

Геометричні застосування векторів (блок 3)



Іглін Сергій Петрович,
професор кафедри КМАД

9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

Іглін Сергій Петрович



- к. т. н., доцент
- професор кафедри КМАД
- фахівець в галузі статистики, оптимізації, чисельних методів, теорії графів



Координати вектора

У системі координат: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

Координати вектора — це скаляри: $a_x; a_y; a_z$.

Складові вектора вздовж координатних осей — це вектори: $a_x \vec{i}; a_y \vec{j}; a_z \vec{k}$.

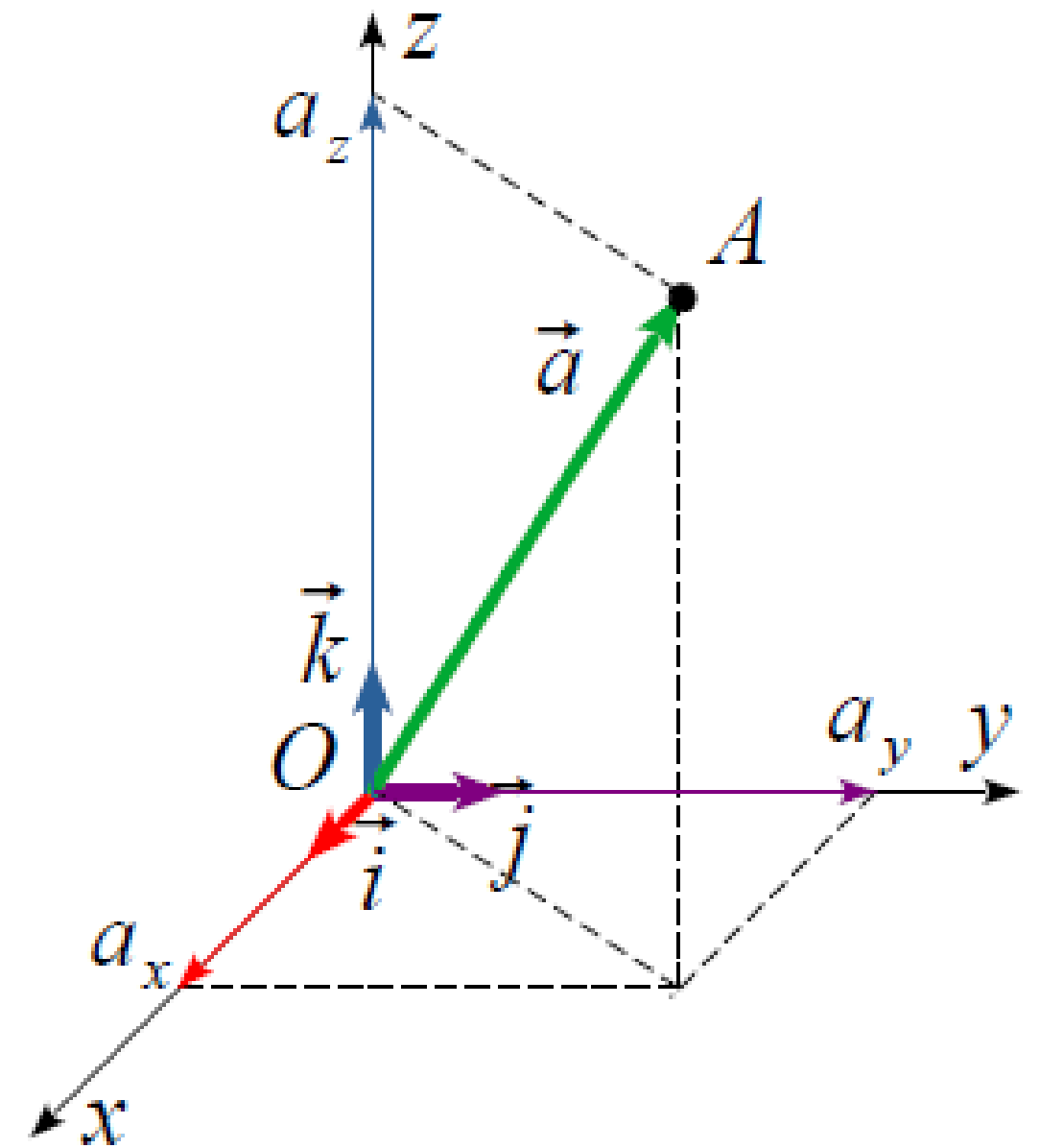
Їхні модулі: $|a_x \vec{i}| = |a_x|; |a_y \vec{j}| = |a_y|; |a_z \vec{k}| = |a_z|$.

За теоремою Піфагора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Координати точки — це координати її радіус-вектора:

$$\vec{r}_A = \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} \Rightarrow A(a_x; a_y; a_z).$$

Радіус-вектор точки A : $\vec{r}_A = \vec{OA}$.



Лінійні операції над векторами

З єдиності розкладання вектора за базисом слідує такі властивості.

Властивість 1. У рівних векторів рівні координати і навпаки.

Доведення. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} - b_x \vec{i} - b_y \vec{j} - b_z \vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} + (a_z - b_z) \vec{k} = \vec{0};$

Властивість 2. Додаванню векторів відповідає додавання їхніх координат і навпаки.

Доведення. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} =$
 $= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k};$

Властивість 3. Множенню вектора на скаляр відповідає множення його координат на цей скаляр і навпаки.

Доведення. $\vec{b} = \lambda \vec{a} = \lambda (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = (\lambda a_x) \vec{i} + (\lambda a_y) \vec{j} + (\lambda a_z) \vec{k};$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x; \\ a_y = b_y; \\ a_z = b_z. \end{cases} \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x + b_x; \\ c_y = a_y + b_y; \\ c_z = a_z + b_z. \end{cases} \quad \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b_x = \lambda a_x; \\ b_y = \lambda a_y; \\ b_z = \lambda a_z. \end{cases}$$

Властивості векторів

Властивість 4. У колінеарних векторів координати пропорційні і навпаки.

Доведення. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow$ зводиться до властивості 3:

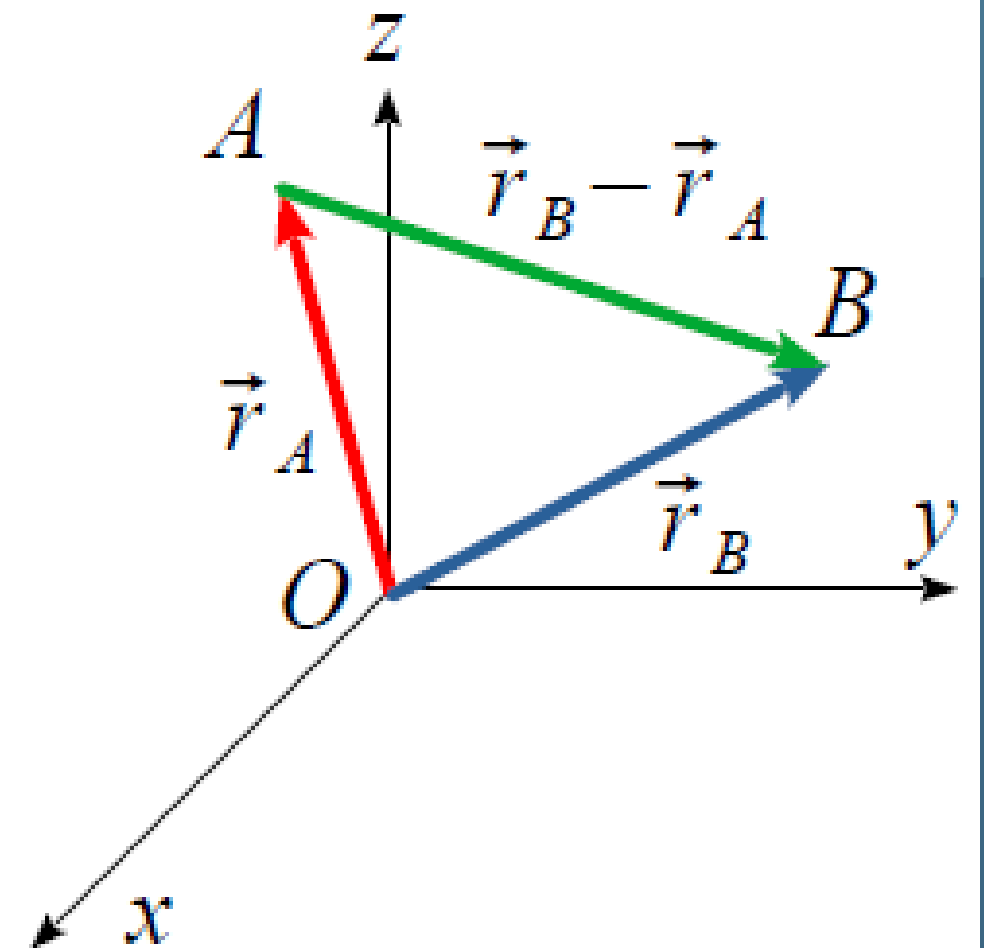
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b_x = \lambda a_x; \\ b_y = \lambda a_y; \\ b_z = \lambda a_z. \end{cases}$$

