

Геометричні застосування векторів (блок 4)



Іглін Сергій Петрович,
професор кафедри КМАД

9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

Іглін Сергій Петрович



- к. т. н., доцент
- професор кафедри КМАД
- фахівець в галузі статистики, оптимізації, чисельних методів, теорії графів



Лагранжеві координати на площині

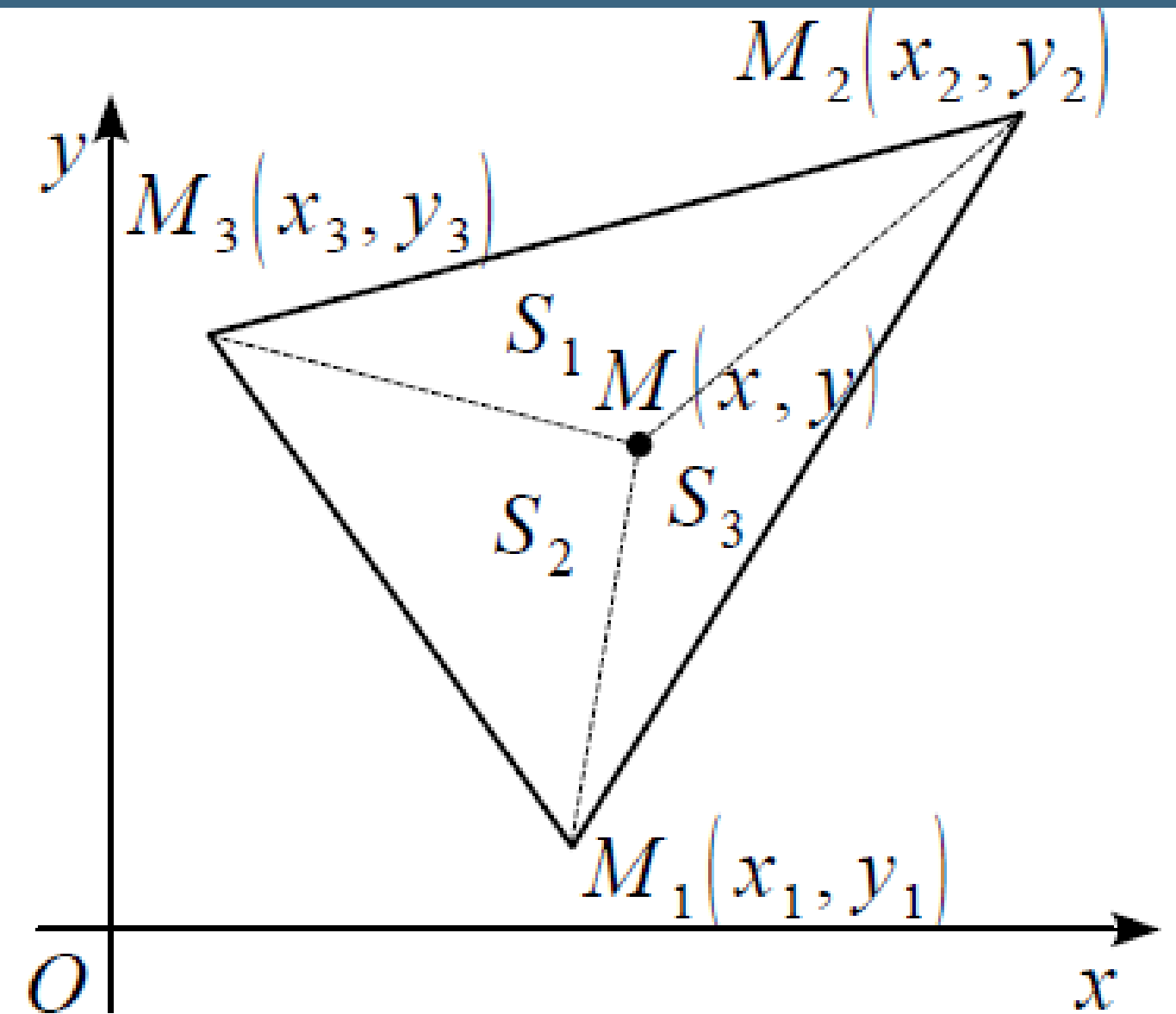
Def. Лагранжевими координатами точки на площині називаються:

$$L_k = \frac{S_k}{S_\Delta}; k = \overline{1, 3}. \quad L_1 + L_2 + L_3 = 1.$$

Якщо точка $M(x, y)$ міститься в $\Delta M_1 M_2 M_3$, то її лагранжеві координати: $\forall L_k \in [0; 1]$.

Декартові координати точки $M(x, y)$ пов'язані з її лагранжевими координатами такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1; \\ x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = x; \\ y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 = y. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm 2 S_\Delta.$$



Лагранжеві координати на площині

Якщо трикутник не вироджується
у відрізок або точку, то $\Delta \neq 0$;
і існує єдиний розв'язок цієї СЛАР.

