

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

С.Ю. Погорілов, В.Л. Хавін, С.Ю. Шергін, Н.В. Кравцова

РОЗРАХУНОК ОБЛОНОК ОБЕРТАННЯ  
НА МІЦНІСТЬ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Навчально-методичний посібник з розділу курсу «Опір матеріалів»  
для студентів машинобудівних спеціальностей

ЗАТВЕРЖЕНО  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 3 від 06.10.2021 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2021

УДК 378:621:620.17

Р 45

*Рецензенти:*

*Сало В. А.*, д-р техн. наук, проф., каф. «Інженерної механіки»,  
Національної академії Національної гвардії України;

*Ткачук Н. А.*, д-р техн. наук, проф., зав. каф.  
«Теорія і системи автоматизованого проектування  
механізмів і машин» НТУ «ХП»

**Р 45** Розрахунок оболонок обертання на міцність при складному навантаженні.:  
навч.-метод. посіб. / С.Ю. Погорілов, В.Л. Хавін, С.Ю. Шергін, Н.В. Крав-  
цова. – Харків : НТУ «ХП», 2021. – 66 с.

ISBN

Посібник містить розрахунки оболонок обертання на міцність по безмоментній теорії при складному навантаженні. Розглянуто аналіз напружено-деформованого стану в точці при складному напруженому стані і проведена оцінка міцності для небезпечної точки циліндричної оболонки, що дозволяє вирішувати різні практичні завдання.

Призначено для студентів спеціальностей «Прикладна механіка» і «Галузеве машинобудування».

Іл. 22. Табл. 3. Бібліогр. 5 найм.

УДК 378:621:620.17

ISBN

© С.Ю. Погорілов, В.Л. Хавін,  
С.Ю. Шергін, Н.В. Кравцова, 2021

## Вступ

У різних галузях сучасної промисловості – хімічному машинобудуванні, енергомашинобудування, суднобудуванні, авіабудуванні, будівництві та ін. знайшли широке застосування тонкостінні оболонкові конструкції. Підвищені вимоги до міцності і жорсткості цих конструкцій з одночасним умовою зниження їх матеріаломісткості призводить до необхідності проводити аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних оболонок обертання при складному навантаженні з подальшою оптимізацією конструкції.

В процесі експлуатації оболонкові конструкції піддаються впливу різних видів зовнішнього навантаження. При цьому у точках цих конструкцій виникають різноманітні поєднання механічних напружень (різні види напружено-деформованого стану). Тому інженер-конструктор має вміти проводити аналіз напруженого стану в будь-яких точках оболонкової конструкції з метою оцінки міцності при складному напруженому стані будь-якого типу.

Даний посібник присвячено елементам аналізу напружено-деформованого стану в точці оболонкової конструкції і оцінюванню її міцності при складному напруженому стані.

Посібник складається з трьох розділів. У першому розділі посібника розглядаються основи теорії оболонок, які розраховуються за безмоментною теорією, наводяться залежності для визначення напружень в оболонках різної геометрії.

У другому розділі посібника розглянуті основи теорії напружено-деформованого стані в точці. Формулюється узагальнений закон Гука, що зв'язує компоненти напруженого і деформованого стану при складному навантаженні, розглядаються гіпотези граничних напружених станів

У третьому розділі посібника приведені порядок і приклади виконання двох задач розрахунково-проектувального завдання.

## 1. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ЗА БЕЗМОМЕНТНОЮ ТЕОРІЄЮ

**Оболонка** – це тверде тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала у порівнянні з двома іншими його розмірами.

Поверхня, що ділить навпіл товщину оболонки, *називається серединною поверхнею*.

Оболонкою обертання називається оболонка, утворена обертанням будь-якої плоскої кривої навколо осі, що лежить в її площині і не перетинає її.

**Меридіанами** називаються криві, утворені перетином серединної поверхні площинами, що проходять через вісь симетрії оболонки.

**Паралелями** (паралельними колами або кільцевими перетинами) називаються кола, утворені перетином серединної поверхні площиною, перпендикулярній осі оболонки.

**Полюсом** оболонки називається точка перетину серединної поверхні з віссю.

Для визначення напружень в тонкостінних оболонкових конструкціях переважно використовується так звана безмоментна (мембранна) теорія оболонок [1]. За цією теорією стінки судини розглядаються як вельми тонкі оболонки (мембрани), які не сприймають згинальних моментів.

Оболонки обертання, що розраховуються за безмоментною теорією, мають задовольняти обов'язковим умовам:

- 1) мають бути тонкостінними (відношення товщини стінки до радіуса кривизни має бути  $h/R \leq 1/20$ );
- 2) форма обов'язково має бути тілом обертання;
- 3) навантаження має бути розподіленим (наприклад, газовий або гідростатичний тиск), симетричним відносно осі обертання, плавно змінюватись і не мати різких стрибків;
- 4) закріплення країв оболонки має бути таким, щоб її край міг вільно переміщатися по нормалі. Кути повороту і нормальні переміщення на краях оболонки не повинні бути обмежені.

Сукупність цих умов дозволяє прийняти гіпотезу рівномірного розподілу напружень по товщині стінки, тобто стінка працює тільки на розтягання або стискання.

Оболонку обертання називають осесиметричною, якщо вона навантажена рівномірно розподіленими щодо осі навантаженнями. У найпростішому випадку прикладами осесиметричних оболонок можуть служити сферична, циліндрична, конічна і еліптична оболонки обертання, навантажені внутрішнім газовим тиском  $P$ .

На рис. 1.1 зображена симетрична оболонка товщиною  $h$ , з якої двома парами меридіональних та нормальних до них перерізів виділено безкінечно малий елемент поверхні  $abcd$ . Тут  $\rho_m$  – радіус кривизни дуги меридіана серединної поверхні оболонки ( $\rho_m = bO_1$ ),  $\rho_\theta$  – радіус кривизни перерізу, перпендикулярного дузі меридіана ( $\rho_\theta = bO$ ),  $ab = ds_2$ ,  $ac = ds_1$ .

Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску  $P$ , який може змінюватись по координаті уздовж осі обертання, але буде однаковим у всіх точках площини, перпендикулярної до осі оболонки (осесиметричний тиск).

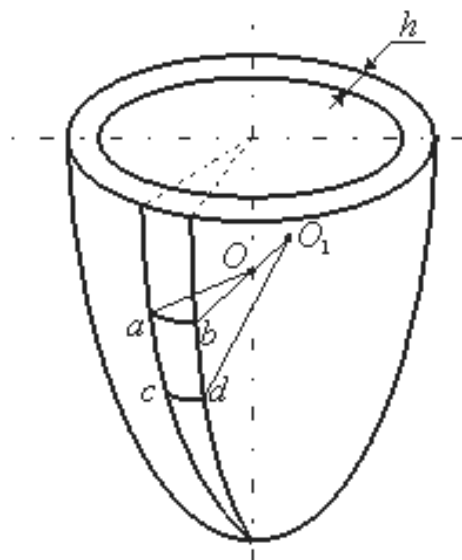


Рисунок 1.1

Розглянемо напружений стан виділеного елемента  $abcd$  (рис.1.2).

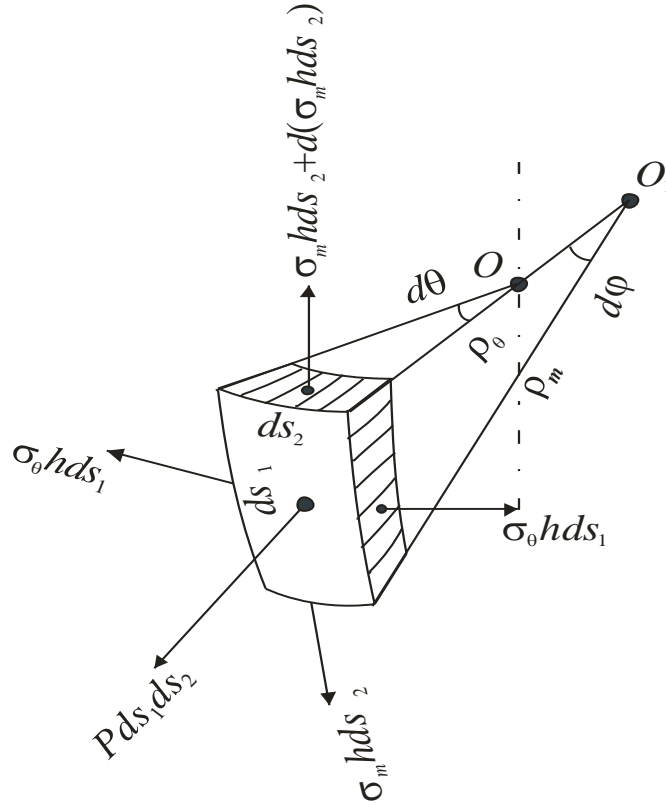


Рисунок 1.2

На гранях елемента  $abcd$  виникають меридіональні ( $\sigma_m$ ) та колові (широтні) напруження ( $\sigma_\theta$ ). Помноживши ці напруги на площі граней елемента, отримуємо сили, проектуючи які на нормаль до поверхні, запишемо рівняння рівноваги елемента:

$$P \cdot ds_1 \cdot ds_2 - \sigma_m \cdot h \cdot ds_2 \cdot \sin \frac{d\phi}{2} - [\sigma_m \cdot h \cdot ds_2 + d(\sigma_m \cdot h \cdot ds_2)] \cdot \sin \frac{d\phi}{2} - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot h \cdot ds_1 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Оскільки синус малого кута дорівнює самому кутку і, з огляду на співвідношення  $d\phi = ds_1 / \rho_m$ ,  $d\theta = ds_2 / \rho_\theta$ , остаточно отримуємо:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}.$$

Це співвідношення називається **рівнянням Лапласа**.

Напруження  $\sigma_m$  і  $\sigma_\theta$  є головними напруженнями. Третє головне напруження, що діє по нормалі до поверхні оболонки, яке дорівнює тиску  $P$ ,

значно менше перших двох і їм нехтують (тобто вважають його рівним нулю).

Розглянемо визначення напружень в різних оболонках, які перебувають під дією внутрішнього тиску  $P$ .

### 1.1. Циліндрична оболонка

Існує два можливих варіанти: оболонка з днищами або без них.

1) Оболонка без днища

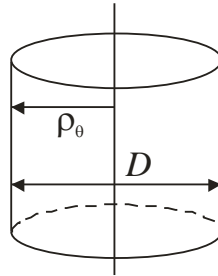


Рисунок 1.3

оскільки  $\sigma_m = 0$ ,  $\rho_m \rightarrow \infty$  (радіус кривизни меридіана), то  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} \rightarrow 0$ ,  $\rho_\theta = \frac{D}{2}$ ,

( $D$  – середній діаметр оболонки)

З рівняння Лапласа витікає:

$$\frac{2\sigma_\theta}{D} = \frac{P}{h} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{P \cdot D}{2h}.$$

2) Оболонка з днищами

Рівнодіюча від внутрішнього тиску, що припадає на днище:

$F = P \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ . Форма днища несуттєва (плоска, конічна, сферична).

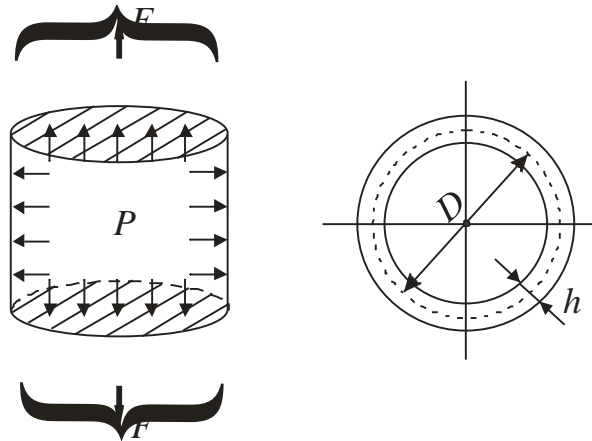


Рисунок 1.4

Площа поперечного перерізу оболонки:

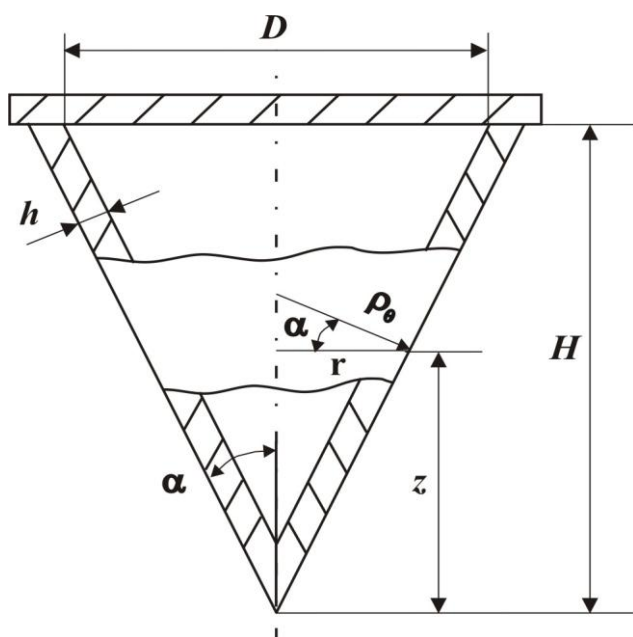


Рисунок 1.5

$A = h \cdot \pi \cdot D$ , рівнодіюча  $F$  може бути визначена так:

$$F = \sigma_m \cdot A = \sigma_m \cdot h\pi D.$$

Прирівнюючи вирази для  $F$ , отримуємо

$$P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \sigma_m \cdot h\pi D.$$

Звідси меридіональні напруження дорівнюють  $\sigma_m = \frac{PD}{4h}$ , а колові,

як показано в попередньому прикладі:  $\sigma_\theta = \frac{\rho D}{2h}$ .

## 1.2. Сферична оболонка

В цьому випадку  $\rho_m = \rho_\theta = \frac{D}{2}$  і  $\sigma_m = \sigma_\theta$ .

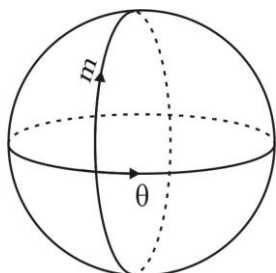


Рисунок 1.6

З рівняння Лапласа витікає:  $\sigma_m = \sigma_\theta = \frac{PD}{4h}$ .

Залежності отримані при дії внутрішнього тиску. Для зовнішнього тиску необхідно поміняти знак  $P$ .