Властивість 5. Якщо $A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B);$
то $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}.$

Доведення. $A(x_A; y_A; z_A) \Leftrightarrow \vec{r}_A = \{x_A; y_A; z_A\};$

$B(x_B; y_B; z_B) \Leftrightarrow \vec{r}_B = \{x_B; y_B; z_B\};$

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}.$

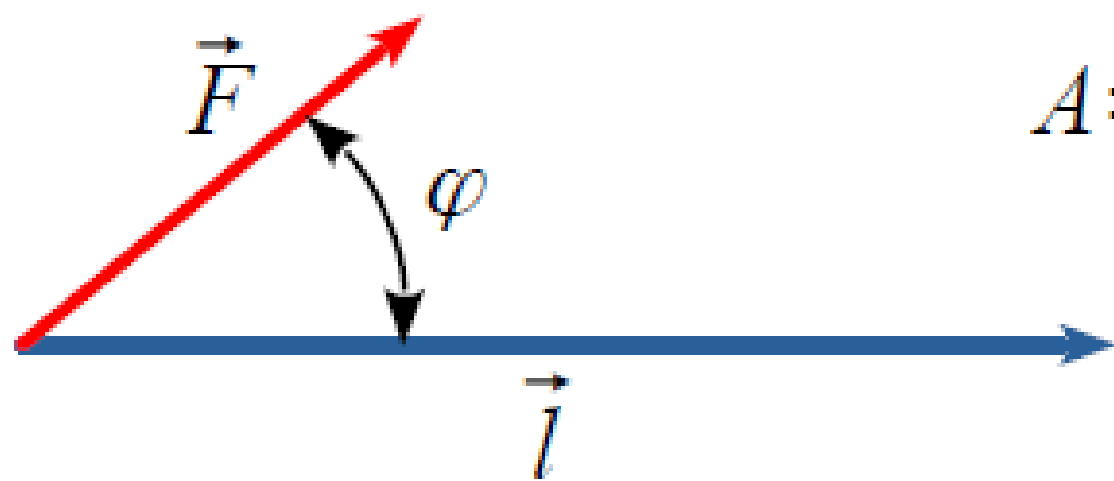
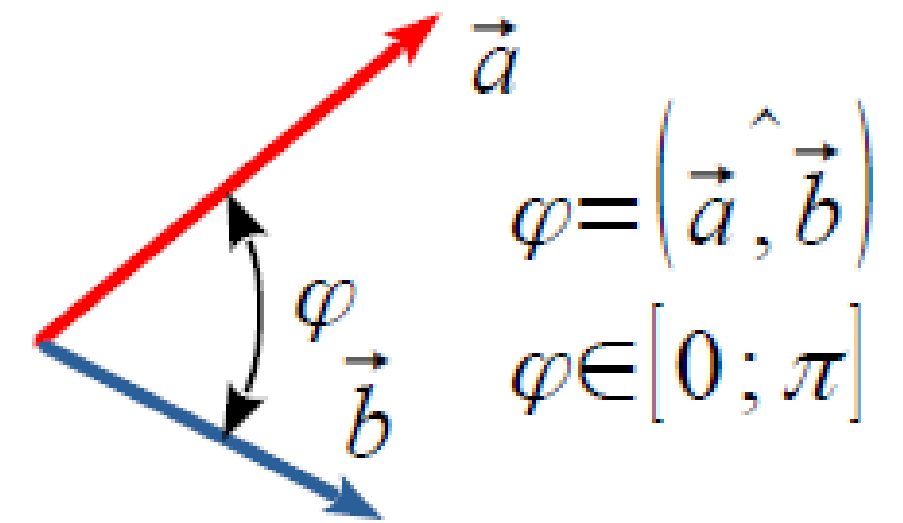


Скалярний добуток

Def. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається скаляр, що дорівнює добутку модулів векторів між собою та на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b}).$$

Фізичний сенс: робота сили $\vec{F}$ на прямолінійному переміщенні $\vec{l}$ – це скалярний добуток вектора $\vec{F}$ на вектор $\vec{l}$: $A = (\vec{F}, \vec{l})$.



$$A = F \cdot l \cdot \cos \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos(\vec{F} \hat{=} \vec{l}) = (\vec{F}, \vec{l}).$$

Властивості скалярного добутку

Властивість 1. Скалярний добуток комутативний: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Властивість 2. Скалярний добуток асоціативний: $(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$.

Властивість 3. Скалярний добуток дистрибутивний: $(\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

Властивість 4. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ тоді й тільки тоді, коли:

- або $\vec{a} = \vec{0}$;
- або $\vec{b} = \vec{0}$;
- або $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Наслідок. Якщо вектори ненульові, то необхідною та достатньою умовою їхньої ортогональності (перпендикулярності) є: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Обчислення скалярного добутку

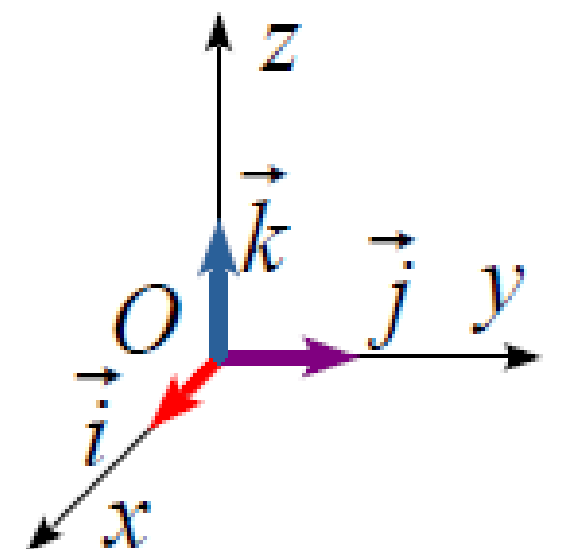
Нехай у прямокутній декартовій системі координат вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= ((a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}), (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})) = & (\vec{i}, \vec{i}) &= |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; \\&= a_x b_x (\vec{i}, \vec{i}) + a_x b_y \cancel{(\vec{i}, \vec{j})} + a_x b_z \cancel{(\vec{i}, \vec{k})} + & (\vec{j}, \vec{j}) &= 1; \quad (\vec{k}, \vec{k}) = 1; \\&+ a_y b_x \cancel{(\vec{j}, \vec{i})} + a_y b_y (\vec{j}, \vec{j}) + a_y b_z \cancel{(\vec{j}, \vec{k})} + & (\vec{i}, \vec{j}) &= |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0; \\&+ a_z b_x \cancel{(\vec{k}, \vec{i})} + a_z b_y \cancel{(\vec{k}, \vec{j})} + a_z b_z (\vec{k}, \vec{k}) = & (\vec{j}, \vec{i}) &= 0; \quad (\vec{i}, \vec{k}) = 0; \quad (\vec{k}, \vec{i}) = 0; \\&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. & (\vec{j}, \vec{k}) &= 0; \quad (\vec{k}, \vec{j}) = 0.\end{aligned}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

В n -вимірному просторі:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$



Застосування скалярного добутку

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ та $\vec{b} \neq \vec{0}$, то необхідною та достатньою умовою їхньої ортогональності (перпендикулярності) є: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Обчислення модуля вектора.

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2; \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Обчислення кута між векторами.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi; \quad \cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \quad \varphi = \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Нерівність Коши-Буняковського.

$$(\vec{a}, \vec{b})^2 \leq (\vec{a}, \vec{a}) \cdot (\vec{b}, \vec{b}); \quad \frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1.$$

так само можна обчислювати 'кут'
для n -вимірних векторів.

