

Вектори і векторний простір (блок 1)



Корніль Тетяна Леонівна
доцент кафедри КМАД

9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

Корніль Тетяна Леонівна



- К. Т. Н.
- доцент кафедри КМАД
- фахівець в галузі теорії ймовірностей, математичної статистики та вищої математики



Що таке вектор?

Вектор (від лат. vector, «той, що несе») — у найпростішому випадку математичний об'єкт, який характеризується величиною і напрямком.

Наприклад, у геометрії і в природничих науках вектор — це спрямований відрізок прямої у тривимірному просторі (R^3) або на площині, тобто у двовимірному просторі (R^2).

Відрізок, для якого визначено напрям, називають **вектором**.

Вектор зображують відрізком зі стрілкою, яка вказує напрямок вектора. (у R^3 або R^2).

Багатовимірні вектори

n -вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел, що записані у виді рядка або стовпця. Ці числа є координатами вектора у деякій багатовимірній системі координат.

$$\vec{X} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \text{ або } \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Якщо немає спеціальних попереджень, то n -вимірний вектор вважається вектором-стовпцем.

Багатовимірні вектори

$$\vec{X} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \text{ або } \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

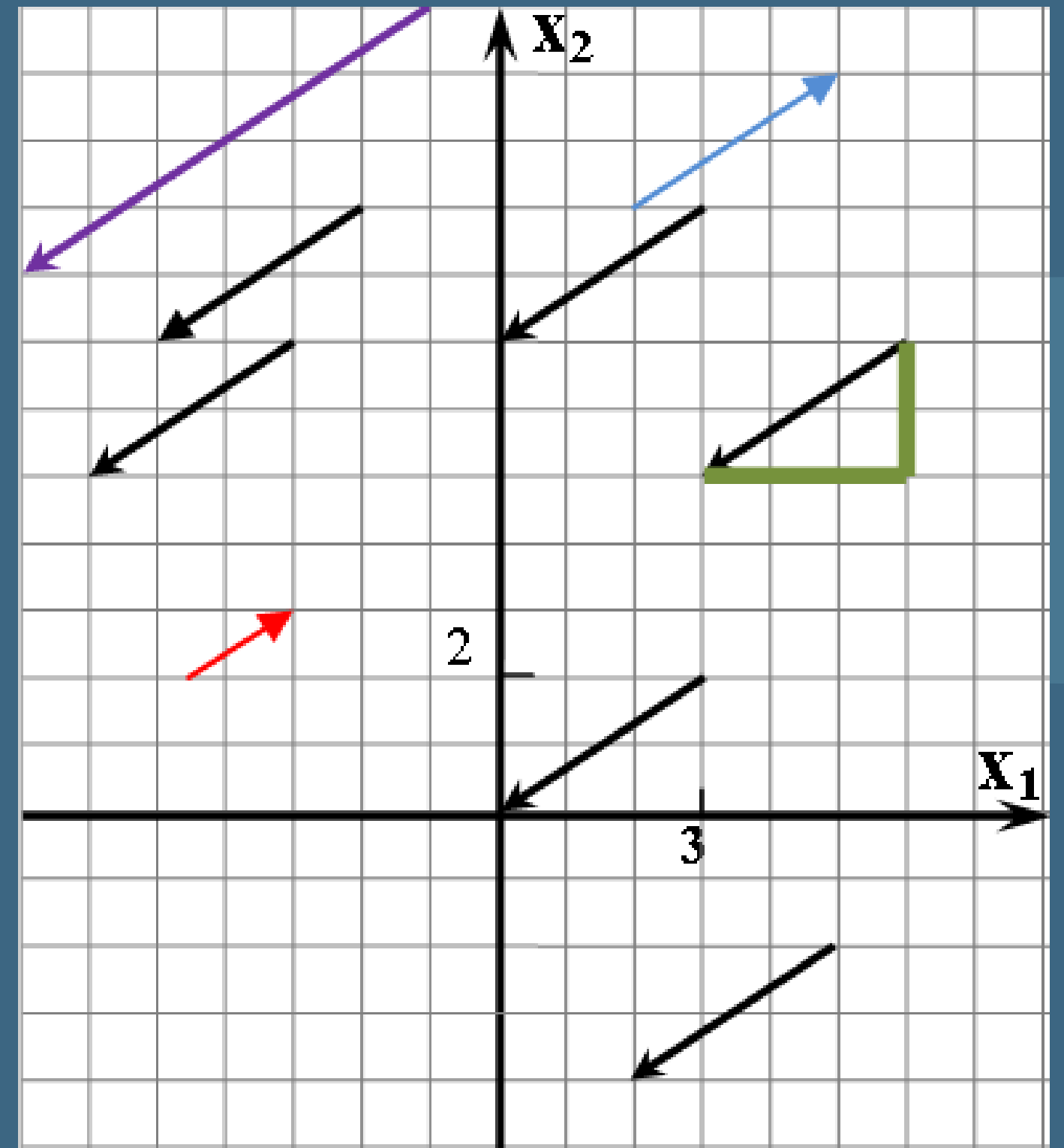
Поняттям n -вимірного вектора широко користуються в економіці, наприклад, деякий набір товарів можна охарактеризувати вектором $\vec{X}$, де $x_i \geq 0; i = \overline{1, n}$ - кількість товару i -го виду, а відповідні ціни – вектором $\vec{Y}$, де $y_i \geq 0; i = \overline{1, n}$.