## 1.3. Конічна оболонка

Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску  $P$ . Тут

$$\rho_m = \infty, \rho_\theta = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{z \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Записавши рівняння рівноваги ( $\sum Z = 0$ ), отримаємо:  $\sigma_m = \frac{PDz}{4hH \cos \alpha}$ . З рівняння

Лапласа витікає:  $\sigma_\theta = \frac{PDz}{2hH \cos \alpha}$ .

Зауважимо, що в конічній оболонці, як і в циліндричній, виконується співвідношення між коловим і меридіональним напруженнями:

$$\sigma_\theta = 2\sigma_m.$$



## 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ

### 2.1. Поняття про напружений стан і компоненти тензора напружень в точці

*Напружений стан в точці тіла* – це сукупність нормальних та дотичних напружень на площинах, що проходять через дану точку тіла.

Для повного аналізу напруженого стану в точці достатньо знати нормальні та дотичні напруження на трьох довільних взаємно перпендикулярних площадках.

Виріжемо трьома парами взаємно перпендикулярних площин в околі досліджуваної точки тіла нескінченно паралелепіпед (рис. 2.1) і покажемо напруження, що діють на його гранях.

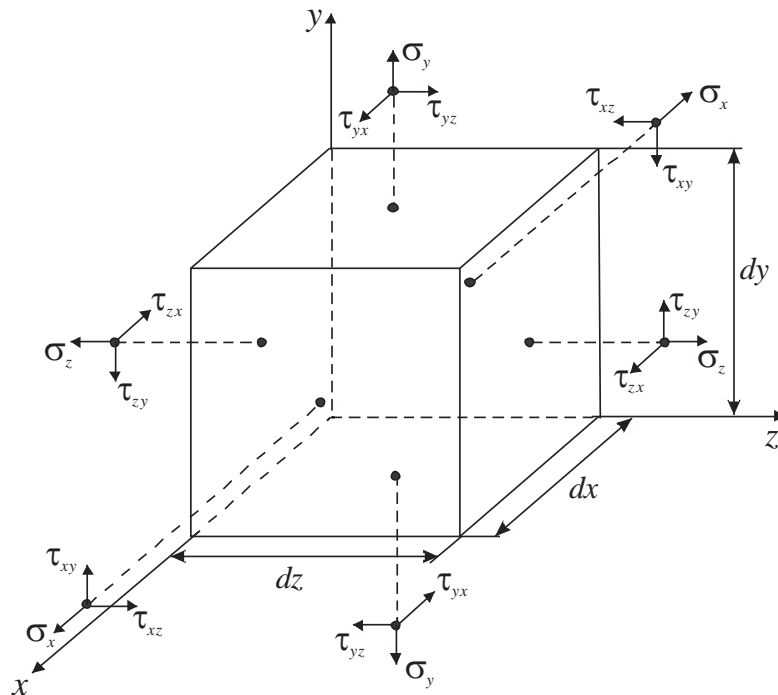


Рисунок 2.1

Нормальні напруження  $\sigma$  мають індекс осі, що співпадає з нормаллю до площадки, дотичні  $\tau$  – два індекси: перший – це індекс нормалі до площадки, другий – індекс вказує, паралельно до якої координатної осі діє дотичне напруження.

Нормальні напруження  $\sigma$  вважаються позитивними, якщо вони спрямовані в бік зовнішньої нормалі до площадки, на якій вони діють.

Дотичні напруження  $\tau$  вважаються позитивними, якщо вони дають на відповідну вісь проекції такого ж знака, як і позитивні нормальні, що діють на цій площадці.

Загальна кількість компонент напружень, що описують напружений стан в точці на обраних площадках, – шість, бо відповідно до закону парності дотичних напружень [2]:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};$$

$$\tau_{yx} = \tau_{zy};$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Для компактного опису напруженого стану в точці вводиться математичне поняття тензора напружень, що задається матрицею тензора напружень:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Тензор напружень може бути розкладений на кульовий тензор  $\dot{\sigma}_{\sigma}^0$  (гідростатична складова) і девіатор  $D_{\sigma}$ :  $\dot{\sigma}_{\sigma} = \dot{\sigma}_{\sigma}^0 + D_{\sigma}$ .

Кульовий тензор має вигляд

$$\dot{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} \end{pmatrix},$$

де  $\sigma_{\text{окт}}$  – октаедричне напруження, що обчислюється за формулою

$$\sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Тоді девіатор напружень визначимо як

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - \dot{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Приклад формування матриці тензора напружень

Розглянемо формування матриці тензора напружень в точках  $B$  і  $C$  бруса квадратного перерізу при спільній дії розтягання та кручення (рис. 2.2).

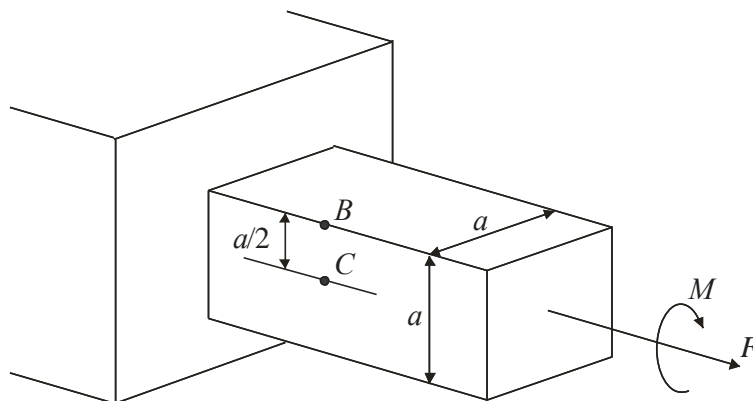


Рисунок 2.2

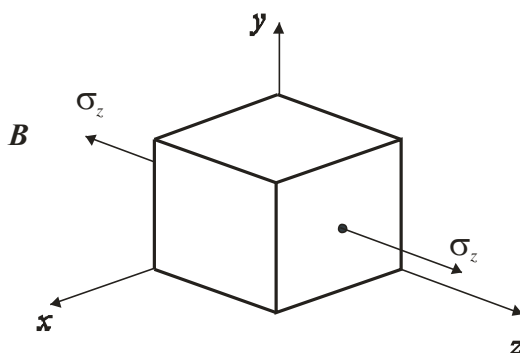


Рисунок 2.3

Компоненти напруженого стану в точці  $B$  показані на рис. 2.3. Тут дотичні напруження відсутні, а нормальні напруження  $\sigma_z$  обчислюються як

$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}$ , і тензор напружень в точці  $B$  має наступний вигляд:

$$T_{\sigma B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Компоненти напруженого стану в точці  $C$  показані на рис. 2.4.

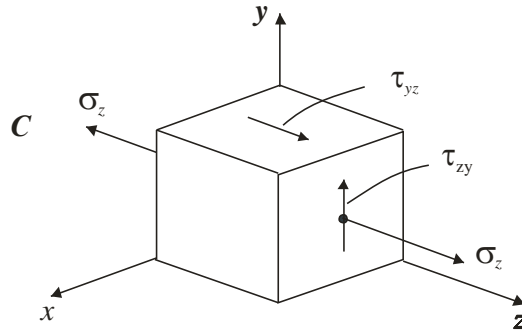


Рисунок 2.4

Тут дотичні напруження визначаються за формулою  $\tau_{zy} = \frac{M\hat{e}}{W\hat{e}} = \frac{M}{0,208 a^3}$ , а нормальні напруження  $\sigma_z$  обчислюються у вигляді  $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}$ , і тоді тензор напружень в точці  $C$  виглядає наступним чином:

$$T_{\sigma C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{0,208 a^3} \\ 0 & \frac{M}{0,208 a^3} & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

### 3. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ НА ДОВІЛЬНІЙ ПОХИЛІЙ ПЛОЩАДЦІ

Покажемо, що за відомими компонентами напруженого стану, які діють на трьох взаємно перпендикулярних площадках  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , можна однозначно визначити компоненти вектора повного напруження на довільній похилій площадці  $P_x, P_y, P_z$  (рис. 3.1).

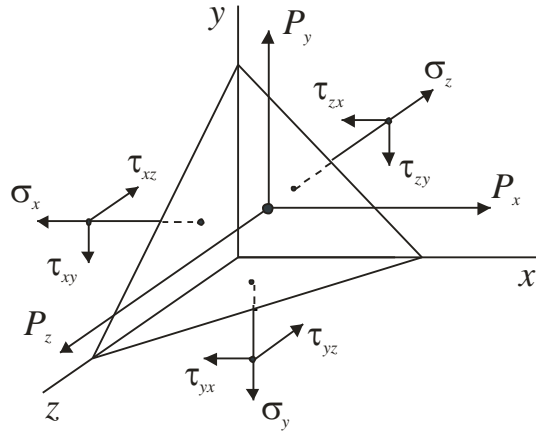


Рисунок 3.1

Орієнтація площадки задана напрямними косинусами між осями координат і вектором  $\nu$  нормалі до площадки:

$$\begin{aligned} l &= \cos(x, \nu), \\ m &= \cos(y, \nu), \\ n &= \cos(z, \nu). \end{aligned}$$

При цьому має місце залежність:  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Зв'язок між площею похилої площадки  $A$  і площами координатних площадок, до яких нормалі є осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , задається співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A_x &= l \cdot A, \\ A_y &= m \cdot A, \\ A_z &= n \cdot A. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння рівноваги для елементарного тетраедра (рис. 3.1):

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0.$$

Отримуємо зв'язок між компонентами напруженого стану на координатних площадках і компонентами вектора повного напруження на похилій площадці [2]:

$$\begin{cases} P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ P_y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ P_z = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{cases} \quad (1)$$

#### 4. ПОНЯТТЯ ПРО ГОЛОВНІ НАПРУЖЕННЯ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТИПІВ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ. ОКТАЕДРИЧНІ НАПРУЖЕННЯ, ІНТЕНСИВНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ

Слід зазначити, що серед всієї множини площадок можуть бути площадки, на яких відсутні дотичні напруження [3]. Такі площадки називаються *головними площадками*, а напруження, які діють на них, – *головними напруженнями*.

Нумерація головних напружень (рис. 4.1) здійснюється відповідно до нерівності  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Осі 1, 2, 3 – головні осі.

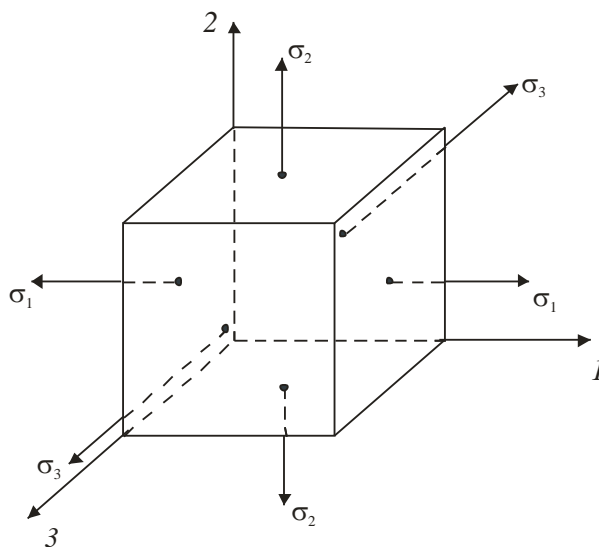


Рисунок 4.1

Розрізняють 3 типи напруженого стану в точці:

1) *одновісний (лінійний)* напружений стан. (Одне з головних напружень відмінне від нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  або  $\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ );

2) *двовісний (плоский)* напружений стан. (Два головних напруження відмінні від нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$  або  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ , або  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ );

3) *тривісний (об'ємний)* напружений стан. (Всі три головних напруження відмінні від нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ ).

Лінійний напружений стан називають простим напруженим станом, а плоский та об'ємний – складними напруженими станами.

Припустимо, що похила площадка (рис. 2.1) є головною площадкою, тоді компоненти вектора повного напруження на цій площадці:

$$\begin{aligned} P_x &= P \cdot l, \\ P_y &= P \cdot m, \\ P_z &= P \cdot n \end{aligned}$$

являють собою головні напруження, а система рівнянь (1) дозволяє визначити напрямні косинуси  $l, m, n$  цієї головної площадки з рівняння

$$\begin{cases} (\sigma_x - P)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - P)m + \tau_{yz}n = 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - P)n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При цьому виконується залежність  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Для того, щоб система рівнянь (2) мала нетривіальне рішення, відмінне від нульового, необхідно, щоб визначник системи дорівнював нулю [4]:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - P & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - P \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, перейдемо до кубічного рівняння

$$P^3 - P^2 I_1 + P I_2 - I_3 = 0,$$

рішення якого дозволить визначити головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Тут  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти тензора напружень, тобто величини для даної точки постійні, які не залежать від орієнтації координатних площадок [3]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

За відомими головними напруженнями можна визначити максимальні дотичні напруження:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

Площадка, на якій діє  $\tau_{\max}$ , паралельна до головного напруження  $\sigma_2$  і рівнонахилена до напрямків  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  (рис. 4.2).

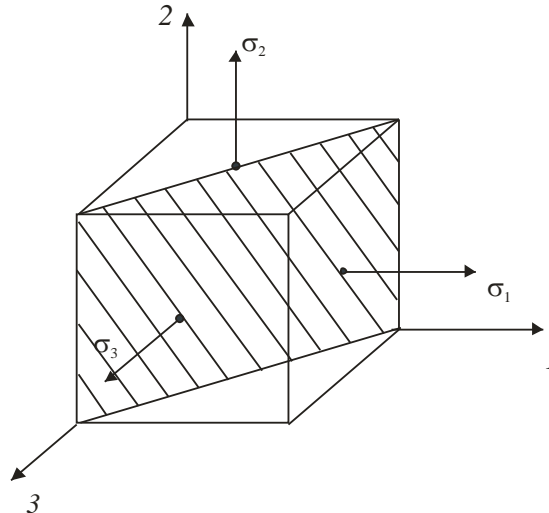


Рисунок 4.2

Нормальне напруження на октаедричній площадці, що рівнонахилена до всіх головних осей 1, 2, 3, визначається залежністю  $\sigma_{\hat{\epsilon}\hat{\delta}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , дотичне октаедричне напруження визначається за

формулою:  $\tau_{\hat{\epsilon}\hat{\delta}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ .

Якщо напружений стан є складним (плоский або об'ємний), тобто два або три головних напруження відмінні від нуля, виникає питання про порівняльні міри інтегральної оцінки рівня напруженого стану в точці. Однією з таких мір є інтенсивність напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \sigma(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \sigma(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$



## 5. ЗАКОН ГУКА ПРИ ОБ'ЄМНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ (УЗАГАЛЬНЕНИЙ ЗАКОН ГУКА)

### 5.1. Формулювання закону Гука

Для лінійного напруженого стану ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), формула закону Гука має вигляд  $\sigma_1 = E\varepsilon_1$ . Деформації  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  визначаються відомими залежностями:  $\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1, \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1$ , де  $E$  – модуль поздовжньої пружності,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

При складному (тривісному) напруженому стані закон Гука пов'язує компоненти напруженого і деформованого стану в точці, в якій має місце лінійно-пружне деформування. Нехай відомі головні площадки (головні напрямки) і головні напруження. Напрямки головних відносних деформацій  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  співпадають з головними напрямками для напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

За принципом суперпозиції

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \\ &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].\end{aligned}$$

Аналогічні співвідношення маємо для  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$ . В цьому випадку узагальнений закон Гука для ізотропного тіла для головних напрямків має вигляд

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

Для довільно орієнтованих координатних площадок маємо:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases}$$

До залежностей закону Гука, що пов'язують  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  і  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , слід додати залежності, що пов'язують  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  і  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  [3]:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{cases}$$

де  $G$  – модуль зсуву;  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  – кутові деформації. При цьому існує залежність між модулем пружності  $E$  та модулем зсуву  $G$  [3]:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

## 5.2. Приклад визначення компонент напруженого і деформованого стану із застосуванням узагальненого закону Гука

У масивній плиті, що не деформується, вирізано наскрізний паз завширшки і завглибшки по 1 см (рис. 5.1). В цей паз без зазору вставлений куб з дюралюмінію розміром  $1 \times 1 \times 1$  см, який навантажується силою 8 кН. Для дюралюмінію коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,33$ , модуль пружності  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа.

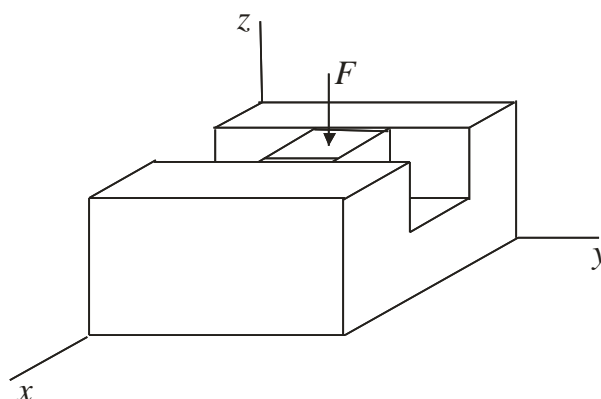


Рисунок 5.1

Оскільки процесу деформування куба вздовж осі  $y$  ніщо не заважає, а в напрямку осі  $x$  деформування практично неможливе, то  $\varepsilon_x = 0, \sigma_y = 0$ .

Нормальне напруження на площадці  $z$  обчислюємо за формулою

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{8 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = -8 \cdot 10^7 \text{ Па} = -80 \text{ МПа}.$$

Закон Гука для об'ємного напруженого стану має вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{cases}$$

звідси знаходимо напруження  $\sigma_x$  і деформації  $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ :

$$\sigma_x = \mu(\sigma_z + \sigma_y) = 0,33(-8 \cdot 10^7) = -2,64 \cdot 10^7 \text{ Па} = -26,4 \text{ МПа}.$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\mu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4} [-0,33(-80 - 26,4)] = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4} [-80 - 0,33(-26,4)] = -10 \cdot 10^{-4}.$$

Розставимо індекси для головних напружень та головних деформацій:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_y = 0, & & \varepsilon_1 = \varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-4}, \\ \sigma_2 = \sigma_x = -26,4 \text{ МПа}, & & \varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0, \\ \sigma_3 = \sigma_z = -80 \text{ МПа}. & & \varepsilon_3 = \varepsilon_z = -10 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

## 6. ПИТОМА ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ В ТОЧЦІ

*Потенційна енергія деформації* – це енергія, що накопичується в тілі при його пружному деформуванні. Наприклад, в результаті розтягання консольного стержня силою  $F$  (рис. 6.1, а) процес деформування здійснюється в пружній області (заштрихована частина діаграми розтягання), (рис. 6.1, б).

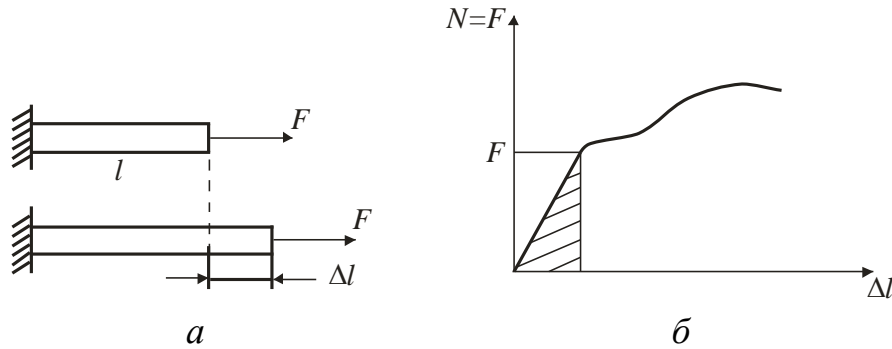


Рисунок 6.1

Потенційна енергія деформації чисельно дорівнює роботі внутрішніх зусиль, яка витрачена в процесі пружного деформування тіла (заштрихована область діаграми):  $U_{\Pi} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta l = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$ . Підставляючи сюди залежність для  $\Delta l$  ( $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Fl}{EA}$ ; [1]), остаточно отримаємо:

$$U_{\Pi} = \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA}.$$

Питома потенційна енергія, тобто енергія, що припадає на одиницю об'єму, обчислюється так:  $u = \frac{U_{\Pi}}{V} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA} \cdot \frac{1}{lA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{F}{AE} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ .

У випадку об'ємного напруженого стану питома потенційна енергія згідно до принципу суперпозиції може бути визначена наступним чином:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1 (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2 (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) + \sigma_3 (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \right] = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \end{aligned}$$

При деформуванні нескінченно малого елемента (рис.4.1) змінюється не тільки його об'єм, але й форма. Тому питому потенційну енергію деформування можна представити у вигляді суми двох складових:  $u = u_v + u_{\phi}$ .

Тут  $u_v$  – питома потенційна енергія зміни об'єму:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad u_{\phi} - \text{питома потенційна енергія формозміни [2]:}$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3A} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1).$$

## 7. ГІПОТЕЗИ ГРАНИЧНИХ НАПРУЖЕНИХ СТАНІВ (ГІПОТЕЗИ МІЦНОСТІ)

Розрізняють три можливих варіанти стану матеріалу в точці у процесі деформування: пружний стан, пластичний стан і руйнування.

Поява пластичного стану при одновісному напруженому стані (розтягання – стискання) характеризується тим, що діючі напруження сягають границі текучості  $\sigma_{\delta}$ , мить руйнування – тим, що напруження сягають границі міцності  $\sigma_i \div$  (тимчасового опору  $\sigma_{\hat{a}}$ ). Зростання діючого напруження до величини  $\sigma_T$  або  $\sigma_{\hat{a}}$  при одновісному напруженому стані визначається як вичерпання відповідного ресурсу по зростанню напруження, тому напружені стани, що відповідають умовам  $\sigma = \sigma_T$  або  $\sigma = \sigma_B$ , є неприпустимими і об'єднуються назвою *граничного стану*.

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінювання працездатності деталі за відомим напруженим станом.

При одновісному напруженому стані експериментально визначаються значення граничних напружень, що відповідають початку руйнування ( $\sigma_{\hat{a}}$ ) або появі неприпустимих залишкових пластичних деформацій ( $\sigma_T$ ). Безпечними є напружені стани, для яких виконуються умови:  $\sigma < \sigma_T$  (за критерієм накопичення залишкових деформацій) або  $\sigma < \sigma_{\hat{a}}$  (за критерієм руйнування).

Для складного напруженого стану експериментальний шлях оцінювання досягнення граничного стану в точці (текучості або руйнування) практично важко реалізувати через технічні труднощі, що виникають при проведенні таких іспитів і значного їх обсягу.

Інший шлях оцінювання досягнення граничного стану – це введення гіпотез про переважний вплив на міцність (текучість) матеріалу того чи іншого фактора, при цьому вважають, що граничний стан матеріалу при будь-якому напруженому стані настане тільки тоді, коли величина цього фактора досягне певного граничного значення.

Оскільки напружений стан може мати нескінченну кількість комбінацій  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , вводиться поняття еквівалентного напруженого стану (еквівалентних напружень). При цьому застосування гіпотези для оцінки

появи граничного стану дозволяє математично формалізувати перехід від складного напруженого стану до *еквівалентного одновісного напруженого стану* (одновісного розтягання).

*Еквівалентне напруження*  $\sigma_{\text{eq}}$  – це таке розтяжне напруження, яке слід створити в матеріалі, щоб цей напружений стан був рівнонебезпечним до вихідного складного напруженого стану.

*Коефіцієнт запасу* при складному напруженому стані - це число, яке показує, у скільки разів слід одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану, щоб він став граничним.

Наразі відомо кілька, таких що хронологічно з'явилися одна за одною, гіпотез граничних напружених станів, які називаються гіпотезами міцності.

### **7.1. Гіпотеза найбільших нормальних напружень (Перша гіпотеза міцності)**

Згідно до цієї гіпотези, яку висунув Галілей (XVII ст.), переважний вплив на міцність конструкції має величина найбільшого нормального напруження  $\sigma_1$  (або  $\sigma_3$ ), а два інших головних напруження не враховуються.

Експериментальна перевірка показує, що ця гіпотеза міцності є непридатною для більшості матеріалів і напружених станів, і дає задовільні результати лише для вельми крихких матеріалів (камінь, цегла).

Вважається застарілою і не використовується.

### **7.2. Гіпотеза найбільших лінійних деформацій (Друга гіпотеза міцності)**

Згідно до цієї гіпотези, запропонованої Маріоттом у 1682 р., як критерій настання граничного стану приймається найбільша за абсолютною величиною лінійна деформація.

Експериментальна перевірка цієї гіпотези також показала, що вона є неприйнятною для більшості матеріалів і дає задовільні результати лише для крихких матеріалів.

Вважається застарілою і не використовується.

### 7.3. Гіпотеза найбільших дотичних напружень (Третя гіпотеза міцності)

Відповідно до третьої гіпотези міцності, запропонованої Кулоном (1773 р.), як критерій граничного стану (настання текучості) приймається величина найбільшого дотичного напруження. Вважається, що поява текучості в загальному випадку напруженого стану має місце тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{\max}$  досягає свого граничного значення  $\tau_T$ , яке визначається в момент досягнення текучості при простому розтяганні.

Умова міцності в цьому випадку має вигляд:  $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ . Оскільки  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $\tau_T = \frac{1}{2}\sigma_T$ , то умову міцності можна виразити через головні напруження:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ,  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ . Еквівалентне напруження за третьою гіпотезою:  $\sigma_{\text{е}} = \sigma_1 - \sigma_3$ , а умова міцності:  $\sigma_{\text{е}} \leq [\sigma]$ .

Третя гіпотеза міцності, взагалі, добре підтверджується експериментами для пластичних матеріалів, які однаково працюють при розтяганні та стисканні.

Недолік третьої гіпотези полягає в тому, що вона не враховує середнього за величиною головного напруження  $\sigma_2$ , яке може бути значним і чинити деякий вплив на стан матеріалу.

### 7.4. Гіпотеза питомої потенційної енергії формозміни (Четверта гіпотеза міцності)

Автори цієї гіпотези – М. Хубер, Р. Мізес, Г. Генке – в якості критерію граничного стану (втрати міцності) запропонували використовувати величину питомої потенційної енергії формозміни.

Припускається, що граничний стан (текучість) настає тоді, коли питома потенційна енергія формозміни досягає свого граничного значення. Це значення можна визначити при простому розтяганні в момент початку текучості.

Умова настання текучості:  $u_{\text{ф}} = \left( u_{\text{ф}} \right)_T$ . Питома потенційна енергія формозміни при складному напруженому стані:

$$u_{\delta} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

При одновісному напруженому стані (розтяганні) в момент настання текучості ( $\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) маємо:  $(u_{\delta})_T = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$ . Отже, умову виникнення текучості можна записати у вигляді

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_T.$$

Тоді еквівалентне напруження запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{уе}}^{\text{2V}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \end{aligned}$$

Умова міцності за четвертою гіпотезою міцності має вигляд:

$$\sigma_{\text{уе}}^{\text{2V}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad \text{або} \quad \sigma_{\text{уе}}^{\text{2V}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Експерименти добре підтверджують четверту гіпотезу для пластичних матеріалів, які однаково працюють на розтягання та стискання.

### 7.5. Гіпотеза міцності Мора

Ця гіпотеза була запропонована О.Мором на початку ХХ ст. і ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів в загальному випадку напруженого стану залежить, головним чином, від величини та знака найбільшого  $\sigma_1$  і найменшого  $\sigma_3$  головних напружень, а середнє за величиною головне напруження  $\sigma_2$  лише несуттєво впливає на міцність. Еквівалентне напруження за гіпотезою Мора обчислюється так:

$$\sigma_{\text{уе}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+],$$

де  $[\sigma_+]$  и  $[\sigma_-]$  – допустимі напруження відповідно при розтяганні та стисканні. При однаковому опорі матеріалу розтяганню та стисканню ( $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ ) розрахункова формула збігається з формулою, отриманою за третьою теорією міцності. Гіпотеза придатна як для крихких, так і для пластичних матеріалів.

*Для практичних розрахунків слід використовувати:*



а) четверту гіпотезу (або третю) – для пластичних матеріалів, які однаково опираються розтягання та стисканню;

б) гіпотезу Мора – для матеріалів, що по-різному чинять опір розтягання та стисканню (як правило, крихких).

Перша і друга гіпотези міцності дають значні похибки і в даний час не застосовуються.

## **8. РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ**

При вивченні розділів «Основи напруженого стану в точці» та «Основи теорії безмоментних оболонок» в курсі «Опір матеріалів» ставиться мета навчити студентів проводити аналіз напружено-деформованого стану в небезпечних точках конструкцій і на цій основі розв'язувати задачі оцінки міцності, підбору матеріалів і знаходження геометричних параметрів елементів конструкцій машин та механізмів.