Приклади задач

Приклад 1. Визначити, при якому значення α вектори $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3 \vec{j} + 2 \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 2 \vec{j} - \alpha \vec{k}$ є взаємно перпендикулярними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-\alpha) = -\alpha - 6 = 0; \quad \alpha = -6.$$

Приклад 2. Вершини трикутника: $A(-1; -2; 4)$; $B(-4; -2; 0)$; $C(3; -2; 1)$.

Обчислити його внутрішній кут при вершині B .

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= [3; 0; 4]; \quad \vec{BC} = [7; 0; 1]; \quad \cos \sphericalangle B = \frac{(\vec{BA}, \vec{BC})}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{25}{5 \cdot \sqrt{50}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sphericalangle B = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Поворот системи координат на площині

Є стара система координат xOy ; і є нова x_1Oy_1 ;
розгорнута відносно старої на кут φ .

В обох системах точка M має координати $\vec{r}$,
але різне розкладання за ортами осей:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1.$$

Домножимо цей вираз скалярно на $\vec{i}$:

$$x(\vec{i}, \vec{i}) + y(\vec{j}, \vec{i}) = x_1(\vec{i}_1, \vec{i}) + y_1(\vec{j}_1, \vec{i}).$$

$$(\vec{i}, \vec{i}) = 1;$$

$$(\vec{j}, \vec{i}) = 0;$$

$$(\vec{i}_1, \vec{i}) = \cos \varphi;$$

$$(\vec{j}_1, \vec{i}) = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi;$$

Якщо домножити скалярно на $\vec{j}$:

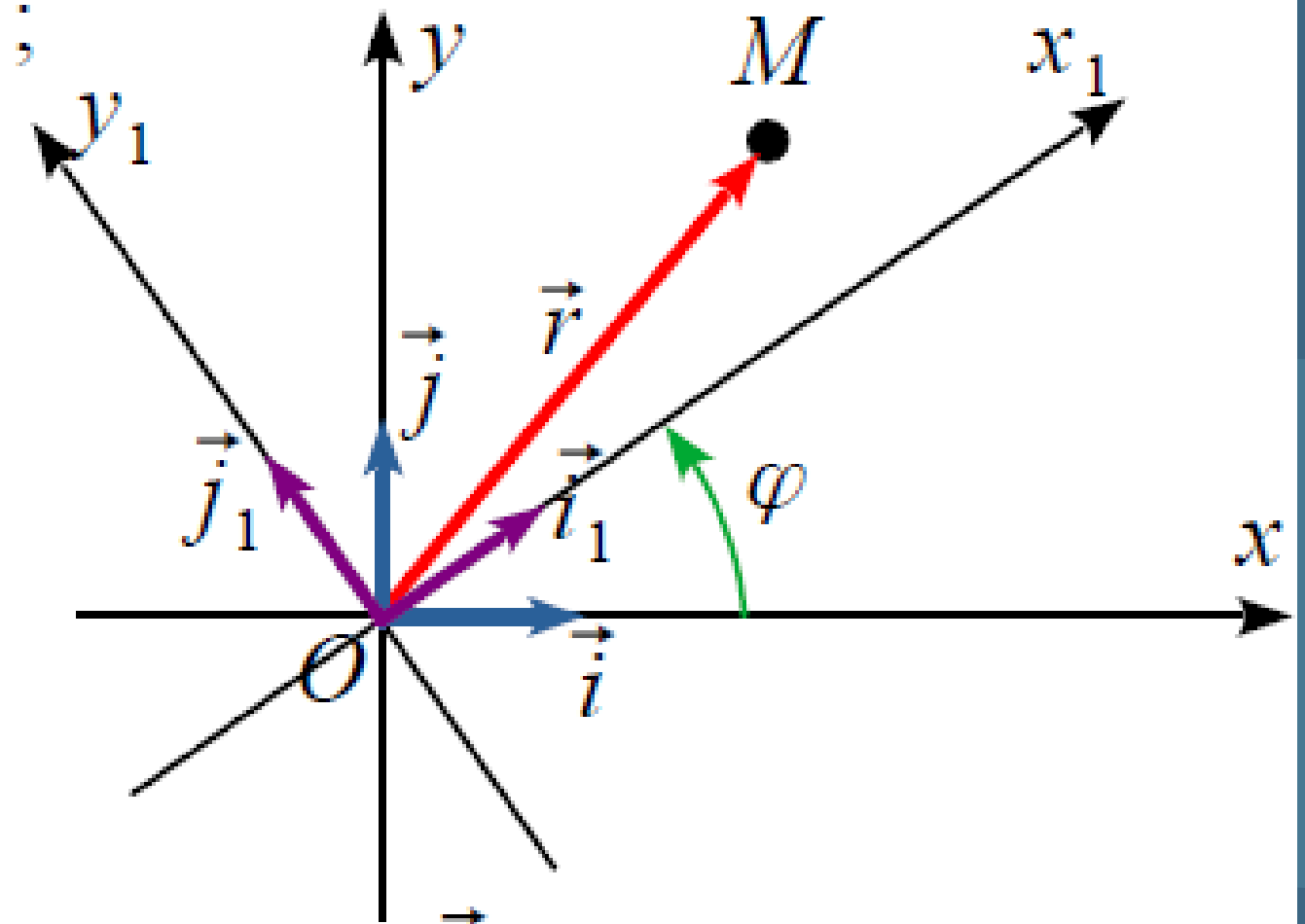
$$x(\vec{i}, \vec{j}) + y(\vec{j}, \vec{j}) = x_1(\vec{i}_1, \vec{j}) + y_1(\vec{j}_1, \vec{j}).$$

$$(\vec{i}_1, \vec{j}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi;$$

$$(\vec{j}_1, \vec{j}) = \cos \varphi;$$

Формули повороту:

$$\text{маємо: } x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi. \text{ і буде: } y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi.$$



Поворот та масштабування вектора на площині

Формули повороту (старі координати через нові):

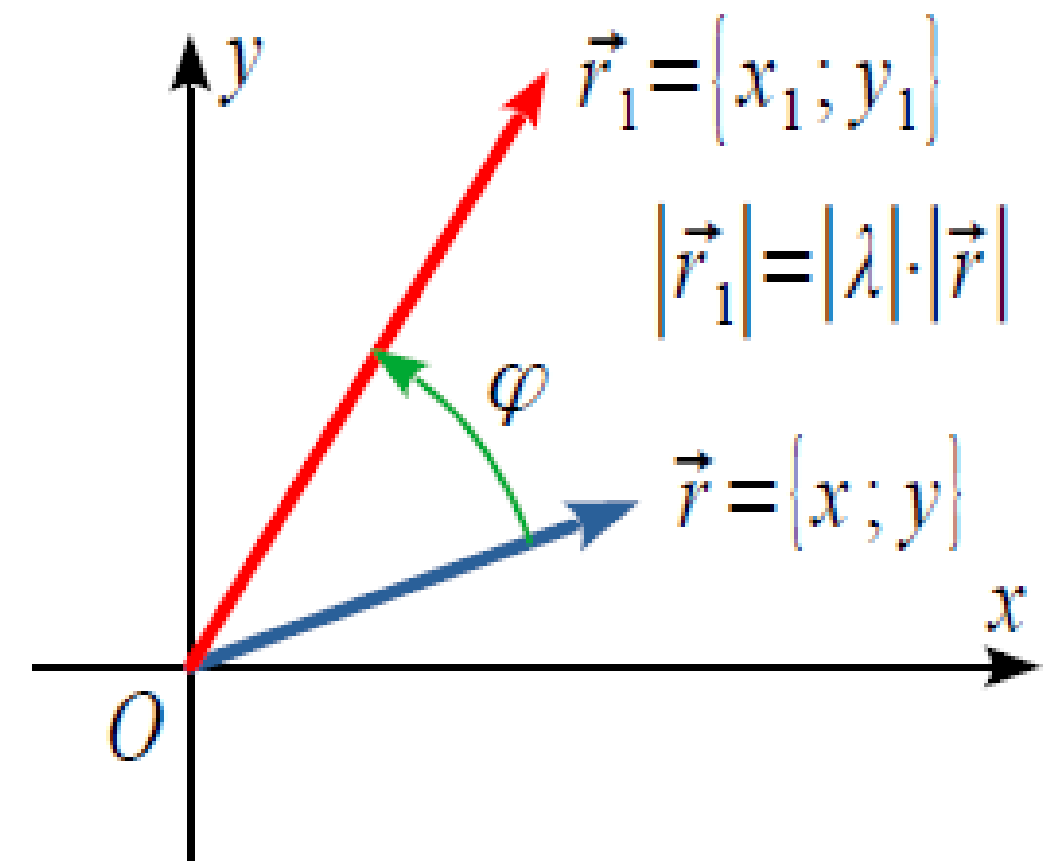
$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi; \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases}$$