Багатовимірні вектори не мають геометричного змісту.

Як задати вектор?

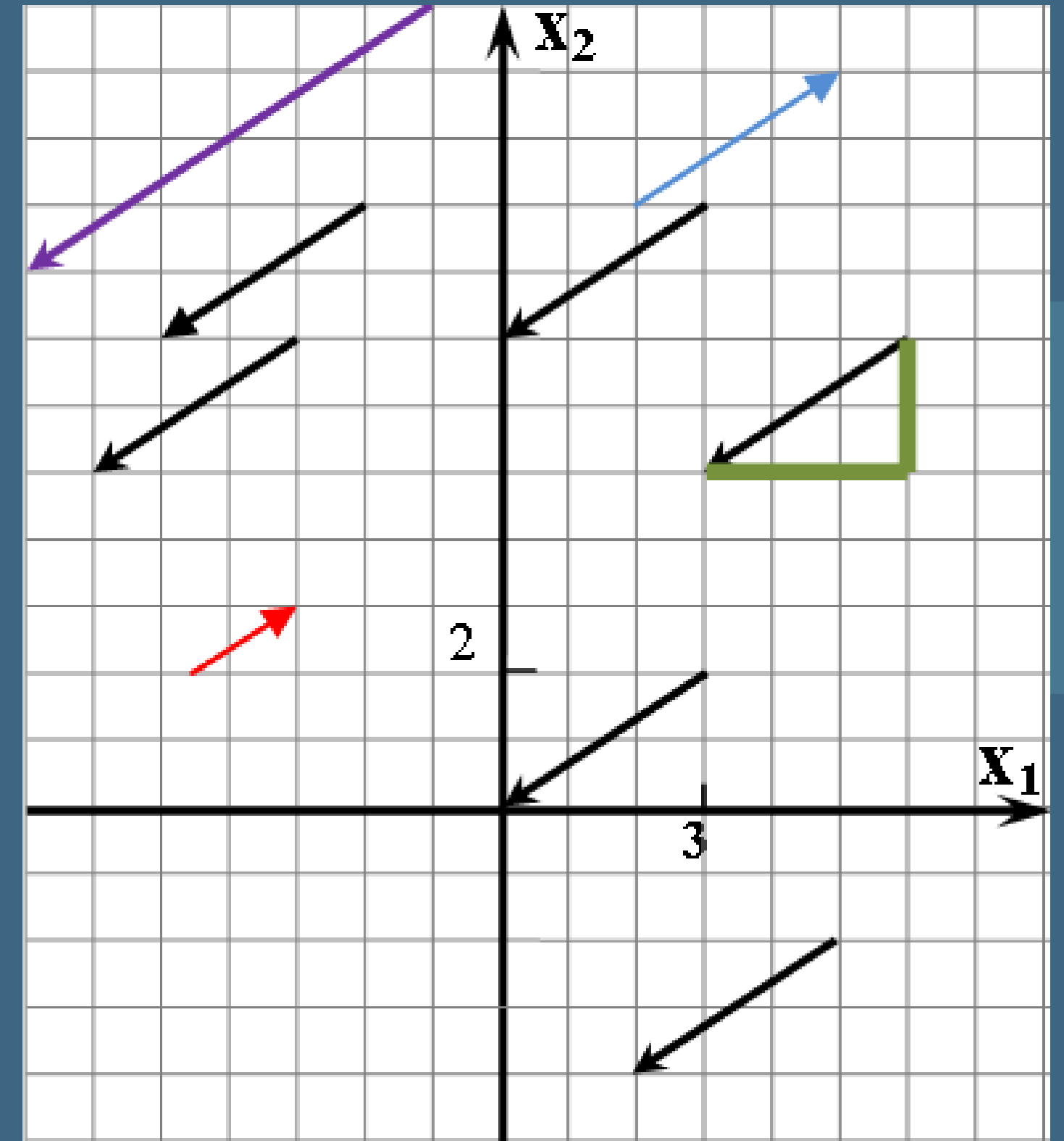
Задати будь-який об'єкт – це задати такі його параметри, щоб вони визначали тільки цей об'єкт і ніякий інший.