Згідно з вимогами курсу «Опір матеріалів» студентам пропонується виконати розрахунково-проектувальне завдання (РПЗ) за темами: «Основи напруженого стану в точці» та «Основи теорії безмоментних оболонок». При виконанні цього завдання, студент вчиться визначати положення небезпечних точок в конструкції, знаходити параметри напружено-деформованого стану (НДС) в них, оцінювати тип напруженого стану в точці, знаходити головні площадки і головні напруження, обирати одну з існуючих гіпотез міцності. Застосовуючи навички аналізу НДС в точці, студентом проводиться оцінка міцності циліндричної оболонки.

### **8.1. Склад розрахунково-проектувального завдання**

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Рішення двох задач, оформлення їх відповідно до вимог кафедри "Опір матеріалів".

2. Написання контрольної роботи по темі РПЗ. Тести.

3. Захист роботи, який полягає в бесіді студента з викладачем по темі РПЗ і відповідях на контрольні питання.

**Мета завдання** – проведення аналізу НДС в точці, оцінка міцності циліндричної оболонки при складному навантаженні.

### **РПЗ складається з двох задач:**

1. *Аналіз НДС в точці.* За заданими компонентами напруженого стану в точці необхідно знайти величини головних напружень і головних деформацій, обчислити еквівалентні напруження і підібрати матеріал конструкції [5].

Варіанти вихідних даних наведені в додатку 1.

2. *Оцінка міцності циліндричної оболонки.* Для циліндричної оболонки з днищем, що мають діаметр серединної поверхні  $D$  і товщину стінки  $h$ , яка навантажена внутрішнім тиском  $P$ , поздовжньою силою  $F$ , крутним  $M_K$  і згинальним  $M_{II}$  моментами, знайти внутрішні зусилля в небезпечному перерізі, визначити максимальні напруження, обчислити еквівалентні напруження і визначити коефіцієнт запасу.

Розрахункова схема оболонки показана на рис.8.3, а, чисельні дані наведені в додатку 2.

## **8.2. Порядок виконання завдання**

**Задача 1. Провести аналіз напруженого стану в точці, дотримуючись плану.**

1. Виписати для даного варіанту чисельні дані.
2. Подати напружений стан у вигляді тензора напружень та графічно.
3. Розкласти тензор напружень на кульовий тензор та девіатор напружень.
4. Обчислити інваріанти тензора напружень.
5. Скласти і вирішити характеристичне рівняння тензора напружень, перевірити рішення за інваріантами.
6. Обчислити еквівалентні напруження.
7. Підібрати матеріал при заданому коефіцієнті запасу з текучості ( $n_T = 1,5$ ).

**Задача 2. Оцінити міцність циліндричної оболонки.**

1. Виписати для заданого варіанта чисельні дані.
2. Визначити геометричні характеристики кільцевого перерізу оболонки.
3. Визначити компоненти напруженого стану в небезпечному перерізі.
4. Провести аналіз напруженого стану в небезпечних точках.

5. Обчислити головні напруження.
6. Визначити еквівалентне напруження.
7. Знайти коефіцієнт запасу за текучістю.

### 8.3. Приклади розв'язання задач

#### 8.3.1. Зразок розв'язання задачі 1

**Дано:**

$$\sigma_x = -100 \text{ МПа}, \sigma_y = -150 \text{ МПа}, \sigma_z = 30 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = -107,2 \text{ МПа}, n_T = 1,5.$$

**Необхідно:** провести аналіз напруженого стану в точці, підібрати матеріал.

**Рішення:**

1. Представляємо заданий напружений стан (рис. 8.1) у вигляді тензора напружень:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 30 \end{pmatrix}.$$

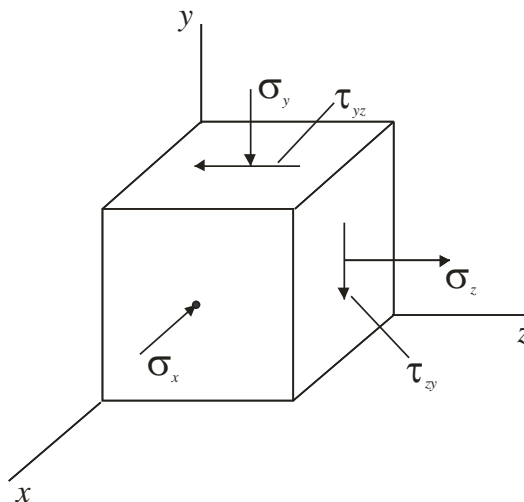


Рисунок 8.1

2. Розкладаємо тензор напружень на кульовий тензор і девіатор напружень.

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^0 + D_{\sigma}$$

Для цього обчислимо октаедричне нормальне напруження:

$$\sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{d}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{-100 + (-150) + 30}{3} = -73,33 \text{ МПа}.$$

Кульовий тензор напружень має вигляд:

$$\hat{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{d}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{d}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -73,33 & 0 & 0 \\ 0 & -73,33 & 0 \\ 0 & 0 & -73,33 \end{pmatrix}.$$

Девіатор напружень:

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - T_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{окт}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\text{окт}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\text{окт}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -26,67 & 0 & 0 \\ 0 & -76,67 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 103,33 \end{pmatrix}.$$

Графічно це зображено на рис. 8.2:

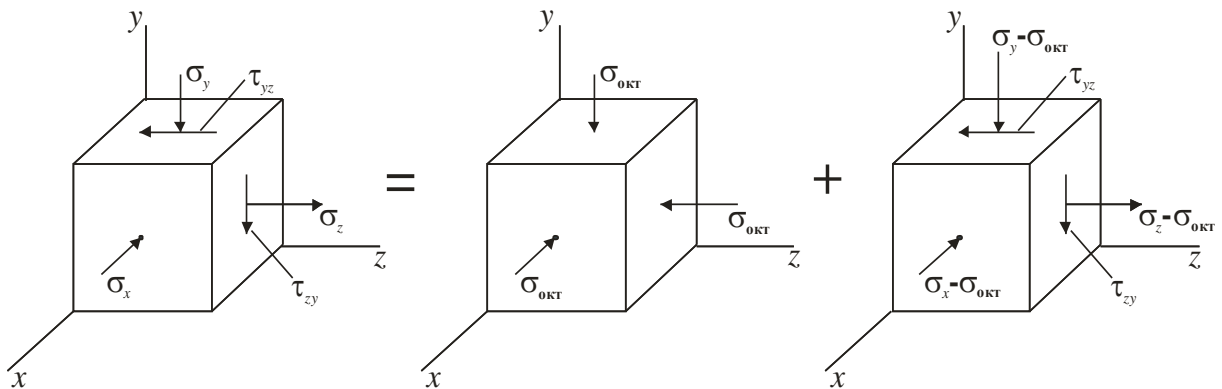


Рисунок 8.2

3. Обчислюємо інваріанти тензора напружень:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -100 - 150 + 30 = -220 \text{ МПа}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = (-100)(-150) + (-150)30 - (-100) - (-107,2)^2 \approx -3992 \approx -3,99 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = (-100)(-150)30 - (-100) \cdot (-107,2)^2 = 1599184 = 15,99 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3$$

4. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння тензора напружень, перевіряємо рішення за інваріантами.

З аналізу вихідного напруженого стану (рис.8.1) видно, що площадка  $x$  є головною площадкою, і характеристичне рівняння (кубічне) приймає

$$\text{ВИГЛЯД: } \begin{vmatrix} P - \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & P - \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & P - \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{або } (P - \sigma_x) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_y)P + (\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)] = 0.$$

Тоді корені рівняння будуть:  $P_1 = \sigma_x = -100 \text{ МПа}$ ,

$$P_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (-150 + 30) \pm \sqrt{(-150 + 30)^2 - 4(30(-150) - (-107,2)^2)} \right] = \frac{1}{2} [-120 \pm 280],$$

$$P_2 = 80 \text{ МПа}, P_3 = -200 \text{ МПа}.$$

Розставимо індекси головних напружень (у відповідності з умовою  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ):  $\sigma_1 = P_2 = 80 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = P_1 = -100 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_3 = P_3 = -200 \text{ МПа}$ .

Обчислимо інваріанти тензора напружень через головні напруження:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 80 + (-100) + (-200) = -220 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 80(-100) + (-100)(-200) + (-200)80 =$$

$$= -4 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 80(-100)(-200) = 16 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3.$$

Зіставивши величини інваріантів, переконуємося, що вони добре збігаються:  $-220 = -220$ ;  $-3,99 \cdot 10^3 \cong -4 \cdot 10^3$ ;  $15,99 \cdot 10^5 \cong 16 \cdot 10^5$ .

Таким чином, величини головних напружень знайдені правильно.

#### 5. Обчислюємо еквівалентні напруження.

Оскільки в розглянутій точці має місце складний напружений стан, перевірку міцності і визначення коефіцієнта запасу по текучості слід вести за еквівалентними напруженнями, з використанням гіпотези граничних станів:

а) за гіпотезою найбільших дотичних напружень отримуємо:

$$\sigma_{\text{е}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-200) = 280 \text{ МПа};$$

б) за гіпотезою питомої потенційної енергії формозміни:

$$\sigma_{\text{yê}}^{\text{zy}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (80 - (-100))^2 + (-100 - (-200))^2 + (-200 - 80)^2 \right]} = 246 \text{ МПа.}$$

6. Підбираємо матеріал по заданому коефіцієнту запасу з текучості.

Коефіцієнт запасу з текучості  $n_T = 1,5$ . З умови міцності витікає, що границя текучості матеріалу:  $\sigma_T \geq \sigma_{\text{yê}} \cdot n_T$ . Застосовуючи гіпотезу найбільших дотичних напружень, отримуємо  $\sigma_T \geq 280 \cdot 1,5 = 420$  МПа. З довідкових даних (додаток 3) підбираємо сталь Ст 60 ( $\sigma_T = 420$  МПа).

За гіпотезою питомої потенційної енергії формозміни границя текучості буде:  $\sigma_T \geq 246 \cdot 1,5 = 369$  МПа. Відповідний матеріал – Ст 50 ( $\sigma_T = 380$  МПа).

### 8.3.2. Зразок виконання задачі 2

**Дано:**

Зовнішня сила  $F = -8$  МН.

Згинальний момент  $M_{\text{И}} = 4$  МНм.

Крутний момент  $M_{\text{К}} = 5$  МНм.

Тиск  $P = 3$  МПа.

Діаметр середньої поверхні оболонки  $D = 2000$  мм.

Товщина оболонки  $h = 25$  мм

Границя текучості при розтяганні та стисканні:

$\sigma_{\text{ТР}} = 350$  МПа,  $\sigma_{\text{ТС}} = 400$  МПа.

**Необхідно:** визначити коефіцієнт запасу по текучості для циліндричної оболонки.

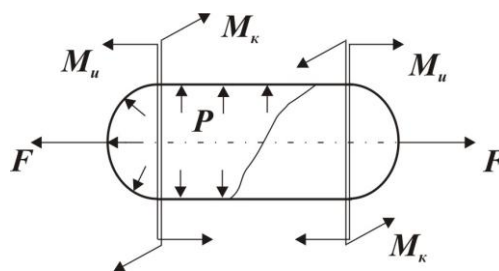


Рисунок 8.3

### Рішення:

1. Визначаємо геометричні характеристики кільцевого перерізу оболонки.

Внутрішній діаметр кільця (рис. 8.4) дорівнює:  $D_B = D - h = 2000 - 25 = 1975 \text{ мм} = 1,975 \text{ м}$ , а зовнішній діаметр:

$$D_H = D + h = 2000 + 25 = 2025 \text{ мм} = 2,025 \text{ м}.$$

Знаходимо коефіцієнт  $c$ :

$$c = \frac{D_B}{D_H} = \frac{1975}{2025} = 0,975.$$

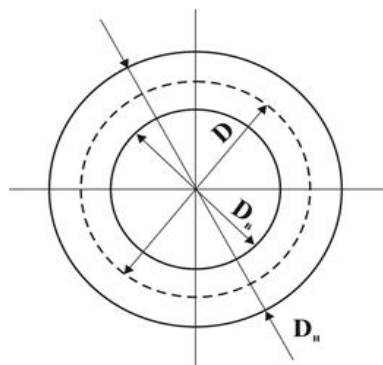


Рисунок 8.4

Площа поперечного перерізу:

$$A = \frac{\pi D_H^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3,14 \cdot 2,025^2}{4} (1 - 0,975^2) = 0,159 \text{ м}^2.$$

Обчислюємо осьовий  $W_x$  і полярний  $W_p$  моменти опору кільця:

$$W_x = \frac{\pi D_H^3}{32} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 2,025^3}{32} (1 - 0,975^4) = 7,84 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3;$$

$$W_p = \frac{\pi D_H^3}{16} (1 - c^4) = 2W_x = 15,68 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

2. Визначаємо компоненти напруженого стану в небезпечному перерізі.

На рис. 8.5 показані внутрішні зусилля та епюри розподілу напружень по висоті перетину

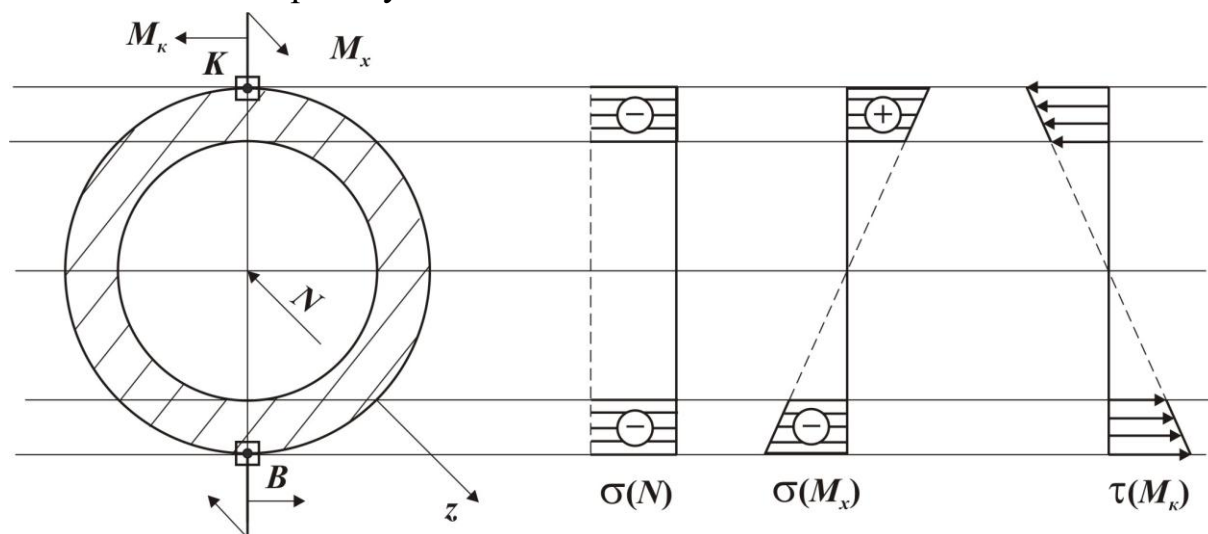


Рисунок 8.5

Обчислюємо напруження від поздовжньої сили:

$$\sigma(N) = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{-8}{0,159} = -50,3 \text{ МПа};$$

максимальні напруження від згинального моменту:

$$\sigma_{\max}(M_x) = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4}{7,8 \cdot 10^{-2}} = 51,3 \text{ МПа}.$$

Максимальні напруження при крученні:

$$\tau_{\max}(M_K) = \frac{M_K}{W_p} = \frac{5}{15,68 \cdot 10^{-2}} = 31,9 \text{ МПа}.$$

Внутрішній тиск в оболонці викликає меридіональне  $\sigma_m$  і колове  $\sigma_\theta$  напруження:

$$\sigma_m = \frac{p \cdot D}{4h} = \frac{3 \cdot 2000}{4 \cdot 25} = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_\theta = \frac{p \cdot D}{2h} = \frac{3 \cdot 2000}{2 \cdot 25} = 120 \text{ МПа}.$$

3. Проводимо аналіз напруженого стану в небезпечних точках.