Переозначимо (нові координати через старі):

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi; \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases}$$

Якщо треба ще й розтягнути в λ разів, то:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda (x \cos \varphi - y \sin \varphi); \\ y_1 = \lambda (x \sin \varphi + y \cos \varphi). \end{cases}$$



Поворот навколо осі Oz та масштабування вектора в просторі

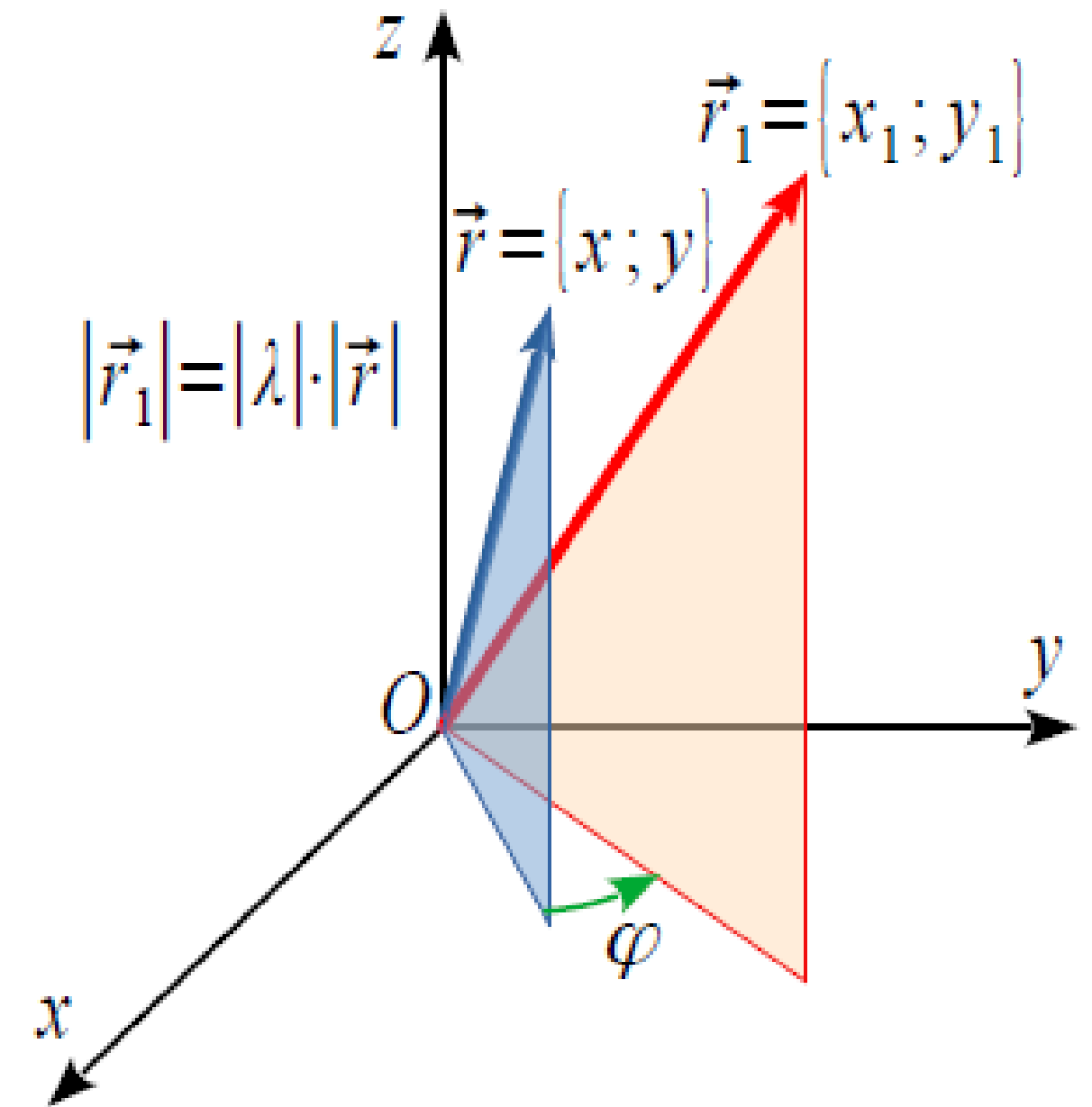
При повороті навколо осі Oz координата z не змінюється:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi; \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi; \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Якщо треба ще й розтягнути в λ разів, то:

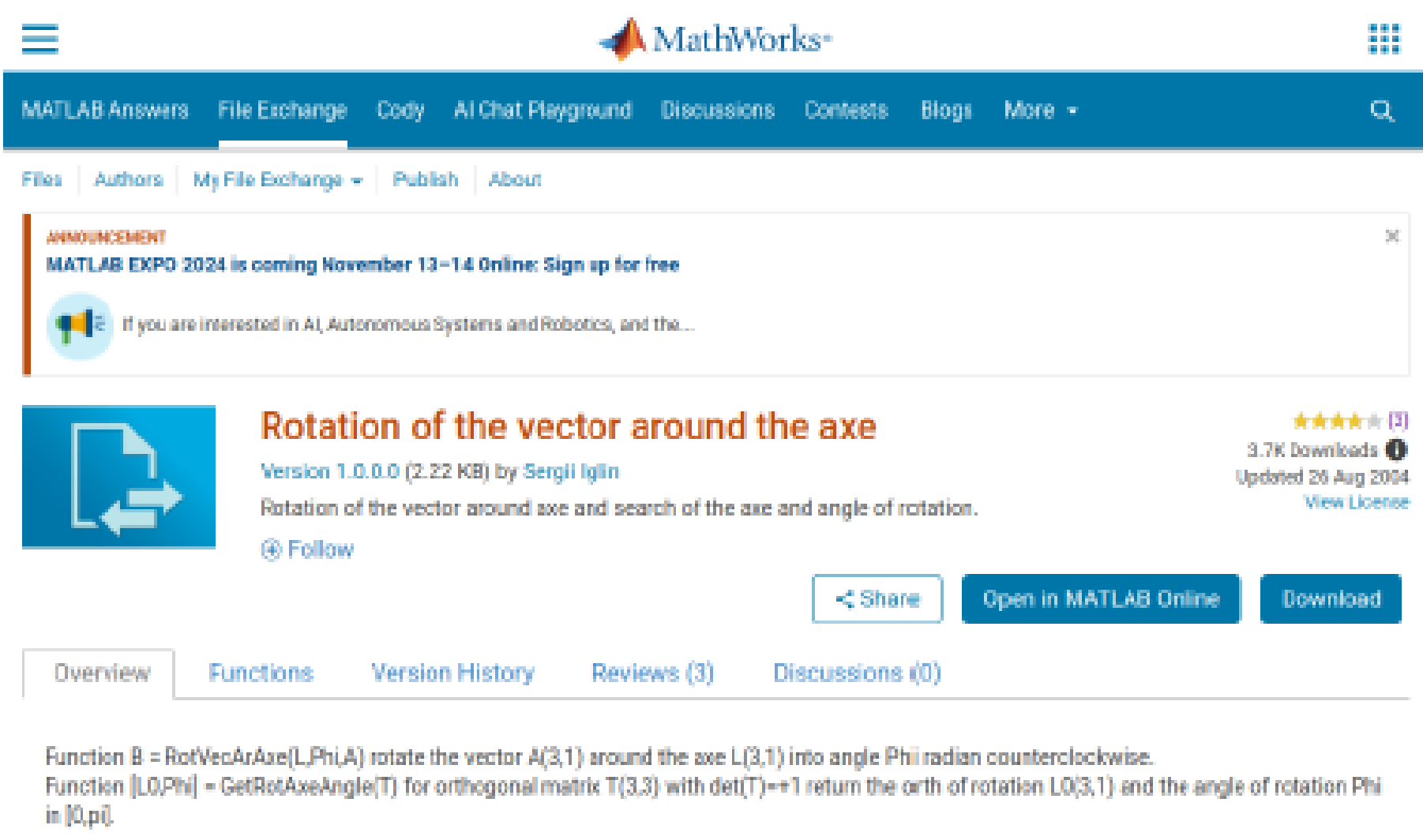
$$\begin{cases} x_1 = \lambda (x \cos \varphi - y \sin \varphi); \\ y_1 = \lambda (x \sin \varphi + y \cos \varphi); \\ z_1 = \lambda z. \end{cases}$$

Тут φ — це кут не між векторами $\vec{r}$ та $\vec{r}_1$,
а між площинами, перпендикулярними до площини Oxy .