Алгоритм перевірки: чи

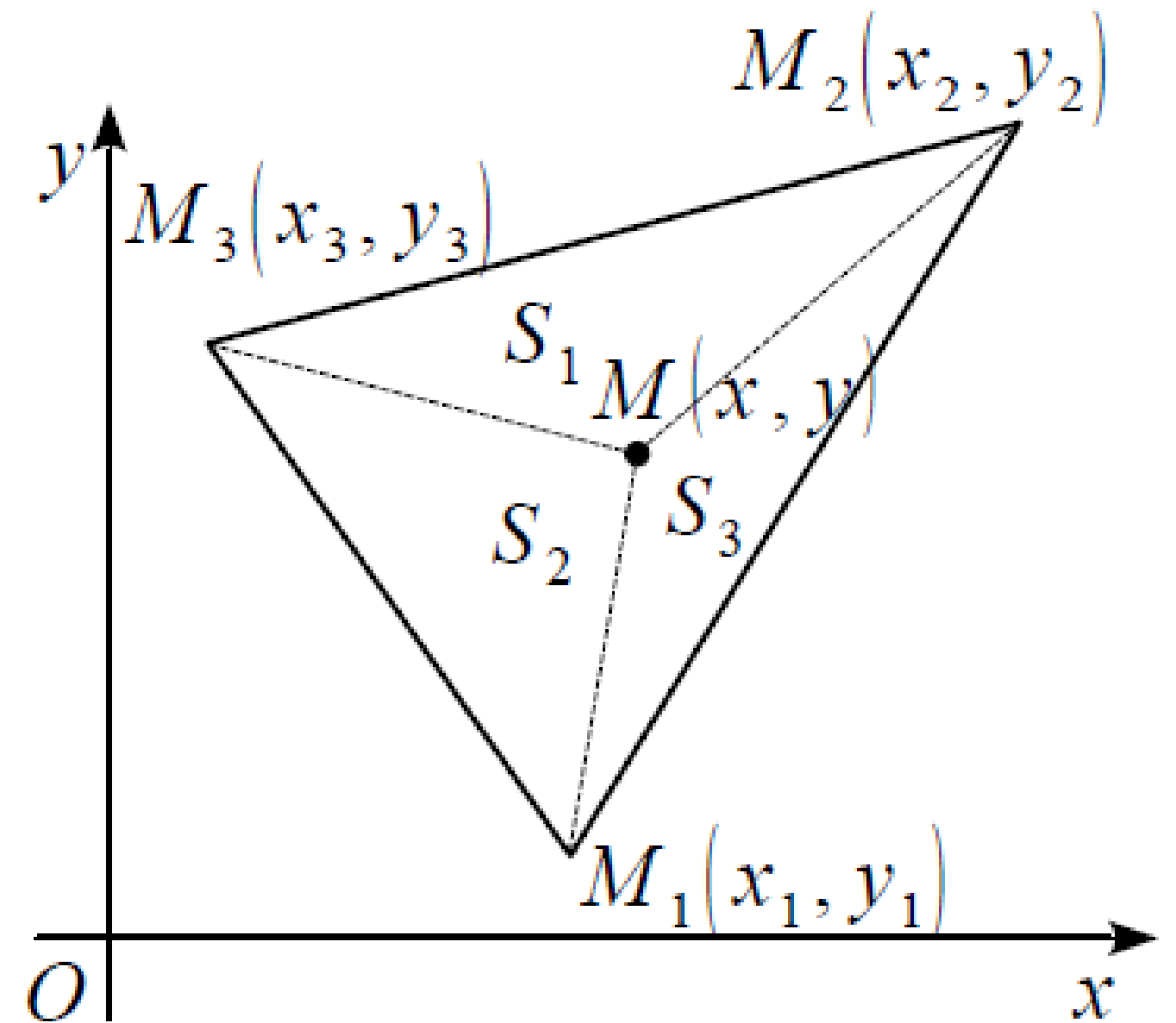
$$M(x, y) \in \Delta M_1 M_2 M_3?$$

1. Розв'язуємо СЛАР:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1; \\ x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = x; \\ y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 = y. \end{cases}$$

2. Перевіряємо: $\forall L_k \in [0; 1] \rightarrow M(x, y) \in \Delta M_1 M_2 M_3$.

Так само розв'язується задача про належність точки тетраедру.



Лагранжеві координати на площині

Приклад 1. $M_1(3;1)$; $M_2(-1;-4)$; $M_3(-3;3)$.

$A(2;1)$; $B(-3;1)$.

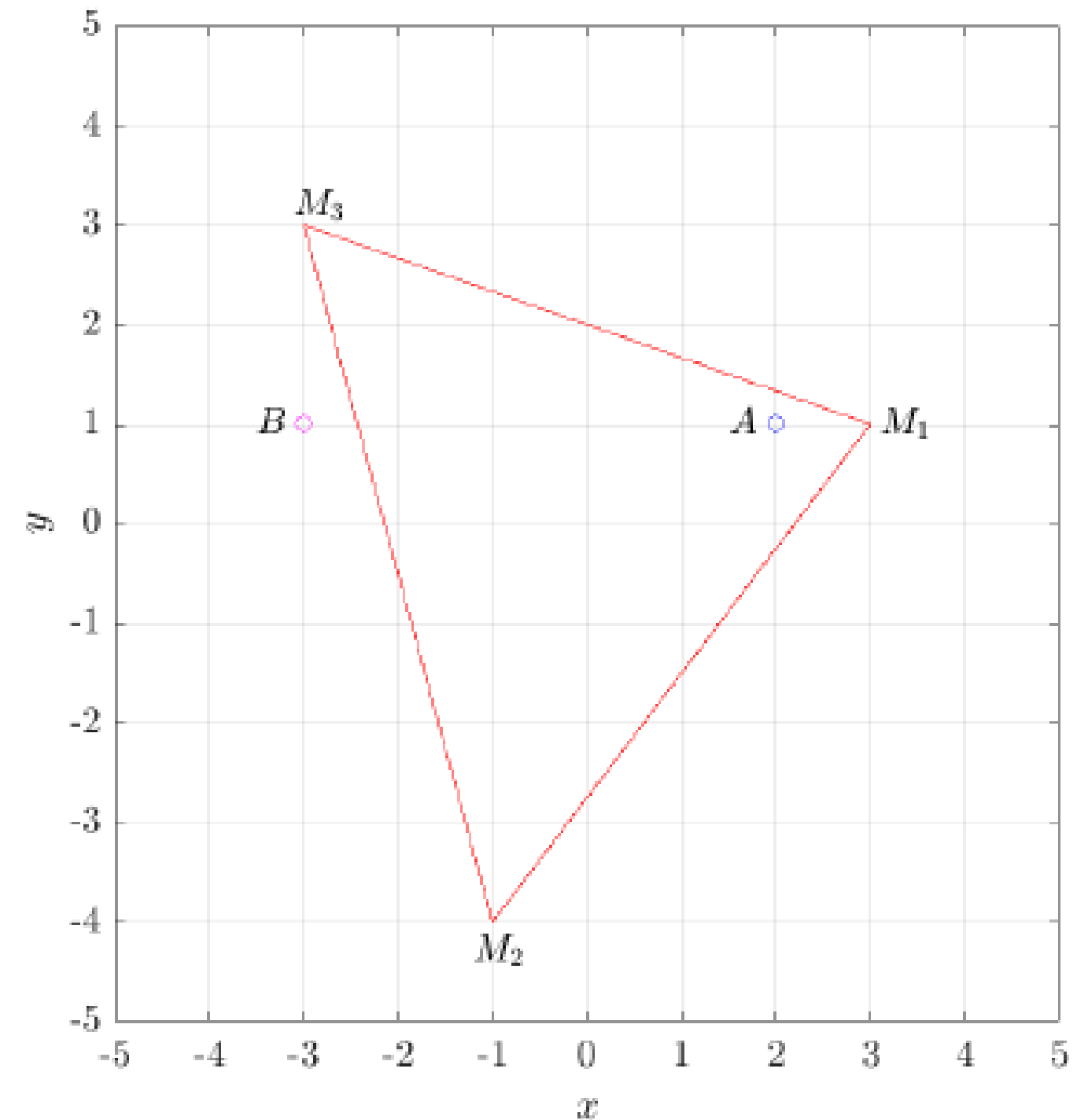
$A \in \Delta M_1 M_2 M_3$? $B \in \Delta M_1 M_2 M_3$?

$$A: \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1; \\ 3L_1 - L_2 - 3L_3 = 2; \\ L_1 - 4L_2 + 3L_3 = 1; \end{cases} \quad A: \begin{cases} L_1 = 31/38; \\ L_2 = 1/19; \\ L_3 = 5/38; \end{cases}$$

$A \in \Delta M_1 M_2 M_3$.

$$B: \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1; \\ 3L_1 - L_2 - 3L_3 = -3; \\ L_1 - 4L_2 + 3L_3 = 1; \end{cases} \quad B: \begin{cases} L_1 = -2/19; \\ L_2 = 6/19; \\ L_3 = 15/19; \end{cases}$$

$B \notin \Delta M_1 M_2 M_3$.