Аналізуючи епюри напружень (рис. 8.5), визначаємо положення небезпечних точок в перерізі – це точки  $K$  і  $B$ . На рис. 8.6 зображена небезпечна точка  $K$  і напруження, які діють на її гранях.

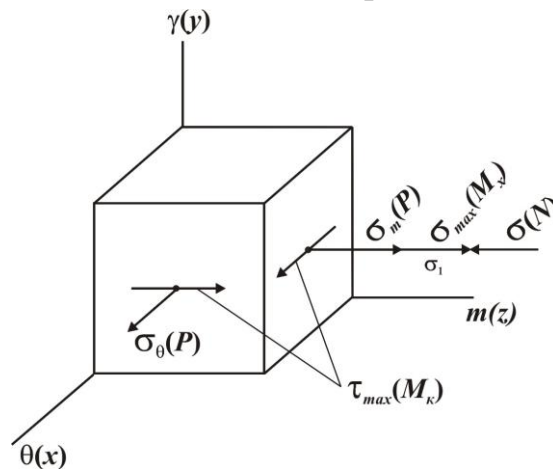


Рисунок 8.6

Обчислюємо величини компонент напруженого стану в небезпечній точці  $K$ :

$$\sigma_x = \sigma_\theta(p) = 120 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \sigma_m(p) + \sigma_{\max}(M_x) - \sigma(N) = 60 + 51,3 - 50,3 = 61 \text{ МПа},$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{\max}(M_K) = 31,9 \text{ МПа}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0.$$



#### 4. Обчислюємо головні напруження.

Тензор напружень для небезпечної точки має вигляд:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 31,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 31,9 & 0 & 61 \end{pmatrix}.$$

Звідси витікає, що площадка  $u$  є головною площадкою, і характеристичне рівняння тензора напружень запишеться так:

$$(0 - P)[(\sigma_x - P)(\sigma_z - P) - \tau_{xz}^2] = 0,$$

$$\text{або } (0 - P) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_x)P + (\sigma_z \sigma_x - \tau_{xz}^2)] = 0.$$

Корні цього рівняння будуть:  $P_1 = 0, P_2 = 134 \text{ МПа}, P_3 = 47 \text{ МПа}.$

Розставимо індекси головних напружень. Враховуючи правило:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , отримуємо:  $\sigma_1 = 134 \text{ МПа}, \sigma_2 = 47 \text{ МПа}, \sigma_3 = 0.$

#### 5. Визначаємо еквівалентне напруження.

Оскільки  $\sigma_{\text{ТР}} \neq \sigma_{\text{ТС}}$ , еквівалентні напруження слід визначати за теорією

Мора:  $\sigma_{\text{уеа}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3$ , де  $m = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ТС}}} = \frac{350}{400} = 0,875$ , тоді

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = 134 - 0,875 \cdot 0 = 134 \text{ МПа}.$$

6. Знаходимо коефіцієнт запасу по текучості:  $n_{\text{T}} = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{М}}} = \frac{350}{134} = 2,6.$

На рис. 8.7 зображена небезпечна точка  $B$  і напруження, які діють на її гранях.

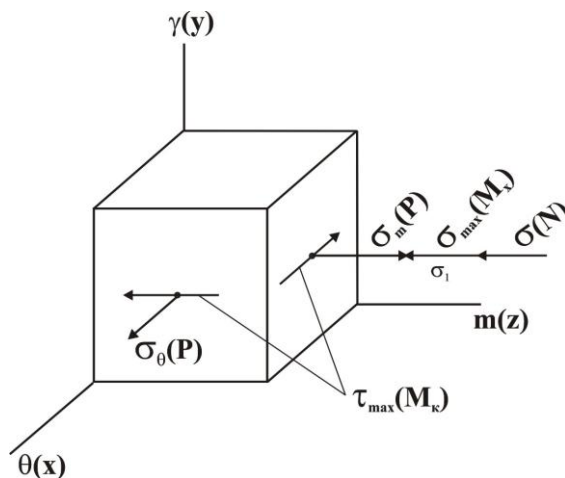


Рисунок 8.7

Обчислюємо величини компонент напруженого стану в небезпечній точці  $B$ :

$$\sigma_x = \sigma_\theta(p) = 120 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \sigma_m(p) - \sigma_{\max}(M_x) - \sigma(N) = 60 - 51,3 - 50,3 = -41,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{\max}(M_K) = 31,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0.$$

4. Обчислюємо головні напруження.

Тензор напружень для небезпечної точки має вигляд:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 31,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 31,9 & 0 & -41,6 \end{pmatrix}.$$

Звідси витікає, що площадка  $y$  є головною площадкою, і характеристичне рівняння тензора запишеться так:

$$(0 - P)[(\sigma_x - P)(\sigma_z - P) - \tau_{xz}^2] = 0,$$

$$\text{або } (0 - P) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_x)P + (\sigma_z \sigma_x - \tau_{xz}^2)] = 0.$$

Корні цього рівняння:  $P_1 = 0, P_2 = 126 \text{ МПа}, P_3 = -48 \text{ МПа}.$

Розставимо індекси головних напружень. Враховуючи правило:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , отримаємо:  $\sigma_1 = 126 \text{ МПа}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -48 \text{ МПа}.$

5. Визначаємо еквівалентне напруження.

Оскільки  $\sigma_{\text{ТР}} \neq \sigma_{\text{ТС}}$ , еквівалентні напруження слід визначати за теорією

Мора:  $\sigma_{\text{ЕКВ}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3$ , де  $m = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ТС}}} = \frac{350}{400} = 0,875$ , тоді

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = 126 - 0,875(-48) = 168 \text{ МПа}$$

6. Знаходимо коефіцієнт запасу по текучості.

$$n_{\text{T}} = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{М}}} = \frac{350}{168} = 2,1.$$

## ДОДАТКИ

## Додаток 1

## Вихідні дані до задачі 1

I	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-40,0	0	0	51,2	6,8	88,8
2	-50,0	0	0	41,8	10,3	98,2
3	-100,0	0	0	-19,5	-49,5	79,5
4	-40,0	0	0	32,4	13,7	107,6
5	-50,0	0	0	23,0	17,1	117,0
6	80,0	0	0	-42,9	-15,3	-17,1
7	-60,0	0	0	13,6	20,5	126,4
8	-130,0	0	0	41,2	-6,8	78,8
9	60,0	0	0	15,9	-14,1	44,1
10	-110,0	0	0	31,8	-10,3	88,2
11	-60,0	0	0	22,4	-13,7	97,6
12	60,0	0	0	-50,5	-56,4	-9,5
13	-50,0	0	0	13,0	-17,1	107,0
14	-80,0	0	0	-5,8	23,9	125,8
15	120,0	0	0	-43,7	-37,6	-16,3
16	-100,0	0	0	43,2	18,8	56,8
17	-80,0	0	0	39,7	28,2	60,3
18	70,0	0	0	-75,0	-53,6	15,0
19	-60,0	0	0	36,3	37,6	63,7
20	-80,0	0	0	29,5	56,4	70,5
21	80,0	0	0	-72,4	-42,4	12,4
22	-100,0	0	0	26,1	65,8	73,9
23	-100,0	0	0	33,2	-18,8	46,8
24	-80,0	0	0	24,3	-30,6	75,7
25	-80,0	0	0	19,5	-56,4	60,5
26	-100,0	0	0	16,1	65,8	63,9
27	-60,0	0	0	30,7	-23,0	69,3
28	130,0	0	0	23,2	-18,8	36,8
29	170,0	0	0	12,9	47,0	47,1
30	-70,0	0	0	37,1	15,3	62,9

## Продовження додатку 1

П	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-60,0	0	0	52,7	10,0	87,3
2	-100,0	0	0	44,0	15,0	96,0
3	-60,0	0	0	60,0	17,3	80,0
4	-90,0	0	0	35,4	20,0	104,6
5	-50,0	0	0	26,7	25,0	113,3
6	-80,0	0	0	55,0	26,0	85,0
7	-50,0	0	0	18,0	30,0	122,0
8	-120,0	0	0	42,7	-10,0	77,3
9	-60,0	0	0	50,0	-34,6	90,0
10	-100,0	0	0	34,0	-15,0	86,0
11	-70,0	0	0	25,4	-20,0	94,6
12	-60,0	0	0	45,0	43,3	95,0
13	-60,0	0	0	16,7	-25,0	103,3
14	-80,0	0	0	36,1	65,8	83,9
15	-70,0	0	0	40,0	52,0	100,0
16	-120,0	0	0	40,0	-17,3	60,0
17	-60,0	0	0	50,0	26,0	65,0
18	-80,0	0	0	45,0	26,0	75,0
19	-70,0	0	0	30,0	34,6	70,0
20	-90,0	0	0	20,0	52,0	80,0
21	-80,0	0	0	40,0	-34,6	80,0
22	-100,0	0	0	15,0	60,6	85,0
23	-80,0	0	0	30,0	-17,3	50,0
24	-70,0	0	0	35,0	-43,3	85,0
25	-90,0	0	0	10,0	-52,0	70,0
26	-70,0	0	0	-20,6	35,0	100,6
27	-60,0	0	0	22,7	10,0	57,3
28	120,0	0	0	20,0	17,3	40,0
29	140,0	0	0	-13,3	25,0	73,3
30	-90,0	0	0	57,1	15,3	82,9

## Продовження додатку 1

Ш	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-50,0	0	0	54,7	12,9	85,3
2	-90,0	0	0	47,0	19,3	93,0
3	-70,0	0	0	50,7	23,0	89,3
4	-80,0	0	0	39,4	25,7	100,6
5	-90,0	0	0	31,7	32,2	108,3
6	-60,0	0	0	44,3	-30,6	95,7
7	-100,0	0	0	24,0	38,6	116,0
8	-110,0	0	0	44,7	-12,9	75,3
9	-70,0	0	0	37,8	38,3	102,2
10	-90,0	0	0	37,0	-19,3	83,0
11	-80,0	0	0	29,4	25,7	90,6
12	-80,0	0	0	31,4	-46,0	108,6
13	-100,0	0	0	21,7	-32,2	98,3
14	-70,0	0	0	25,0	60,6	95,0
15	-90,0	0	0	47,1	-15,3	72,9
16	-60,0	0	0	32,7	10,0	67,3
17	-100,0	0	0	24,0	15,0	76,0
18	-70,0	0	0	40,7	-23,0	79,3
19	-100,0	0	0	15,4	20,0	84,6
20	80,0	0	0	-82,0	30,0	22,0
21	-100,0	0	0	34,3	-30,6	85,7
22	120,0	0	0	-90,6	35,0	30,6
23	110,0	0	0	-83,7	25,6	13,7
24	-80,0	0	0	27,8	-38,3	92,2
25	-140,0	0	0	-12,0	-30,0	92,0
26	140,0	0	0	-47,3	-10,0	-12,7
27	-80,0	0	0	15,0	53,6	105,0
28	140,0	0	0	-30,6	-35,0	90,6
29	150,0	0	0	-22,0	30,0	82,0
30	-60,0	0	0	35,9	14,1	64,1

## Продовження додатку 1

IV	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-80,0	0	0	55,9	14,1	84,1
2	-80,0	0	0	48,8	21,2	91,2
3	-100,0	0	0	28,8	21,2	71,2
4	-70,0	0	0	41,7	28,3	98,3
5	-80,0	0	0	34,6	35,4	105,4
6	-80,0	0	0	21,7	28,3	78,3
7	-90,0	0	0	27,6	42,4	112,4
8	-100,0	0	0	45,9	-14,1	74,1
9	100,0	0	0	-76,0	38,6	16,0
10	-60,0	0	0	38,8	-21,2	81,2
11	-90,0	0	0	31,7	-28,3	88,3
12	180,0	0	0	30,0	100,0	-120,0
13	-90,0	0	0	24,6	-35,4	95,4
14	-60,0	0	0	10,5	49,5	109,5
15	160,0	0	0	-79,5	-49,5	19,5
16	-60,0	0	0	34,7	12,9	65,3
17	-90,0	0	0	27,0	19,3	73,0
18	110,0	0	0	-50,0	34,6	-10,0
19	-100,0	0	0	19,4	25,7	80,6
20	-80,0	0	0	11,4	46,0	88,6
21	170,0	0	0	-60,0	52,0	0,0
22	170,0	0	0	-83,6	45,0	23,6
23	100,0	0	0	-47,1	47,0	-12,9
24	130,0	0	0	17,1	15,3	42,9
25	120,0	0	0	-68,6	46,0	8,6
26	-60,0	0	0	-13,6	45,0	93,6
27	160,0	0	0	-44,1	14,1	-15,9
28	150,0	0	0	-45,3	12,9	-14,7
29	90,0	0	0	-68,3	32,2	8,3
30	110,0	0	0	-23,6	45,0	83,6