Скільки різних ЧОРНИХ векторів на рисунку?



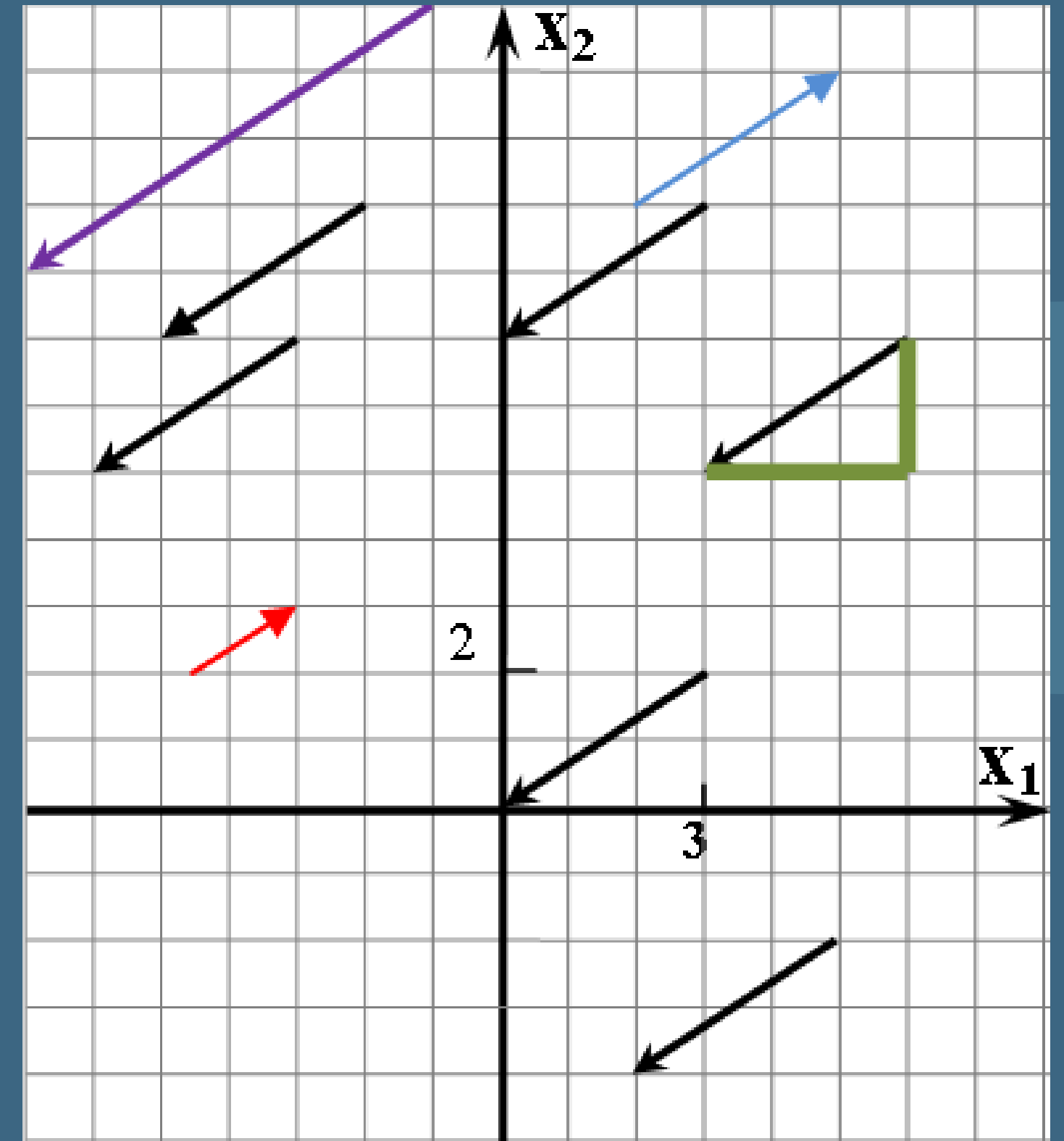
Як задати вектор?

