$

После аналогичной подстановки зависимости (1.8) в уравнение (1.3) получим:

$$\int_A \tau \cdot \cos \alpha dA = \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \cos \alpha dA = G \cdot \theta \int_A x dA = G \cdot \theta \cdot S_y = 0.$$

Из последних уравнений следует, что статические моменты S_x, S_y площади сечения относительно осей x, y равны нулю, поскольку G и θ не равны нулю.

Статические моменты площади только в отношении центральных осей равны нулю. Таким образом, оси x, y являются **центральными осями сечения**.

Иными словами, **центр кручения совпадает с центром тяжести сечения**.

Подставляя зависимость (1.8) в уравнение (1.4), и с учетом того, что интеграл $\int_A \rho^2 dA = I_p$ - полярный момент инерции сечения, получим:

$$M_k - \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \rho dA = M_k - G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 dA = M_k - G \cdot \theta \cdot I_p = 0,$$

а относительный угол закручивания принимает вид

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p}. \quad (1.9)$$

Величина GI_p называется жесткостью стержня при кручении. Из выражения (1.8) получаем относительный угол закручивания $\theta = \frac{\tau}{G \cdot \rho}$. Приравняв правые части последних выражений, получаем формулу для определения касательных напряжений при кручении бруса круглого или кольцевого сечения:

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho. \quad (1.10)$$

Из уравнения (1.5) с учетом выражения (1.9) получаем, что угол закручивания равен

$$\varphi = \int_0^{\ell} \theta dz = \int_0^{\ell} \frac{M_{\kappa} dz}{GI_{\rho}}$$

Полученное уравнение является законом Гука при кручении для абсолютного перемещения. После интегрирования по длине бруса ℓ получим, что в данном случае абсолютный угол закручивания φ бруса можно вычислить по формуле

$$\varphi = \theta \cdot \ell = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_{\rho}} \quad (1.11)$$

1.3. Распределение касательных напряжений при кручении бруса круглого (кольцевого) сечения. Расчет на прочность

Из уравнения (1.10) следует, что касательные напряжения по радиусу сечения распределяются линейно (рис. 5).

Как видно из приведенных на рис. 5 эпюр касательных напряжений, максимальные касательные напряжения возникают в крайних точках сечения, где $\rho = \rho_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{I_{\rho}} \cdot \rho_{\max} \quad (1.12)$$

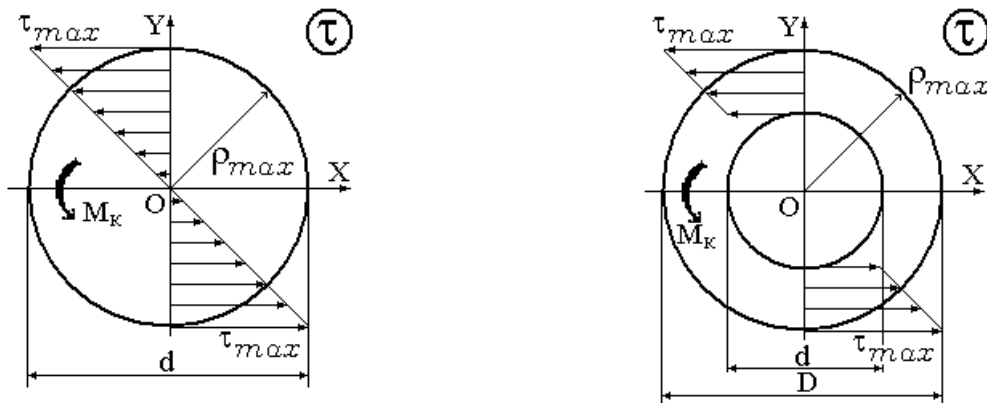


Рисунок 5

Учитывая то, что величина $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_p$ является полярным моментом сопротивления сечения, условие прочности при кручении запишется в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau], \quad (1.13)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение, обусловленное отношением предела текучести материала с коэффициентом запаса прочности n_{τ} , то есть:

$$[\tau] = \frac{\tau_{\tau}}{n_{\tau}}.$$

Из условия прочности полярный момент сопротивления должен быть избран по формуле $W_p \geq \frac{M_{\kappa}}{[\tau]}$.

Значение полярного момента сопротивления для вала круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3.$$

Значение полярного момента сопротивления для вала кольцевого сечения:

$$\left(c = \frac{d}{D} \right): W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - c^4).$$

Диаметр сечения для круглого вала вычисляется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa}}{0,2 \cdot [\tau]}};$$

для кольцевого вала:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa}}{0,2 \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}}.$$

1.4. Расчет на жесткость

Кроме расчета на прочность при кручении, валы рассчитываются на жесткость:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (1.14)$$

В некоторых случаях условие жесткости при кручении состоит в абсолютных углах закручивания φ ($[\varphi]$ в радианах – допустимый абсолютный угол закручивания):

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_p} \leq [\varphi]. \quad (1.15)$$

Из формулы (1.14) полярный момент инерции I_p , который обеспечивает жесткость, определяется как

$$I_p \geq \frac{M_{\kappa}}{G \cdot [\theta]}.$$

Полярный момент инерции:

- для круглого сечения

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4,$$

- для кольцевого сечения

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - c^4).$$

Из условия жесткости диаметр круглого сечения:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\kappa}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}};$$

внешний диаметр кольцевого сечения:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta] \cdot (1 - \alpha^4)}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\text{к}}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta] \cdot (1 - \alpha^4)}}.$$

Пример 1

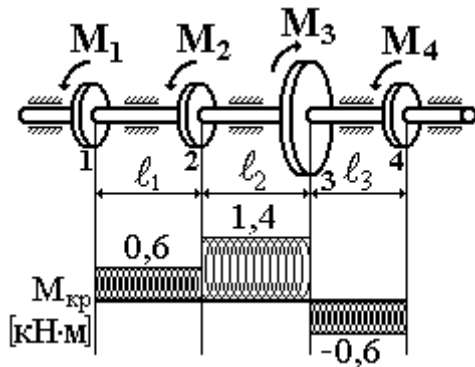


Рисунок 6

Из условий прочности и жесткости определить диаметр круглого сплошного вала (рис. б) при таких значениях моментов, которые передаются шкивами:

$$M_1 = 0,6 \text{ кНм} ; \quad M_2 = 0,8 \text{ кНм} ;$$

$$M_3 = 2,0 \text{ кНм} ; \quad M_4 = 0,6 \text{ кНм} .$$

Допустимое напряжение $[\tau] = 20 \text{ МПа}$, допустимый относительный угол закручивания $[\theta] = 0,25 \frac{\text{град}}{\text{м}}$, или $[\theta] = 0,0044 \text{ м}^{-1}$.

Модуль упругости стали при сдвиге $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Строя эпюру крутящих моментов, определяем, что наибольший момент действует на отрезке 2-3: $M_{\text{к макс}} = M_1 + M_2 = (0,6 + 0,8) = 1,4 \text{ кНм}$.

Подберем диаметр вала из условия прочности:

$$d_{\text{мощ.}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0,2 \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 20 \cdot 10^6}} \approx 0,0705 \text{ м} .$$

Теперь подберем диаметр вала из условия жесткости:

$$d_{\text{жорст.}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{к}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\text{к}}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,0044}} \approx 0,0794 \text{ м} .$$

Из двух диаметров следует выбрать больший, полученный из условий прочности и жесткости, и округлить его в большую сторону до ближайшего целого стандартного.

Стандартный диаметр должен иметь последнюю цифру 0, 2, 5, 8, если диаметр выбирается в миллиметрах. Поэтому значение диаметра для вала выбираем:

$$d = \max \{ d_{\text{мщн.}} ; d_{\text{жорст.}} \} = 80 \text{ мм.}$$

При этом максимальные касательные напряжения будут на втором участке вала:

$$\tau_{\text{max}} = \tau_2 = \frac{M_{\text{кр} 2}}{W_p} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 80^3 \cdot 10^{-9}} = 13,67 \text{ МПа} \leq [\tau].$$

1.5. Потенциальная энергия деформации при кручении

Потенциальная энергия деформации U , накопленная в упругом теле, численно равна работе W внешних сил, выполненной в процессе деформирования упругого тела. Рассмотрим брус длиной ℓ , нагруженный крутящим моментом M (рис. 7).

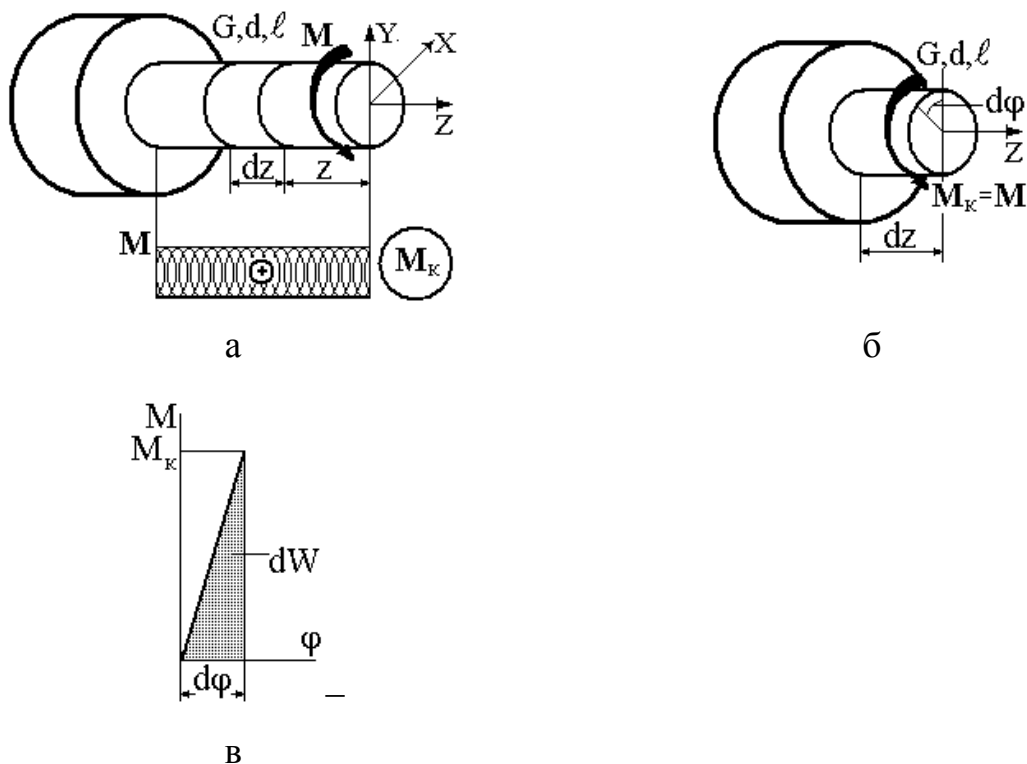


Рисунок 7

Вырежем элементарный отрезок dz и рассмотрим его деформацию. Условно закрепим левое сечение бесконечно малого элемента вала dz . При статическом нагружении моментом M_{κ} правое сечение элемента повернется на угол $d\varphi$ (рис. 7б). Элементарная работа dW момента M_{κ} на угле закручивания $d\varphi$ при нагрузке определяется площадью треугольника (рис. 7в), то есть $dW = \frac{1}{2} \cdot M_{\kappa} \cdot d\varphi$. Угол закручивания $d\varphi$ определяется по формуле (1.11) и составит $d\varphi = \frac{M_{\kappa} dz}{GI_p}$. Подставив значения $d\varphi$ в выражение для работы dW , получим $dW = \frac{M_{\kappa}^2 dz}{2GI_p}$, где I_p – полярный момент инерции при кручении. Но работа dW численно равна потенциальной энергии деформации dU , то есть $dU = dW = \frac{M_{\kappa}^2 dz}{2GI_p}$. Полная потенциальная энергия деформации определяется как интеграл по длине бруса:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_{\kappa}^2 dz}{2GI_p}. \quad (1.16)$$

Если стержень состоит из нескольких участков, потенциальная энергия деформации исчисляется как сумма интегралов по участкам:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_{\kappa}^2 dz}{2GI_p}. \quad (1.17)$$

1.6. Расчет винтовой цилиндрической пружины с малым шагом

Рассмотрим пружину (рис. 8 а) под действием внешней загрузки F . Основные параметры (рис. 8 б): D_1 – внутренний диаметр пружины (диаметр образующей цилиндра, диаметр оправки); D – средний (расчетный) диаметр; D_2 – внешний диаметр; d – диаметр прутка; α – угол наклона витка.

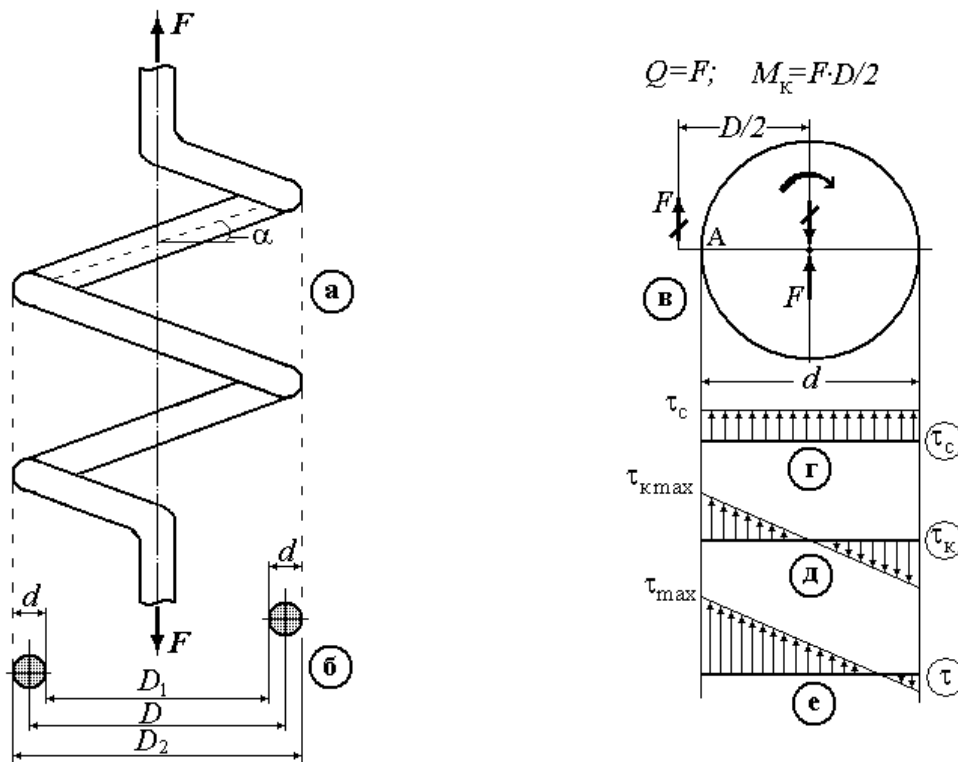


Рисунок 8

Приведем внешнюю силу F к центру тяжести поперечного сечения витка. Пренебрегая ввиду малости продольной силой $N = F \sin \alpha$ и изгибающим моментом $M_c = F \frac{D}{2} \sin \alpha$, получим (рис. 8 в) поперечную силу $Q = F$ и крутящий момент $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$. От действия поперечной силы Q (деформация сдвига, среза) в сечении возникают касательные напряжения τ_c , условно примем равномерно распределенными по сечению (рис. 8 г) и равными $\tau_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$.

От действия крутящего момента $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$ также возникают касательные напряжения, которые линейно распределяются по сечению (рис. 8 д) и имеют максимальное значение $\tau_{k \max}$ в крайних точках сечения:

$$\tau_{k \max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{F \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}.$$

Из эпюр, приведенных на рис. 8 г,д видно, что касательные напряжения τ_c и τ_k в точке A совпадают по направлению.

Рассмотрев две эпюры (рис. 8 г,д) получим, что в пружине наиболее нагруженные внутренние точки (точка A), а максимальные напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau_{k \max} + \tau_c = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \\ &= \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left(1 + \frac{d}{2 \cdot D} \right) = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot m} \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $m = \frac{D}{d}$ – индекс пружины. При расчете пружин большого диаметра D из тонкой проволоки ($\frac{d}{2D} \ll 1$) максимальные напряжения с достаточной степенью точности можно определить по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}.$$

С учетом напряжений от продольной силы, изгибающего момента и поперечной силы последняя формула примет вид

$$\tau_{\max} = k \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}, \quad (1.19)$$

где поправочный коэффициент $k = \frac{4 \cdot m - 1}{4 \cdot m - 4} + \frac{0,615}{m}$, значение которого в зависимости от индекса пружины $m = \frac{D}{d}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1. Поправочные коэффициенты

m	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,4	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

При определении осадки λ (деформации) винтовой цилиндрической пружины учтем только деформацию от кручения. Деформациями сдвига, растяжения - сжатия и изгиба пренебрегают ввиду их малости.