Пряма на площині

Пряму на площині можна задати наступним чином :

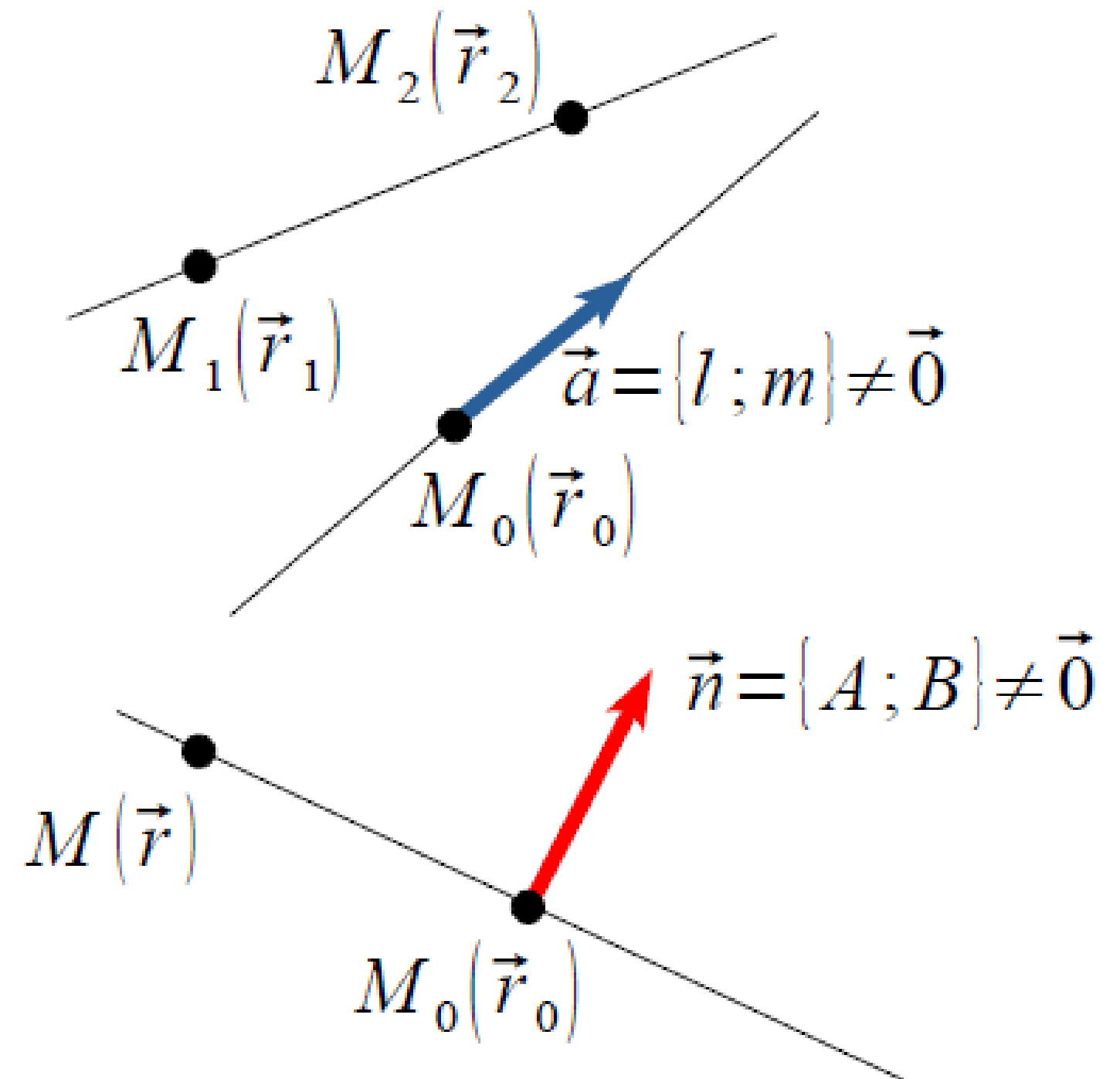
- дві точки
- точку та спрямовуючий вектор
- точку та нормальний вектор

Def. Пряма на площині — це г.м.т. площини, для яких $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n}$.

$$(\vec{n}, (\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0; \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0; \quad C = -Ax_0 - By_0;$$

$$Ax + By + C = 0.$$



Відстань від точки до прямої на площині

Пряма L задана своєю точкою $M_0(\vec{r}_0)$
та нормальним вектором $\vec{n}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