Поворот вектора в просторі навколо будь-якої осі

Ця задача значно складніша. Її розв'язання на мові MATLAB є на сайті Mathworks:
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4648-rotation-of-the-vector-around-the-axe?s_tid=srchtitle



The screenshot shows the MathWorks File Exchange interface. At the top, there's a navigation bar with links to MATLAB Answers, File Exchange, Cody, AI Chat Playground, Discussions, Contests, Blogs, and More. Below this, there's a search bar and a list of categories: Files, Authors, My File Exchange, Publish, and About. A banner for MATLAB EXPO 2024 is visible. The main content area features the function 'Rotation of the vector around the axe' by Sergii Iglin. It includes a version number (1.0.0.0), file size (2.22 KB), and a brief description: 'Rotation of the vector around axe and search of the axe and angle of rotation.' There are also statistics: 3.7K Downloads and a rating of 4.5 stars from 3 reviews. The page is updated as of 26 Aug 2024. At the bottom, there's a section for 'Function B = RotVecArAxe(L,Phi,A)' which rotates a vector A(3,1) around an axis L(3,1) by an angle Phi. Another function 'Function [L,Phi] = GetRotAxeAngle(T)' is also mentioned, which returns the axis of rotation L(3,1) and the angle Phi for a given orthogonal matrix T(3,3).

Можете завантажити ці функції
та перекласти їх на мову Python.

Векторний добуток

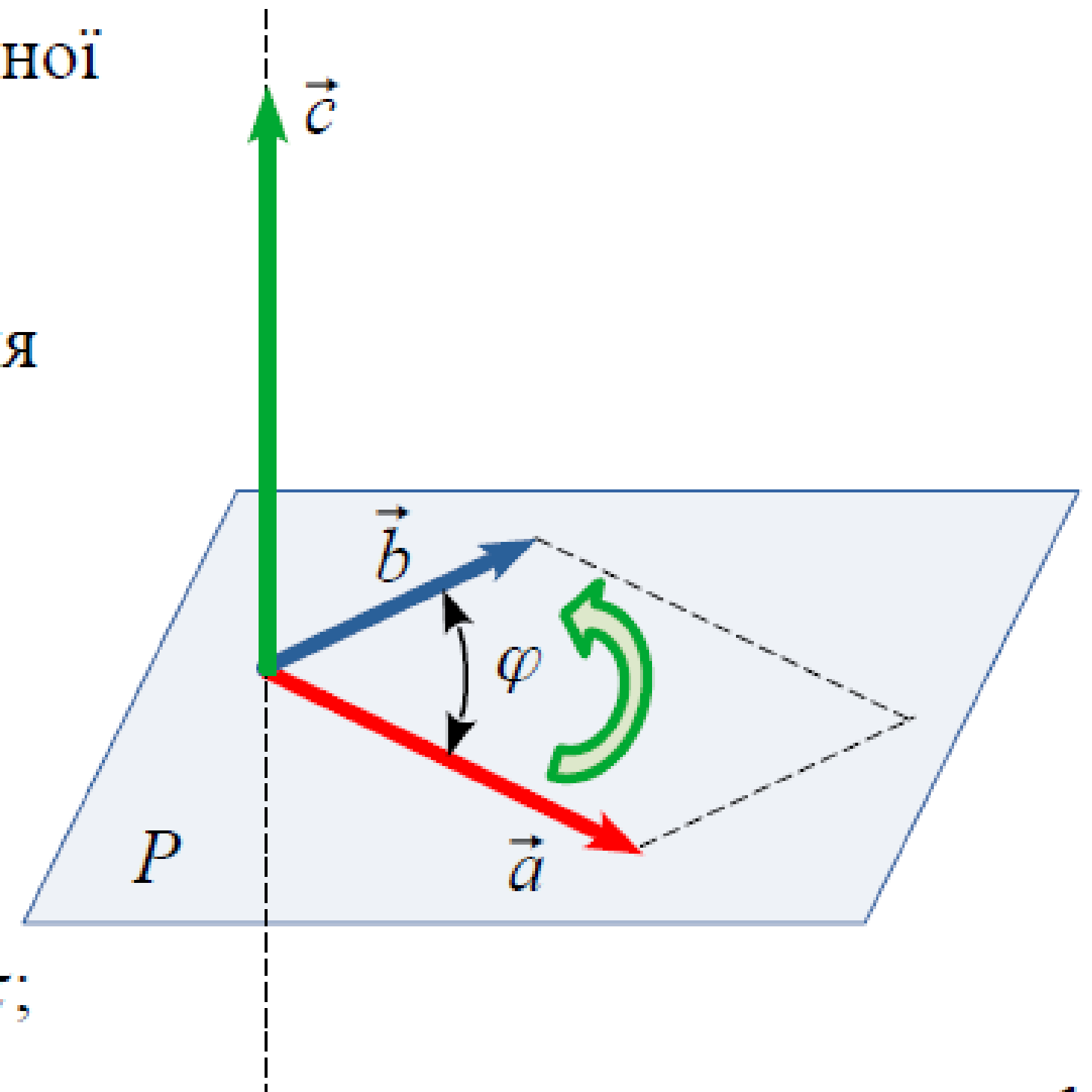
Def. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який:

- має модуль: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = S_{\text{пар}}$;
- розміщений вздовж прямої, перпендикулярної до площини P векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, зведених до одного початку;
- спрямований так, що з його кінця обертання від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ відбувається проти ходу годинникової стрілки, якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ звести до одного початку.

Позначення: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$.

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то після зведення їх до одного початку через них можна провести безліч площин. Але в цьому випадку $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$;

$$|\vec{c}| = 0 \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{0}.$$



Фізичний сенс векторного добутку

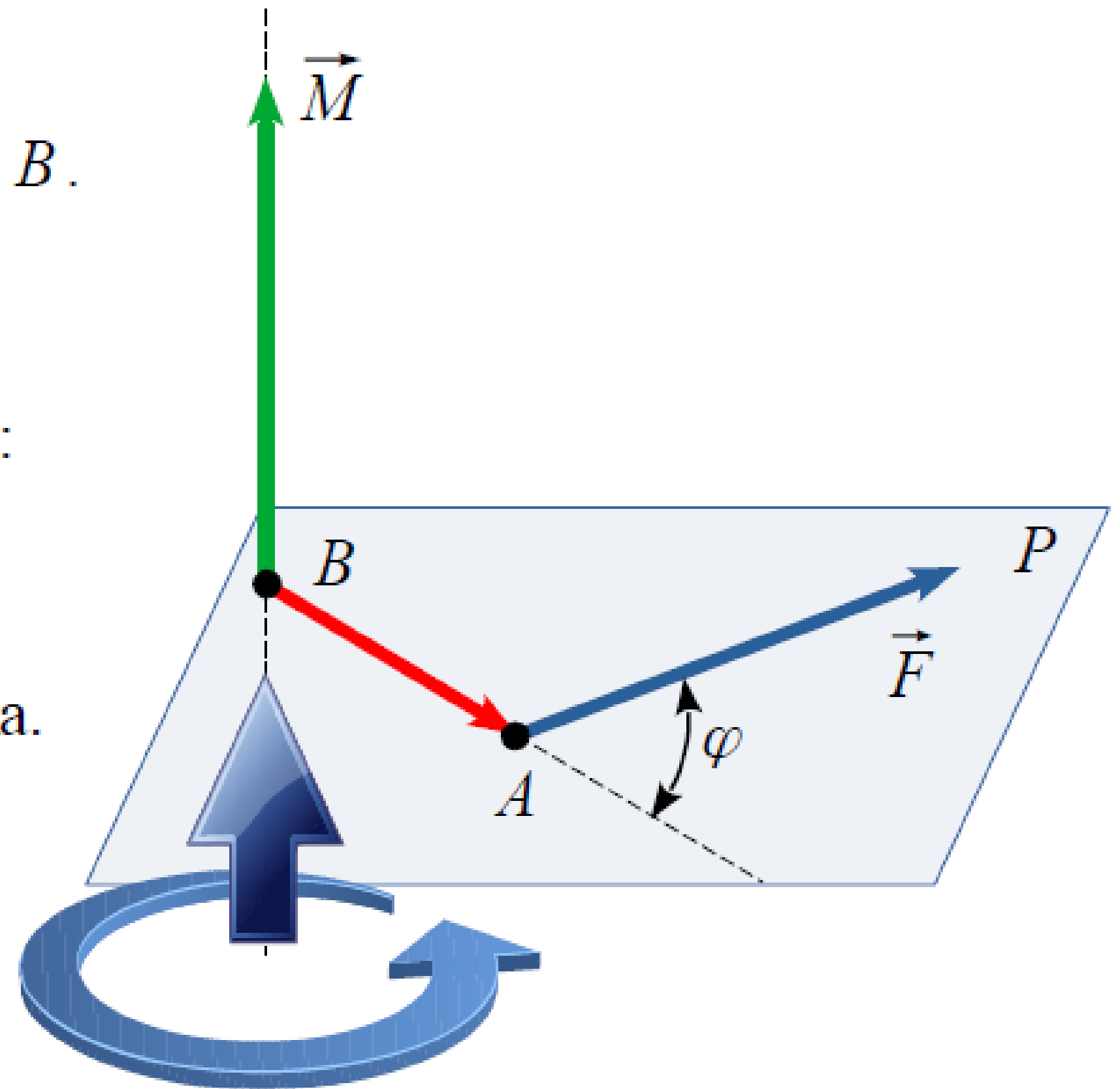
Нехай сила $\vec{F}$ прикладена в точці A .
Обчислимо її момент відносно точки B .
Проведемо площину P через точки A , B паралельно до вектора $\vec{F}$.

