

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з виконання практичних робіт
з навчальної дисципліни “ Теплообмін у ливарній формі ”
для студентів денної та заочної форми
спеціальності G10 Металургія та
G9 Прикладна механіка

Видання друге, перероблене й доповнене

Затверджено редакційно
видавничою радою університету
Протокол № 1 від 13.02.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Теплообмін у ливарній формі», видання 2-ге, перероб. й доп. для студентів денної та заочної форми навчання за спеціальністю G10 Металургія та G9 Прикладна механіка рівня бакалавр. / Уклад. : Акімов О.В. – Харків: НТУ «ХПІ», 2025. – 16 с.

Укладач: Акімов О.В.

Рецензент: Дьомін Д. О.

Кафедра ливарного виробництва

Розрахунок охолодження лиття чисельним методом Дюзінбера при тепловіддачі від поверхні, яка дорівнює нескінченності.

Метод Дюзінбера полягає в накладці сітки на тіло, через яку проходить тепловий потік, і застосування рівнянь для стаціонарних умов до теплового потоку, що йде від однієї клітини (сітчастої комірки) до сусідньої протягом невеликих кінцевих інтервалів часу, так що прийняті припущення досить виправдані. Тепловий потік протягом тривалого періоду часу підсумовується в ряд невеликих інтервалів. Однією з найпростіших схем чисельного математичного аналізу є схема розрахунку Дюзінбера, заснована на методі послідовних повторень для вирішення задач нестійкого теплового потоку.

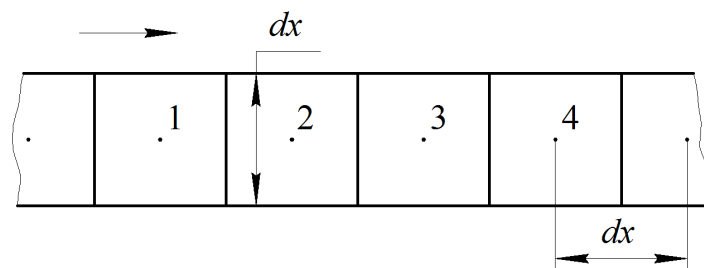


Рис.1

Принципи цього методу проілюстровані одновимірним тепловим потоком за допомогою діаграми на рис.1. На рис. 1 представлено тонкий шар корпусу, при якому потік тепла проходить паралельно площині зрізу (тобто горизонтально по контуру). Ширина фрагмента dx і глибина повинні дорівнювати одному.

Як ви можете бачити з діаграми, тепловий потік ділиться на відрізки, рівні dx і в кожному з отриманих квадратів в центрі знаходиться контрольна точка. Передбачається, що можна вибрати інтервал часу dt настільки малий, що:

- 1) При розрахунку перепадів температури на одній контрольній точці протягом цього інтервалу можна обмежитися поглядом на суміжні контрольні точки;
- 2) Температури на початку цього інтервалу можуть застосовуватися протягом усього інтервалу;
- 3) Зміна теплового вмісту елемента тіла може бути розрахована шляхом зміни температури в його контрольній точці.

Скажімо, що в якийсь момент часу температура на контрольних точках становить T_1 T_2 T_3 T_4 ; що через деякий час dt вони дорівнюють T_1 T_2 T_3 T_4 зі штрихом. У цьому випадку тепловий баланс, наприклад, для точки 2 в момент часу dt , записується рівнянням:

$$\lambda(T_1 - T_2)dt + \lambda(T_3 - T_2)dt = c\rho dx^2(T_2' - T_2) \quad (1)$$

dx вже введено в рівняння

Далі, щоб спростити рівняння теплового балансу, можна ввести безмірний модуль

$$M = \frac{c\rho dx^2}{\lambda d\tau} = \frac{dx^2}{\alpha d\tau} \quad (2)$$

За допомогою заміни цього модуля в рівняння (1), ми отримуємо:

$$(T_1 - T_2) + (T_3 - T_2) = M(T'_2 - T_2)$$

вирішуючи щодо T'_2 , отримаємо:

$$T'_2 = \frac{T_1 + T_3 + (M-2)T_2}{M} \quad (3)$$

Ви можете бачити, що рівняння, що визначає M , містить 3 змінні dx , $d\tau$ і M . Якщо встановити значення dx , то вибір M визначає $d\tau$ і навпаки. Далі, якщо M менше 2, то T набуває від'ємне значення, яке не має фізичного значення, тому що при передачі тепла потоком додатні значення T_1 і T_2 і малі значення dx і $d\tau$ температури не можуть відрізнитись значно.