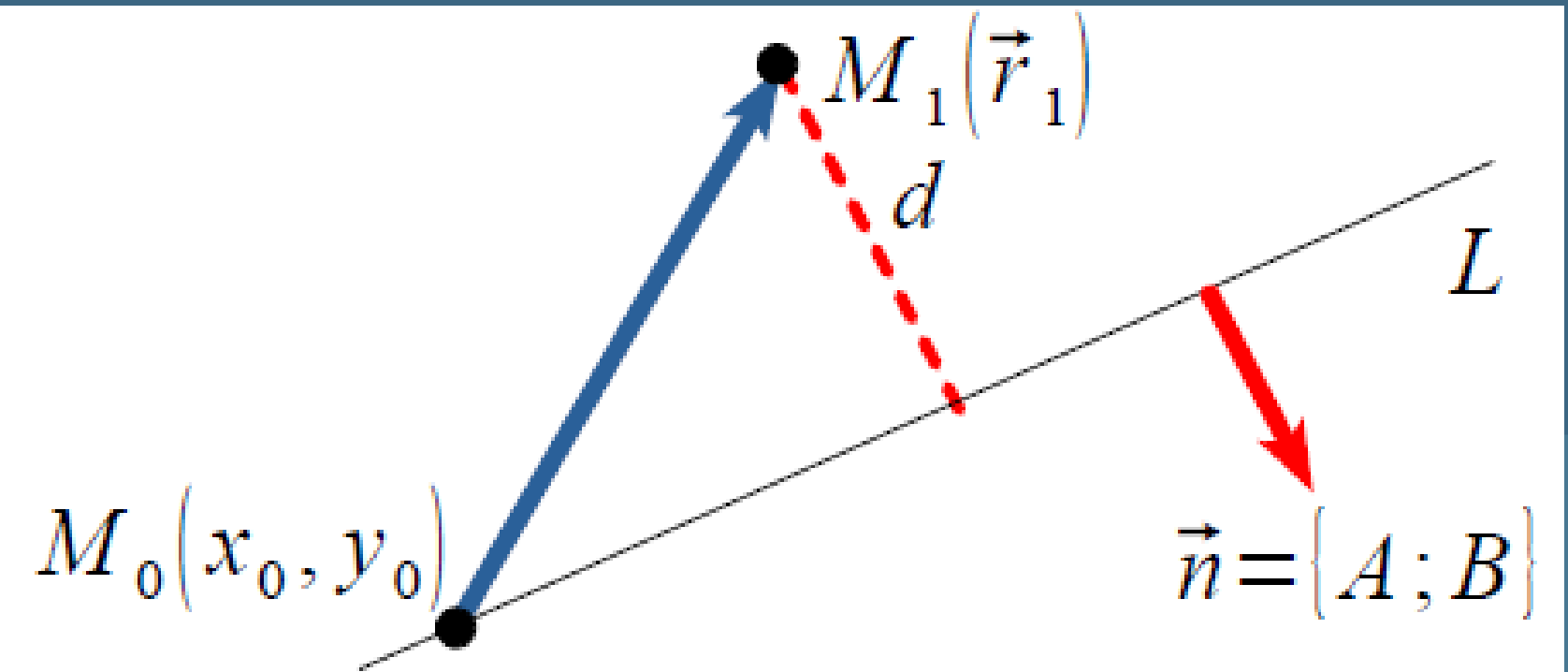
$$Ax + By + C = 0.$$

$$d = \left| \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} \right| = \left| \frac{(\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{n})}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$= \frac{|\left(\vec{n}, (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \right)|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Відстань від точки до прямої на площині

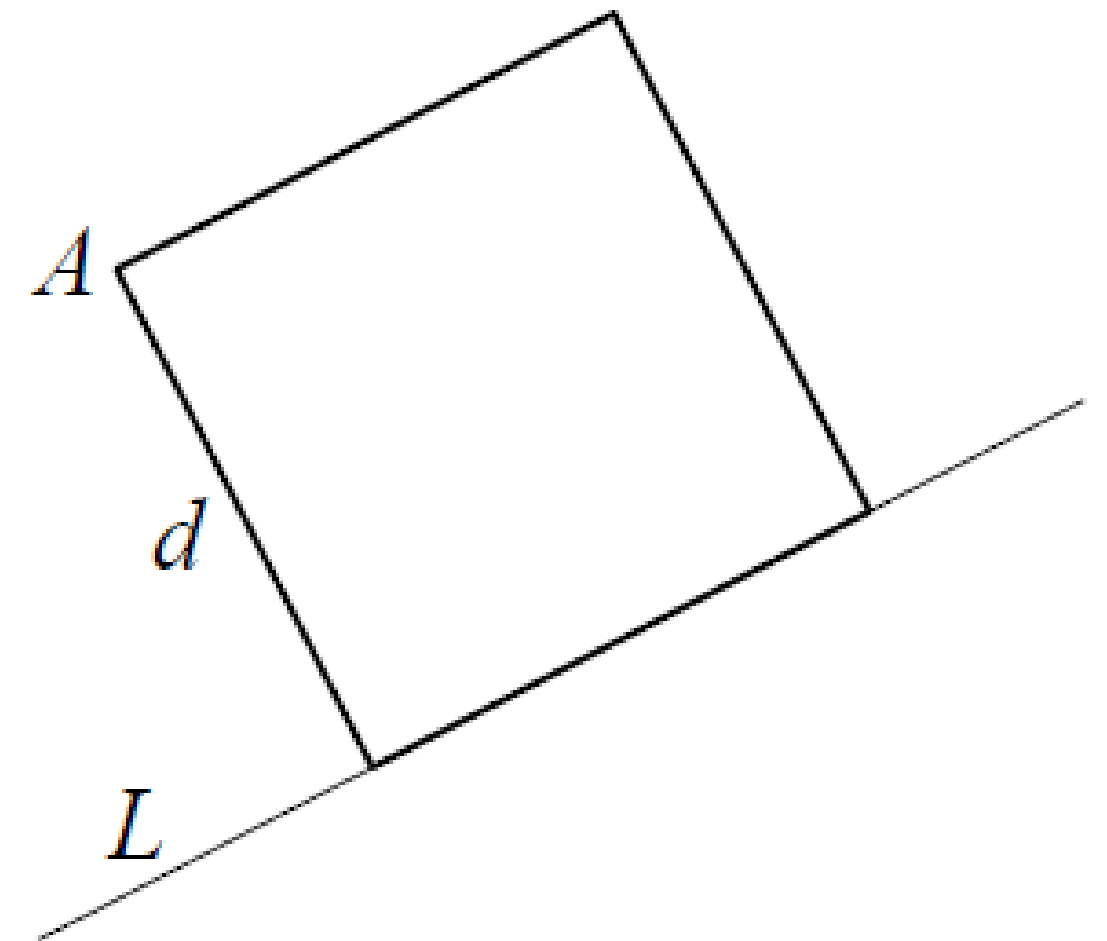
Приклад 2. Точка $A(2; -5)$ є вершиною квадрату, одна зі сторін якого міститься на прямій $L: x - 2y - 7 = 0$. Визначити площу квадрату.

Перевіряємо: $A \in L$?

$$2 - 2 \cdot (-5) - 7 = 2 + 10 - 7 = 5 \neq 0; \quad A \notin L;$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5};$$

$$S_{\text{кв}} = d^2 = 5.$$



Відстань між || прямими на площині

Треба взяти довільну точку на одній прямій та обчислити відстань від неї до другої прямої.