Потенциальная энергия деформации пружины при статической нагрузке численно равна работе внешней силы F на соответствующем перемещении λ , то есть

$$U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \lambda. \quad (1.20)$$

Вычислим потенциальную энергию деформации при кручении витков пружины, для чего вырежем бесконечно малый элемент длиной ds (рис. 9). Жестко закрепим один его конец, на свободном конце стержня приложим возникающий крутящий момент $M_{\kappa} = F \cdot \frac{D}{2}$.

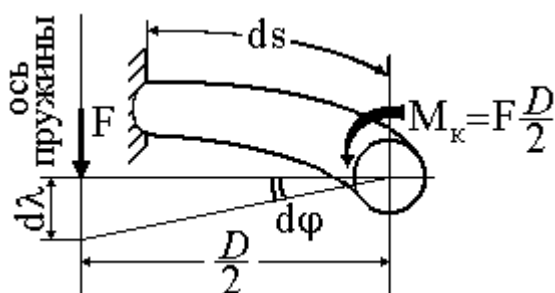


Рисунок 9

Свободное крайнее сечение элементарного стержня повернется на угол $d\varphi = \frac{M_{\kappa} ds}{GI_p}$, а точка приложения силы F получит перемещение $d\lambda$. Считая незначительным влияние кривизны элементарного стержня, величину потенциальной энергии при кручении одного витка пружины стержня вычислим по формуле (1.17):

$$U_{\text{витка}} = \int_0^{\pi D} \frac{M_{\kappa}^2}{2 \cdot GI_p} ds = \frac{M_{\kappa}^2 \cdot \pi \cdot D}{2 \cdot GI_p}.$$

Учитывая то, что крутящий момент $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$, полярный момент инерции $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, пружина имеет n витков, потенциальная энергия при статической нагрузке пружины силой F равна

$$U = \frac{4 \cdot F^2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (1.21)$$

Сравнивая значения потенциальной энергии, вычисляемой по формулам (1.20) и (1.21), зависимость для определения осадки λ приобретает вид

$$\lambda = \frac{8 \cdot F \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (1.22)$$

Чтобы пружина была более податливой, диаметр прутка должен быть наименьшим, при этом максимальные касательные напряжения достигают значительных величин. Для исключения этого несоответствия пружины изготавливаются из специальных пружинных материалов, имеющих высокие прочные характеристики. Приведем значения допустимых касательных напряжений для пружинных материалов:

- *высоко закаленные пружинные стали:*

$[\tau] = 500$ МПа при диаметре прутка $d = 6$ мм ;

$[\tau] = 400$ МПа при $d = 10$ мм ;

$[\tau] = 380$ МПа при $d = 12$ мм ;

- *хромоникелевые стали:*

$[\tau] = 700$ МПа при $d = 12$ мм ;

- *фосфористые бронзы:*

$[\tau] = 130$ МПа при $d = 16$ мм .

Пример 2

Винтовая пружина (рис. 8а, б) изготовлена из проволоки $d = 4$ мм . Внутренний диаметр пружины $D_1 = 46$ мм . В напряженном состоянии зазор на просвет между витками $t_1 = 1$ мм; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа .

Определить, какая нужна сила для сжатия пружины, чтобы зазора не было.

Средний диаметр пружины – $D = D_1 + d = 46 + 4 = 50$ мм .

Зазор закрывается, если осадка пружины одного витка будет равняться ему, то есть

$$\lambda = t_1 = \frac{64 \cdot F \cdot R^3}{G \cdot d^4},$$

откуда:

$$F = \frac{G \cdot d^4 \cdot t_1}{64 \cdot R^3} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 (4 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{64 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^3} = 20,5 \text{ Н} .$$

Пример 3

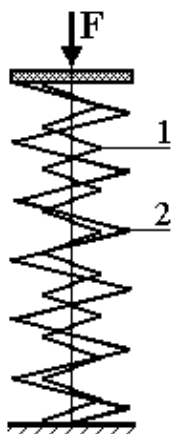


Рисунок 10

Для двух цилиндрических винтовых пружин, оси которых совпадают (рис. 10), нагруженных силой $F = 3,5$ кН , определить напряжение.

Средние диаметры пружин:

$$D_1 = 80 \text{ мм} ; \quad D_2 = 160 \text{ мм} .$$

Диаметры прутков:

$$d_1 = 10 \text{ мм}; \quad d_2 = 20 \text{ мм} .$$

Число витков: $n_1 = 10$; $n_2 = 8$.

Материал двух пружин одинаковый: $G_1 = G_2$.

Для расчета на прочность необходимо определить усилия, действующие на каждую пружину отдельно.

Обозначим через F_1 и F_2 усилия, действующие в соответствующих пружинах.

Применив уравнение равновесия, имеем:

$$F = F_1 + F_2 .$$

В данном случае пружины имеют одинаковую осадку, то есть перемещение вдоль их оси одинаковы – $\lambda_1 = \lambda_2$. Согласно (1.22):

$$\frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G_1 \cdot d_1^4} = \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G_2 \cdot d_2^4}.$$

Учитывая числовые данные, получим

$$F_1 = \frac{D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} \cdot \frac{d_1^4}{D_1^3 \cdot n_1} \cdot F_2 = \frac{160^3 \cdot 8 \cdot 10^4}{20^4 \cdot 80^3 \cdot 10} \cdot F_2 = \frac{2}{5} \cdot F_2.$$

Используя уравнения равновесия, найдем

$$F = \frac{2}{5} \cdot F_2 + F_2 = \frac{7}{5} \cdot F_2$$

$$F_1 = \frac{2}{7} \cdot F = 1 \text{ кН}; \quad F_2 = \frac{5}{7} \cdot F = 2,5 \text{ кН}.$$

Согласно (1.19) с учетом того, что поправочные коэффициенты $k_1 = k_2 = 1,18$ для $m_1 = \frac{D_1}{d_1} = m_2 = \frac{D_2}{d_2} = 8$ (см. табл. 1), касательные напряжения в первой пружине будут равны

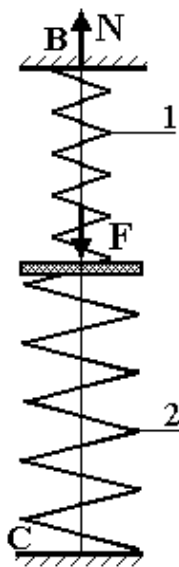
$$\tau_{1 \max} = k_1 \frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,08}{\pi \cdot 0,01^3} = 240,4 \text{ МПа},$$

а во второй –

$$\tau_{2 \max} = k_2 \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_2^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,16}{\pi \cdot 0,02^3} = 150,2 \text{ МПа}.$$

Для закаленной пружинной стали и данных диаметров прутков $[\tau] = 350 \div 400$ МПа . Таким образом, условие прочности для обеих пружин выполняются.

Пример 4



Для двух цилиндрических, последовательно расположенных винтовых пружин, оси которых совпадают (рис. 11), нагруженных через абсолютно жесткий диск силой $F = 3,5$ кН , определить напряжение.

Средние диаметры пружин:

$$D_1 = 80 \text{ мм} ; \quad D_2 = 160 \text{ мм} .$$

Диаметры прутков: $d_1 = 10$ мм; $d_2 = 20$ мм.

Число витков: $n_1 = 10$; $n_2 = 8$.

Материал двух пружин одинаков: $G_1 = G_2 = G$.

Рисунок 11

Для расчета на прочность необходимо определить усилия, действующие на каждую пружину отдельно.

Обозначим через F_1 и F_2 усилия, действующие в соответствующих пружинах.

При этом $F_1 = N$; $F_2 = N - F$.

В данном случае осадка пружин, то есть перемещение вдоль их оси будет равно $\lambda_B = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Согласно (1.22):

$$\lambda_B = \frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G_1 \cdot d_1^4} + \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G_2 \cdot d_2^4} = \frac{N \cdot D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4} + \frac{(N - F) \cdot D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} = 0 .$$

$$\frac{N \cdot D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4} + \frac{N \cdot D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} - \frac{F \cdot D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} = 0 .$$

$$N \cdot \left(\frac{D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4} + \frac{D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} \right) - F \cdot \frac{D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} = 0 .$$

$$N = 0,29 F .$$

Учитывая многочисленные данные, получим значение усилий в пружинах:

$$F_1 = N = 0,29 \cdot F = 1,02 \text{ кН};$$

$$F_2 = N - F = -0,71 \cdot F = -2,48 \text{ кН}.$$

При этом первая пружина работает на растяжение, а вторая на сжатие.

Согласно (1.19) с учетом того, что поправочные коэффициенты $k_1 = k_2 = 1,18$ для $m_1 = \frac{D_1}{d_1} = m_2 = \frac{D_2}{d_2} = 8$ (см. табл. 1), касательные напряжения в первой пружине будут равняться:

$$\tau_{1 \max} = k_1 \frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 1,02 \cdot 10^3 \cdot 0,08}{\pi \cdot 0,01^3} = 245,2 \text{ МПа},$$

а во второй

$$\tau_{2 \max} = k_2 \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_2^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 2,48 \cdot 10^3 \cdot 0,16}{\pi \cdot 0,02^3} = 151,4 \text{ МПа}.$$

Для закаленной пружинной стали и данных диаметров прутков $[\tau] = 350 \div 400$ МПа. Таким образом, условие прочности для обеих пружин выполняются.

1.6. Кручение бруса некруглого сечения

При кручении бруса некруглого сечения (прямоугольных, треугольных, эллиптических, прокатных, тонкостенных и др.) гипотеза плоских сечений не выполняется. Поперечные сечения не остаются плоскими, отдельные точки выходят из плоскости – сечения подвергаются депланации. При кручении бруса постоянного сечения крутящими моментами, приложенными к свободным его концам, депланация всех поперечных сечений оказывается одинаковой. При равномерной депланации нормальные напряжения в поперечных сечениях не возникают. Такой вид кручения называется чистым (свободным) кручением, при котором величины и характер распределения касательных напряжений во всех сечениях одинаков.

Решение задачи о чистом кручении некруглых брусьев методами сопротивления материалов невозможно. Точные решения задач о кручении бруса не-

круглого сечения получены в теории упругости. Окончательные формулы для определения максимальных касательных напряжений τ_{\max} , относительного угла закручивания θ и абсолютного угла закручивания φ бруса длиной ℓ имеют следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}; \quad (1.23)$$

$$\theta = \frac{M}{GI_{\kappa}}; \quad (1.24)$$

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_{\kappa}}, \quad (1.25)$$

где W_{κ} – момент сопротивления на кручение, см^3 , м^3 ,

I_{κ} – момент инерции на кручение, см^4 , м^4 .

1.7. Кручение бруса прямоугольного поперечного сечения

Распределение касательных напряжений для прямоугольного сечения приведено на рис. 12. Наибольшие напряжения τ_{\max} возникают на серединах длинных сторон сечения (точки A и B). Касательные напряжения на серединах коротких сторон (точки C , D) определяются по формуле $\tau' = \gamma \cdot \tau_{\max}$.

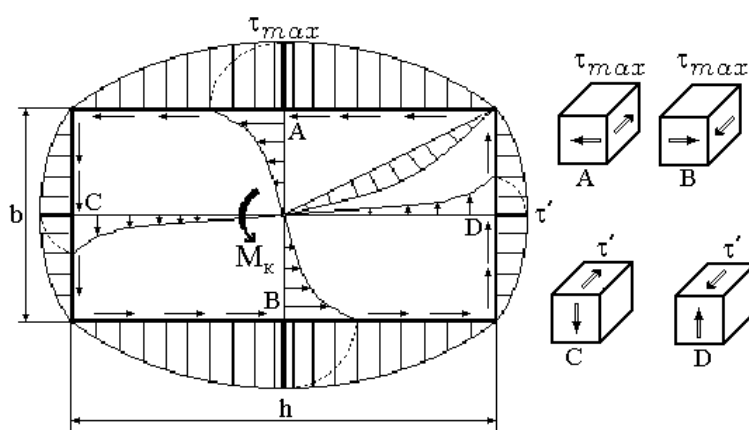


Рисунок 12

Момент сопротивления на кручение W_{κ} и момент инерции на кручение I_{κ} для прямоугольного поперечного сечения имеют вид:

$$W_{\kappa} = \alpha \cdot h \cdot b^2, \quad (1.26)$$

$$I_{\kappa} = \beta \cdot h \cdot b^3.$$

Коэффициенты α, β, γ определяются в зависимости от отношения длинной стороны h прямоугольника к короткой стороне $b - \left(\frac{h}{b}\right)$ и приведены в таблице 2.

Таблица 2. Кручение призматического бруса прямоугольного поперечного сечения (таблица коэффициентов α, β, γ)

$\frac{h}{b}$	α	β	γ
1,00	0,208	0,141	1,000
1,05	0,211	0,147	0,981
1,10	0,214	0,154	0,963
1,15	0,217	0,160	0,946
1,20	0,219	0,166	0,931
1,25	0,221	0,172	0,916
1,30	0,223	0,177	0,903
1,35	0,225	0,182	0,891
1,40	0,227	0,187	0,879
1,45	0,229	0,191	0,869
1,50	0,231	0,196	0,859
1,55	0,233	0,200	0,850
1,60	0,234	0,204	0,842
1,65	0,236	0,207	0,834
1,70	0,237	0,211	0,827
1,75	0,239	0,214	0,821
1,80	0,240	0,217	0,815
1,85	0,242	0,220	0,809
1,90	0,243	0,223	0,804
1,95	0,245	0,226	0,800
2,00	0,246	0,229	0,795
2,50	0,258	0,249	0,766
3,00	0,267	0,263	0,753
4,00	0,282	0,281	0,745
5,00	0,292	0,291	0,743
6,00	0,298	0,298	0,743
7,00	0,303	0,303	0,743
8,00	0,307	0,307	0,743
9,00	0,310	0,310	0,743
10,00	0,313	0,313	0,743
∞	0,333	0,333	0,743

Условие прочности при кручении бруса прямоугольного сечения согласно условию (1.23) имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}} \leq [\tau]. \quad (1.27)$$

Условие жесткости при кручении принимается для относительного угла закручивания

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GI_{\kappa}} \leq [\theta], \quad (1.28)$$

или для абсолютного угла закручивания:

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_{\kappa}} \leq [\varphi]. \quad (1.29)$$

1.8. Кручение бруса произвольной формы

При кручении брусков эллиптического поперечного сечения максимальные касательные напряжения возникают в крайних точках, лежащих на малых полуосях. В этом случае

$$W_{\kappa} = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot h}{16},$$

где b и h – соответственно размеры малой и большой осей эллипса.

Наибольшие напряжения во внешних точках сечения на большой полуоси

$$\tau' = \tau_{\max} / m,$$

где $m = h/b$.

Условный момент инерции при кручении бруса эллиптического сечения

$$I_{\kappa} = \frac{\pi \cdot h \cdot b}{64} (h^2 + b^2).$$

Если закручиваются брусья сложного незамкнутого поперечного сечения, которое можно разделить на отдельные части с $I_{\kappa i}$ и $W_{\kappa i}$, то для него

$$I_{\kappa} = I_{\kappa 1} + I_{\kappa 2} + \dots + I_{\kappa n} = \sum_{i=1}^n I_{\kappa i},$$

где $i = 1; 2; \dots; n$ – номера простейших частей, на которые разделено поперечное сечение.

Поскольку угол закручивания для всего сечения и отдельных его частей один и тот же:

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GI_{\kappa}} = \frac{M_{\kappa i}}{GI_{\kappa i}} = \dots = \frac{M_{\kappa n}}{GI_{\kappa n}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сложного сечения пропорционально их жесткости:

$$M_{\kappa 1} = M_{\kappa} \cdot \frac{I_{\kappa 1}}{I_{\kappa}}; M_{\kappa 2} = M_{\kappa} \cdot \frac{I_{\kappa 2}}{I_{\kappa}}; \dots; M_{\kappa n} = M_{\kappa} \cdot \frac{I_{\kappa n}}{I_{\kappa}}.$$

Соответственно наибольшее касательное напряжение в каждой части сечения

$$\tau_{\kappa i} = \frac{M_{\kappa i}}{W_{\kappa i}} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa i}} \left(\frac{I_{\kappa}}{I_{\kappa i}} \right) = \frac{M_{\kappa}}{I_{\kappa}} \left(\frac{I_{\kappa}}{W_{\kappa i}} \right).$$

Наибольшее значение напряжения τ достигнет для того элемента, у которого отношение $\frac{I_{\kappa i}}{W_{\kappa i}}$ будет самым большим:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{I_{\kappa}} \left(\frac{I_{\kappa i}}{W_{\kappa i}} \right)_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}},$$

где $W_{\kappa} = \frac{I_{\kappa}}{\left(\frac{I_{\kappa i}}{W_{\kappa i}} \right)_{\max}}$.