Тому M має бути рівним або більше 2.

Якщо взяти, що $M=2$, рівняння (3) спрощується до такого роду:

$$T'_2 = \frac{T_1 + T_3}{2}$$

Якщо обрати $M = 3$, тоді рівняння прийме вигляд:

$$T'_2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$$

Модулі, рівні 2 і 3, вимагають лише двох арифметичних дій для розрахунку температури в точці 2 - одне додавання і один поділ. Модуль 4 та інші вимагають більшої кількості дій. Спрощений розрахунок, що отримується при використанні модулів рівних 2 і 3, називається методом усереднення.

Корисно враховувати вплив розміру модуля на точність розчину, як показано на Рис.2.

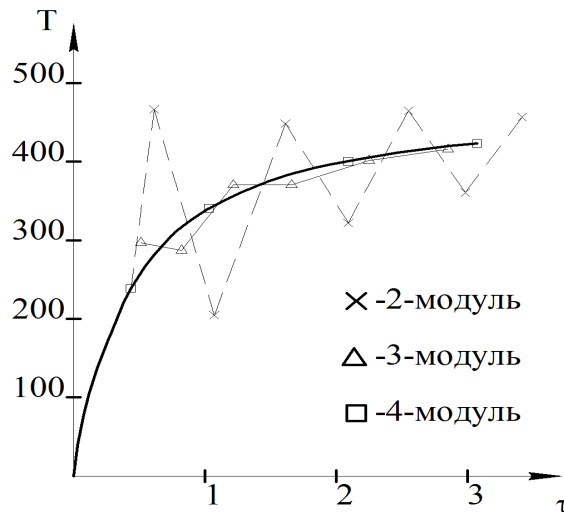


Рис.2

На графіку показана кінетика зміни температури в якийсь момент в холодному стрижні, який вноситься в контакт з гарячим стрижнем. Плавна крива була отримана за допомогою аналітичного рішення задачі, а потім графік був позначений точками, знайденими в результаті числового аналізу при значеннях модуля 2,3,4. Як бачите, рішення, отримане на $M = 2$, досить сильно коливається поблизу кривої розрахунку, і ці коливання поступово згасають, наближаючись до аналітичного рішення. При $M = 3$, результати набагато краще. При цьому 1,2 і 3 точки дещо не точні, але наступні точки падають на криву. Ще кращі результати досягнуті при $M = 4$. Однак підвищення точності вимагає додаткових витрат на робочу силу. Слід зазначити, що з прийнятого значення dx величина dt зменшується зі зростанням M , отже користування значенням $M = 3$ проти $M = 2$ призводить до зростання на 50% числа необхідних дій, щоб охопити певний період часу, а застосування значення $M = 4$ подвоює це число.

Незважаючи на те, що у всіх випадках, коли це можливо, приймають цілий модуль, зазвичай $M = 3$, так як це дозволяє швидко виконати прийом усереднення. Однак цей модуль не обов'язково має бути цілим числом, часто буває дрібною величиною. В останньому випадку можна переписати рівняння (3) в наступному вигляді:

$$T'_2 = \left(\frac{1}{M}\right)T_1 + \left(\frac{1}{M}\right)T_3 + \left(\frac{M-2}{M}\right)T_2 = B_{12}T_1 + B_{32}T_3 + B_{22}T_2 \quad (4)$$

З рівняння 1 і 4 знаходимо:

$$B_{12} = B_{32} = d\tau/c; \quad B_{22} = 1 - d\tau/c$$

Можна зробити висновки:

- 1) сума всіх значень для будь-якої точки дорівнює 1;
- 2) кожне значення (B_{12} ; B_{32}) позитивно;
- 3) значення B_{22} можуть бути позитивними або дорівнювати 0.

Коли застосовується дробовий модуль, перед початком базового обчислення необхідно обчислити значення B для кожної точки. Цей метод називається методом зважених коефіцієнтів.

Щоб проілюструвати використання цього методу, давайте розглянемо наступний приклад.

Необхідно визначити температуру в середній площині необмеженої пластини товщиною 12 см, яка мала температуру 1000°C через 100с після миттєвого охолодження поверхні до 0°C . Коефіцієнт температуропровідності матеріалу (латуні) прийнято $0,05 \text{ см/с}$. Якщо прийняти $M = 3$, то зручно вибрати $dx = 1 \text{ см}$.

Тоді отримаємо $d\tau = \frac{1^2}{0,05 \cdot 3} = 6.667 \text{ с}$ з рівняння (2).