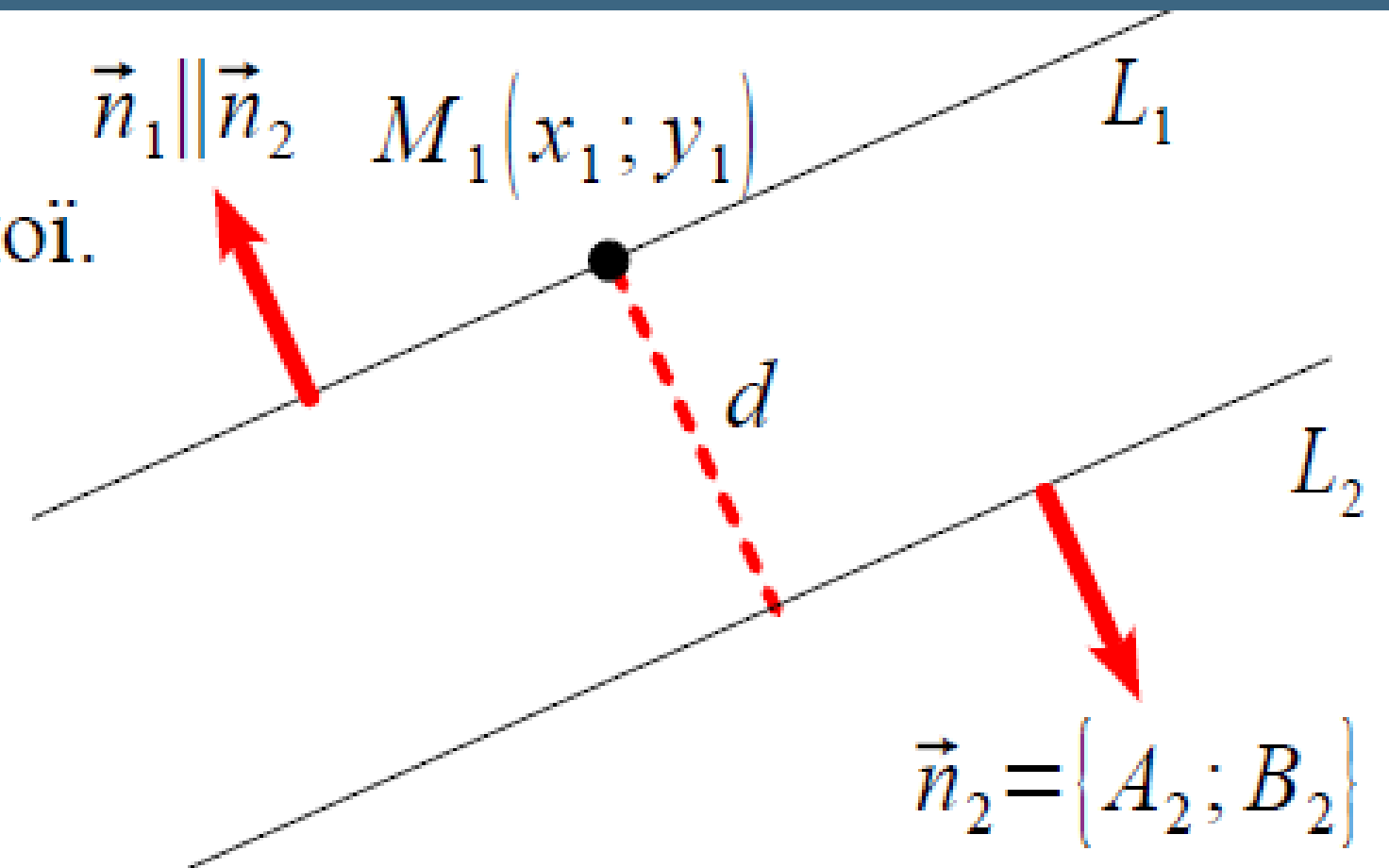
Приклад 3. Обчислити відстань між паралельними прямими:

$$L_1: 3x - 4y - 10 = 0;$$

$$L_2: 6x - 8y + 5 = 0.$$

Беремо на прямій L_1 будь-яку точку, наприклад, $M_1(0; -2.5)$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 0 - 8 \cdot (-2.5) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|0 + 20 + 5|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{|25|}{\sqrt{100}} = \frac{25}{10} = 2.5$$



Площина в просторі

Площину в просторі можна задати, задавши якусь її точку $M_0(\vec{r}_0)$ та нормальний вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Def. Площина — це г.м.т. простору, для яких $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n}$. $(\vec{n}, (\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0$.
Позначимо координати: $\vec{n} = \{A; B; C\}$;

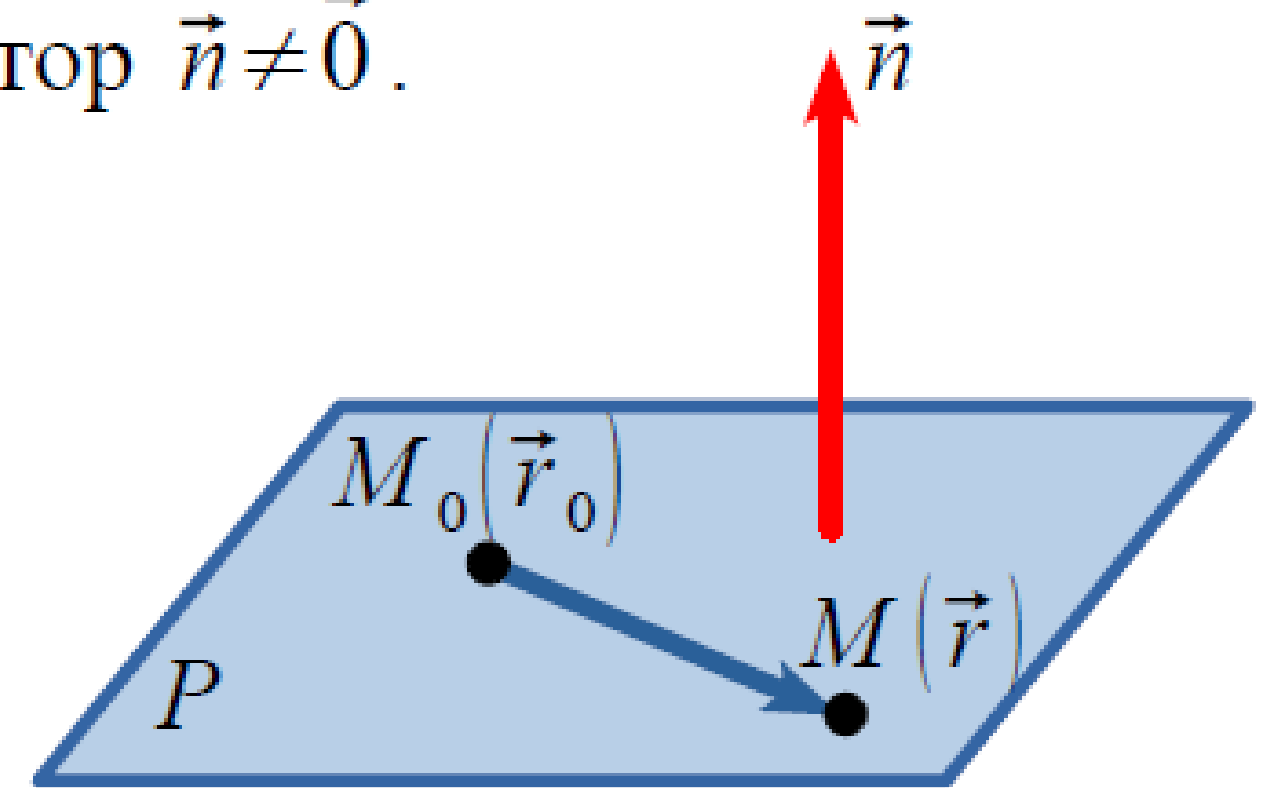
$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $M = (x, y, z)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0;$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0;$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