1.9. Кручение тонкостенных брусьев

Характерной геометрической особенностью тонкостенных брусьев является то, что их толщина существенно меньше других линейных размеров. Тонкостенным брусом называется такой, для которого выполняется условие $\frac{b_{\min}}{\delta_{\max}} \geq 10$, где b_{\min} – минимальный поперечный размер сечения в плане, а δ_{\max} – наибольшая толщина контура профиля (рис. 13 а). Срединная линия профиля – это геометрическое место точек, расположенных на серединах толщин контура профиля. Если срединная линия представляет собой замкнутый контур (рис. 13 б), то брус называется брусом замкнутого (закрытого) профиля (сечения). Если срединная линия представляет собой незамкнутый контур, то брус называется брусом открытого профиля (рис. 13 в).

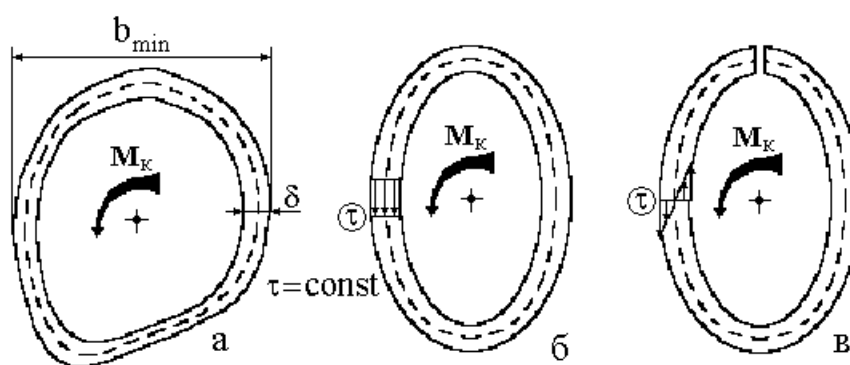


Рисунок 13

1.9.1. Кручение бруса закрытого профиля

Приближенный расчет кручение таких тонкостенных брусьев основан на гипотезе Бредта о том, что касательные напряжения в поперечном сечении распределяются по толщине стенки равномерно и направлены параллельно касательной к срединной линии контура (рис. 13 б). Касательные напряжения в любой точке замкнутого профиля произвольной формы с переменной толщиной стенок вычисляются по формуле Бредта:

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot A^* \cdot \delta}, \quad (1.30)$$

где A^* – площадь, ограниченная срединной линией профиля (рис. 13б).

Наибольшее напряжение возникает в том месте контура, где толщина стенки профиля сечения является наименьшей $\delta(s) = \delta_{\min}$. Условие прочности в этом случае запишется в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min}} \leq [\tau]. \quad (1.31)$$

Абсолютный угол закручивания стержня длиной ℓ определяется формулой

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{4 \cdot A^{*2} \cdot G} \cdot \oint_S \frac{ds}{\delta}, \quad (1.32)$$

где $\oint_S \frac{ds}{\delta}$ – контурный интеграл берется по длине S срединной линии контура

профиля. Если толщина профиля постоянная $\delta = \text{const}$, то $\oint_S \frac{ds}{\delta} = \frac{1}{\delta} \oint_S ds = \frac{S}{\delta}$,

где S – длина контура срединной линии. Тогда формула для полного угла закручивания примет вид:

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell \cdot S}{4 \cdot A^{*2} \cdot \delta \cdot G}. \quad (1.33)$$

1.9.1. Кручение брусев открытого профиля

При расчете брусев открытого профиля следует различать простые и составные сечения. Примеры простых профилей (сечений) приведены на рис. 14.

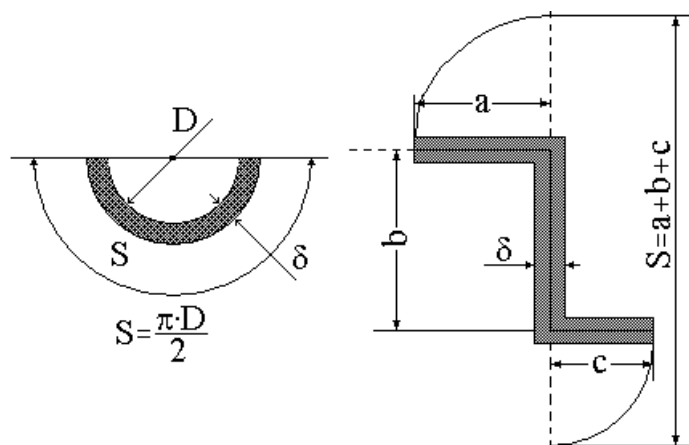


Рисунок 14

Эти профили характеризуются тем, что могут быть развернуты в вытянутый прямоугольник высотой S и шириной δ . Для узкого прямоугольного сечения (рис. 15), когда $\frac{h}{b} > 10$, коэффициенты $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ и моменты сопротивления W_k и инерции I_k запишутся как $W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2 = \frac{h \cdot b^2}{3}$, $I_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = \frac{h \cdot b^3}{3}$ и формулы (1.23) - (1.25) для определения максимальных касательных напряжений τ_{\max} , относительного θ и абсолютного φ углов закручивания запишутся в виде

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_k}{h \cdot b^2}; \quad \theta = \frac{3 \cdot M_k}{h \cdot b^3}; \quad \varphi = \frac{3 \cdot M_k \cdot \ell}{h \cdot b^3}.$$

Эпюра распределения касательных напряжений изображена на рис. 15. По всей длине h профиля $\tau = \tau_{\max}$, по ширине поперечного сечения касательные напряжения меняются по линейному закону.

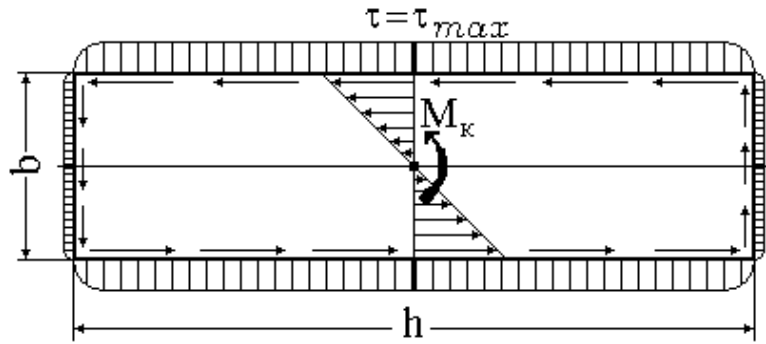


Рисунок 15

Приведенными формулами можно пользоваться и для тонкостенных незамкнутых профилей с криволинейным контуром постоянной толщины δ , если вместо h подставить длину S срединной линии сечения, а вместо b - толщину профиля δ (рис. 14).

Для составных брусев открытого профиля, состоящих из нескольких узких прямоугольников различной толщины (типа швеллер, уголок, двутавр) величина момента инерции I_k при кручении можно определить по формуле

$$I_k = \eta \cdot \sum \frac{h_i \cdot \delta_i^3}{3}, \quad (1.34)$$

где коэффициент η зависит от формы сечения (для углового – $\eta = 1$; двутаврового – $\eta = 1,2$; таврового – $\eta = 1,15$; швеллерного – $\eta = 1,12$).

Момент сопротивления при кручении запишется как:

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}} = \frac{\eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}{3 \cdot \delta_{\max}},$$

а максимальные касательные напряжения определяются как

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{3 \cdot M_k \cdot \delta_{\max}}{\eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}. \quad (1.35)$$

Наибольшие напряжения в каждом элементе определяются по формуле

$$\tau_{i \max} = \frac{3 \cdot M_{\kappa} \cdot \delta_i}{\eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}.$$

Абсолютный угол закручивания φ определяется как

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{GI_{\kappa}} = \frac{3 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}. \quad (1.36)$$

Пример 5

Сопоставить величины наибольших касательных напряжений и углов закручивания для стальных брусьев длиной ℓ , диаметром $D = 40$ мм, толщиной стенки $\delta = 1$ мм для случаев открытого (рис. 16 а) и закрытого (рис. 16 б) профилей, нагруженных одинаковыми крутящими моментами M_{κ} .

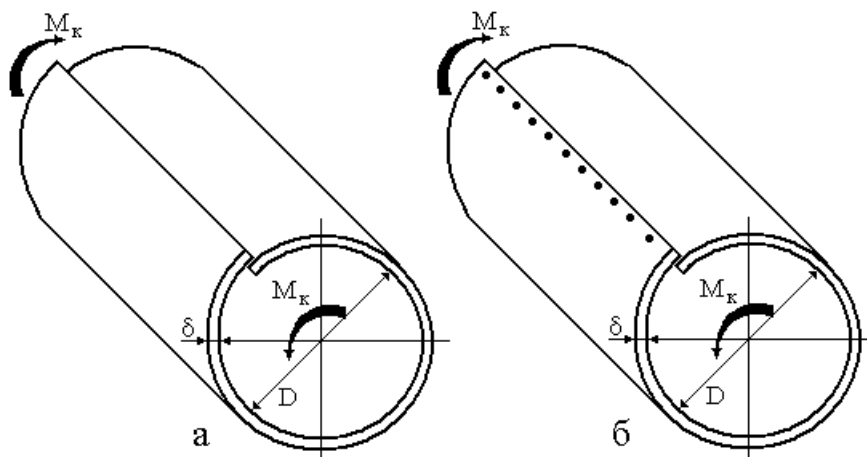


Рисунок 16

Брус открытого профиля (рис. 16 а).

Развернем профиль в вытянутый прямоугольник со сторонами:

$$b = \delta ,$$

$$h = S = \pi \cdot D .$$

Максимальные касательные напряжения вычислим по формуле

$$\tau_{1 \max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}.$$

Момент сопротивления на кручение:

$$W_{\kappa} = \frac{h \cdot b^2}{3} = \frac{S \cdot \delta^2}{3} = \frac{\pi \cdot D \cdot \delta^2}{3}.$$

Тогда максимальные касательные напряжения оказываются равными

$$\tau_{1 \max} = \frac{3 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot D \cdot \delta^2}.$$

Абсолютный угол закручивания вычислим по формуле

$$\varphi_1 = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{GI_{\kappa}}.$$

Момент инерции на кручение:

$$I_{\kappa} = \frac{h \cdot b^3}{3} = \frac{S \cdot \delta^3}{3} = \frac{\pi \cdot D \cdot \delta^3}{3}.$$

В этом случае угол закручивания равен

$$\varphi_1 = \frac{3 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D \cdot \delta^3}.$$

Брус закрытого профиля (рис. 16 б).

Максимальные касательные напряжения вычислим по формуле Бредта:

$$\tau_{2 \max} = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot A^* \cdot \delta} = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot \delta \frac{\pi \cdot D^2}{4}},$$

где $A^* = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$, и получим

$$\tau_{2 \max} = \frac{2 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot D^2 \cdot \delta}.$$

Угол закручивания вычислим по формуле

$$\varphi_2 = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{4 \cdot A^{*2} \cdot G} \int \frac{dS}{\delta} = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell \cdot S}{4 \cdot A^{*2} \cdot G \cdot \delta}.$$

После преобразований получим:

$$\varphi_2 = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell \cdot \pi \cdot D}{4 \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)^2 G \cdot \delta} = \frac{4 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D^3 \cdot \delta}.$$

Отношение напряжений:

$$\frac{\tau_{1 \max}}{\tau_{2 \max}} = \frac{3 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot D \cdot \delta^2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \delta}{2 \cdot M_{\kappa}} = \frac{3}{2} \left(\frac{D}{\delta} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{40}{1} = 60.$$

Отношение углов закручивания:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{3 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D \cdot \delta^3} \cdot \frac{G \cdot \pi \cdot D^3 \cdot \delta}{4 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell} = \frac{3}{4} \left(\frac{D}{\delta} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{40}{1} \right)^2 = 1200.$$

Итак, стержень замкнутого профиля оказывается существенно более прочным и в еще большей степени жестким, чем такой же незамкнутый.

1.10. Статически неопределимые системы при кручении

Статически неопределимыми называются кинематически неизменные системы, в которых число неизвестных усилий, включая реакции опор и внутренних силовых факторов (крутящих моментов), больше числа уравнений статики, которые можно составить для данной задачи.

Степень статической неопределимости показывает, сколько уравнений совместности перемещений в геометрическом анализе деформирования необходимо сложить, чтобы можно было решить задачу. План решения задачи такой же, как и для статично неопределяемых систем при растяжении-сжатии.

1.10.1. Раскрытие статической неопределимости при последовательном соединении участков бруса

Раскрыть статическую неопределимость вала (рис. 17), построить эпюру крутящих моментов и определить размеры поперечного сечения бруса, если допустимые касательные напряжения $[\tau]$.

Статическая сторона задачи.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_z = M_c + M_b - M_1 + M_2 = M_c + M_b + 3M = 0. \quad (1.37)$$

Геометрическая сторона задачи

Для раскрытия статической неопределимости необходимо составить одно уравнение совместности перемещений.

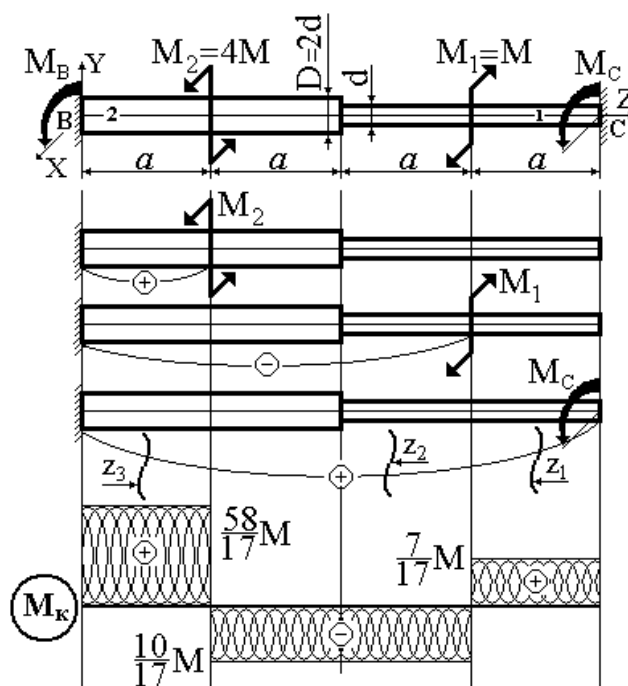


Рисунок 17

Отбросим правое защемление и его действие заменим моментом M_c . Этот момент определяется из условия, что поворот правого торцевого сечения относительно левого равен нулю:

$$\varphi_{BC} = \varphi_{M_c} + \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} = 0. \quad (1.38)$$

Физическая сторона задачи

Воспользуемся законом Гука при кручении для углов закручивания:

$$\begin{aligned} \varphi_{M_c} &= \frac{M_c \cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{M_c \cdot 2a}{GI_{p2}}, \\ \varphi_{M_1} &= -\frac{M_1 \cdot a}{GI_{p1}} - \frac{M_1 \cdot 2a}{GI_{p2}}, \\ \varphi_{M_2} &= \frac{M_2 \cdot a}{GI_{p2}}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Совместное решение уравнений. Подставим (1.39) в (1.38):

$$\varphi_{AB} = \frac{M_A \cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{M_A \cdot 2a}{GI_{p2}} - \frac{M_1 \cdot a}{GI_{p1}} - \frac{M_1 \cdot 2a}{GI_{p2}} + \frac{M_2 \cdot a}{GI_{p2}} = 0. \quad (1.40)$$

С учетом того, что $M_2 = 4M$,

$I_{p1} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, $I_{p2} = 16 \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 16 \cdot I_{p1}$, и выполнив преобразования, получим

$$M_A \left(2 + \frac{2}{16} \right) - M - \frac{2M}{16} + \frac{4M}{16} = 0,$$

откуда $M_A = \frac{7}{17}M$.