Сітка, що використовується для цього завдання, показана на рисунку 3, що зображує ділянку розтину. Оскільки прийнято, що плита має необмежену довжину, вплив кутів і країв відсутній так, що тепловий потік одновимірний і спрямований перпендикулярно поверхні плити, досить присвоїти зовнішній тепловий потік тільки в цьому напрямку.

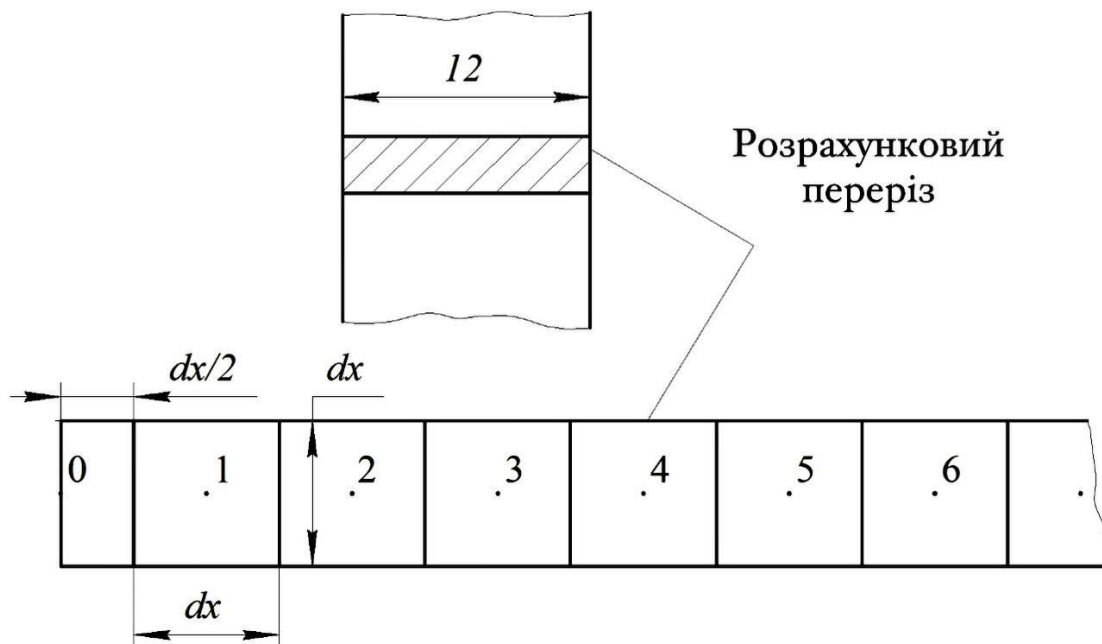


Рис. 3

Ми розглядаємо смугу шириною dx (тобто 1см), як показано на схемі і ділимо її на елементи довжиною dx , вздовж смуги. Можна бачити, що напівелементи розташовані на поверхні смуги.

Це для того, щоб контрольна точка розташовувалися на поверхні (точки 0 і 12). Ви також можете помітити, що в цьому місці точка 6 збігається з центром плити. Далі робимо робочий стіл і ставимо в його першу лінію початкові температури на контрольних точках в момент $\tau = 0$.

Етап (дорівнює кількості одиниць $d\tau$)	Температура в точці N							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	500	1000 (2500)	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1	0	833 (1833)	1000 (2833)	1000	1000	1000	1000	1000
2	0	611	944	1000	1000	1000	1000	1000
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
13	0	264 (765)	501 (1455)	690 (2013)	822 (2410)	898 (2643)	923 (2719)	898
14	0	255 (740)	485 (1411)	671 (1959)	803 (2355)	881 (2590)	306 (2668)	881
15	0	247	470	653	785	863	889	863

Таблиця не продовжується за межами точки 7, завдяки симетрії системи, яка говорить про те, що температура в точці 7 завжди така ж, як в точці 5, а в точці 8 - як в точці 4. Пункт 7 входить в таблицю через те, що необхідно розрахувати температуру в точці 6.

Вибір початкової температури, яку потрібно взяти для точки 0 на поверхні пластини, викликає деякі труднощі, оскільки незрозуміло, яку температуру приймати, 0 або 1000 °C. Рекомендовано приймати як середнє арифметичне значення, тобто 500°C.