## Продовження додатку 1

V	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-90,0	0	0	57,1	15,3	82,9
2	-70,0	0	0	50,7	23,0	89,3
3	-80,0	0	0	51,2	6,8	88,8
4	-60,0	0	0	44,3	30,6	95,7
5	-70,0	0	0	37,8	38,3	102,2
6	-60,0	0	0	41,8	10,3	98,2
7	-80,0	0	0	31,4	46,0	108,6
8	-90,0	0	0	47,1	-15,3	72,9
9	-40,0	0	0	32,4	13,7	107,6
10	-70,0	0	0	40,7	23,0	79,3
11	-100,0	0	0	34,3	-30,6	85,7
12	-50,0	0	0	23,0	-17,1	117,0
13	-80,0	0	0	27,8	-38,3	92,2
14	-100,0	0	0	15,0	53,6	105,0
15	-60,0	0	0	13,6	20,5	126,4
16	-130,0	0	0	35,9	14,1	64,1
17	-180,0	0	0	28,8	21,2	71,2
18	-130,0	0	0	41,2	-6,8	78,8
19	-90,0	0	0	21,7	28,3	78,3
20	100,0	0	0	-76,0	38,6	16,0
21	-110,0	0	0	31,8	10,3	88,2
22	180,0	0	0	-79,5	49,5	19,5
23	110,0	0	0	-50,0	34,6	-10,0
24	100,0	0	0	-117,8	-79,9	147,8
25	170,0	0	0	-60,0	52,0	0,0
26	130,0	0	0	17,1	15,3	42,9
27	-50,0	0	0	13,0	-17,1	107,0
28	160,0	0	0	-44,1	-14,1	-15,9
29	110,0	0	0	-23,6	45,0	83,6
30	-80,0	0	0	-5,8	23,9	125,8

## Закінчення додатку 1

VI	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-100,0	0	0	60,0	17,3	80,0
2	-60,0	0	0	55,0	26,0	85,0
3	-80,0	0	0	43,2	18,8	56,8
4	-50,0	0	0	50,0	34,6	90,0
5	-60,0	0	0	45,0	43,3	95,0
6	-90,0	0	0	39,7	28,2	60,3
7	-70,0	0	0	40,0	52,0	100,0
8	-80,0	0	0	50,0	-17,3	70,0
9	-70,0	0	0	36,3	-37,6	63,7
10	-80,0	0	0	45,0	26,0	75,0
11	-80,0	0	0	40,0	-34,6	80,0
12	-80,0	0	0	29,5	56,4	70,5
13	-70,0	0	0	35,0	-43,3	85,0
14	-90,0	0	0	22,7	10,0	57,3
15	-100,0	0	0	26,1	65,8	73,9
16	-70,0	0	0	37,1	15,3	62,9
17	-80,0	0	0	30,7	23,0	69,3
18	-60,0	0	0	33,2	18,8	46,8
19	-80,0	0	0	24,3	30,6	75,7
20	80,0	0	0	-72,4	42,4	12,4
21	-80,0	0	0	19,5	56,4	60,5
22	70,0	0	0	-75,0	53,6	15,0
23	120,0	0	0	-43,7	37,6	-16,3
24	-80,0	0	0	16,1	-65,8	63,9
25	60,0	0	0	-50,5	56,4	-9,5
26	100,0	0	0	15,9	14,1	44,1
27	100,0	0	0	23,2	18,8	36,8
28	170,0	0	0	-42,9	15,3	-17,1
29	130,0	0	0	-19,5	49,5	79,5
30	150,0	0	0	12,9	-47,0	47,1



**Додаток 2**  
**Вихідні дані до задачі 2**

№	$D$ , мм	$h$ , мм	$F$ , МН	$M_{И}$ , МНм	$M_{К}$ , МНм	$P$ , МПа	$\sigma_{ТД}$ , МПа	$\sigma_{ТН}$ , МПа
1	900	12	0,8	0,36	0,48	1,3	350	400
2	950	12	-0,9	0,40	0,56	1,4	300	350
3	1000	13	1,0	0,44	0,60	1,5	310	330
4	1050	13	1,1	0,56	0,76	1,5	370	420
5	1100	14	-1,2	0,64	0,84	1,6	320	370
6	1150	14	1,3	0,68	0,92	1,6	350	400
7	1200	15	1,5	0,84	1,16	1,7	400	450
8	1250	16	-1,6	0,92	1,24	1,7	350	400
9	1300	16	1,7	1,00	1,36	1,8	310	360
10	1350	17	-1,9	1,20	1,60	1,8	400	450
11	1400	18	-2,0	1,32	1,80	1,9	320	350
12	1450	18	-2,1	1,44	1,88	1,9	350	380
13	1500	19	2,3	1,68	2,20	2,0	420	470
14	1550	20	2,4	1,80	2,40	2,0	430	480
15	1600	20	2,5	1,92	2,60	2,1	440	490
16	1650	21	-2,7	2,20	2,96	2,1	450	500
17	1700	22	-2,9	2,36	3,16	2,2	470	520
18	1750	22	-3,0	2,52	3,36	2,2	480	530
19	1800	23	3,4	2,88	3,80	2,3	300	330
20	1850	24	3,5	3,04	4,00	2,3	320	360
21	1900	25	3,8	3,48	4,60	2,4	330	370
22	1950	25	4,0	3,68	4,92	2,4	400	440
23	2000	26	4,1	3,84	5,12	2,5	420	460
24	2050	27	4,5	4,40	5,80	2,5	440	480
25	2100	28	4,6	4,60	6,08	2,6	500	550
26	2150	28	-4,8	4,80	6,40	2,6	410	460
27	2200	29	5,2	5,40	7,00	2,7	380	430
28	2250	30	-5,3	5,60	7,40	2,7	310	340
29	2300	31	5,4	5,80	7,80	2,8	420	470
30	2350	32	5,7	6,60	8,40	2,8	300	330

**Додаток 3**  
**Механічні характеристики сталей**

№ п/п	Марка сталі	Модуль пружності $E \cdot 10^{-5}$ , МПа	Границя текучості $\sigma_T$ , МПа	Коефіцієнт лінійного розширення $\alpha \cdot 10^6$ , $1/^\circ\text{C}$
1	Ст 10	2,10	210	11,6
2	Ст 20	2,13	250	11,1
3	Ст 25	1,98	280	11,1
4	Ст 30	2,00	300	12,6
5	Ст 35	2,06	320	11,9
6	Ст 40	2,13	340	12,4
7	Ст 45	2,00	360	11,7
8	Ст 50	2,16	380	12,0
9	Ст 55	2,10	390	11,0
10	Ст 60	2,04	420	11,1
11	Ст 20Г	2,04	280	12,3
12	Ст 30Г	2,04	320	12,6
13	Ст 50Г	2,16	400	11,6
14	Ст 20Х	2,16	650	11,3
15	Ст 40Х	2,14	800	13,4
16	Ст 45Х	2,06	850	12,8
17	Ст 30ХМ	2,03	750	12,3
18	Ст 35ХМ	2,04	850	12,3
19	Ст 40ХН	2,00	800	11,8
20	Ст 50ХН	2,00	900	11,8
21	Ст 15ХФ	2,06	550	12,0
22	Ст 40ХФА	2,00	750	11,0
23	Ст 20ХГСА	1,96	650	11,0
24	Ст 30ХГС	1,94	850	11,0

## Додаток 4

### Тести для самоперевірки

**1. Що є мірою інтенсивності внутрішніх сил в точці деформованого тіла?**

а) деформації;    б) напруження;    в) переміщення;    г) кути повороту.

**2. Що називається середнім напруженням на елементарній площадці в перерізі?**

а)  $\bar{\sigma} = \frac{\Delta P}{\Delta A}$ ;    б)  $P_V = \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    в)  $\sigma_V = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    г)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ .

**3. Що називається повним напруженням в точці заданого перерізу?**

а)  $\bar{\sigma} = \frac{\Delta P}{\Delta A}$ ;    б)  $P_V = \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    в)  $\sigma_V = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    г)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ .

**4. Як позначаються проекції повного напруження на довільно орієнтованій площадці?**

а)  $P_{xV}, P_{yV}, P_{zV}$ ;    б)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;    в)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    г)  $u, v, w$ .

**5. Які напруження називаються нормальними?**

- а) ті, що діють під кутом до елементарної площадки;
- б) ті, що діють по нормалі до елементарної площадки;
- в) ті, що діють по дотичній до елементарної площадки;
- г) ті, що діють по колу в елементарної площадки.

**6. Яку напруження називаються дотичними?**

- а) ті, що діють під кутом до елементарної площадки;
- б) ті, що діють по нормалі до елементарної площадки;
- в) ті, що діють по дотичній до елементарної площадки;
- г) ті, що діють по колу в елементарної площадки.

*Продовження додатку 4*

**7. Які площадки називаються головними?**

- а) ті, на яких діють дотичні напруження;
- б) ті, на яких відсутні нормальні напруження;
- в) ті, на яких відсутні дотичні напруження;
- г) ті, на яких діють нормальні напруження.

**8. Які напруження називаються головними?**

- а) ті, що діють на координатних площадках;
- б) ті, що діють в поперечних перерізах;
- в) ті, що діють на головних площадках;
- г) ті, що діють на похилих площадках.

**9. Скільки головних площадок можна провести через точку деформованого тіла?**

- а) п'ять;                      б) чотири;                      в) шість;                      г) три.

**10. Як головні площадки орієнтовані по відношенню одна до одної?**

- а) під кутом  $45^\circ$  одна до одної;
- б) під кутом  $30^\circ$  одна до одної;
- в) перпендикулярно одна до одної;
- г) під кутом  $60^\circ$  одна до одної.

**11. Які властивості головних напружень?**

- а) вони середні;
- б) вони мінімальні;
- в) вони екстремальні;
- г) вони максимальні.

**12. Які правила індексації головних напружень??**

- а)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ;      б) довільно;      в)  $\sigma_U, \sigma_V, \sigma_W$ ;      г)  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ .

Продовження додатку 4

**13. Який тип напруженого стану в точці тіла є неможливим?**

- а) лінійний;    б) плоский;    в) об'ємний;    г) шестивимірний.

**14. Вкажіть закон парності дотичних напружень у випадку, коли всі грані елемента не є головними:**

- а)  $\tau_{xy} = \tau_{zy}$ ;    б)  $\tau_{\max} = \tau_{xz}$ ;    в)  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;    г)  $\tau_{yx} = \tau_{xz}$ .

**15. Як позначаються лінійні деформації в напрямку координатних осей?**

- а)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;    б)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    в)  $U, V, W$ ;    г)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**16. Як позначаються лінійні деформації в напрямку головних осей?**

- а)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;    б)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    в)  $U, V, W$ ;    г)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**17. Що називається деформованим станом у точці?**

- а) сукупність  $U, V, W$ ;    б) сукупність  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;  
в) сукупність  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    г) сукупність  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**18. Під напруженим станом у довільній точці деформованого тіла слід розуміти ...**

а) сукупність нормальних та дотичних напружень в будь-якому перерізі стержня;

б) сукупність нормальних та дотичних напружень на будь-яких трьох елементарних площадках, що проходять через цю точку;

в) сукупність нормальних та дотичних напружень, які діють на множині елементарних площадок, що проходять через цю точку;

г) сукупність нормальних та дотичних напружень в поперечному перерізі стержня.

*Продовження додатку 4*

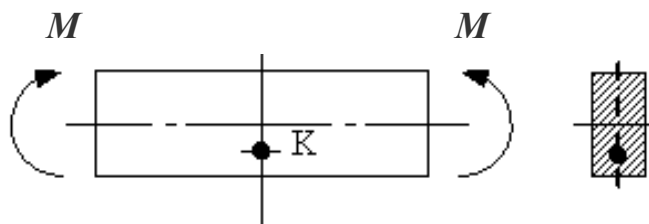
**19. Тензор напружень – це...**

- а) сукупність нормальних та дотичних напружень на будь-яких трьох елементарних площадках, що проходять через цю точку;
- б) сукупність нормальних та дотичних напружень в будь-якому перерізі стержня;
- в) сукупність нормальних та дотичних напружень в поперечному перерізі стержня;
- г) сукупність нормальних та дотичних компонентів напружень на трьох взаємно перпендикулярних елементарних площадках, що проходять через точку тіла.

**20. При крученні стержня круглого поперечного перерізу головні площадки в точці на його поверхні співпадають ...**

- а) з поперечними перерізами стержня;
- б) з поздовжніми перерізами стержня;
- в) з поперечними і поздовжніми перерізами стержня;
- г) з зовнішньою поверхнею і двома перерізами під кутом  $\pm 45^\circ$  до поздовжньої осі стержня.

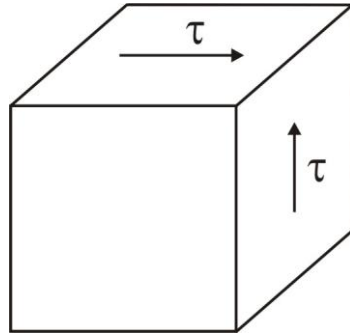
**21. При чистому згинанні стержня головні площадки в точці К співпадають ...**



- а) з поздовжнім і двома похилими під кутом  $45^\circ$  до поздовжньої осі стержня перерізами;
- б) з поперечним і двома поздовжніми перерізами стержня (вертикальним і горизонтальним);
- в) з поздовжніми перерізами стержня;
- г) з поперечними перерізами стержня.

Продовження додатку 4

22. При чистому зсуві головні напруження дорівнюють ...



а)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ ;

в)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau$ ;

б)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$ ;

г)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ .

23. Площинка, на якій немає дотичних напружень, називається...

а) головною;

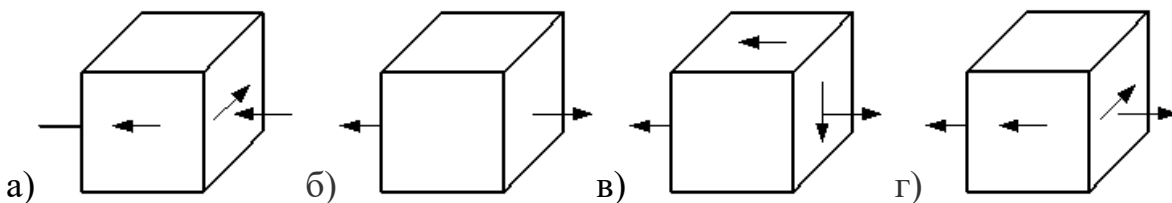
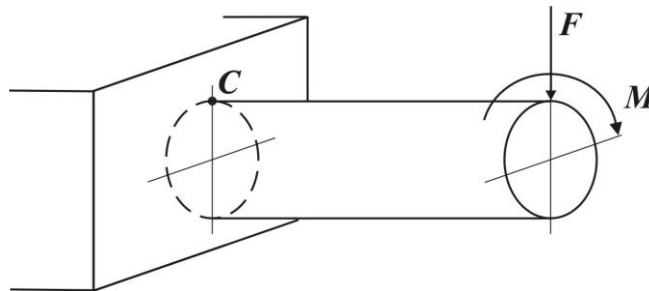
б) першою;

в) основною;

г) чис-

тою.