Момент сили за величиною дорівнює:

$$M = F \cdot AB \cdot \sin \varphi;$$

і спрямований перпендикулярно до площини P за правилом буравчика.
За означенням векторного добутку:

$$\vec{M} = [\vec{BA}, \vec{F}].$$



Властивості векторного добутку

Властивість 1. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ тоді й тільки тоді, коли:

◦ або $\vec{a} = \vec{0}$; ◦ або $\vec{b} = \vec{0}$; ◦ або $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Наслідок. Якщо вектори ненульові, то необхідною та достатньою умовою їхньої колінеарності є: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, але зручніше користуватися пропорційністю.

Властивість 2. Векторний добуток антикомутативний: $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.

Властивість 3. Векторний добуток асоціативний: $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$.

Властивість 4. Векторний добуток дистрибутивний: $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

Обчислення векторного добутку

Нехай у прямокутній декартовій системі координат вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}), (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})] =$$

$$= a_x b_x [\vec{i}, \vec{i}] + a_x b_y [\vec{i}, \vec{j}] + a_x b_z [\vec{i}, \vec{k}] +$$

$$+ a_y b_x [\vec{j}, \vec{i}] + a_y b_y [\vec{j}, \vec{j}] + a_y b_z [\vec{j}, \vec{k}] +$$

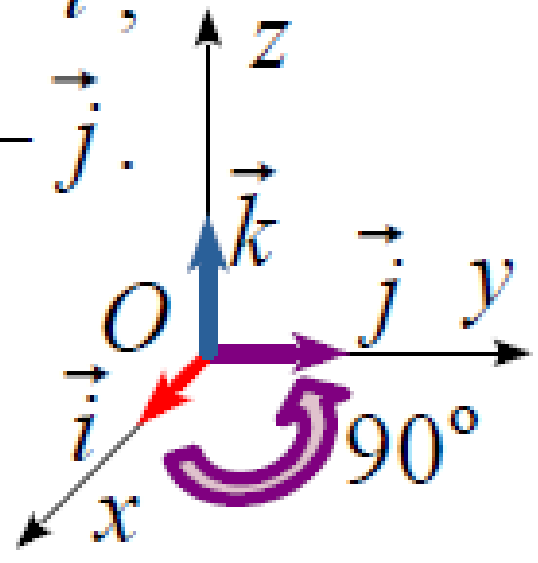
$$+ a_z b_x [\vec{k}, \vec{i}] + a_z b_y [\vec{k}, \vec{j}] + a_z b_z [\vec{k}, \vec{k}] =$$

$$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$[\vec{i}, \vec{i}] = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 0$; $[\vec{i}, \vec{i}] = \vec{0}$;
 Так само: $[\vec{j}, \vec{j}] = \vec{0}$; $[\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}$.
 $[\vec{i}, \vec{j}] = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$;
 $([\vec{i}, \vec{j}] \perp \vec{i}) \wedge ([\vec{i}, \vec{j}] \perp \vec{j}) \Rightarrow [\vec{i}, \vec{j}] \parallel \vec{k}$;
 $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$; $[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}$;
 $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$; $[\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}$;
 $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$; $[\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}$.



Застосування векторного добутку

Побудова вектора, перпендикулярного до двох заданих векторів.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ і вони не колінеарні, то їхній векторний добуток:
 $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$; $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$ та $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$.

Знаходження площі паралелограму та трикутника.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ і вони не колінеарні, то модуль їхнього векторного добутку:
 $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = S_{\text{пар}}$, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, зведених до одного початку. $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ||[\vec{a}, \vec{b}]||$. Якщо трикутник заданий на площині трьома точками A ; B ; C ; то: $\vec{AB} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; 0\}$; $\vec{AC} = \{x_c - x_a; y_c - y_a; 0\}$;

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_b - x_a & y_b - y_a & 0 \\ x_c - x_a & y_c - y_a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix} \vec{k}; \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix} \right|.$$

Приклади задач

Приклад 3. Задані вершини трикутника: $A(1; -1; 2)$; $B(5; -6; 2)$; $C(1; 3; -1)$.
Знайти довжину його висоти BD .

$$S_{\Delta} = \frac{AC \cdot BD}{2}; \quad BD = \frac{2S_{\Delta}}{AC} = \frac{S_{\text{пар}}}{AC}. \quad AC = |\vec{AC}|;$$

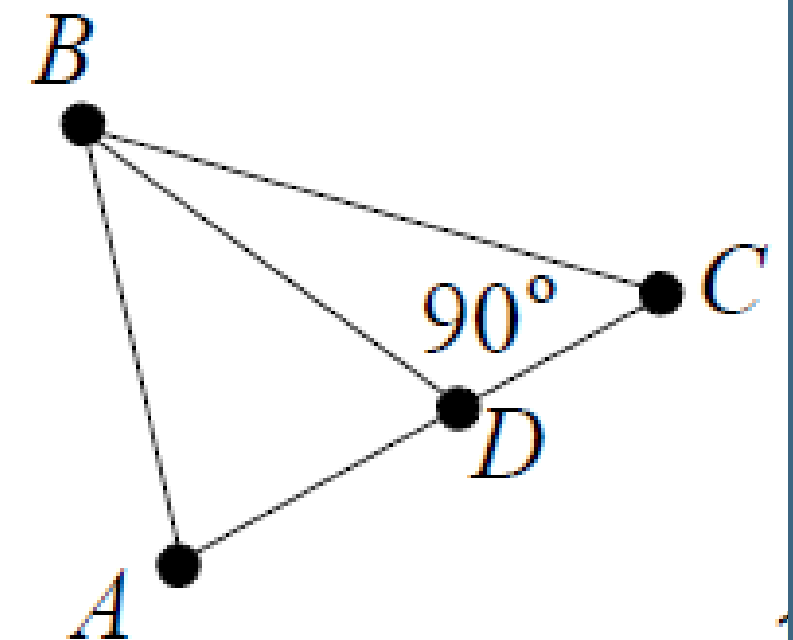
$$\vec{AC} = \{1 - 1; 3 - (-1); -1 - 2\} = \{0; 4; -3\}; \quad AC = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$S_{\text{пар}} = |[\vec{AB}, \vec{AC}]|; \quad \vec{AB} = \{5 - 1; -6 - (-1); 2 - 2\} = \{4; -5; 0\};$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-15 + 0) - \vec{j}(12 - 0) + \vec{k}(-16 - 0) = \{-15; -12; -16\};$$

$$S_{\text{пар}} = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25;$$

$$BD = \frac{25}{5} = 5.$$



Мішаний добуток

Розглянемо добутки трьох векторів.

$\vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$ — це вектор, колінеарний до $\vec{a}$: $\vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) \parallel \vec{a}$.

$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ — мішаний добуток (скаляр).

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ — подвійний векторний добуток (вектор).

Def. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.

Властивості мішаного добутку.

Властивість 1. Мішаний добуток асоціативний.

Властивість 2. Мішаний добуток дистрибутивний.