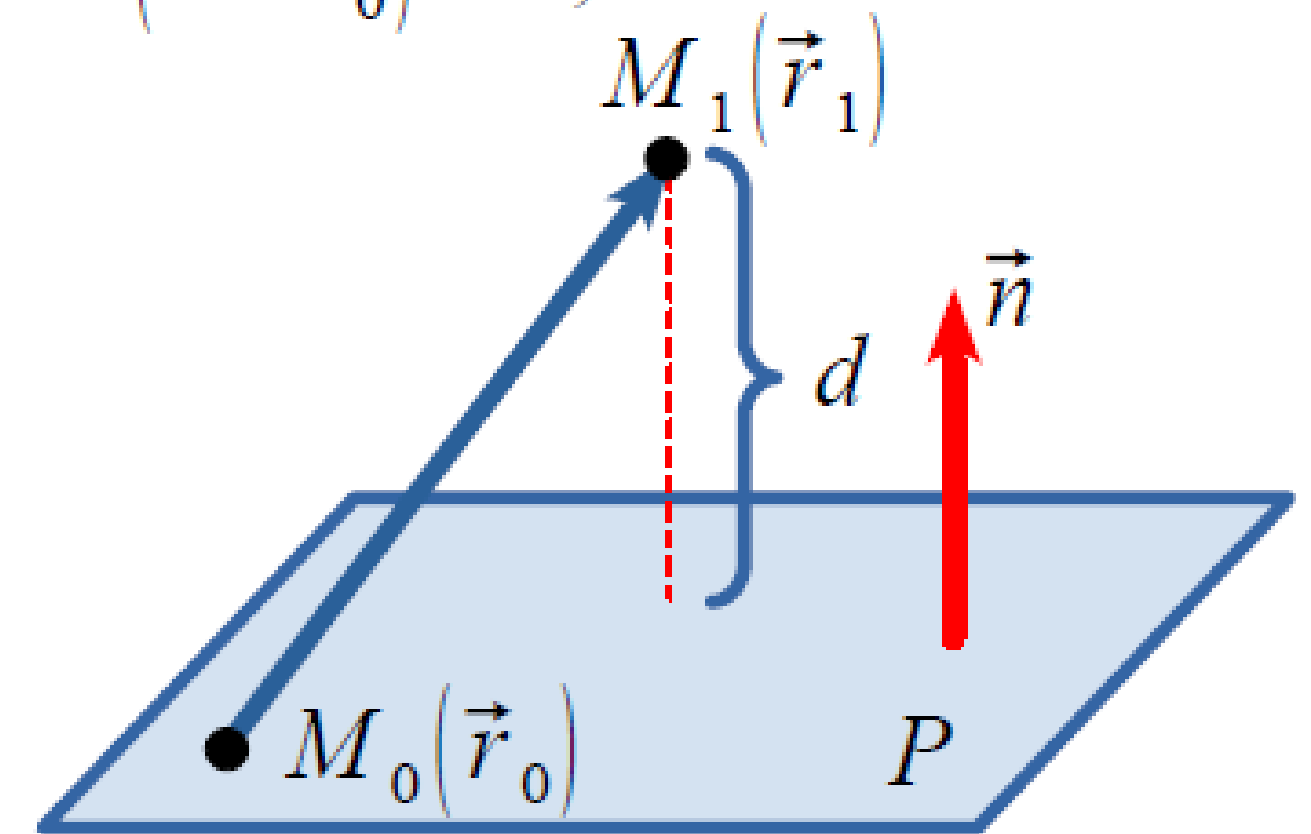


Відстань від точки до площини

Площина P задана своєю точкою $M_0(\vec{r}_0)$ та нормальним вектором $\vec{n}$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;
 $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\begin{aligned}d &= \left| \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} \right| = \left| \frac{(\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{n})}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(\vec{n}, (\vec{r}_1 - \vec{r}_0))|}{|\vec{n}|} = \\&= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\&= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\&= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\end{aligned}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



Відстань від точки до площини

Приклад 4. Знайти відстань від точки $M_1(1, -1, 3)$ до площини $P: 2x - y + 2z + 3 = 0$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|2 + 1 + 6 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} =$$
$$= \frac{|12|}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = \underline{4}.$$

Способи завдання прямої в просторі

Пряму можна задати, якщо задати спрямовуючий вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ та точку M_0 .

Існує лише одна пряма L , що проходить через точку M_0 паралельно до вектора $\vec{a}$.

Кожна точка цієї прямої M має властивість:

$\overrightarrow{M_0 M} \parallel \vec{a}$, і жодна інша точка цієї властивості не має.

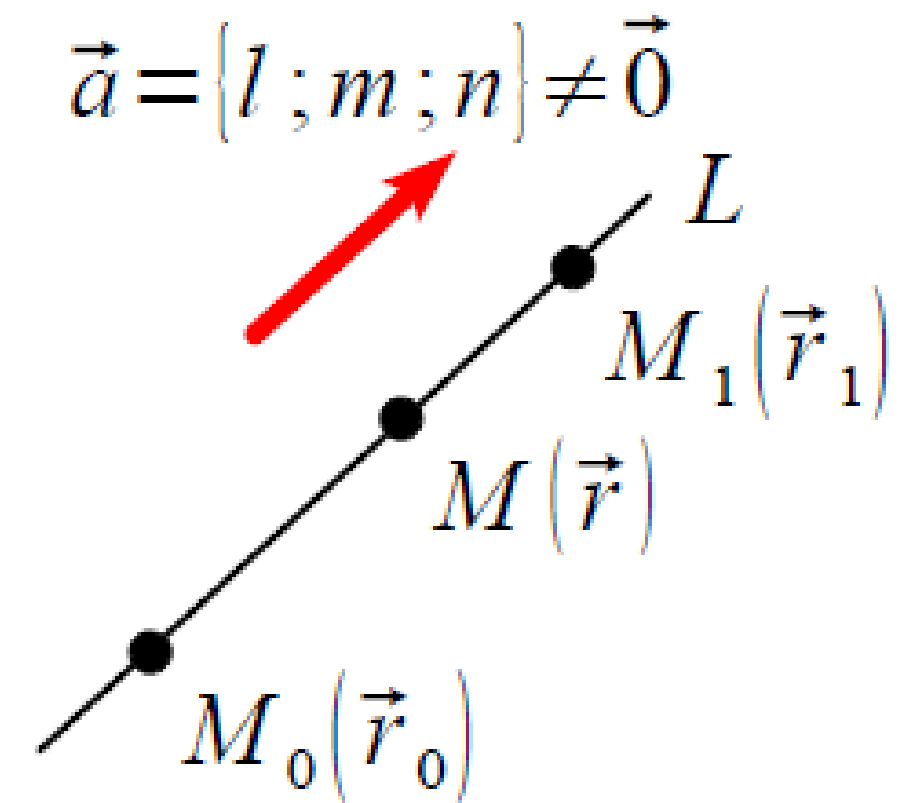
$M_0(x_0, y_0, z_0)$; $M(x, y, z)$; $\overrightarrow{M_0 M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$;
 $\vec{a} = \{l; m; n\}$.