24. Напружений стан в точці *C* має вигляд ...



25. Вид (тип) напруженого стану в довільній точці деформованого тіла підрозділяється на...

а) об'ємне, плоске, лінійне;

б) косе згинання, згинання з розтяганням, згинання з крученням;

в) розтягання, стискання, згинання;

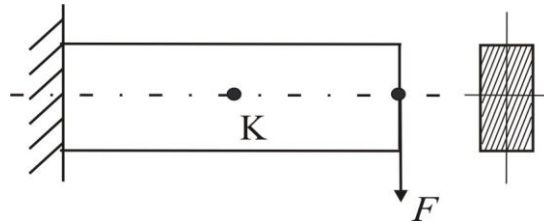
г) розтягання, кручення, зсув.





Продовження додатку 4

**30. Вид (тип) напруженого стану в точці К...**



- а) лінійний (розтягання); в) лінійний (стискання);  
б) плоский (чистий зсув); г) "нульовий" (напруження відсутні).

**31. Два напружених стани називаються рівнонебезпечними, якщо вони мають...**

- а) однакові знаки нормальних напружень;  
б) однакові знаки максимальних дотичних напружень;  
в) однакові знаки головних напружень;  
г) однакові коефіцієнти запасу.

**32. Сукупність нормальних і дотичних напружень, які діють на множині елементарних площадок, що проходять через точку, називається...**

- а) станом напруження; в) напруженим станом;  
б) повним напруженням; г) тривісним напруженням.

**33. Напружений стан у точці, де два головних напруження дорівнюють нулю, називається...**

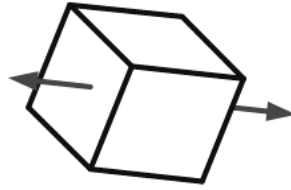
- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

**34. Напружений стан у точці, де одно головне напруження дорівнює нулю...**

- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

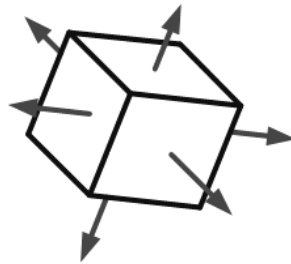
**35. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...**

Продовження додатку 4



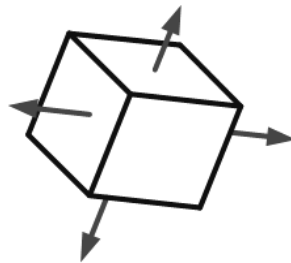
а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

**36. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...**



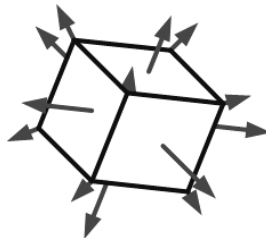
а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

**37. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...**



а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

**38. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...**



а) просторовим; б) лінійним; в) неіснуючим; г) плоским.

Продовження додатку 4

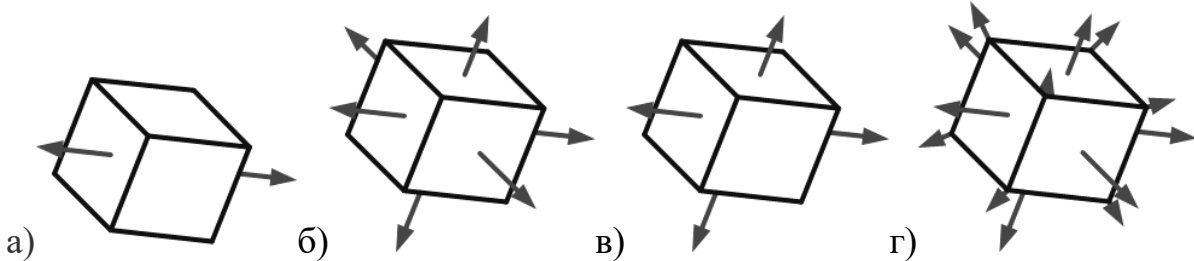
**39. Напружений стан у точці, де три головних напруження відмінні від нуля, називається...**

- а) просторовим напруженим станом;
- б) лінійним напруженим станом;
- в) особливим напруженим станом;
- г) плоским напруженим станом.

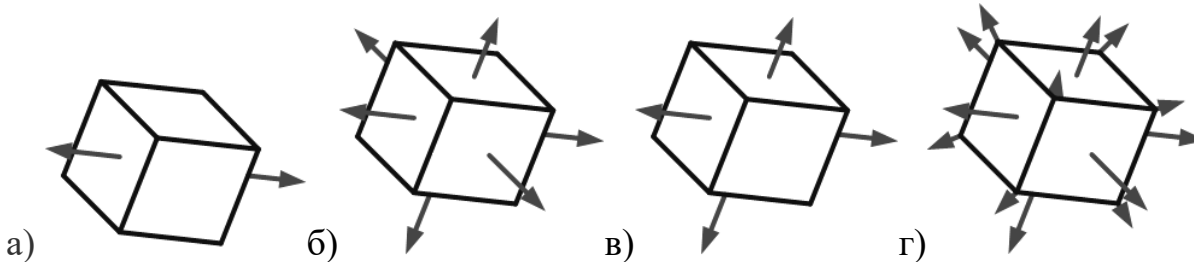
**40. В лінійному напруженому стані закон Гука виражається залежністю...**

- а)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ;      б)  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ;      в)  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ ;      г)  $\tau = G \cdot \gamma$ .

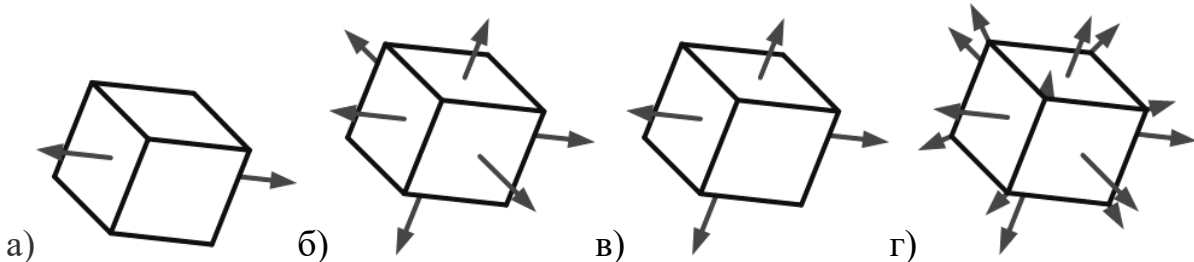
**41. Вкажіть просторовий напружений стан...**



**42. Вкажіть лінійний напружений стан...**

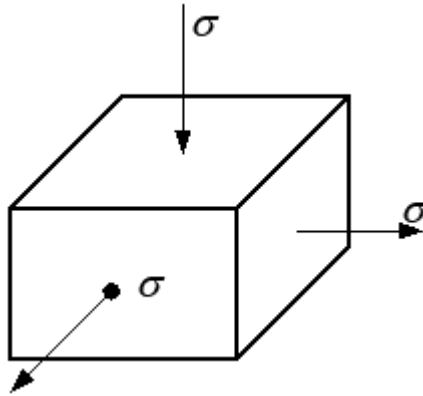


**43. Вкажіть плоский напружений стан...**



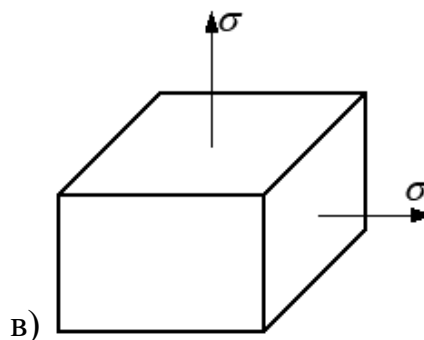
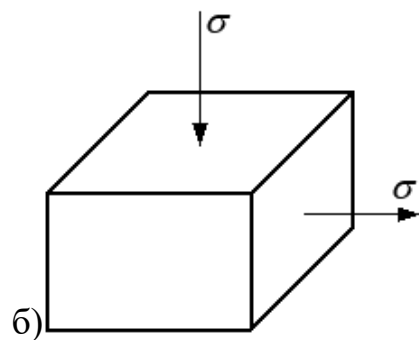
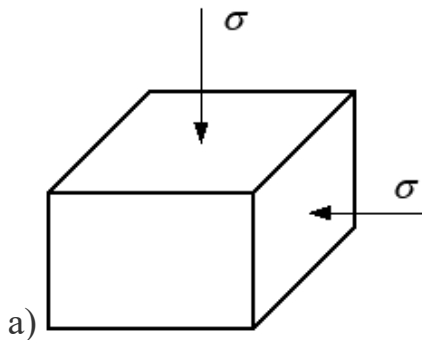
Продовження додатку 4

**44. Обчисліть еквівалентне напруження згідно до гіпотези найбільших відносних лінійних деформацій (матеріал сталь,  $\mu = 0,3$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$ )**



- а) 0;                      б)  $1,5\sigma$ ;                      в)  $\sigma$ ;                      г)  $1,2\sigma$ ;

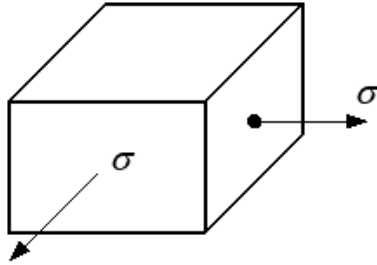
**45. З трьох напружених станів найнебезпечнішим (відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень ( $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$ )) буде...**



- г) всі напружені стани є рівнонебезпечними.

Продовження додатку 4

**46. Обчисліть еквівалентне напруження відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень ( $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$ ):**

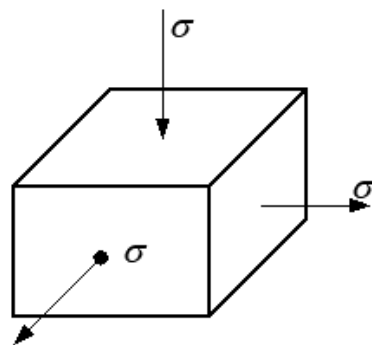


- а) 0;                      б)  $2\sigma$ ;                      в)  $\sigma$ ;                      г)  $-\sigma$ .

**47. Виберіть неправильне твердження...**

- а) гіпотеза міцності Мора пояснює граничний стан матеріалів, які по-різному опираються розтягання та стисканню;
- б) гіпотеза міцності найбільших відносних лінійних деформацій підтверджується експериментами лише для крихких матеріалів;
- в) гіпотеза міцності найбільших дотичних напружень не враховує впливу проміжного головного напруження  $\sigma_2$  на міцність матеріалу;
- г) гіпотеза міцності найбільших дотичних напружень не пояснює граничного стану пластичних матеріалів.

**48. Обчисліть еквівалентне напруження відповідно до гіпотези міцності Мора (матеріал сірий чавун,  $k = 0,2$ ;  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - k\sigma_3$ ):**



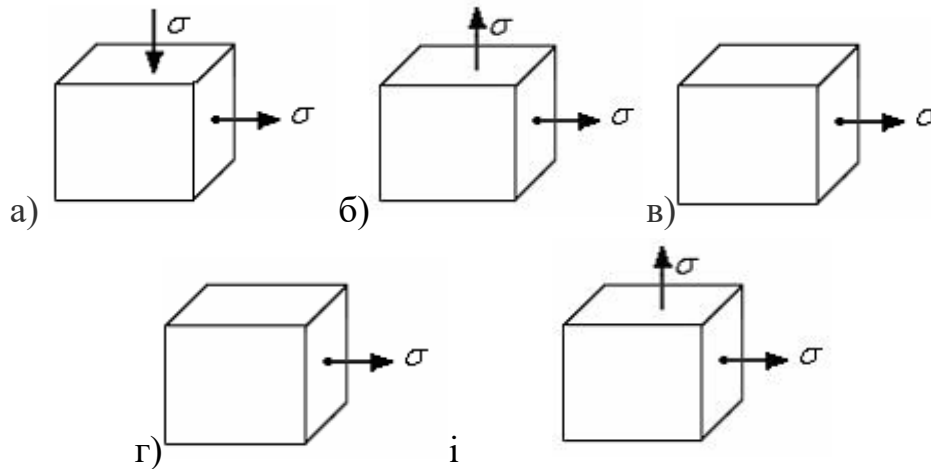
- а)  $0,8\sigma$ ;                      б)  $2,2\sigma$ ;                      в)  $1,2\sigma$ ;                      г)  $-1,8\sigma$ .

**49. Питома потенційна енергія зміни об'єму**

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Продовження додатку 4

( $E$  – модуль пружності,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона) дорівнює нулю в напруженому стані



**50. Умові міцності відповідно до гіпотези найбільших відносних лінійних деформацій має вигляд...**

а)  $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$ ;

в)  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ;

б)  $\sigma_1 \leq [\sigma]_+$ ,  $\sigma_1 \leq [\sigma]_-$ ;

г)  $\sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_+$ ;

**51. При складному напруженому стані для оцінки міцності пластичних матеріалів слід застосовувати...**

а) будь-яку гіпотезу міцності;

б) гіпотезу міцності найбільших дотичних напружень;

в) одночасно гіпотезу найбільших відносних лінійних деформацій і найбільших нормальних напружень;

г) гіпотезу міцності найбільших нормальних напружень.

**52. Компоненти тензора деформацій  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  ви- значають...**

а) деформований стан в точці;

б) напружений стан в точці;

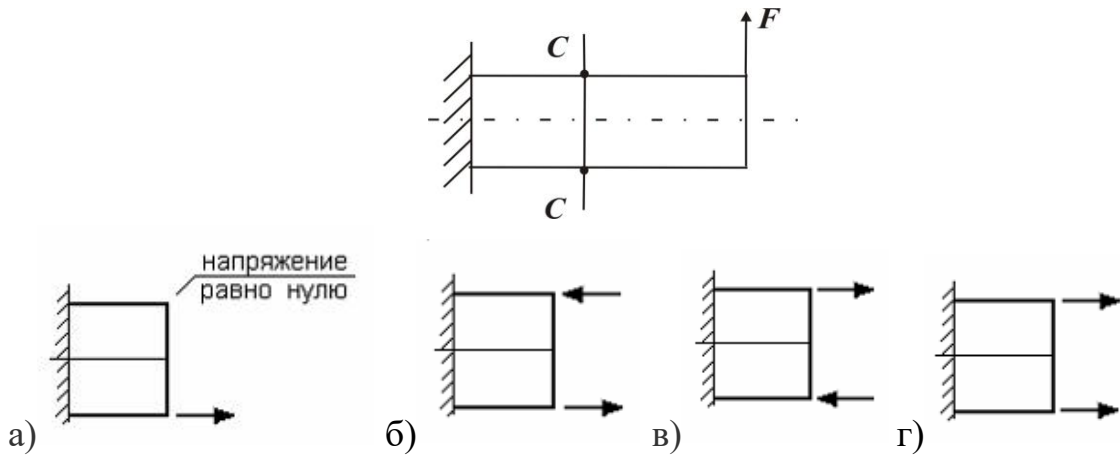
в) напружений стан тіла;

г) деформований стан тіла.