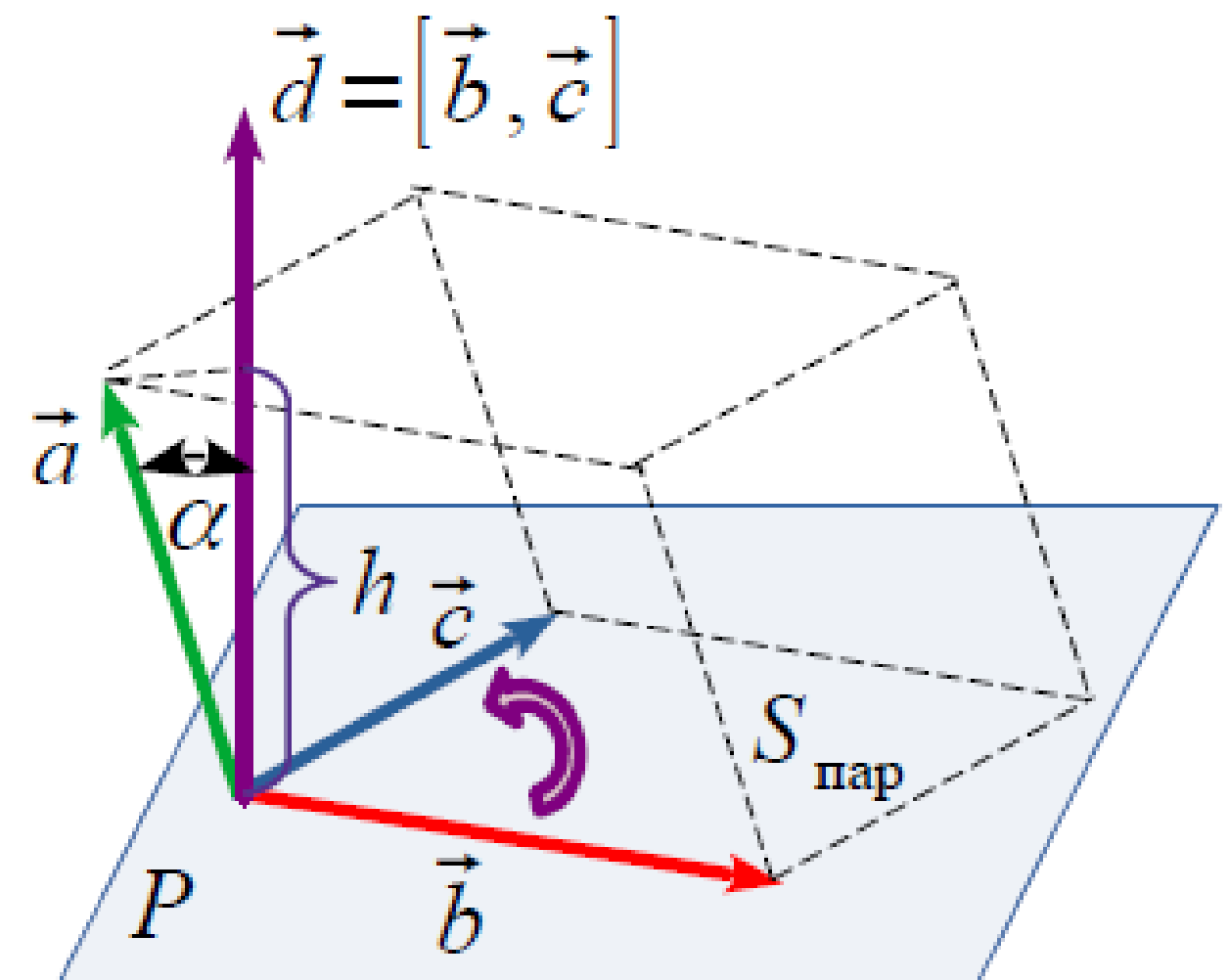
Властивості мішаного добутку

Властивість 3. Мішаний добуток трьох некопланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах, зведених до одного початку, взятого зі знаком "плюс", якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права, і зі знаком "мінус", якщо ліва.

Доведення. Нехай трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права:
з кінця $\vec{a}$ обертання від $\vec{b}$ до $\vec{c}$
видно проти ходу годинникової стрілки.

Позначимо $\vec{d} = [\vec{b}, \vec{c}]$. Кут $\alpha = (\vec{a}, \vec{d}) < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{d}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha = \\ &= S_{\text{пар}} h = V_{\text{пар}}. \end{aligned}$$



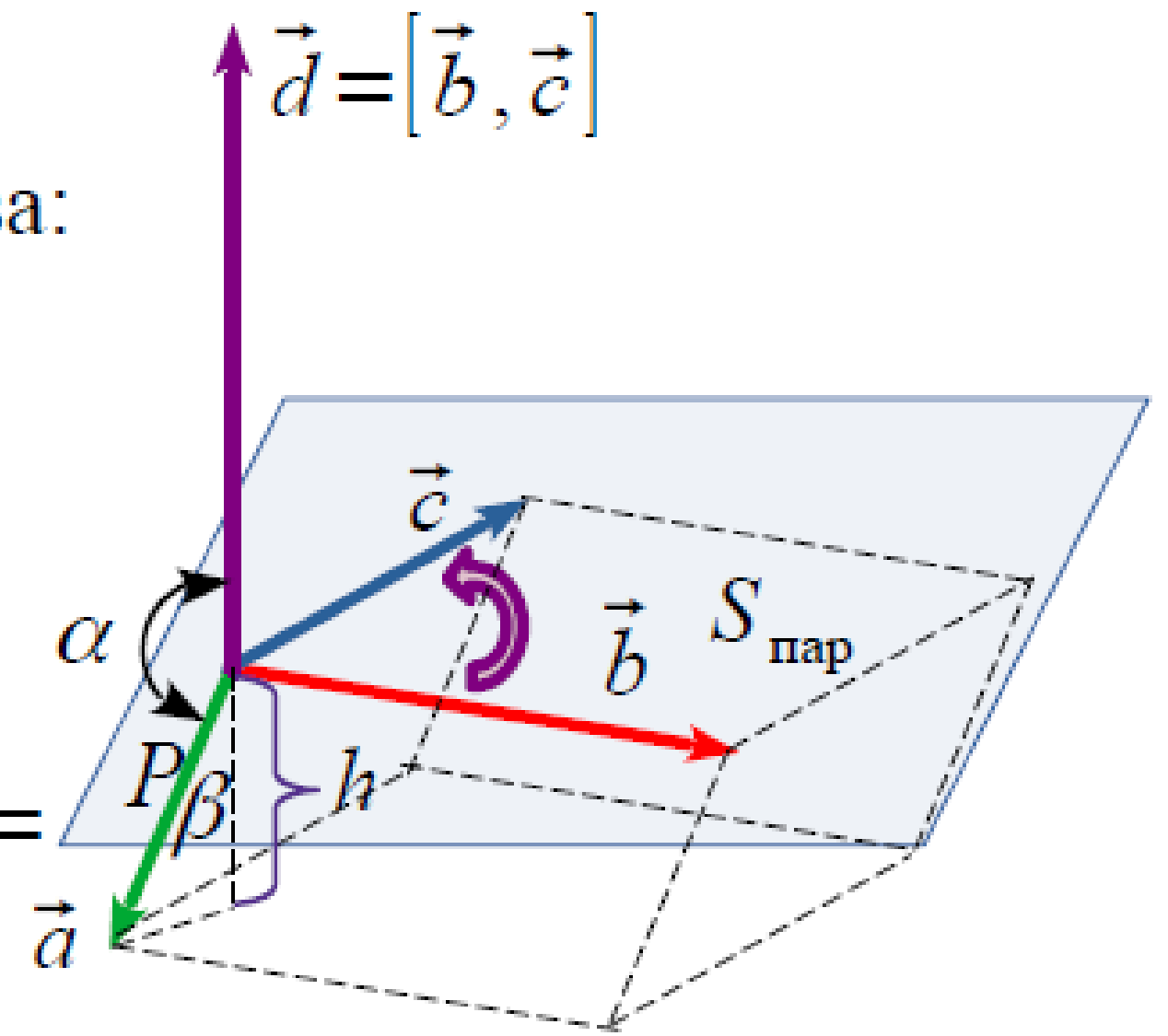
Властивості мішаного добутку

Властивість 3. Мішаний добуток трьох некопланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах, зведених до одного початку, взятого зі знаком "плюс", якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права, і зі знаком "мінус", якщо ліва.

Доведення. Нехай тепер трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ліва:
з кінця $\vec{a}$ обертання від $\vec{b}$ до $\vec{c}$
видно за ходом годинникової стрілки.