- Наприклад, вектор можна задати його декартовими координатами:
- Як знайти довжину вектора?
- Як змінити довжину (модуль) вектора?



Як задати вектор?

- Як змінити його напрям?
- А разом довжину і напрям?
- Як зробити довжину вектора одиничною?
- Як називається такий вектор?



Лінійна комбінація векторів

Існують різноманітні множини, елементи яких можна додавати один до одного та множити на числа. Такою множиною є, наприклад, множина звичайних геометричних векторів у просторі.

Те ж саме стосується множини неперервних функцій і.т.п. Незважаючи на різну природу елементів, операції додавання та множення на числа мають спільні властивості.

Лінійна комбінація векторів

Тому доцільно розглянути множину елементів будь-якої природи із двома операціями (діями):

- 1) додаванням елементів один до одного
- 2) множенням елементів на дійсні числа.

Такі дії називають **ЛІНІЙНИМИ** діями,

а множину векторів, для якої визначені лінійні операції, називають **ЛІНІЙНИМ ВЕКТОРНИМ ПРОСТОРОМ**.

Лінійна комбінація векторів

Як визначені лінійні операції для просторів R^3 або R^2 (тут $n=2$ або $n=3$):

алгебраїчне додавання векторів

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c};$$

$$c_i = a_i \pm b_i; i = \overline{1, n}$$

Наприклад: $\vec{a} = (-3; -2), \vec{b} = (1; 4)$.

Знайти $\vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-3; -2) - (1; 4) = (-4; -6)$$

Лінійна комбінація векторів

Як визначені лінійні операції для просторів $\mathbb{R}^3$ або $\mathbb{R}^2$ (тут $n=2$ або $n=3$):

множення вектора на число

$$\gamma \cdot \vec{a} = \vec{b};$$

$$b_i = \gamma \cdot a_i; i = \overline{1, n}$$

γ – дійсне число

Наприклад: $\gamma=0,5$, знайти $\frac{\vec{b}}{\gamma}$.

$$\frac{\vec{b}}{\gamma} = \frac{(1; 4)}{0,5} = (2; 8)$$

Лінійна комбінація векторів

Найпростішими прикладами лінійних векторних просторів є множини всіх векторів у площині (R^2) або у тривимірному просторі (R^3), для яких визначені лінійні операції множення вектора на число та алгебраїчного додавання векторів.