Из (1.37): $M_B = -3M - M_A = -M \left(3 + \frac{7}{17} \right) = -\frac{58}{17}M$.

Построение эпюры крутящих моментов. По участкам, показанным на рис. 17 вычисляем значение крутящего момента:

$$M_{\kappa}(z_1) = M_A = \frac{7}{17} M ;$$

$$M_{\kappa}(z_2) = M_A - M_1 = -\frac{10}{17} M ;$$

$$M_{\kappa}(z_3) = M_B = \frac{58}{17} M .$$

Проверяем правильность решения задачи, для чего вычислим угол поворота φ_{AB} :

$$\begin{aligned} \varphi_{AB} &= \frac{7 M \cdot a}{17 G I_{p1}} - \frac{10 M \cdot a}{17 G I_{p1}} - \frac{10 M \cdot a}{17 G \cdot 16 I_{p1}} + \frac{58 M \cdot a}{17 G \cdot 16 I_{p1}} = \\ &= \frac{M \cdot a}{17 G \cdot 16 I_{p1}} (112 - 160 - 10 + 58) = \frac{M \cdot a}{17 G \cdot 16 I_{p1}} (170 - 170) \equiv 0 . \end{aligned}$$

Определение размеров поперечного сечения. Предварительно определим, на каком участке вала возникают наибольшие напряжения.

Полярные моменты сопротивления отдельных участков вала:

$$W_{p1} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \quad W_{p2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = 8 \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 8 \cdot W_{p1} .$$

Получим следующее:

$$\text{первый участок диаметром } d - \tau_{\max} = \frac{7 M}{17 W_{p1}} ;$$

$$\text{второй участок диаметром } d - \tau_{\max} = \frac{10 M}{17 W_{p1}} ;$$

$$\text{третий участок диаметром } D - \tau_{\max} = \frac{10 M}{17 W_{p2}} = \frac{10 M}{17 \cdot 8 W_{p1}} = \frac{1,25 M}{17 W_{p1}} ;$$

$$\text{четвертый участок диаметром } D - \tau_{\max} = \frac{58 M}{17 W_{p2}} = \frac{7,25 M}{17 W_{p1}} .$$

Таким образом, наиболее нагруженный брус на втором участке диаметром d .

$$\text{Из условия прочности } \tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau], \text{ получим}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \left(\frac{10}{17} M \right)}{\pi [\tau]}}$$

Пример 6

Для последовательного расположения участков вала (прямоугольная, трубчатая, круглая) раскрыть статическую неопределенность, исходя из условий прочности и жесткости определить размеры поперечного сечения.

Дано:

$$M_1 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_3 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$a = 1,5 \text{ м}; \quad b = 1,0 \text{ м}; \quad c = 0,2 \text{ м}; \quad k_1 = 1,3; \quad k_2 = 1,6; \quad G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = 40 \text{ МПа}; \quad [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}$$

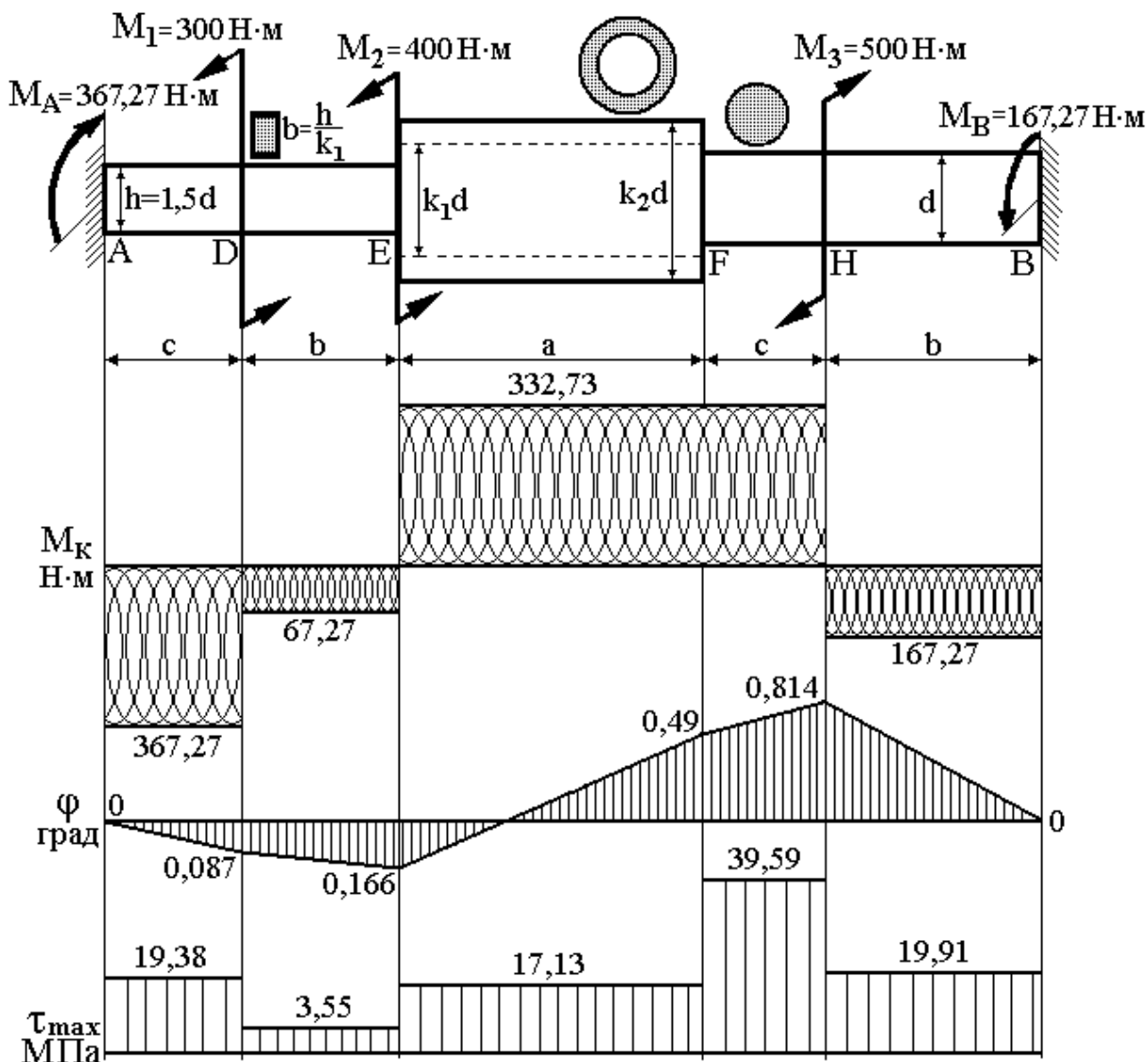


Рисунок 18

1. Определим геометрические характеристики поперечных сечений участков вала:

- *трубчатая часть:*

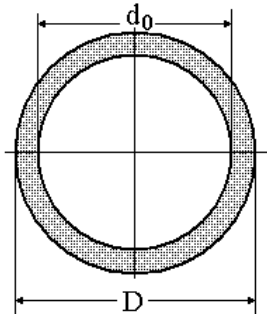


Рисунок 19

d_0 – внутренний диаметр; D – внешний диаметр;

$$c = \frac{d_0}{D} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1,3}{1,6} = 0,8125 .$$

Полярный момент инерции:

$$I_{\text{пр}} = \frac{\pi \cdot D^4 (1 - c^4)}{32} = \frac{\pi \cdot k_2^4 \cdot d^4 (1 - c^4)}{32} = 0,363 d^4 .$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_{\text{пр}} = \frac{\pi \cdot D^3 (1 - c^4)}{16} = \frac{\pi \cdot k_2^3 \cdot d^3 (1 - c^4)}{16} = 0,453 d^3 .$$

- *сплошная круга часть вала:*

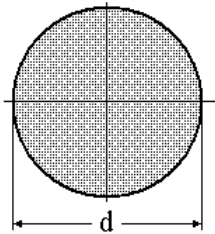


Рисунок 20

Полярный момент инерции:

$$I_{\text{рк}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 0,098 \cdot d^4 .$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_{\text{рк}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0,196 \cdot d^3 .$$

- *прямоугольная часть вала:* $h = 1,5 \cdot d$; $b = \frac{h}{k_1} = \frac{1,5 \cdot d}{1,3} = 1,15 \cdot d$.

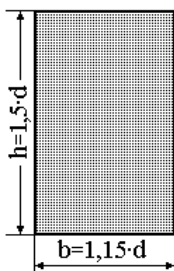


Рисунок 21

Момент инерции при кручении: $I_{\text{к}} = \beta \cdot h \cdot b^3$,

$\beta = 0,177$ зависит от соотношения сторон прямо-

угольника $\frac{h}{b} = 1,3$; (см. табл. 2).

$$I_{\text{к}} = 0,177 \cdot 1,5 \cdot d \cdot 1,15^3 \cdot d^3 = 0,404 \cdot d^4 .$$

Момент сопротивления при кручении:

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2,$$

$\alpha = 0,223$ зависит от соотношения сторон прямоугольника $\frac{h}{b} = 1,3$ (см. табл. 2).

$$W_k = 0,223 \cdot 1,5 \cdot d \cdot 1,15^2 \cdot d^2 = 0,442 \cdot d^3.$$

2. Раскроем статическую неопределимость данной схемы.

При данном типе нагрузки в местах закрепления вала возникают два реактивных момента M_A и M_B в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Степень статической неопределимости $n = 2 - 1$ равна единице. Задача один раз статически неопределима.

Статический аспект задачи:

Из условий равновесия вала:

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = 0; \quad -M_A + M_1 + M_2 - M_3 + M_B = 0. \quad (1.41)$$

Геометрический аспект задачи:

Поскольку оба конца вала жестко закреплены, то угол поворота сечения A относительно B равна нулю: $\varphi_{BA} = 0$.

На основании принципа независимости действия сил абсолютный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания от каждого внешнего момента, и последнее уравнение перепишем в виде

$$\varphi_{BA}(M_A) + \varphi_{BA}(M_1) + \varphi_{BA}(M_2) + \varphi_{BA}(M_3) = 0. \quad (1.42)$$

Физический аспект задачи:

Используя формулу закона Гука, запишем выражения для углов закручивания:

$$\varphi_{BA}(M_A) = -\frac{M_A \cdot (c + b)}{G \cdot I_k} - \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{пр}} - \frac{M_A \cdot (c + b)}{G \cdot I_{рк}};$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{BA}(M_1) &= \frac{M_1 \cdot b}{G \cdot I_{\kappa}} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_{\text{пр}}} + \frac{M_1 \cdot (c + b)}{G \cdot I_{\text{рк}}}; \\
\varphi_{BA}(M_2) &= \frac{M_2 \cdot a}{G \cdot I_{\text{пр}}} + \frac{M_2 \cdot (c + b)}{G \cdot I_{\text{рк}}}; \\
\varphi_{BA}(M_3) &= -\frac{M_3 \cdot b}{G \cdot I_{\text{рк}}}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Если подставить выражения (1.43) в выражение (1.42), получим:

$$\begin{aligned}
& -M_A \cdot \left(\frac{c + b}{I_{\kappa}} + \frac{a}{I_{\text{пр}}} + \frac{c + b}{I_{\text{рк}}} \right) + \\
& + M_1 \cdot \left(\frac{b}{I_{\kappa}} + \frac{a}{I_{\text{пр}}} + \frac{c + b}{I_{\text{рк}}} \right) + \\
& + M_2 \cdot \left(\frac{a}{I_{\text{пр}}} + \frac{c + b}{I_{\text{рк}}} \right) - M_3 \cdot \left(\frac{b}{I_{\text{рк}}} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.44}$$

из которого находим значение M_A . Аналогично можно определить и второй реактивный момент M_B , для чего рассмотрим угол закручивания сечения B относительно A : $\varphi_{AB} = 0$.

В нашем случае:

$$\begin{aligned}
& -M_A \cdot \left(\frac{1,2}{0,404 \cdot d^4} + \frac{1,5}{0,363 \cdot d^4} + \frac{1,2}{0,098 \cdot d^4} \right) + \\
& + M_1 \cdot \left(\frac{1,0}{0,404 \cdot d^4} + \frac{1,5}{0,363 \cdot d^4} + \frac{1,2}{0,098 \cdot d^4} \right) + \\
& + M_2 \cdot \left(\frac{1,5}{0,363 \cdot d^4} + \frac{1,2}{0,098 \cdot d^4} \right) - M_3 \cdot \frac{1,0}{0,098 \cdot d^4} = 0; \\
& -M_A \cdot (2,97 + 4,13 + 12,24) + \\
& + M_1 \cdot (2,48 + 4,13 + 12,24) + \\
& + M_2 \cdot (4,13 + 12,24) - M_3 \cdot 10,2 = 0;
\end{aligned}$$

$$M_A = \frac{M_1 \cdot 18,85 + M_2 \cdot 16,37 - M_3 \cdot 10,2}{19,34} =$$

$$= \frac{5655 + 6548 - 5100}{19,34} = 367,27 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_A = 367,27 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из уравнения (1.41) находим:

$$M_B = -M_1 - M_2 + M_3 + M_A =$$

$$= -300 - 400 + 500 + 367,27 = 167,27 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Строим эпюру крутящих моментов.

4. Подберем размеры поперечных сечений на частях вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_i} \leq [\tau];$$

трубчатая часть вала: $M_k = 332,73 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,453 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{332,73}{0,453 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 2,638 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

круглая часть вала: $M_{k\max} = 332,73 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{k\max}}{0,196 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{332,73}{0,196 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 3,488 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

прямоугольная часть вала: $M_{k\max} = 367,27 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{k\max}}{0,442 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{367,27}{0,442 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 2,749 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Из трех диаметров следует выбирать больший $d = 35$ мм, найденный из условия прочности для круглой части вала.

$$\text{круглая} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{332,73}{0,196 \cdot 3,5^3 \cdot 10^6} = 39,59 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{167,27}{0,196 \cdot 3,5^3 \cdot 10^6} = 19,91 \text{ МПа} ;$$

$$\text{трубчатая} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\text{пр}}} = \frac{332,73}{0,453 \cdot 3,5^3 \cdot 10^6} = 17,13 \text{ МПа} ;$$

$$\text{прямоугольная} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}} = \frac{367,27}{0,442 \cdot 3,5^3 \cdot 10^{-6}} = 19,38 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}} = \frac{67,27}{0,442 \cdot 3,5^3 \cdot 10^{-6}} = 3,55 \text{ МПа} .$$

3. Построим эпюру углов закручивания.

Последовательно для частей вала находим значения углов закручивания (в радианах и в градусах).

$$\begin{aligned} \varphi_{AD} &= \frac{M_{\kappa}^{AD} \cdot c}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{-367,27 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,404 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -1,515 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = -0,087 (\text{град}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{DE} &= \frac{M_{\kappa}^{DE} \cdot b}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{-67,27 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,404 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -1,387 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = -0,079 (\text{град}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{EF} &= \frac{M_{\kappa}^{EF} \cdot a}{G \cdot I_{\text{пр}}} = \frac{332,73 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,363 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 11,453 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = 0,656 (\text{град}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{FH} &= \frac{M_{\kappa}^{FH} \cdot c}{G \cdot I_{\text{рк}}} = \frac{332,73 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,098 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 5,656 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = 0,324 (\text{град}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{HB} &= \frac{M_{\kappa}^{HB} \cdot b}{G \cdot I_{\text{рк}}} = \frac{-167,27 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,098 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -14,218 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = -0,815 (\text{град}) . \end{aligned}$$

Условия жесткости выполнены, допустимый относительный угол закручивания:

$$[\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}; \quad \Leftrightarrow \quad [\theta] = 35 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

$$\theta_{\max} = \theta_{\text{FH}} = \frac{5,656 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 28,28 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] \leq [\theta] = 3,5 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right].$$

Строим эпюру абсолютных углов закручивания:

$$\varphi_{\text{AD}} = -0,087^\circ$$

$$\varphi_{\text{AE}} = \varphi_{\text{AD}} + \varphi_{\text{DE}} = -0,087 - 0,079 = -0,166^\circ$$

$$\varphi_{\text{AF}} = \varphi_{\text{AE}} + \varphi_{\text{EF}} = -0,166 + 0,656 = 0,49^\circ$$

$$\varphi_{\text{AH}} = \varphi_{\text{AF}} + \varphi_{\text{FH}} = 0,49 + 0,324 = 0,814^\circ$$

$$\varphi_{\text{AB}} = \varphi_{\text{AH}} + \varphi_{\text{HB}} = 0,814 - 0,815 \approx 0$$

Если абсолютный угол закручивания сечения A относительно сечения B с заданной точностью ($3 \div 5\%$) буде равняться нулю, то эпюра φ построена верно.