Умова колінеарності:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Це — канонічні рівняння прямої в просторі.

Вони не є єдиними: замість точки M_0 можна взяти іншу точку M_1 на цій прямій.



Способи завдання прямої в просторі

Введемо параметр у канонічних рівняннях:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно x, y, z :

$$\begin{cases} x = l t + x_0; \\ y = m t + y_0; \\ z = n t + z_0. \end{cases}$$

Це — параметричні рівняння прямої в просторі.

Якщо замість точки M_0 взяти іншу точку цієї прямої M_1 , отримаємо інші рівняння цієї прямої.

Відстань від точки до прямої

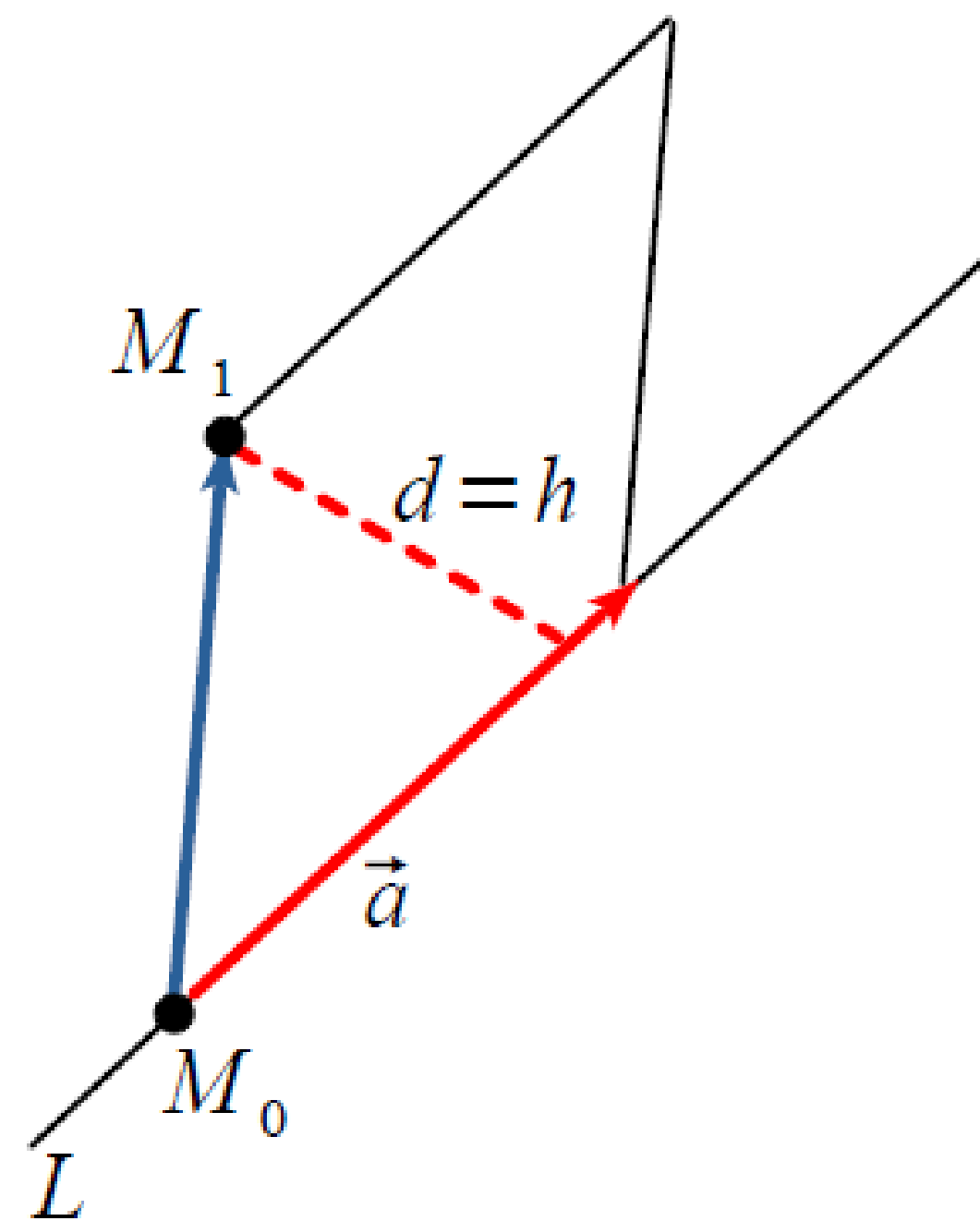
Пряма L задана своєю точкою $M_0(\vec{r}_0)$
та спрямовуючим вектором $\vec{a}$.

Побудуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\vec{a}$.

Його площа $S = \left| [\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}] \right|$, а довжина основи $|\vec{a}|$.

Висота цього паралелограму й є відстанню
точки M_1 до прямої L :

$$d = h = \frac{\left| [\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}] \right|}{|\vec{a}|}.$$



Відстань від точки до прямої

Приклад 5. Знайти відстань від точки $M_1(-1, 2, 4)$

до прямої $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{5}$.

$$d = h = \frac{\left| [\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{a}] \right|}{|\vec{a}|}. \quad M_0(3, -1, 0); \quad \overrightarrow{M_0 M_1} = \{-4; 3; 4\}; \quad \vec{a} = \{4; -1; 5\}.$$

$$[\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(15+4) - \vec{j}(-20-16) + \vec{k}(4-12) = \{19; 36; -8\}.$$

$$d = \frac{\sqrt{19^2 + 36^2 + (-8)^2}}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \sqrt{\frac{361 + 1296 + 64}{16 + 1 + 25}} = \sqrt{\frac{1721}{42}} \approx \underline{\underline{6.4013}}.$$

Відстань між $\parallel$ прямими в просторі

Щоб знайти відстань між паралельним прямими L_1 та L_2 ,
треба взяти точку на одній з них (наприклад, M_1),
та обчислити відстань від неї до прямої L_2 :

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a} \right] \right|}{|\vec{a}|}. \quad \text{Див. задачу про відстань від точки до прямої.}$$