Лінійна комбінація векторів

ЛІНІЙНОЮ КОМБІНАЦІЄЮ ВЕКТОРІВ

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

називається **вектор** $\vec{a}$, що дорівнює сумі добутків цих векторів на вільні дійсні числа $\lambda_i; i = \overline{1, n}$.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

Якщо векторів два, то : $\boxed{\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2}$

Лінійна комбінація векторів

Визначення **СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ** і додавання його у лінійний простір приводить нас до **евклідового простору**.

Якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$ – вектори одного розміру, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j \quad (\text{число } n) \text{ – їх скалярний добуток.}$$

(тут $n=2$ або $n=3$)

Лінійна комбінація векторів

Якщо вектор $\vec{a}$ скалярно помножити на себе, то одержимо **СКАЛЯРНИЙ КВАДРАТ** вектора

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{j=1}^n a_j^2$$

ДОВЖИНОЮ (НОРМОЮ) вектора в евклідовому просторі називається корінь квадратний з його скалярного квадрата:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Лінійна комбінація векторів

У просторах $\mathbb{R}^3$ і $\mathbb{R}^2$ довжину векторів можна знайти з геометричного змісту поняття вектора як напрямленого відрізка, за теоремою Піфагора.

$$\text{Наприклад, } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (\mathbb{R}^3)$$

НОРМА вектора – це узагальнення поняття довжини вектора в абстрактних векторних просторах.

Лінійна комбінація векторів

НОРМОВАНИЙ ВЕКТОР – вектор **одиничної** довжини, що одержують при діленні вектора на його довжину.

Наприклад, розглянемо $\mathbb{R}^3$

Нехай $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

$$\text{Тоді } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Лінійна комбінація векторів

Розділимо вектор на його довжину $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right)$

і обчислимо довжину одержаного вектора

$$\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \sqrt{\frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\vec{a}|^2}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

це **НОРМОВАНИЙ** вектор.

Лінійна комбінація векторів

Таким чином, **НОРМУВАТИ** вектор означає одержати вектор того ж напрямку, але **одиничної** довжини.

Нормалізація векторів необхідна тому, що вихідні значення ознак можуть змінюватися у дуже великому діапазоні і робота аналітичних моделей (нейронних моделей, карт Кохонена та ін.) з такими даними може виявитися некоректною.

Поняття матриці. Види матриць

Прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців, називається **МАТРИЦЕЮ**.

Матриці позначаються великими буквами: A, B, C тощо; їх елементи позначаються відповідними малими буквами a, b, c тощо.

Кожен елемент матриці має два індекси.

Перший індекс означає номер рядка, другий – номер стовпця, в яких знаходиться цей елемент.

Поняття матриці. Види матриць

Таким чином, матриця може бути записана у короткому вигляді $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ або у загальному:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад

$$A_{45} = \begin{pmatrix} -1,1 & 7 & 4,6 & 8 & -5 \\ 21 & -2 & 6,7 & 5,2 & 15 \\ 3 & 14 & -7,8 & 66 & 2,3 \\ 1,5 & 2,8 & -0,3 & 17 & 3,4 \end{pmatrix}$$

Поняття матриці. Види матриць

Окремими видами матриць є:

- **матриця-рядок (вектор-рядок), матриця-стовпець (вектор-стовпець).** Вони являють собою матриці, що містять один рядок або стовпець.

Наприклад:

$$B_{1n} = (b_{11} \ b_{12} \ b_{13} \ \dots \ b_{1n})$$

вектор-рядок

$$C_{m1} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \dots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

вектор-стовпець

Поняття матриці. Види матриць

Будь-яку матрицю можна розглядати як набір векторів-рядків або стовпців.

$$A_{m \ n} = (A_{m1} \ A_{m2} \ \dots \ A_{mn}) \text{ або } A_{m \ n} = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \dots \\ A_{mn} \end{pmatrix}$$

- якщо всі елементи матриці дорівнюють 0, то вона називається нульовою і грає роль числа 0 в матричних рівняннях.

Поняття матриці. Види матриць

- якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, тобто $m=n$, то матриця називається **квадратною**. Для такої матриці можна виділити **головну діагональ**, її складають елементи з однаковими індексами:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Побічні діагоналі матриці паралельні головній.