1.10.2. Раскрытие статической неопределимости при параллельном соединении участков бруса

Стальной брус 1 круглого сечения ($d_1 = 3,0$ см) и алюминиевая трубка 2 ($D = 4,6$ см, $d = 4,0$ см) соединены жестким диском, к которому приложен момент $M = 4,5$ кН·м (рис. 18). Модуль сдвига стали $G_1 = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, алюминия $G_2 = 0,27 \cdot 10^5$ МПа.

Раскрыть статическую неопределимость системы, т.е. найти моменты M_1 для бруса и M_2 для трубки.

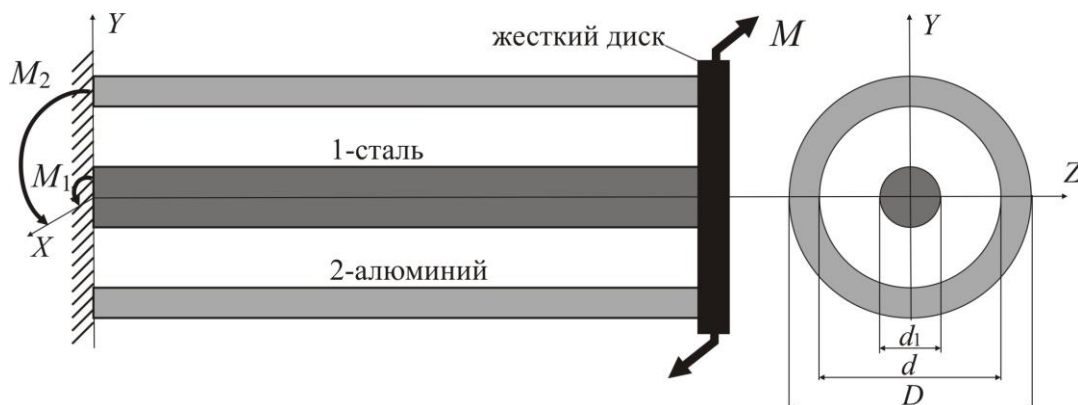


Рисунок 22

Статическая сторона задачи

Внешний момент M распределяется на два бруса, и уравнение статики примет вид:

$$\sum M_z = M_1 + M_2 - M = 0, \text{ или } M_1 + M_2 = M. \quad (1.45)$$

Геометрическая сторона задачи. Поскольку диск, скрепляет алюминиевую трубку и стальной брус, абсолютно жестким телом, то угол поворота сечения A для обоих брусьев одинаков. Уравнение совместности перемещений:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (1.46)$$

Физическая сторона задачи. По закону Гука при кручении: $\varphi = \frac{M_k \ell}{GI_p}$,

получим:

$$\frac{M_1 \ell}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_2 \ell}{G_2 I_{p2}} \quad \text{или} \quad M_1 = M_2 \frac{G_1 I_{p1}}{G_2 I_{p2}}. \quad (1.47)$$

Вычисляем полярные моменты инерции для стального бруса круглого сечения и для кольцевого сечения алюминиевой трубки:

$$I_{p1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 3^4}{32} = 7,95 \approx 8 \text{ см}^4,$$

$$I_{p2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 4,6^4}{32} \left[1 - \left(\frac{4}{4,6} \right)^4 \right] = 19 \text{ см}^4.$$

Подставим в уравнение (1.47) значения G_1, G_2, I_{p1}, I_{p2} , получим:

$$M_1 = M_2 \cdot \frac{0,8 \cdot 10^5}{0,27 \cdot 10^5} \frac{8}{19} = 1,25 \cdot M_2 \quad (1.48)$$

Решая совместно уравнения (1.48) и (1.45), получим значение моментов, действующих в сечениях трубки и бруса:

$$M_2 = \frac{M}{2,25} = \frac{4,5}{2,25} = 2,0 \text{ кНм},$$

$$M_1 = 1,25 M_2 = 2,5 \text{ кНм}.$$

Проверяем правильность решения задачи. Относительный угол поворота диска (сечение A) равен относительному углу поворота крайнего правого сечения стального бруса и алюминиевой трубки:

$$\theta_1 = \frac{2,5 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 10^{-8}} = 0,39 \text{ рад.}$$

$$\theta_2 = \frac{2,0 \cdot 10^3}{0,27 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 19 \cdot 10^{-8}} = 0,39 \text{ рад.}$$

$$\theta_A = \theta_1 = \theta_2$$

Пример 7

Для параллельного расположения участков (внутренняя - прямоугольная, круглая; внешняя - трубчатая) раскрыть статическую неопределенность, из условия прочности определить допустимое значение параметра M .

$k_1 = 1,5$; $k_2 = 2,0$. $d = 30$ мм; $[\tau] = 50$ МПа; $[\Theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}$; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

$a = 2,0$ м; $b = 1,0$ м; $c = 0,5$ м.

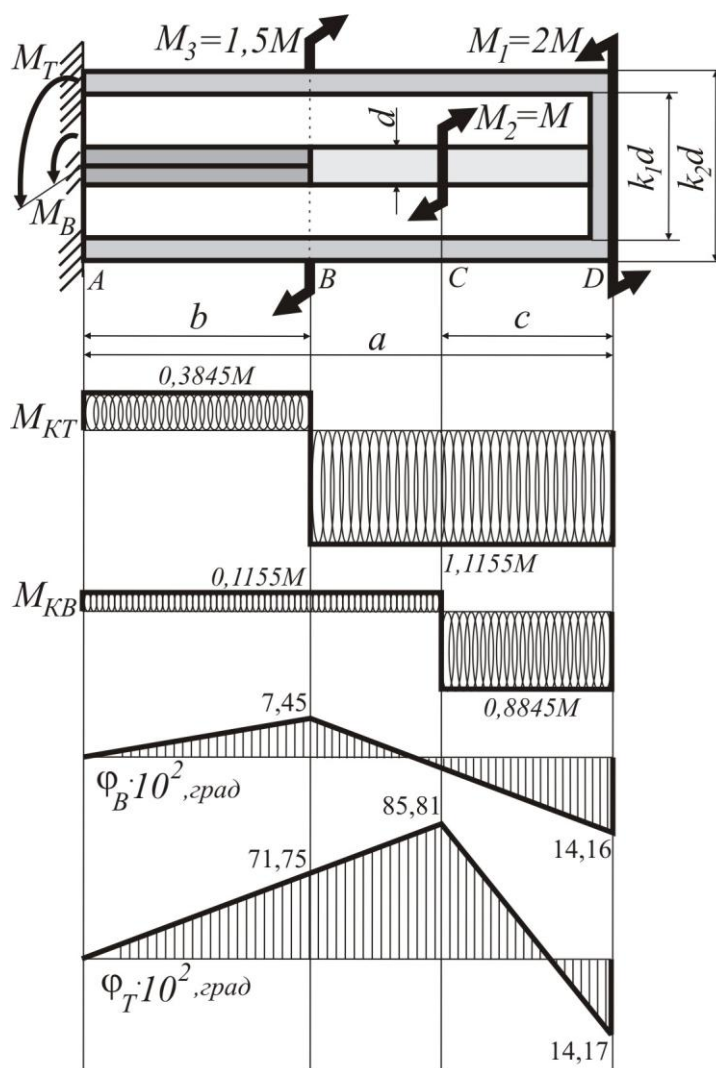
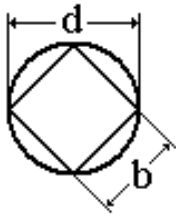


Рисунок 23

Геометрические характеристики сечений:

внутренний вал:



квадратная часть:

$$W_{\kappa} = \alpha \cdot h^3; \alpha = 0,208;$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} d = 21,21 \text{ мм}.$$

$$\beta = 0,141$$

$$W_{\kappa} = 0,208 \cdot 21,21^3 \cdot 10^{-9} = 19,85 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3;$$

$$I_{\kappa} = \beta \cdot h^4 = 0,141 \cdot 21,21^4 \cdot 10^{-12} = 28,54 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

круглая часть:

$$W_{\text{PB}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 30^3 \cdot 10^{-9}}{16} = 53,01 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3;$$

$$I_{\text{PB}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 30^4 \cdot 10^{-12}}{32} = 79,52 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

внешняя трубка:

$$d_{\text{T}} = k_1 \cdot d = 1,5 \cdot 30 = 45 \text{ мм}; \quad D_{\text{T}} = k_2 \cdot d = 2,0 \cdot 30 = 60 \text{ мм}.$$

$$c = \frac{d_{\text{T}}}{D_{\text{T}}} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1,5}{2,0} = 0,75$$

$$I_{\text{PT}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot (1 - c^4)}{32} = \frac{\pi \cdot 60^4 \cdot 10^{-12} \cdot (1 - 0,75^4)}{32} = 927,8 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

$$W_{\text{PT}} = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - c^4)}{16} = \frac{\pi \cdot 60^3 \cdot 10^{-9} \cdot (1 - 0,75^4)}{16} = 309,25 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3.$$

2. Раскрытие статической неопределимости:

Составим уравнения статики: $\sum M_Z = 0$;

$$M_{\text{B}} + M_{\text{T}} - M_3 - M_2 + M_1 = 0, \quad (1.49)$$

где M_{B} – опорный момент, действующий на валу; M_{T} – опорный момент, действующий на трубке в сечении A .

Составляем условия совместимости перемещений: углы закручивания в сечении В на валу и трубке одинаковы:

$$\varphi_T^B = \varphi_B^B. \quad (1.50)$$

Используем закон Гука для углов закручивания:
у трубке:

$$\varphi_T^B = \frac{M_T \cdot a}{G \cdot I_{pT}} - \frac{M_3 \cdot (a - b)}{G \cdot I_{pT}}; \quad (1.51)$$

для вала:

$$\varphi_B^B = \frac{M_B \cdot b}{G \cdot I_k} + \frac{M_B \cdot (a - b)}{G \cdot I_{pB}} - \frac{M_2 \cdot c}{G \cdot I_{pB}}. \quad (1.52)$$

Далее приравниваем полученные уравнения:

$$\frac{M_T \cdot a}{G \cdot I_{pT}} - \frac{M_3 \cdot (a - b)}{G \cdot I_{pT}} = \frac{M_B \cdot b}{G \cdot I_k} + \frac{M_B \cdot (a - b)}{G \cdot I_{pB}} - \frac{M_2 \cdot c}{G \cdot I_{pB}}.$$

После соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned} M_T &= \frac{a - b}{a} \cdot M_3 - \frac{c}{a} \cdot \frac{I_{pT}}{I_{pB}} \cdot M_2 + \frac{I_{pT}}{a} \cdot \left(\frac{b}{I_k} + \frac{a - b}{I_{pB}} \right) \cdot M_B; \\ M_T &= \frac{2,0 - 1,0}{2,0} \cdot M_3 - \frac{0,5}{2,0} \cdot \frac{927,8}{79,52} \cdot M_2 + \\ &+ \frac{927,8}{2,0} \cdot \left(\frac{1,0}{28,54} + \frac{2,0 - 1,0}{79,52} \right) \cdot M_B = \\ &= 0,750 \cdot M - 2,917 \cdot M + 22,088 \cdot M_B = \\ &= -2,167 \cdot M + 22,088 \cdot M_B. \end{aligned} \quad (1.53)$$

С учетом уравнения (1.49), находим:

$$M_T = 0,3845 \cdot M; \quad M_B = 0,1155 \cdot M.$$

Далее строим эпюры крутящих моментов в трубке и на валу.

Определим допустимое значение параметра M из условия прочности на отдельных участках конструкции:

для трубки:

$$\tau_{\max}^T = \frac{M_{\kappa \max}^T}{W_{pT}} \leq [\tau];$$

$$1,1155 \cdot M \leq W_{pT} \cdot [\tau]; \Rightarrow [M]_T = \frac{W_{pT} \cdot [\tau]}{1,1155} = \frac{309,25 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^6}{1,1155};$$

$$[M]_T = 1386,15 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для квадратной части вала:

$$\tau_{\max}^K = \frac{M_{\kappa \max}^K}{W_{\kappa}} \leq [\tau];$$

$$0,1155 \cdot M \leq W_{\kappa} \cdot [\tau]; \Rightarrow [M]_{B1} = \frac{W_{\kappa} \cdot [\tau]}{0,1155} = \frac{19,85 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^6}{0,1155};$$

$$[M]_{B1} = 859,31 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для круглой части вала

$$\tau_{\max}^B = \frac{M_{\kappa \max}^B}{W_{pB}} \leq [\tau];$$

$$0,8845 \cdot M \leq W_{pB} \cdot [\tau]; \Rightarrow [M]_{B2} = \frac{W_{pB} \cdot [\tau]}{0,8845} = \frac{53,01 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^6}{0,8845};$$

$$[M]_{B2} = 299,66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, допустимое значение параметра крутящего момента определенное из условия прочности, необходимо выбрать:

$$[M]_{\text{прочн.}} = \min \left\{ [M]_T; [M]_{B1}; [M]_{B2} \right\} = 299,66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Определим допустимое значение параметра M из условия жесткости на отдельных участках конструкции:

$$[\theta] = \frac{\pi \cdot [\Theta]}{180} = 0,0349 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

для трубки:

$$\theta_{\max}^T = \frac{M_{\kappa \max}^T}{G \cdot I_{pT}} \leq [\theta];$$

$$1,1155 \cdot M \leq G \cdot I_{pT} \cdot [\theta]; \Rightarrow$$

$$[M]_T = \frac{G \cdot I_{pT} \cdot [\theta]}{1,1155} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 927,8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0349}{1,1155};$$

$$[M]_T = 2322,20 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для квадратной части вала:

$$\theta_{\max}^K = \frac{M_{\kappa \max}^K}{G \cdot I_{\kappa}} \leq [\theta];$$

$$0,1155 \cdot M \leq G \cdot I_{\kappa} \cdot [\theta]; \Rightarrow$$

$$[M]_{B1} = \frac{G \cdot I_{\kappa} \cdot [\theta]}{0,1155} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 28,54 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0349}{0,1155};$$

$$[M]_{B1} = 689,90 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для круглой части вала:

$$\theta_{\max}^B = \frac{M_{\kappa \max}^B}{G \cdot I_{pB}} \leq [\theta];$$

$$0,8845 \cdot M \leq G \cdot I_{pB} \cdot [\theta]; \Rightarrow$$

$$[M]_{B2} = \frac{G \cdot I_{pB} \cdot [\theta]}{0,8845} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 79,52 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0349}{0,8845};$$

$$[M]_{B2} = 251,01 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, допустимое значение параметра крутящего момента определенное из условия жесткости необходимо выбрать:

$$[M]_{\text{жестк.}} = \min \left\{ [M]_T; [M]_{B1}; [M]_{B2} \right\} = 251,01 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для того чтобы конструкция удовлетворяла условию прочности и условию жесткости одновременно, из двух определенных допустимых значений параметра крутящего момента необходимо выбрать меньше.

$$[M] = \min \left\{ [M]_{\text{проч.}} ; [M]_{\text{жестк.}} \right\} = 251,01 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вычислим абсолютные углы закручивания на отдельных участках и построим эпюры распределения углов закручивания в трубке и на валу:

$$\frac{M}{G} = \frac{251,01}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 313,7625 \cdot 10^{-11};$$

трубка:

$$\begin{aligned} \varphi_{AC}^T &= \frac{0,3845 \cdot M \cdot b}{G \cdot I_{\text{PT}}} = \frac{0,3845 \cdot 1,0}{927,8 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{M}{G} = 4,144 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 4,144 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 7,45 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{CB}^T &= -\frac{1,1155 \cdot M \cdot (a-b)}{G \cdot I_{\text{PT}}} = -\frac{1,1155 \cdot 1,0}{927,8 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{M}{G} = -12,023 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= -12,023 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -21,61 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \end{aligned}$$

$$\varphi_{AB}^T = \varphi_{AC}^T + \varphi_{CB}^T = (7,45 - 21,61) \cdot 10^{-2} = -14,16 \cdot 10^{-2} \text{ град.}$$

вал:

$$\begin{aligned} \varphi_{AC}^B &= \frac{0,1155 \cdot M \cdot b}{G \cdot I_{\text{к}}} = \frac{0,1155 \cdot 1,0}{28,54 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{M}{G} = 40,470 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 40,470 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 72,75 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{CD}^B &= \frac{0,1155 \cdot M \cdot (a-b-c)}{G \cdot I_{\text{PB}}} = \frac{0,1155 \cdot 0,5}{79,52 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{M}{G} = 7,262 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 7,262 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 13,06 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{DB}^B &= -\frac{0,8845 \cdot M \cdot c}{G \cdot I_{\text{PB}}} = -\frac{0,8845 \cdot 0,5}{79,52 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{M}{G} = -55,615 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= -55,615 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -99,98 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{AB}^B &= \varphi_{AC}^B + \varphi_{CD}^B + \varphi_{CB}^B = \\ &= (72,75 + 13,06 - 99,98) \cdot 10^{-2} = -14,17 \cdot 10^{-2} \text{ град}.\end{aligned}$$

Как видим, углы закручивания трубки и вала в сечении B относительно неподвижного сечения A практически совпадают – погрешность несовпадения равна:

$$\xi = \frac{\left| \varphi_{AB}^T - \varphi_{AB}^B \right|}{\left| \varphi_{AB}^T + \varphi_{AB}^B \right|} \cdot 100 \% = \frac{0,01}{14,165} \cdot 100 \% \approx 0,07 \%$$

2

Максимальный относительный угол закручивания будет на участке DB вала:

$$\begin{aligned}\Theta_{\max} &= \frac{0,8845 \cdot M}{G \cdot I_{pB}} = \frac{0,8845}{79,52 \cdot 10^{-9}} \frac{M}{G} = 111,230 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 111,230 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \\ &= 199,96 \cdot 10^{-2} \frac{\text{град}}{\text{м}} \leq [\Theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.\end{aligned}$$

Допустимые значения крутящих моментов, определенных из условия прочности меньше выбранного из условия жесткости значения, поэтому можно считать, что и условие прочности будет выполняться на всех участках.