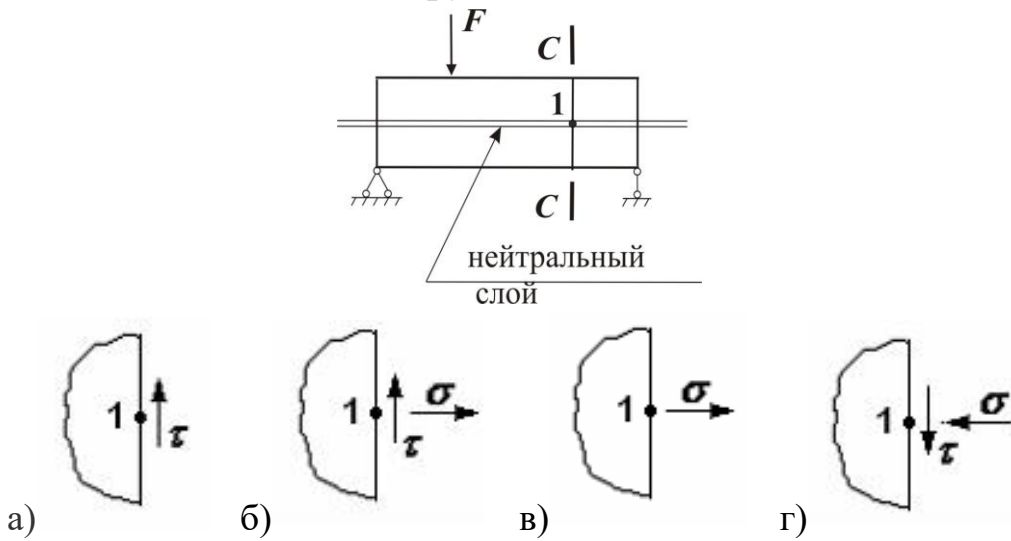


Продовження додатку 4

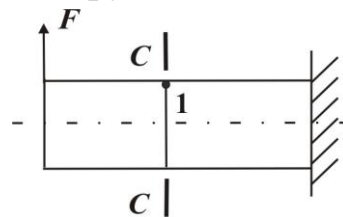
56. Вірні напрямки нормальних напружень в точках 1, 2 перерізу  $C-C$  мають вигляд...



57. Якщо відкинути праву частину стержня, то в точці 1 перерізу  $C-C$  необхідно показати напруження ...

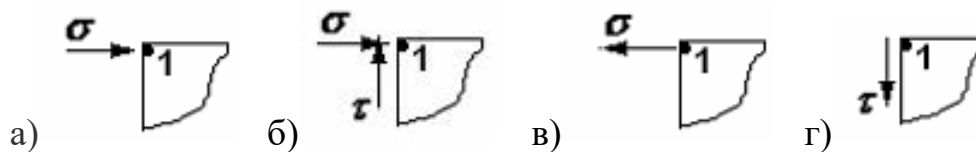


58. Якщо відкинути ліву частину стержня, то в точці 1 перерізу  $C-C$  необхідно показати напруження ...





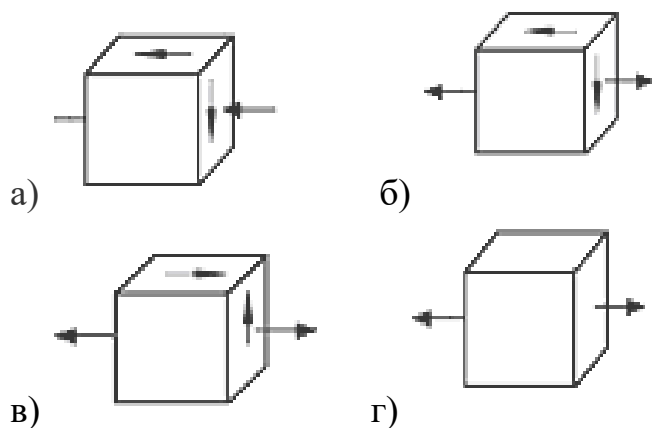
Продовження додатку 4



**59. Відносні лінійні деформації  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{\min}$ ) називаються...**

- а) головними деформаціями;
- б) екстремальними деформаціями;
- в) максимальними деформаціями;
- г) граничними деформаціями.

**60. При сумісній дії згинання і кручення стержня прямокутного перерізу в кутовій точці перерізу може бути напружений стан...**



**61. Який закон характеризує зв'язок між компонентами напруженого і деформованого стану в точці?**

- а) закон Бойля- Маріотта;
- б) закон Ньютона;
- в) узагальнений закон Гука;
- г) закон Коші.

Продовження додатку 4

**62. Який напружений стан називається граничним?**

- а) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від твердого до рідкого;
- б) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від твердого до м'якого;
- в) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від пружного до пружно-пластичного;
- г) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від пружного до повзучості.

**63. Що називається коефіцієнтом запасу для даного напруженого стану?**

- а)  $n = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max}}$ ;
- б)  $n = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max}}$  (оп – небезпечне);
- в)  $n = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ;
- г)  $n = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max}}{\varepsilon_{\text{ЭКВ}}}$ .

**64. Який напружений стан обирається як еталон (еквівалент) для порівняння з тривісним напруженим станом?**

- а) лінійний;    б) плоский;    в) об'ємний;    г) шестивісний.

**65. Вкажіть формулу для розрахунку еквівалентних напружень за гіпотезою пластичності – гіпотезою найбільших дотичних напружень:**

- а)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T$ ;
- б)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_T$ ;
- в)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ ;
- г)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_3 - \sigma_4 = \sigma_T$ .

**66. Вкажіть формулу для розрахунку еквівалентних напружень за гіпотезою пластичності – гіпотезою питомої потенційної енергії формозміни:**

а)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$ ;

Продовження додатку 4

б)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{3}{7}(\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ ;

в)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sigma_3 - \sigma_2$ ;

г)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_3 - \sigma_4)^2}$ .

**67. Умова міцності за теорією Мора має вигляд ...**

а)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ;

б)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_3 - \sigma_2 \leq [\sigma]$ ;

в)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+]$ ;

г)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_3 - \sigma_1 \leq [\sigma]$ .

**68. Які одиниці виміру механічних напружень?**

а) Н · м/с;

б) Н/м;

в) Н · м/м<sup>2</sup>;

г) Н/м<sup>2</sup>.

**69. Узагальнений закон Гука для ізотропного матеріалу в головній системі координат має вигляд:**

а)  $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$ ;

б)  $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ ;

в)  $\sigma_2 = \frac{G}{\tau_{12}}$ ;

г)  $\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right|$ .

**70. Коефіцієнт Пуассона визначається так:**

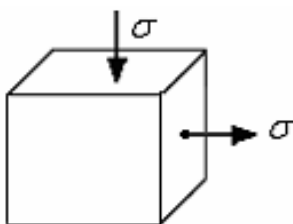
а)  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

б)  $\mu = \left| \frac{\varepsilon^1}{\varepsilon} \right|$

в)  $\nu = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$

г)  $\mu = \frac{\sigma_6}{\sigma_2}$

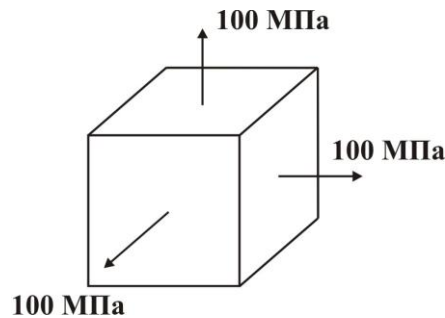
**71. Для напруженого стану в точці умова міцності (відповідно до гіпотези питомої потенційної енергії формозміни) має вигляд:**



Продовження додатку 4

- а)  $\sigma\sqrt{3} \leq [\sigma]$ ;   б)  $\sigma\sqrt{2} \leq [\sigma]$ ;   в)  $2\sigma \leq [\sigma]$ ;   г)  $1,3\sigma \leq [\sigma]$ .

**72.** Для напруженого стану в точці необхідно знайти відносну лінійну деформацію. (Модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ )



- а) 0,04;   б) 0,003;   в) 0,0002;   г) 0,00001.

**73.** Направляючі косинуси – це:

- а) косинуси кутів між нормаллю до площадки та координатними осями;  
б) косинуси кутів між координатними осями;  
в) косинуси кутів між дотичною до площадки та координатними осями;  
г) косинуси кутів між нормаллю до площадки та дотичною до площадки.

**74.** Що являють собою коефіцієнти характеристичного (кубічного) рівняння напруженого стану в точці?

- а) елементи тензора напружень;  
б) елементи девіатора напружень;  
в) елементи кульового тензора;  
г) інваріанти тензора напружень.

**75.** Визначте тип напруженого стану в точці, якщо відомі інваріанти тензора напружень ( $I_1 = 0$ ,  $I_2 \neq 0$ ,  $I_3 = 0$ ):

- а) лінійне;   б) плоске;   в) об'ємне;   г) квадроосьове.

Закінчення додатку 4

**76. Визначте тип напруженого стану в точці, якщо відомі інваріанти тензора напружень ( $I_1 \neq 0, I_2 = 0, I_3 = 0$ ):**

- а) лінійне; б) плоске; в) об'ємне; г) квадроосьове.

**77. Умовою застосовності безмоментної теорії розрахунку оболонок є відношення діаметра оболонки до товщини її стінки не менш ніж:**

- а) 5; б) 10; в) 15; г) 20.

**78. Рівняння Лапласа для розрахунку оболонок за безмоментною теорією має вигляд:**

а)  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}$ ; б)  $\sigma_m + \sigma_\theta = P$ ; в)  $\frac{\sigma_m}{\rho_\theta} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_m} = \frac{P}{h}$ ; г)  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta}$ .

**79. При расчете цилиндрической оболочки с днищами под действием внутреннего давления напряжения будут такими:**

- а) меридиональные напряжения равны окружным;  
б) меридиональные напряжения больше окружных в два раза;  
в) меридиональные напряжения меньше окружных в два раза;  
г) окружные напряжения больше меридиональных в три раза.

**80. При розрахунку сферичної оболонки під дією внутрішнього тиску напруження будуть такими:**

- а) меридіональні напруження дорівнюють коловим;  
б) меридіональні напруження більше колових в два рази;  
в) меридіональні напруження менше колових в два рази;  
г) колові напруження більше меридіональних в три рази.

**81. При розрахунку конічної оболонки під дією внутрішнього тиску напруження будуть такими:**

- а) меридіональні напруження дорівнюють коловим;  
б) меридіональні напруження більше колових в два рази;  
в) меридіональні напруження менше колових в два рази;  
г) колові напруження більше меридіональних в три рази.

## Список літератури

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
2. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
3. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.
4. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.
5. Устиненко В. Л. Основы проектирования деталей машин / В. Л. Устиненко, Н. Ф. Киркач, Р. А. Баласанян. – Харьков : Вища школа, изд-во при Харьковском университете, 1983. – 184 с.

## Зміст

Вступ .....	3
1. Основи розрахунку оболонок за безмоментною теорією.....	4
1.1. Циліндрична оболонка .....	7
1.2. Сферична оболонка .....	8
1.3. Конічна оболонка .....	8
2. Основи теорії напружено-деформованого стану в точці .....	9
2.1. Поняття про напружений стан і компоненти тензора напружень в точці .....	9
2.2. Приклад формування матриці тензора напружень .....	11
3. Визначення напружень на довільній похилій площадці .....	12
4. Поняття про головні площадки і головні напруження. Класифікація типів напруженого стану в точці. Октаедричні напруження, інтенсивність напружень .....	14
5. Закон Гука при об'ємному деформованому стані (узагальнений закон Гука) .....	17
5.1. Формулювання закону Гука .....	17
5.2. Приклад визначення компонент напруженого і деформованого стану із застосуванням узагальненого закону Гука .....	18
6. Питома потенційна енергій пружної деформації в точці .....	19
7. Гіпотези граничних напружених станів (теорії міцності).....	21
7.1. Перша гіпотеза міцності (гіпотеза найбільших нормальних напружень) .....	22
7.2. Друга гіпотеза міцності (гіпотеза найбільших лінійних деформацій) .....	22
7.3. Третя гіпотеза міцності (гіпотеза найбільших дотичних напружень) .....	23
7.4 Четверта гіпотеза міцності (гіпотеза питомої потенційної енергії формозміни) .....	23
7.5. Гіпотеза міцності Мора .....	24
8. Розрахунково-проектувальне завдання .....	25
8.1. Склад розрахунково-проектувального завдання .....	25
8.2. Порядок виконання завдання .....	26
8.3. Приклади розв'язання задач .....	27

8.3.1. Зразок розв'язання задачі 1.....	27
8.3.2. Зразок розв'язання задачі 2.....	30
ДОДАТКИ .....	35
Додаток 1. Вихідні дані до задачі 1 .....	35
Додаток 2. Вихідні дані до задачі 2 .....	41
Додаток 3. Механічні характеристики сталей .....	42
Додаток 4. Тести для самоперевірки .....	43
Список літератури .....	62



Навчальне видання

ПОГОРІЛОВ Сергій Юрійович  
ХАВІН Валерій Львович  
ШЕРГІН Сергій Юрійович  
КРАВЦОВА Наталія Вікторівна

РОЗРАХУНОК ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ НА МІЦНІСТЬ ПРИ  
СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Навчально-методичний посібник з курсу «Опір матеріалів»  
для студентів машинобудівних спеціальностей

Відповідальний за випуск проф. В. Л. Хавін  
Роботу до видання рекомендував С. К. Шелковий

В авторській редакції

План 2021 р., поз. 84

Підп. до друку 04.11.2021 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.  
Наклад 100 прим. Зам. № Ціна договірна

---

Видавничий центр НТУ «ХП».  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

---