Поняття матриці. Види матриць

- серед квадратних матриць виділяють **одиничну** матрицю, на головній діагоналі у якої стоять одиниці. Вона грає роль числа **1** в матричних рівняннях:

$$E_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Операції (дії) над матрицями

1. **Операція транспонування.** Ця операція полягає в заміні рядків матриці стовпцями з відповідними номерами (або навпаки).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} - \text{транспонована матриця}$$

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАД

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}; \quad A^T =$$

Зрозуміло, що $(A^T)^T = A$.

Операції (дії) над матрицями

2. **Порівняння матриць.** Дві матриці рівні, якщо вони однакових розмірів і їх відповідні елементи рівні.

$$A_{mn} = B_{mn}, \text{ якщо } a_{ij} = b_{ij}; i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАД

Порівняйте матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad B = (1 \quad 2 \quad 3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Операції (дії) над матрицями

Наступні дві дії – **ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ**

3. **Множення матриці на число.** Щоб помножити матрицю на число α , треба кожний елемент матриці помножить на це число.

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha = (\alpha \cdot a_{ij}).$$

Можлива і зворотна дія - **винесення спільного множника** всіх елементів матриці.

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАДИ

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Множимо матрицю на
число.

$$G = -0,5 \cdot C = -0,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} =$$

Виносимо загальний
множник з матриці

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Операції (дії) над матрицями

4. **Алгебраїчне додавання матриць.** Алгебраїчною сумою двох матриць A_{mn} і B_{mn} однакових розмірів буде матриця C_{mn} (того ж розміру), кожний елемент якої дорівнює алгебраїчній сумі відповідних елементів матриць A і B .

$$A_{mn} \pm B_{mn} = C_{mn}; \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}; \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАДИ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A+B=$$

$$B-A=$$

Операції (дії) над матрицями

Дії 3 и 4 мають ті ж властивості, що і аналогічні дії над числами:

$$A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C);$$

$$A \cdot (\alpha + \beta) = A \cdot \alpha + A \cdot \beta; (A + B) \cdot \alpha = A \cdot \alpha + B \cdot \alpha;$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (A \cdot \alpha) \cdot \beta.$$

Тут A, B, C – матриці, α, β - числа.

Операції (дії) над матрицями

ЛІНІЙНОЮ КОМБІНАЦІЄЮ двох матриць буде матриця C виду

$$C_{mn} = \alpha \cdot A_{mn} \pm \beta \cdot B_{mn};$$

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \pm \beta \cdot b_{ij}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАД

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ і числа $\alpha=3$; $\beta=-2$.

Знайти лінійну комбінацію матриць A і B , матрицю $C=\beta \cdot A + \alpha \cdot B$.

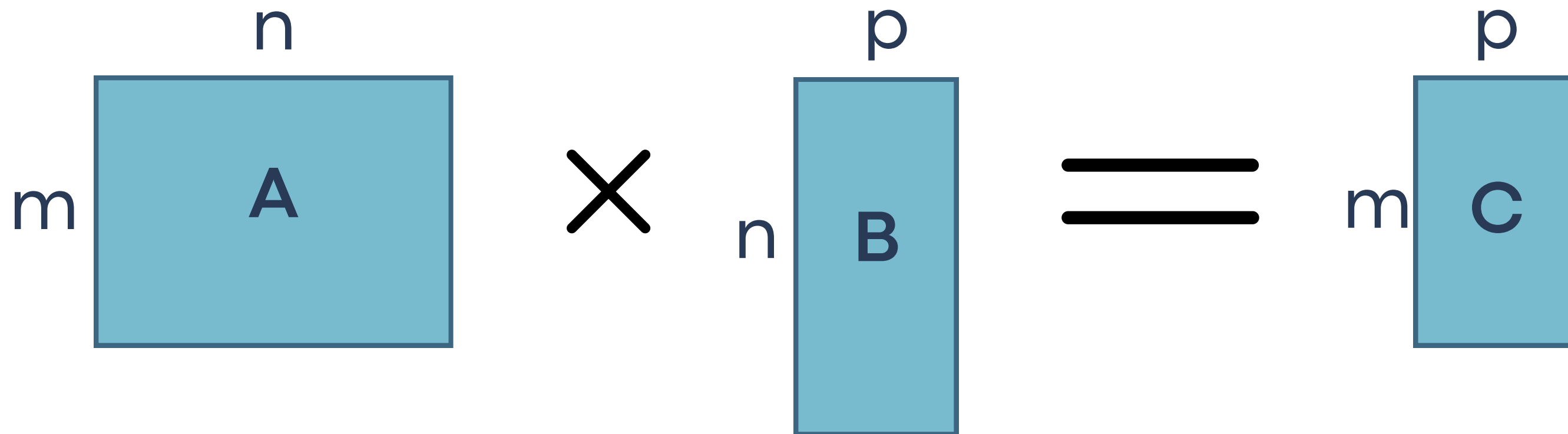
$$C = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix} =$$