Позначимо $\vec{d} = [\vec{b}, \vec{c}]$. Кут $\alpha = (\vec{a}, \vec{d}) > \frac{\pi}{2}$; $\beta = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{d}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha = |\vec{d}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \beta) = \\ &= -|\vec{d}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \beta = -S_{\text{пар}} h = -V_{\text{пар}}. \end{aligned}$$



Властивості мішаного добутку

Властивість 4. Мішаний добуток є комутативним відносно циклічної перестановки множників, і антикомутативним відносно перестановки двох множників: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$.

Властивість 5. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ненульові, то необхідною та достатньою умовою їхньої компланарності є: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Обчислення мішаного добутку

Нехай у прямокутній декартовій системі координат вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ задані своїми координатами: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$; $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]);$$

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix};$$

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Застосування мішаного добутку

Перевірка компланарності трьох векторів.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ та $\vec{c} \neq \vec{0}$, то необхідна та достатня умова їхньої компланарності: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Знаходження об'єму паралелепіпеда та тетраедра.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні, то модуль їхнього мішаного добутку:

$$|\vec{a} \vec{b} \vec{c}| = V_{\text{пар}}.$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Для правої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ знак модуля у двох останніх формулах можна опустити.

Приклади задач

Приклад 4. Довести, що 4 точки: $A(1; 2; -1)$; $B(0; 1; 5)$; $C(-1; 2; 1)$; $D(2; 1; 3)$ розташовані в одній площині.

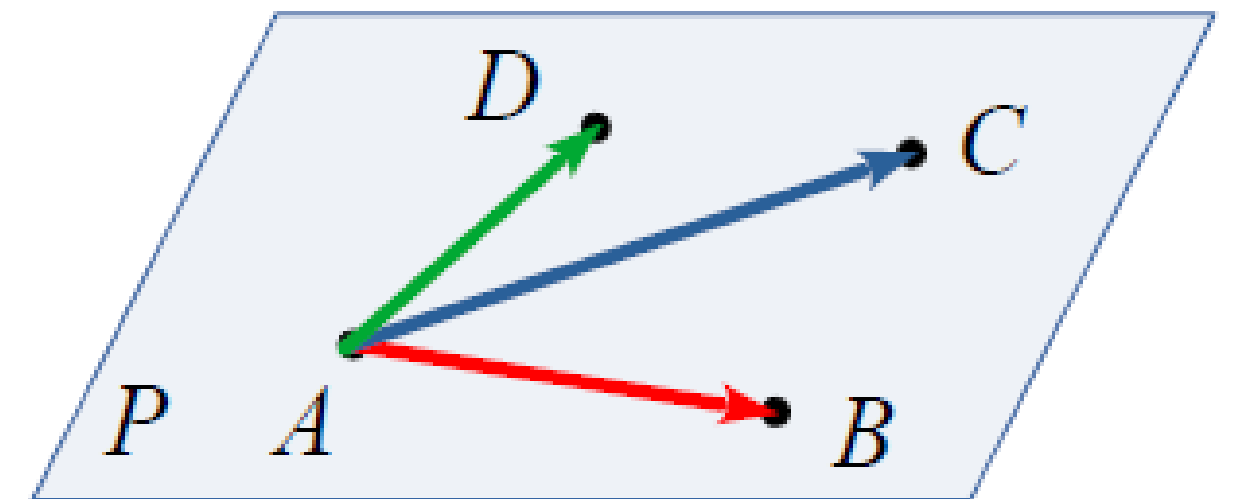
Точки A, B, C, D розташовані в одній площині тоді й тільки тоді, коли вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ та $\vec{AD}$ компланарні.

$$\vec{AB} = \{0 - 1; 1 - 2; 5 - (-1)\} = \{-1; -1; 6\};$$

$$\vec{AC} = \{-1 - 1; 2 - 2; 1 - (-1)\} = \{-2; 0; 2\};$$

$$\vec{AD} = \{2 - 1; 1 - 2; 3 - (-1)\} = \{1; -1; 4\}.$$

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$



Приклади задач

Приклад 5. Дані вершини тетраедра: $A(2; 3; 1)$; $B(4; 1; -2)$; $C(6; 3; 7)$; $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D .

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{\Delta} h_D; \quad V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}}; \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}}; \quad \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} h_D; \quad h_D = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{пар}}};$$

$$\vec{AB} = \{2; -2; -3\}; \quad \vec{AC} = \{4; 0; 6\}; \quad \vec{AD} = \{-7; -7; 7\};$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k};$$

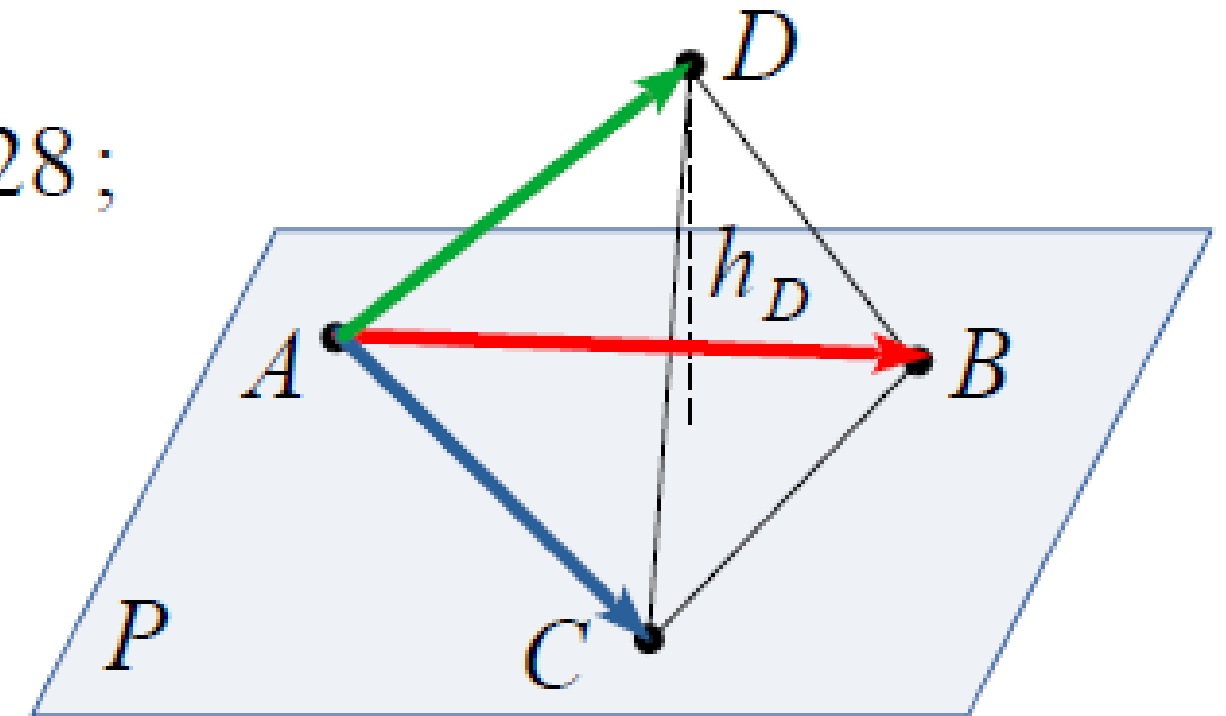
$$S_{\text{пар}} = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28;$$

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308;$$

$$V_{\text{пар}} = |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}| = 308; \quad h_D = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{пар}}} = \frac{308}{28} = 11.$$

$$V_{\text{пар}} = |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}|;$$

$$S_{\text{пар}} = \|[\vec{AB}, \vec{AC}]\|.$$



Які задачі ми можемо розв'язувати

- Перевіряти, чи перпендикулярні два вектори.
- Знаходити кут між векторами, внутрішні та зовнішні кути трикутника.
- Обертати вектор на площині Oxy та масштабувати його.
- Обертати вектор у просторі навколо осі Oz та масштабувати його.
- За бажанням — написати функцію для обертання вектора у просторі навколо будь-якої осі.
- Знаходити площу паралелограма та трикутника.
- Знаходити довжину висоти паралелограма та трикутника.
- Перевіряти, чи компланарні три вектори.
- Знаходити об'єм паралелепіпеда та тетраедра.
- Знаходити довжину висоти паралелепіпеда та тетраедра.

Дякуємо за увагу!
Доеднуйтесь до нас в
соцмережах



9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