2. Расчетно-проектировочное задание

Цель изучения раздела «Кручение» в курсе «Сопротивление материалов» - научиться основам инженерного расчета элементов конструкций машин и механизмов на прочность и жесткость при нагрузке, действующей в плоскости поперечного сечения (крутящего момента) с учетом при этом условий работы, свойств и различных типов поперечных сечений.

Для лучшей организации и более эффективной самостоятельной работы студентов, в соответствии с требованиями программы курса «Сопротивление материалов», студентам предлагается к выполнению расчетно-проектировочное задание (РПЗ) по теме «Расчеты бруса при кручении». Выполняя эту работу, нужно практически ознакомиться с методами вычисления крутящих моментов, построением эпюр моментов и напряжений, определением размеров и формы поперечного сечения для различных схем, обеспечивающих условия прочности и жесткости.

2.1. Состав расчетно-проектировочного задания

Расчетно-проектировочное задание состоит из трех этапов:

1. Решение предложенных преподавателем задач для определенных вариантов расчетных схем и исходных данных, оформление их в соответствии с требованиями кафедры «Механики сплошных сред и сопротивление материалов».

2. Написание контрольных работ по теме РПЗ.

3. Защита РПЗ. Защита включает в себя объяснение методов и принципов решения задач и ответ на контрольные теоретические вопросы. Количество и объем этих вопросов определяется преподавателем индивидуально для каждого студента.

Цель работы – построение эпюр крутящих моментов, определение касательных напряжений для круглого (кольцевого) валов, раскрытие статической неопределимости предложенных расчетных схем, определение внутренних силовых факторов на отдельных участках бруса, построения эпюр, проведение проектировочного расчета для определения размеров поперечного сечения, обеспечивающие заданный коэффициент запаса прочности.

Дано:

1. Схема заданной системы с указанием длин участков и внешнего нагружения.
2. Форма и соотношение размеров поперечного сечения.
3. Допустимое касательное напряжение $[\tau]$, допустимый относительный угол закручивания $[\theta]$, модуль сдвига материала G .

РПЗ состоит из двух обязательных для решения задач:

1. Определить рациональное расположение шкивов и из условий прочности и жесткости, выбрать размеры поперечных сечений (диаметр круглого и кольцевого валов) для статически определимой системы. Сравнить их веса. Варианты расчетных схем приведены в приложении 1, а численные данные - в таблице Д.1.
2. Для заданной статически неопределяемых системы с последовательным расположением участков вала из расчета на прочность определить размеры поперечных сечений на всех участках вала и построить эпюру углов закручивания, сравнив их значение с допустимым значением угла закручивания. В случае необходимости отыскать размеры поперечных сечений вала из условия жесткости. Варианты расчетных схем приведены в приложении 2, а численные данные - в таблице Д.2.

2.2. Порядок выполнения задания

Задача 1. Для статически определимого вала, нагруженного крутящими моментами из условия прочности и жесткости, определить размеры поперечного сечения.

1. Выписать для заданного варианта многочисленные данные. В определенном масштабе начертить схему заданной системы с указанием ее линейных размеров и внешних нагрузок.
2. Определить значение крутящих моментов на шкивах.
3. Построить для заданной схемы эпюры крутящих моментов.
4. Определить диаметр сплошного круглого вала из условия прочности.
5. Расположить шкивы рационально и для этого случая построить эпюру крутящих моментов.
6. Определить размеры поперечного сечения (диаметры сплошного и трубчатого валов) для рационального расположения шкивов из условий прочности и жесткости. Выбрать больший диаметр.

7. Определить касательные напряжения на разных отрезках вала согласно значениями эпюры крутящих моментов и построить эпюру касательных напряжений для сплошного вала.
8. Сравнить веса сплошного вала для заданной системы и сплошного вала для рационального расположения шкивов. Также сравнить веса сплошного и трубчатого валов для рационального расположения шкивов.
9. Построить эпюру углов закручивания рационального сплошного вала, мгновенно остановив один из шкивов вала.
10. Построить эпюры касательных напряжений в поперечном сечении сплошного и трубчатого валов.

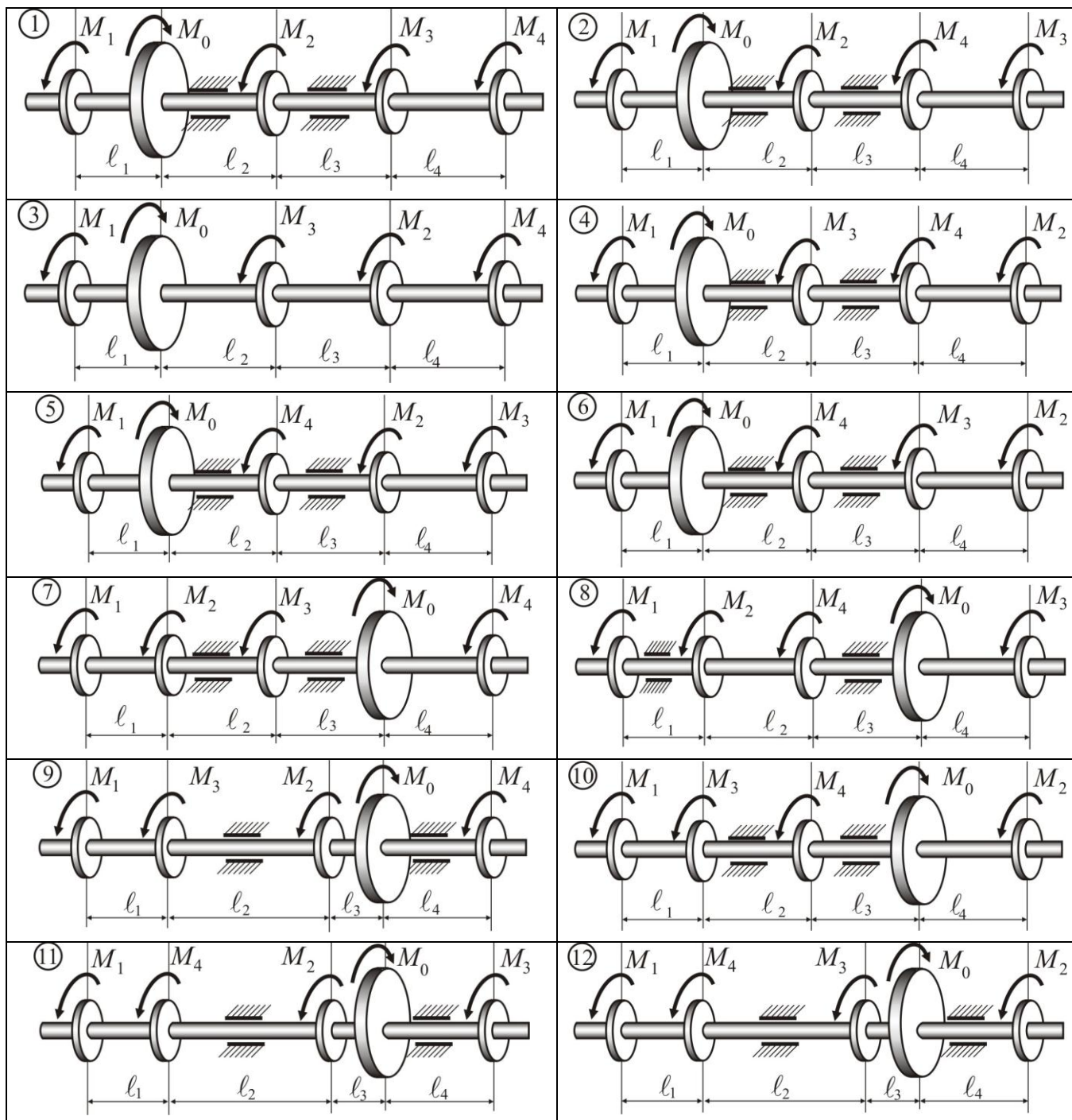
Задача 2. Для статически неопределимой системы при кручении (последовательное расположение участков вала) из условия прочности и жесткости определить размеры поперечного сечения.

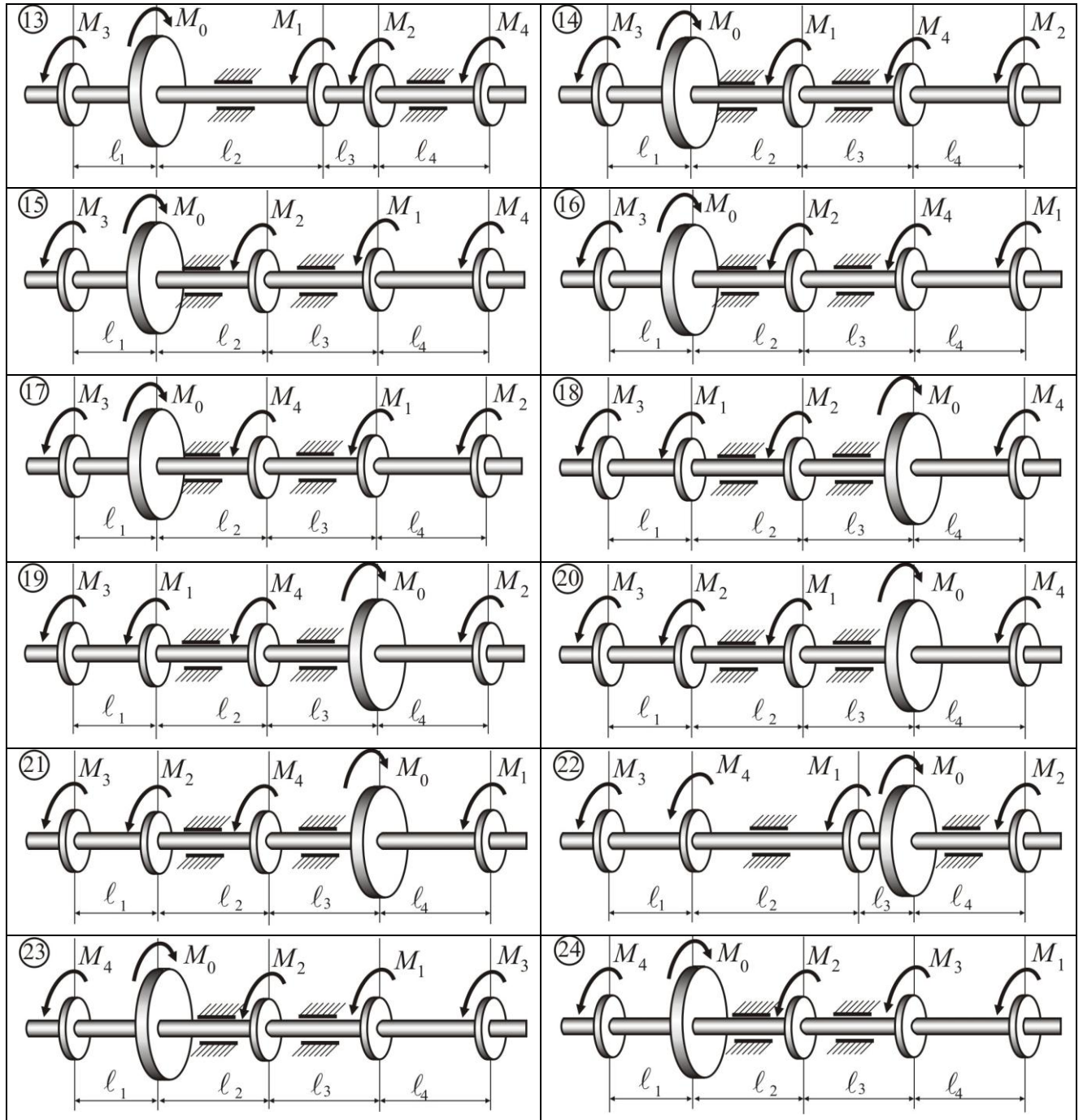
1. Для заданного варианта задания выписать многочисленные данные и в определенном масштабе начертить схему заданной системы с указанием линейных размеров и внешних нагрузок.
2. Установить степень статической неопределимости системы.
3. Определить геометрические характеристики поперечных сечений сплошного, трубчатого и прямоугольного валов через параметр - диаметра сплошного вала.
4. Статический аспект задачи. Составить и записать уравнения статики. Выбрать основную статически определяемую систему, мысленно отбросив одну из опор и заменив ее действие на крутящий момент. Раскрыть статическую неопределимость системы.
5. Геометрический аспект задачи. Рассмотреть совместное деформирование основной системы. Записать уравнения совместности перемещений: углов закручивания. При этом, угол поворота сечения на опоре B относительно сечения на опоре C равен нулю.
6. Физический аспект задачи. Используем закон Гука для записи выражений для углов закручивания.
7. Построить эпюру крутящих моментов. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения.
8. Построить эпюры касательных напряжений для различных отрезков схемы.
9. Построить эпюру углов закручивания и сделать проверку условия жесткости.

2.3. Расчетные схемы и численные данные

Приложение 1.

2.3.1. Задача 1. Статически определимый вал



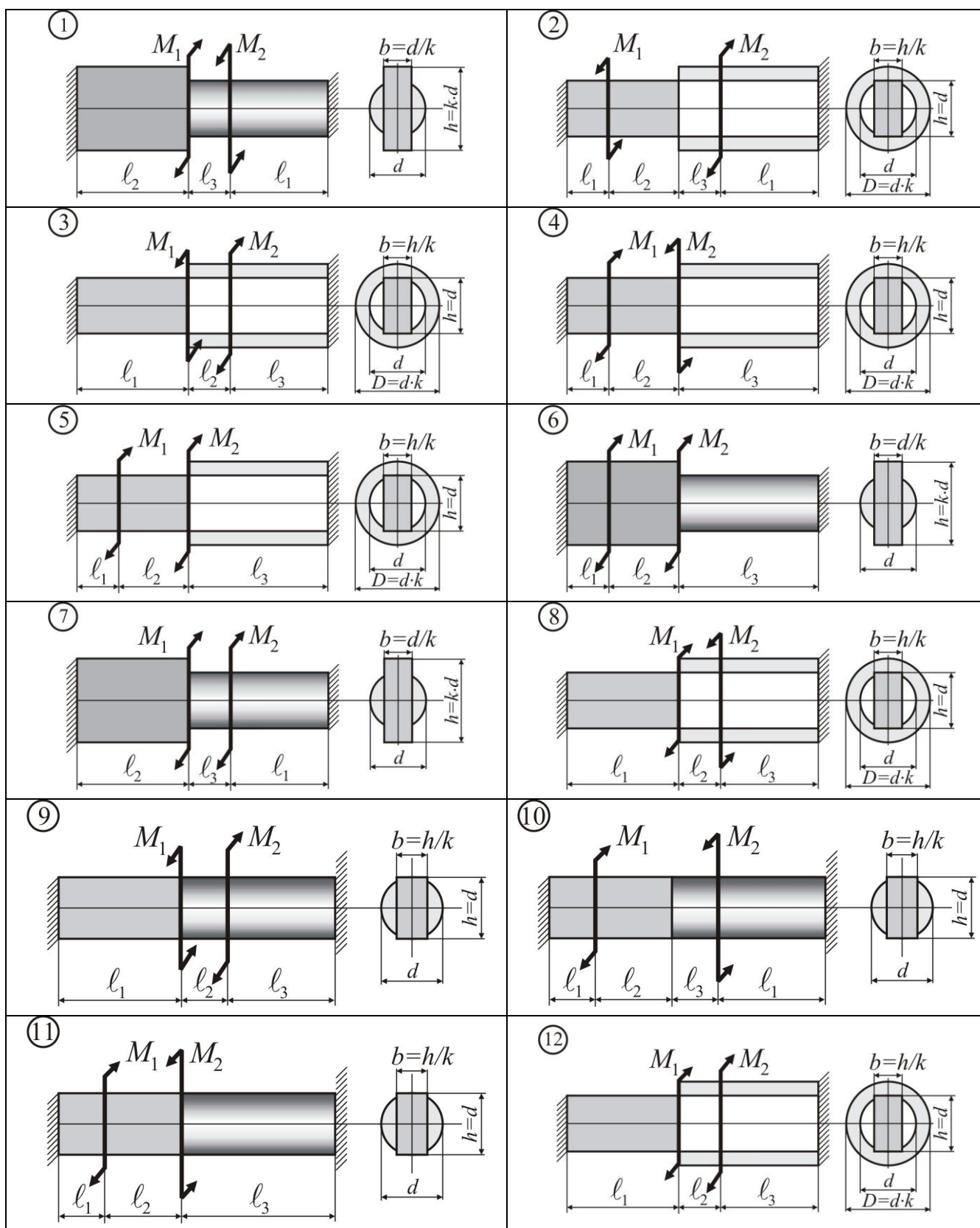


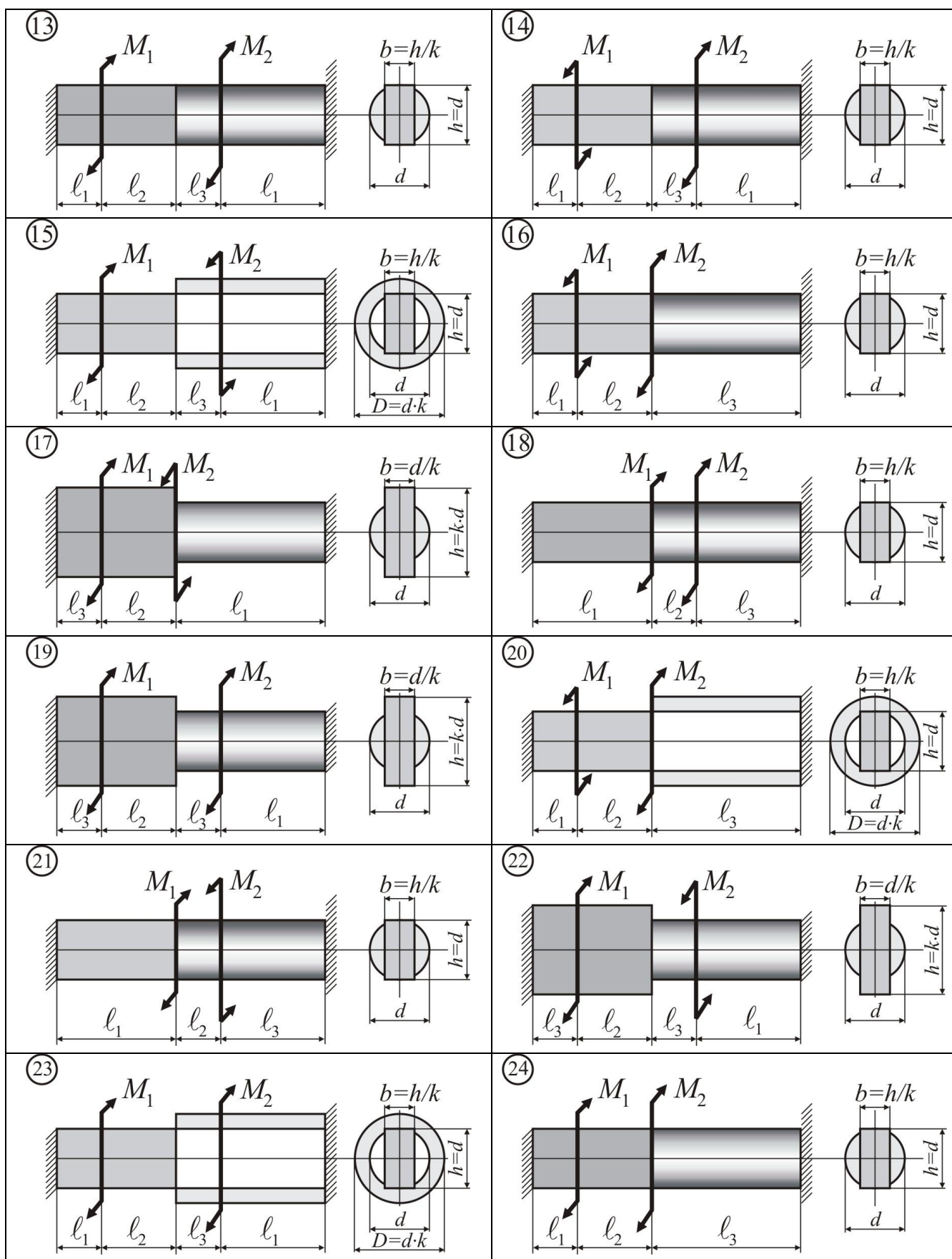
Численные данные к задаче 1

№ вар.	K_1 , кВт	K_2 , кВт	K_3 , кВт	K_4 , кВт	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	l_4 , м	n , об./хв.	$[\tau]$, МПа	$[\theta]$, град/м
1	2,0	3,5	2,8	2,2	0,5	0,2	0,6	0,2	238	28	2,0
2	2,5	3,2	3,0	2,8	0,1	0,4	0,4	0,6	286	32	1,8
3	2,8	3,0	3,5	2,2	0,3	0,6	0,8	0,4	334	40	1,9
4	3,0	2,8	2,2	3,5	0,5	0,5	0,6	0,4	382	35	1,7
5	3,2	2,5	2,5	2,8	0,1	0,3	0,4	0,2	248	32	2,1
6	3,5	2,0	2,5	3,0	0,2	0,4	0,5	0,1	267	40	2,2
7	4,0	2,2	3,8	2,5	0,5	0,2	0,4	0,1	382	32	2,0
8	2,5	3,8	2,2	4,0	0,4	0,3	0,5	0,2	477	40	2,2
9	2,8	2,6	3,4	3,2	0,3	0,6	0,2	0,4	382	45	2,0
10	3,5	3,4	2,6	2,2	0,4	0,5	0,1	0,2	430	32	1,8
11	3,4	2,6	3,5	2,5	0,2	0,3	0,5	0,5	450	40	2,2
12	2,5	2,2	3,8	4,2	0,5	0,1	0,2	0,6	477	35	2,1
13	3,5	4,0	2,0	2,5	0,6	0,2	0,3	0,5	572	45	2,0
14	4,0	3,5	2,2	2,8	0,4	0,2	0,3	0,1	667	32	1,9
15	4,2	3,8	2,5	2,5	0,1	0,3	0,2	0,4	765	40	2,1
16	3,8	3,2	2,4	2,6	0,2	0,5	0,4	0,1	572	35	2,0
17	3,2	2,8	3,5	2,5	0,5	0,2	0,3	0,6	382	32	2,2
18	2,5	3,5	3,2	2,8	0,6	0,3	0,4	0,5	286	40	1,8
19	3,5	3,5	4,2	2,8	0,4	0,2	0,3	0,5	248	45	1,8
20	2,5	4,0	2,0	3,5	0,5	0,6	0,2	0,3	430	50	2,0
21	3,0	2,8	3,2	2,0	0,1	0,3	0,6	0,2	382	40	2,2
22	2,5	3,5	4,0	2,0	0,3	0,2	0,5	0,5	477	35	2,0
23	2,0	3,0	3,0	4,0	0,5	0,5	0,3	0,2	450	40	1,8
24	2,5	3,0	2,8	3,2	0,4	0,5	0,3	0,2	475	45	2,0

Примечание. Модуль сдвига материала бруса – $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа

2.3.2. Задача 2. Статически неопределимый вал (последовательное соединение)





Численные данные к задаче 2.

№ вар	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	k	M_1 , Нм	M_2 , Нм	$[\tau]$, МПа	$[\theta]$, град/м
1	1,5	1,0	0,3	1,3	200	400	40	2,0
2	1,4	0,9	0,4	1,5	210	300	48	1,8
3	1,6	1,1	0,5	1,4	280	450	45	2,2
4	1,8	1,0	0,4	1,5	300	500	50	2,0
5	1,5	0,9	0,4	1,6	250	350	30	1,8
6	1,2	0,8	0,3	1,2	300	400	40	1,8
7	1,1	0,5	0,2	1,3	450	500	50	2,2
8	1,4	0,5	0,1	1,4	480	500	45	2,0
9	1,6	1,1	0,5	1,3	300	400	40	1,8
10	1,2	0,7	0,2	1,3	250	300	35	2,0
11	1,5	0,8	0,3	1,2	350	400	40	2,2
12	1,6	1,0	0,5	1,5	400	450	50	2,2
13	1,2	0,8	0,5	1,6	450	500	45	2,0
14	1,5	0,5	0,5	1,8	350	400	40	1,8
15	1,3	0,6	0,2	1,2	280	350	30	2,0
16	1,4	0,8	0,4	1,3	200	350	35	1,8
17	1,3	0,7	0,4	1,4	300	400	50	2,4
18	1,2	0,5	0,2	1,5	350	500	52	2,2
19	1,0	0,5	0,2	1,6	200	350	40	1,8
20	1,5	1,0	0,5	1,5	300	400	50	1,8
21	1,6	1,4	1,0	1,6	250	450	40	2,0
22	1,1	0,5	0,1	1,4	300	450	35	1,8
23	1,2	0,8	0,3	1,2	250	450	40	2,0
24	1,1	1,0	0,5	1,6	350	400	50	2,2

Примечание. Модуль сдвига материала бруса – $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа

Примеры решения задач

2.4. Образец выполнения задачи 1

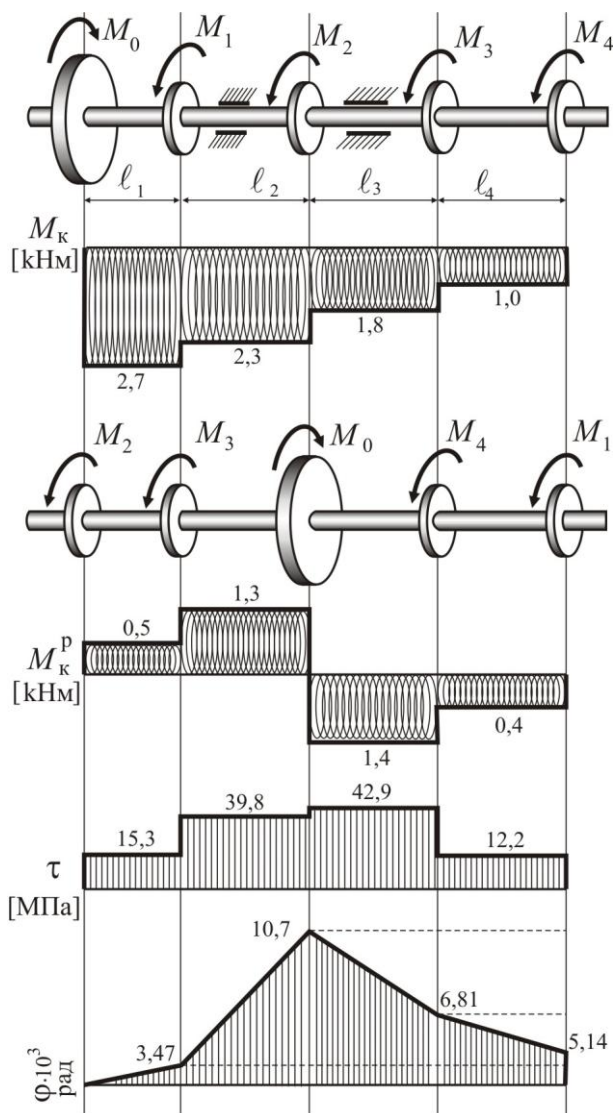


Рисунок 24

Порядок решения задачи:

1. Начертить схему системы.
2. Определить значения крутящих моментов:

$$M_1 = 9,55 \cdot \frac{20}{478} \cong 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = 9,55 \cdot \frac{25}{478} \cong 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = 9,55 \cdot \frac{40}{478} \cong 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

(2.1)

Мощность, передаваемая шкивами, равна:

$$N_1 = 20 \text{ кВт}; \quad N_2 = 25 \text{ кВт};$$

$$N_3 = 40 \text{ кВт}; \quad N_4 = 50 \text{ кВт},$$

при угловой скорости:

$$n = 478 \frac{\text{об.}}{\text{хв.}}$$

Длина участков вала:

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 0,4 \text{ м};$$

$$l_3 = 0,2 \text{ м}; \quad l_4 = 0,3 \text{ м}.$$

Допустимые касательные напряжения:

$$[\tau] = 50 \text{ МПа}.$$

Допустимый относительный угол закручивания:

$$[\Theta] = 2,0 \frac{\text{град.}}{\text{м}}.$$

$$[\theta] = \frac{\pi \cdot [\Theta]}{180} = 0,035 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

Модуль сдвига – $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$

$$M_4 = 9,55 \cdot \frac{50}{478} \cong 1,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия статики:

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0; \\ M_0 &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0,4 + 0,5 + 0,8 + 1,0 = 2,7 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. Согласно с методом сечений эпюра крутящих моментов имеет вид M_k .
4. Определение диаметра d сплошного вала. Участок ℓ_1 является самым опасным.

Из условия прочности:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_{k \max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow \\ d &\geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,7 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м}. \end{aligned}$$

5. Расположим шкивы рационально и построим эпюру M_k^p . Рекомендуется шкивы, имеющие меньший момент, располагать по краям вала. При этом необходимо учитывать, что ведущий шкив располагается посередине, а разница между суммой крутящих моментов слева и суммой крутящих моментов справа должна быть минимальной: $\min (\sum M_k^{\text{лев}} - \sum M_k^{\text{прав}})$
6. Определение размеров поперечного сечения (диаметра сплошного вала):
 - из условия прочности:

$$d_p^{\text{проч.}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{k \max}^p}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,0522 \text{ м};$$

- из условия жесткости:

$$d_p^{\text{жест.}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{k \max}^p}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,5 \cdot 10^{-2}}} = 0,0475 \text{ м}.$$

Значение диаметра для сплошного вала избирается как большее из двух значений – $d_p = \max \left\{ d_p^{\text{проч.}} ; d_p^{\text{жест.}} \right\}$.

Диаметр сплошного вала для рационального расположения шкивов выбираем $d = 55 \text{ мм}$.

Момент сопротивления круглого сплошного вала

$$W_p = \frac{\pi \cdot d_p^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,055^3}{16} = 32,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Диаметр трубчатого вала для рационального расположения шкивов при $c = d/D = 0,8$ вычисляется по формуле

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к max}}^p}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 0,0622 \text{ м}.$$

$$D = 65 \text{ мм}.$$

При этом максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{к max}}^p}{W_p} = \frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6,5^3 \cdot 10^{-6} (1 - 0,8^4)} \approx 44 \text{ МПа}.$$

7. Касательные напряжения на участках вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{\text{к1}}^p}{W_p} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{32,67 \cdot 10^{-6}} = 15,3 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_2 = \frac{M_{\text{к2}}^p}{W_p} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{32,67 \cdot 10^{-6}} = 39,8 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_3 = \frac{M_{\text{к3}}^p}{W_p} = \frac{-1,4 \cdot 10^3}{32,76 \cdot 10^{-6}} = -42,9 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_4 = \frac{M_{\text{к4}}^p}{W_p} = \frac{-0,4 \cdot 10^3}{32,67 \cdot 10^{-6}} = -12,2 \text{ МПа} .$$

Знак касательных напряжений особого значения не имеет, поэтому при построении эпюры τ возможно откладывание ординат по одну сторону.

8. Вес сплошного вала заданной системы и вес сплошного вала при рациональном расположении шкивов соотносятся как площади поперечных сечений:

$$\frac{A}{A_p} = \left(\frac{d}{d_p} \right)^2 = \left(\frac{65}{55} \right)^2 = 1,4 .$$

Соотношение весов сплошного и трубчатого валов дает:

$$\frac{A_p}{A_p^{тп.}} = \left(\frac{d_p}{D} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - c^2} \approx 2 .$$

Жесткость на кручение сплошного вала:

$$G \cdot I_p = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,055^4}{32} = 71,9 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 .$$

9. Эпюра углов закручивания на участках вала:

$$\varphi_1 = \frac{M_{к1}^p \cdot \ell_1}{G \cdot I_p} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{71,9 \cdot 10^3} = 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{к2}^p \cdot \ell_2}{G \cdot I_p} = \frac{1,3 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{71,9 \cdot 10^3} = 7,23 \cdot 10^{-3} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{к3}^p \cdot \ell_3}{G \cdot I_p} = \frac{-1,4 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{71,9 \cdot 10^3} = -3,89 \cdot 10^{-3} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{к4}^p \cdot \ell_4}{G \cdot I_p} = \frac{-0,4 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{71,9 \cdot 10^3} = -1,67 \cdot 10^{-3} \text{ рад} .$$

Мгновенно остановим шкив M_2 и построим эпюру φ на первом участке. Примем за нулевую отметку угол закручивания первого участка и построим эпюру на втором участке и т.д. на третьим и четвертым участках.

Суммарный угол закручивания

$$\varphi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^4 \varphi_i = (3,47 + 7,23 - 3,89 - 1,67) \cdot 10^{-3} = 5,14 \cdot 10^{-3} \text{ рад} .$$

Наибольший относительный угол закручивания

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\kappa \max}^p}{G \cdot I_p} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{71,9 \cdot 10^3} = 19,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад} / \text{м} .$$

Условие жесткости $\theta_{\max} \leq [\theta]$ выполняется.

10. Построим эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях сплошного и трубчатого валов.

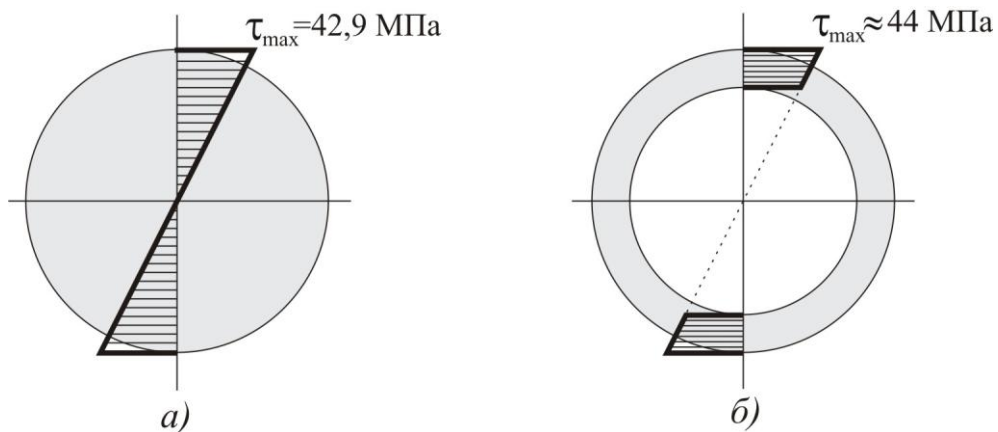


Рисунок 25

2.5. Образец выполнения задачи 2

Для последовательного расположения участков вала (прямоугольная (квадрат), круглая) раскрыть статическую неопределенность, исходя из условий прочности и жесткости определить размеры поперечного сечения.

Дано:

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 1,0 \text{ м}; \quad l_3 = 2,0 \text{ м}. \quad M_1 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$k = 1,25; \quad G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad [\tau] = 50 \text{ МПа}; \quad [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

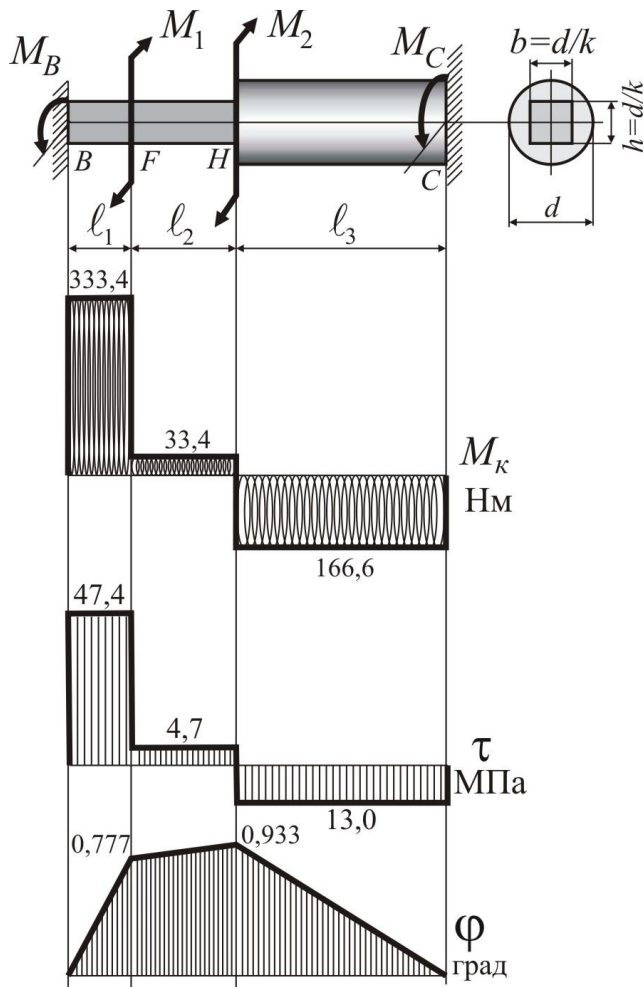


Рисунок 26

4. Определим геометрические характеристики поперечных сечений участков вала:

– сплошная круглая часть вала:

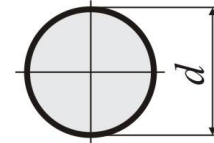


Рисунок 27

Полярный момент инерции:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4.$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3.$$

– квадратная часть вала: $h = 0,5 \cdot d$; $b = 0,5 \cdot d$.

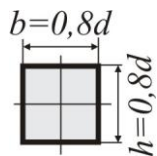


Рисунок 28

Момент инерции при кручении: $I_k = \beta \cdot h \cdot b^3$,

$\beta = 0,141$ зависит от соотношения сторон прямоугольника

$$\frac{h}{b} = 1,0; \text{ (см. табл. 2).}$$

$$I_k = 0,141 \cdot 0,8 \cdot d \cdot 0,8^3 \cdot d^3 \approx 0,06 \cdot d^4.$$

Момент сопротивления при кручении:

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2,$$

$\alpha = 0,208$ зависит от соотношения сторон прямоугольника $\frac{h}{b} = 1,0$ (см. табл. 2).

$$W_k = 0,208 \cdot 0,8 \cdot d \cdot 0,8^2 \cdot d^2 \approx 0,11 \cdot d^3.$$

5. Раскроем статическую неопределимость данной схемы.

При данном типе нагрузки в местах закрепления вала возникают два реактивных момента M_A и M_B в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Степень статической неопределимости $n = 2 - 1$ равна единице. Задача один раз статически неопределима.

Статический аспект задачи:

Из условий равновесия вала:

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = 0; \quad -M_B + M_1 + M_2 - M_C = 0. \quad (2.3)$$

Геометрический аспект задачи:

Поскольку оба конца вала жестко закреплены, то угол поворота сечения B относительно C равна нулю: $\varphi_{BC} = 0$.

На основании принципа независимости действия сил абсолютный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания от каждого внешнего момента, и последнее уравнение перепишем в виде

$$\varphi_{BC}(M_1) + \varphi_{BC}(M_2) + \varphi_{BC}(M_C) = 0. \quad (2.4)$$

Физический аспект задачи:

Используя формулу закона Гука, запишем выражения для углов закручивания:

$$\begin{aligned} \varphi_{BC}(M_1) &= \frac{M_1 \cdot \ell_1}{G \cdot I_k}; \\ \varphi_{BC}(M_2) &= \frac{M_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{G \cdot I_k}; \\ \varphi_{BC}(M_C) &= -\frac{M_C \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{G \cdot I_k} - \frac{M_C \cdot \ell_3}{G \cdot I_p}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если подставить выражения (2.5) в выражение (2.4), получим:

$$-M_C \cdot \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{I_k} + \frac{\ell_3}{I_p} \right) + M_1 \cdot \frac{\ell_1}{I_k} + M_2 \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2}{I_k} = 0, \quad (2.6)$$

из которого находим значение M_C . Аналогично можно определить и второй реактивный момент M_B , для чего рассмотрим угол закручивания сечения B относительно C : $\varphi_{CB} = 0$.

В нашем случае:

$$-M_C \cdot \left(\frac{1,5}{0,06 \cdot d^4} + \frac{2,0}{0,1 \cdot d^4} \right) + M_1 \cdot \left(\frac{0,5}{0,06 \cdot d^4} \right) + M_2 \cdot \left(\frac{1,5}{0,06 \cdot d^4} \right) = 0;$$

$$-45,0 M_C + 8,33 M_1 + 25,0 M_2 = 0;$$

$$M_C = \frac{8,33 M_1 + 25,0 M_2}{45,0} = \frac{8,33 \cdot 300 + 25,0 \cdot 200}{45,0} = \frac{2499 + 5000}{45,0} \approx 166,6 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Из уравнения (2.3) находим:

$$M_B = M_1 + M_2 - M_C = 300 + 200 - 166,6 \approx 333,4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Строим эпюру крутящих моментов.

4. Подберем размеры поперечных сечений на частях вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_i} \leq [\tau];$$

квадратная часть вала: $M_{\text{к max}} = 333,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к max}}}{0,11 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{333,4}{0,11 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,0393 \text{ м}.$$

круглая часть вала: $M_{\text{к max}} = 166,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к max}}}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{166,6}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,0255 \text{ м}.$$

Диаметр следует округлить в большую сторону, чтобы он оканчивался в миллиметрах на 0, 2, 5, 8: $d = \max \{d_1; d_2\} = 40 \text{ мм}$.

$$\text{квадратная} \quad \tau_{1 \max} = \frac{M_{\kappa 1}}{W_{\kappa}} = \frac{333,4}{0,11 \cdot 4,0^3 \cdot 10^{-6}} = 47,4 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_{2 \max} = \frac{M_{\kappa 2}}{W_{\kappa}} = \frac{33,4}{0,11 \cdot 4,0^3 \cdot 10^{-6}} = 4,7 \text{ МПа} .$$

$$\text{круглая} \quad \tau_{3 \max} = \frac{M_{\kappa 3}}{W_{\rho}} = \frac{166,6}{0,2 \cdot 4,0^3 \cdot 10^{-6}} = 13,0 \text{ МПа} ;$$

6. Построим эпюру углов закручивания.

Последовательно для частей вала находим значения углов закручивания (в радианах и в градусах).

$$\begin{aligned} \varphi_{BF} &= \frac{M_{\kappa}^{BF} \cdot \ell_1}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{333,4 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,06 \cdot 4,0^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,01356 \text{ (рад)} = 0,777 \text{ (град)} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{FH} &= \frac{M_{\kappa}^{FH} \cdot \ell_2}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{33,4 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,06 \cdot 4,0^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,00272 \text{ (рад)} = 0,156 \text{ (град)} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{HC} &= \frac{M_{\kappa}^{HC} \cdot \ell_3}{G \cdot I_{\rho}} = \frac{-166,6 \cdot 2,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 4,0^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,01627 \text{ (рад)} = -0,932 \text{ (град)} ; \end{aligned}$$

Условия жесткости выполнены, допустимый относительный угол закручивания:

$$[\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}} ; \quad \Leftrightarrow \quad [\theta] = 35 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{м}} .$$

$$\theta_{BF} = \frac{\varphi_{BF}}{\ell_1} = \frac{0,01356}{0,5} = 27,12 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] ;$$

$$\theta_{FH} = \frac{\varphi_{FH}}{\ell_2} = \frac{0,00272}{1,0} = 2,72 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] ;$$

$$\theta_{\text{HC}} = \frac{\varphi_{\text{HC}}}{l_3} = \frac{0,01627}{2,0} = 8,14 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right];$$

$$\theta_{\text{max}} = \theta_{\text{BF}} = 27,12 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] \leq [\theta] = 35,0 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right].$$

Строим эпюру абсолютных углов закручивания:

$$\varphi_{\text{BF}} = 0,777^\circ$$

$$\varphi_{\text{FBH}} = \varphi_{\text{BF}} + \varphi_{\text{FH}} = 0,777 + 0,156 = 0,933^\circ$$

$$\varphi_{\text{BC}} = \varphi_{\text{BH}} + \varphi_{\text{HC}} = 0,933 - 0,932 \approx 0$$

Если абсолютный угол закручивания сечения B относительно сечения C с заданной точностью (3÷5 %) буде равняться нулю, то эпюра φ построена верно.

Контрольные вопросы

1. Что называется кручением?
2. Какие внутренние силовые факторы имеют место при кручении?
3. По какой формуле вычисляются касательные напряжения при кручении валов круглого поперечного сечения?
4. По какой формуле вычисляются касательные напряжения при кручении валов кольцевого поперечного сечения?
5. Как выглядит закон Гука при кручении?
6. Какие геометрические характеристики используются при кручении некруглых профилей?
6. Где касательные напряжения достигают наибольшего значения при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения?
7. Что следует понимать под рациональным расположением шкивов?
8. Какие системы называются статически неопределимыми?
9. В каком порядке производится расчет статически неопределимых систем (методика расчета) при кручении?
10. В чем заключается деформационная проверка правильности решения статически неопределимых задачи при кручении?

Список литературы

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський – Київ. : Вища школа, 1993. – 655 с.: іл.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев – Москва. : Наука, 1986. – 512 с.
3. Решетов Д.Н. Детали машин / Д.Н. Решетов – Москва. : Машиностроение, 1989. – 496 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Расчеты на прочность и жесткость при кручении	4
1.1. Основные понятия и определения	4
1.2. Касательные напряжения при кручении для бруса круглого или кольцевого сечения.....	6
1.3. Распределение касательных напряжений при кручении бруса круглого (кольцевого) сечения. Расчет на прочность	10
1.4. Расчет на жесткость.....	12
1.5. Потенциальная энергия деформации при кручении.....	14
1.6. Кручение бруса некруглого сечения	23
1.7. Кручение бруса прямоугольного поперечного сечения	24
1.8. Кручение бруса произвольной формы	26
1.9. Кручение тонкостенных брусьев	28
1.9.1. Кручение бруса закрытого профиля.....	28
1.9.1. Кручение брусьев открытого профиля.....	29
1.10. Статически неопределимые системы при кручении	34
1.10.1. Раскрытие статической неопределимости при последовательном соединении участков бруса	35
1.10.2. Раскрытие статической неопределимости при параллельном соединении участков бруса	44
2. Расчетно-проектировочное задание	53
2.1. Состав расчетно-проектировочного задания.....	53
2.2. Порядок выполнения задания	54
2.3. Расчетные схемы и численные данные	56
2.3.1. Задача 1. Статически определимый вал	56
2.3.2. Задача 2. Статически неопределимый вал (последовательное соединение).....	59
2.4. Образец выполнения задачи 1	62
2.5. Образец выполнения задачи 2	66
Контрольные вопросы	72
Список литературы	73

Навчальне видання

КОНОХОВ Володимир Іванович
ХАВІН Валерій Львович

РОЗРАХУНКИ БРУСА ПРИ КРУЧЕННІ

Навчально-методичний посібник з курсу “Опір матеріалів
для студентів машинобудівних спеціальностей.
(російською мовою)

Відповідальний за випуск проф. Киркач Б.М.

Роботу до друку рекомендував проф. Бреславський Д.В.

В авторській редакції

План 2020 р., поз. 19

Підп. до друку 13.10.20. Формат 60x84 1/16. Папір Могра.

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум.друк. арк. 3,1

Обл.-вид. арк. ____ Наклад 100. Зам. № _____ Ціна _____.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Самостійне електронне видання