Операції (дії) над матрицями

5. Множення матриць. Дві матриці можна перемножити тільки у тому разі, якщо вони мають **узгоджені розміри**, тобто число стовпців матриці, що зліва, дорівнює числу рядків матриці, що справа.

$$A_{mn} \cdot B_{np} = C_{mp}.$$

Або схематично:



Операції (дії) над матрицями

Будь-який елемент матриці $C = (c_{ij})_{mp}$, що є добутком матриць A і B , можна визначити як **скалярний добуток** векторів однакової розмірності:

вектора-рядка $\vec{A_i}$ з матриці зліва і

вектора-стовпця $\vec{B_j}$ з матриці справа

$$c_{ij} = \vec{A_i} \cdot \vec{B_j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Операції (дії) над матрицями

Результат множення матриць – матриця

- з числом рядків, що дорівнює числу рядків матриці зліва,
- і числом стовпців, що дорівнює числу стовпців матриці справа.

Операції (дії) над матрицями

Те ж саме можна сформулювати як **правило «рядок на стовець»**.

Елемент, що знаходиться в i -тому рядку і j -тому стовпці матриці C є сумою попарних добутків елементів i -того рядка матриці зліва (A), на відповідні елементи j -того стовпця матриці справа (B).

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАДИ

$$1) A_{22} \cdot B_{23} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 3b & 4a - 5b & 5a + 9b \\ -c + 3d & 4c - 5d & 5c + 9d \end{pmatrix};$$

$B_{23} \cdot A_{22}$ – не існує.

$$2) A_{13} \cdot B_{31} = (7 \quad -2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

Операції (дії) над матрицями

Якщо поміняти місцями матриці-множники, у загальному випадку $AB \neq BA$, або один з добутоків не існує. Тобто **переставної властивості** у множення матриць **не існує**.

Деякі властивості добутку матриць:

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B);$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Операції (дії) над матрицями

ПРИКЛАД. Переконатися, що операція множення матриць не має переставної властивості.

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}; \quad B_{32} = \begin{pmatrix} x & p \\ y & r \\ z & s \end{pmatrix}.$$

$$A_{23} \cdot B_{32} = C_{22};$$

$$C_{22} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad C_{22} = .$$

Операції (дії) над матрицями

Тепер переставимо місцями матриці и знайдемо $B_{32} \cdot A_{23} = F_{33}$.

Беремо рядки з матриці B , а стовпці з матриці A .

$$B_{32} = \begin{pmatrix} x & p \\ y & r \\ z & s \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}; \quad .$$

$$F_{33} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4p & -3x + 7p & x - 5p \\ 2y + 4r & -3y + 7r & y - 5r \\ 2z + 4s & -3z + 7s & z - 5s \end{pmatrix}.$$

Операції (дії) над матрицями

Очевидно, що $F_{33} \neq C_{22}$, і перш за все це матриці різних розмірів.

$$C_{22} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$F_{33} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}.$$

Дякуємо за увагу!
Доеднуйтесь до нас в
соцмережах



9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних



