

Перестановки. Інверсія. Означення визначника. Формули Крамера (блок 2)



Сердюк Ірина Василівна,
доцент кафедри КМАД

9-23 грудня 2024
кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

Сердюк Ірина Василівна



- доцент кафедри КМАД
- фахівець в галузі аналітичної геометрії, лінійної алгебри, функціонального аналізу



1.1 Перестановки

Означення. *Перестановками з n елементів* називають різні скінченні впорядковані множини (тобто такі множини, для яких указано порядок розміщення їх елементів), що їх можна дістати з деякої множини, яка містить n елементів.

Для вивчення їх взаємного розміщення можна обмежитись розглядом лише номерів $1, 2, \dots, n$. Будемо розглядати всі можливі перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ цих номерів.

Число всіх таких перестановок дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

1.1 Перестановки

Означення. Пара чисел α_i, α_k із перестановок $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ утворює *інверсію*, якщо попереднє число з цієї пари більше наступного числа.

Число всіх інверсій в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ позначимо через $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$.

Означення. Перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ натуральних чисел $1, 2, \dots, n$ називається *парною*, якщо число $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$ її інверсій – парне, і *непарною*, якщо $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$ – непарне.

1.1 Перестановки (приклад)

Приклад 1. З'ясувати парність перестановки 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6.

Розв'язання.

$$t = [2, 5, 1, 4, 7, 3, 6] = 2 + 0 + 3 + 1 + 1 = 7.$$

Перестановка має 7 інверсій, тому вона являється непарною.

1.1 Перестановки (приклад)

Приклад 2. З'ясувати, коли перестановка $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$ чисел $1, 2, \dots, n$ буде парною.

Розв'язання. Спочатку підрахуємо $t = [n, n-1, n-2, \dots, 2, 1]$. число n утворює інверсію зі всіма наступними числами, тобто всього $n-1$ інверсій. Далі, число $n-1$ утворює $n-2$ інверсій зі всіма наступними числами і т.д.

1.1 Перестановки (приклад)

Усього дістаємо

$$t = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

(використовуємо формулу суми арифметичної прогресії)

$$S_{n-1} = \frac{a_1 + a_{n-1}}{2} \cdot (n-1)$$

інверсій у даній перестановці.

1.1 Перестановки (приклад)

$$t = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Парність числа t залежить від остачі при діленні n на 4 :

- a) якщо $n = 4k$, тоді $t = 2k(4k-1)$ – парне число;
- b) якщо $n = 4k + 1$, тоді $t = (4k+1)2k$ – парне число;
- c) якщо $n = 4k + 2$, тоді $t = (2k+1)(4k+1)$ – непарне число;
- d) якщо $n = 4k + 3$, тоді $t = (4k+3)(2k+1)$ – непарне число.

1.1 Перестановки

Означення. Якщо в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ натуральних чисел $1, 2, \dots, n$ поміняти місцями два яких-небудь числа, тоді таке перетворення називається *транспозицією*.

Чи вирішувана початкова позиція?

1	14	13	12
11		6	3
15	2	5	7
10	8	4	9

1.2 Визначники

Означення. *Визначником (детермінантом)* квадратної матриці A називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків виду

$$(-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

де $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, a_{3\alpha_3}, a_{n\alpha_n}$ – відповідно елементи першого, другого, третього, n -го рядків матриці A ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ – перестановка чисел $1, 2, \dots, n$; t – число інверсій цієї перестановки. Підсумовування здійснюється за всіма можливими перестановками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ других індексів.

Подамо цю суму у вигляді

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

Число її доданків становить $n!$.

1.2 Визначники

Визначник матриці A позначається так:

$$\det A \equiv |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо $n = 1$, тоді $D_1 = \det A = a_{11}$.

Якщо $n = 2$, тоді $D_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Схематично:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

1.2 Визначники

Якщо $n = 3$, тоді $D_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Це співвідношення називається правилом Саррюса, або правилом трикутника.

Схематично:

$$+ \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}$$

1.2 Визначники (приклад)

Приклад 3.

Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Оскільки визначник другого порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі, то

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 = -17.$$

б) Використовуючи правило трикутників, отримуємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 5 = -15.$$

1.2 Визначники (приклад)

Приклад 4.

Обчислити визначники: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ методом розкладання за

елементами рядка або стовпця.

Розв'язання.

Послідовно розкладаємо визначник за елементами другого стовпця |

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -15.$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення. Системою m лінійних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$, або лінійною системою, називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа a_{ij} називають *коефіцієнтами*, а числа b_i – *вільними членами* / системи.

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називають *основною матрицею*

системи, а матрицю $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ – *розширеною*

матрицею системи. Позначимо через $\vec{x}$ та $\vec{b}$ матриці – стовпці

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. Тоді система набере вигляду $A\vec{x} = \vec{b}$.

1.3 СЛАР та Теорема Крамера

Візьмемо квадратну СЛАР ($m = n$) з невиродженою матрицею коефіцієнтів ($\det A \neq 0$).

Позначимо:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.3 СЛАР та Теорема Крамера

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (Крамера).

Нехай Δ – основний визначник системи, а Δ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – визначник, який дістають із Δ заміною j -го стовпця на стовпець вільних членів $\vec{b}$. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

1.3 СЛАР та Теорема Крамера

Дослідження квадратної СЛАР на сумісність та визначеність за формулами Крамера:

- 1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами.
- 2) Якщо $\Delta = 0$, і існує принаймні одне $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто не має розв'язків.
- 3) Якщо $\Delta = 0$, і всі $\Delta_j = 0$, то система сумісна і невизначена (має безліч розв'язків).
- 4) У разі однорідної системи і $\Delta \neq 0$ вона має лише нульовий розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$, то система має безліч розв'язків.

1.3 СЛАР та Теорема Крамера (приклад)

Приклад 5.

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) за формулами

Крамера:
$$\begin{cases} x + y + z = 3; \\ 2x - y + z = 2; \\ -3x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

Виконати перевірку правильності розв'язку.

1.3 СЛАР та Теорема Крамера (приклад)

Розв'язання.

Якщо визначник Δ СЛАР відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

де Δ – визначник системи,

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ – допоміжні визначники, що одержуються з визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів відповідно при x, y, z на стовпець вільних членів.

1.3 СЛАР та Теорема Крамера (приклад)

Визначник системи дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

1.3 СЛАР та Теорема Крамера (приклад)

За формулами Крамера знайдемо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

1.3 СЛАР та Теорема Крамера (приклад)

Перевірка

Підставимо отриманий розв'язок у систему.

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3; \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2; \\ -3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Система розв'язана вірно.

1.4 Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори

Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на площині, заданих своїми координатами відносно прямокутної декартової системи координат Oxy :

$$\vec{a}(a_x; a_y), \quad \vec{b}(b_x; b_y),$$

є рівність нулю визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

1.4 Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори

Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у просторі, заданих своїми координатами відносно прямокутної декартової системи координат $Oxyz$:

$$\vec{a}(a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b}(b_x; b_y; b_z),$$

є рівність нулю всіх таких визначників другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

1.4 Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори

Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності ненульових векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ на площині, заданих своїми координатами відносно прямокутної декартової системи координат $Oxyz$:

$$\vec{a}(a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b}(b_x; b_y; b_z), \quad \vec{c}(c_x; c_y; c_z),$$

є рівність нулю визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

1.4 Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори (приклад)

Приклад 6.

У просторі задано вектори: $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, -2)$, $\vec{c} = (1, -6, 0)$.

Покажемо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні.

Розв'язання.

Оскільки визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -31 \neq 0,$$

то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні.

1.4 Деякі властивості лінійно залежних векторів

1. Якщо два вектори лінійно залежні, то вони колінеарні (й навпаки).
2. Якщо три вектори лінійно залежні, то вони компланарні (й навпаки).
3. Чотири довільні вектори завжди лінійно залежні.

Дякуємо за увагу!
Доеднуйтесь до нас в
соцмережах



9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