Відстань між || прямими в просторі

Приклад 6. Знайти відстань між паралельними прямими:

$$L_1: \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}; \quad L_2: \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

$$M_1(5; 6; -3); \quad M_2(2; 3; -3); \quad \vec{a} = \{13; 1; -4\}.$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \{2-5; 3-6; -3-(-3)\} = \{-3; -3; 0\};$$

$$[\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ 13 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(12-0) - \vec{j}(12-0) + \vec{k}(-3+39) = \{12; -12; 36\}.$$

$$d = \frac{\sqrt{12^2 + (-12)^2 + 36^2}}{\sqrt{13^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \sqrt{\frac{144 + 144 + 1296}{169 + 1 + 16}} = \sqrt{\frac{1584}{186}} \approx \underline{2.9182}.$$

Відстань між мимобіжними прямими

Є дві мимобіжні прямі:

L_1 задана своєю точкою M_1
та спрямовуючим вектором $\vec{a}_1$;

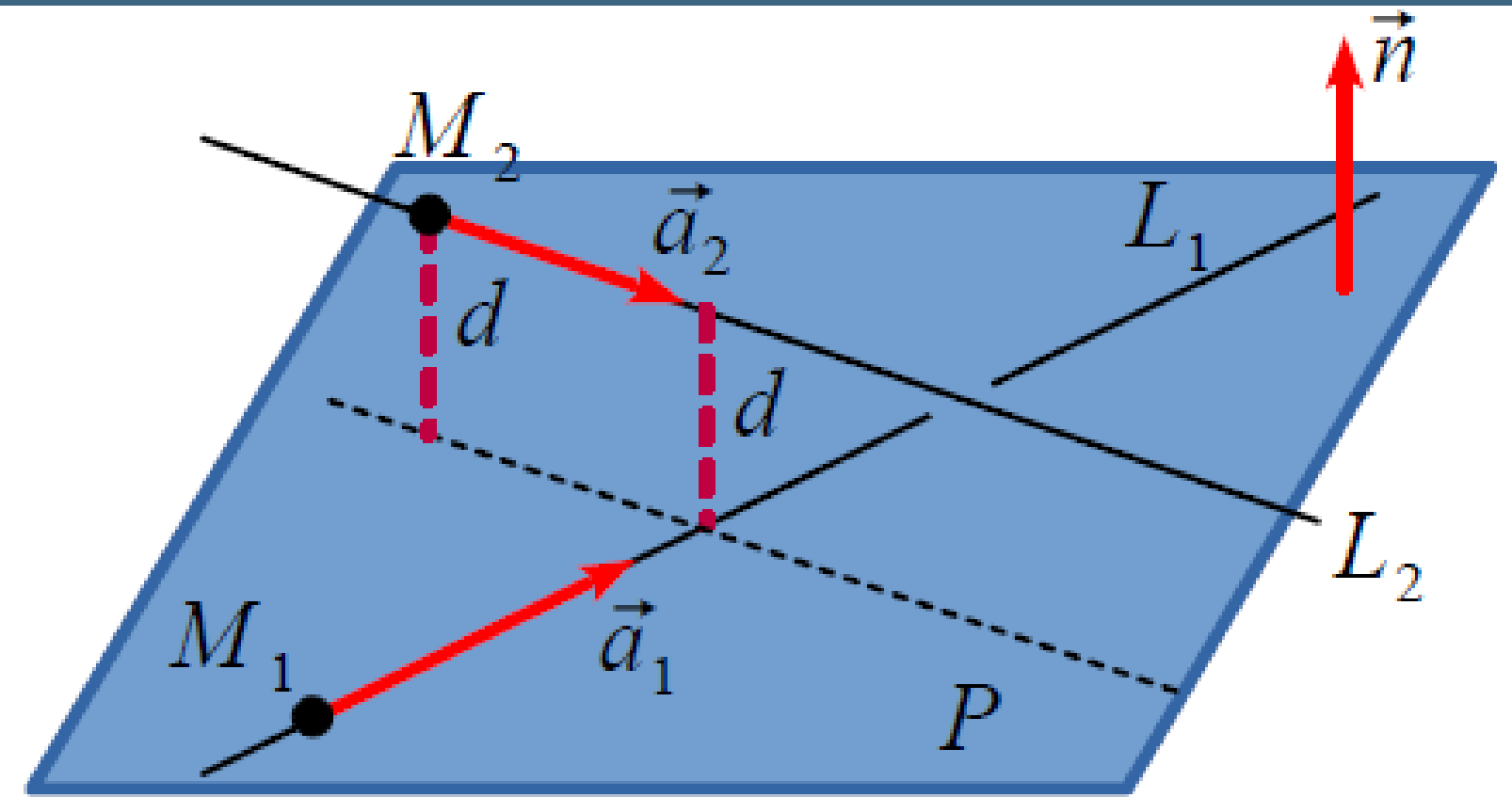
L_2 задана своєю точкою M_2
та спрямовуючим вектором $\vec{a}_2$.

Треба знайти найкоротшу відстань d
між ними (вздовж спільного перпендикуляру).

Порядок розв'язання.

- Через одну з прямих (наприклад, через L_1) проводимо площину $P \parallel L_2$.
Точка для P : M_1 ; нормальний вектор для P : $\vec{n} \parallel [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$.
- Знаходимо відстань від L_2 (наприклад, від точки M_2) до площини P .
Ця відстань теж буде дорівнювати d .

Можна сказати й так: $d = \left| \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_2} \right|$. Формула для обчислення буде такою самою



Відстань між мимобіжними прямими

Приклад 7. Знайти відстань між мимобіжними прямими:

$$L_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ та } L_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

$$M_1(-7, -4, -3); \quad M_2(21, -5, 2); \quad \vec{a}_1 = \{3; 4; -2\}; \quad \vec{a}_2 = \{6; -4; -1\}.$$

$$\vec{n} \parallel [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4-8) - \vec{j}(-3+12) + \vec{k}(-12-24) = \{-12; -9; -36\};$$
$$\vec{n} = \{4; 3; 12\}.$$

$$P: 4(x+7) + 3(y+4) + 12(z+3) = 0; \quad 4x + 28 + 3y + 12 + 12z + 36 = 0;$$
$$4x + 3y + 12z + 76 = 0.$$

$$d = \frac{|4 \cdot 21 + 3 \cdot (-5) + 12 \cdot 2 + 76|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{|84 - 15 + 24 + 76|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = \frac{|169|}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = \underline{13}.$$

Які задачі ми можемо розв'язувати

- Перевіряти, чи міститься точка в трикутнику на площині.
- За бажанням перевіряти, чи міститься точка в тетраедрі в просторі.
- Обчислювати відстань від точки до прямої на площині.
- Обчислювати відстань між паралельними прямими на площині.
- Обчислювати відстань від точки до площини в просторі.
- Обчислювати відстань від точки до прямої в просторі.
- Обчислювати відстань між паралельними прямими в просторі.
- Обчислювати відстань між мимобіжними прямими в просторі.

Дякуємо за увагу!
Доеднуйтесь до нас в
соцмережах



9-23 грудня 2024

кафедра Комп'ютерної математики та аналізу даних