Склавши таблицю, приступаємо до розрахунку температури для перших двох контрольних пунктів. Оскільки приймається припущення про миттєве охолодження пластини, температура на поверхні плити вважається рівною 0 для

всіх наступних моментів часу. Тому нова температура для етапу часу 1 (через 6,67 с) дорівнює 0. Щоб отримати нову температуру для точки (1) через dt (6,67с) після миттєвого охолодження поверхні до 0, необхідно підсумувати температуру в точках 0,1 та 2 для початку інтервалу часу (тобто в даному випадку початкові температури) та вписати цифру 2500 у графу 1 таблиці. Поділом цієї величини на 3 одержують температуру в кінці інтервалу часу, що становить 833°C. Розрахунок триває таким же чином, як показано в таблиці, нові температури для кожної контрольної точки отримують знаходження середньої температури в кінці кожного попереднього етапу (часовий інтервал) в точці, про який йде мова, і двох сусідніх.

Розрахунок триває до тих пір, поки не буде виконана необхідна кількість кроків, в даному випадку 15.

Розрахунок охолодження виливки числовим методом Дюзінбера при значенні коефіцієнта тепловіддачі від поверхні не рівнрму нескінченності.

На попередній задачі наведено приклад застосування методу Дюзінбера для простого випадку, коли коефіцієнт тепловіддачі дорівнює нескінченності. Розглянемо більш реальне завдання, коли коефіцієнт тепловіддачі дорівнює кінцевій величині, наприклад, у випадку, коли є поверхня розділу між формою і виливкою у разі утворення повітряного зазору.

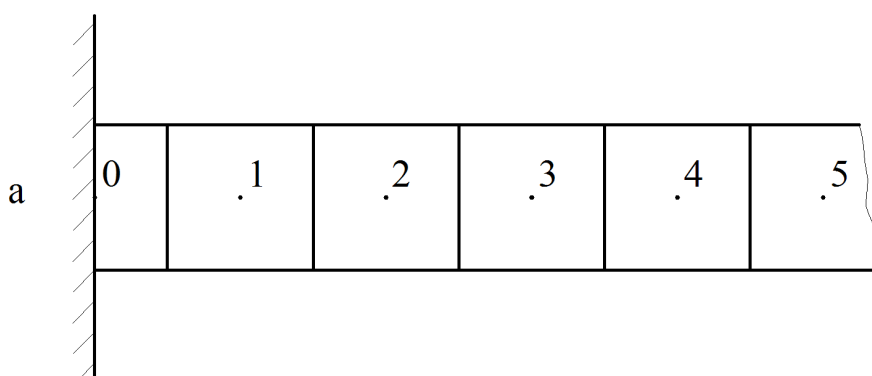


Рис. 4

Схема на рис. 4 зображає частину напівнескінченного тіла, що стикається з навколишнім середовищем та ілюструє розрахунок за допомогою кінцевих коефіцієнтів тепловіддачі.

Розглянуту область поділяють на елементи, як показано на схемі, і вважають існування коефіцієнта тепловіддачі від поверхні, що дорівнює α до навколишнього середовища a , тепловий баланс для точки 1 дорівнює:

$$\alpha dx(T_a - T_0)d\tau + \lambda(T_1 - T_0)d\tau = \frac{c\rho dx^2}{2}(T'_0 - T_0) \quad (1)$$

де T_a – температура середовища.

Всі позначення відомі, тільки 2 знаменник вводиться тому, що елемент у поверхні має лише половину площі внутрішнього елемента. Якщо далі ввести модуль поверхні:

$$N = \frac{\alpha dx}{\lambda}, \quad M = \frac{c\rho dx^2}{\lambda d\tau}, \text{ то}$$

$$N = (T_a - T_0) + (T_1 - T_0) = \frac{M}{2}(T'_0 - T_0)$$

Вирішивши щодо T'_0

$$T'_0 = \frac{2N}{M} T_a + \frac{2}{M} T_1 + \left(1 - \frac{2N+2}{M}\right) T_0 \quad (2)$$

У цьому випадку ми застосовуємо метод "зважених коефіцієнтів" та:

$$B_{a0} = \frac{2N}{M};$$

$$B_{10} = \frac{2}{M};$$

$$B_{00} = 1 - \frac{2N+2}{M}.$$

Подальшим розвитком методу є застосування його до багат шарових тіл. Спочатку допустимо, що з-поміж них забезпечується досконалий контакт. Необхідно прийняти те саме значення $d\tau$ для обох матеріалів. У цьому випадку модулі будуть різними для кожного матеріалу. При розгляді двох дотичних матеріалів можна або розташовувати контрольні точки сітки з кожного боку контактної поверхні (а) або поміщати одну з точок - нульову в середині комірки (б) Рис.5.

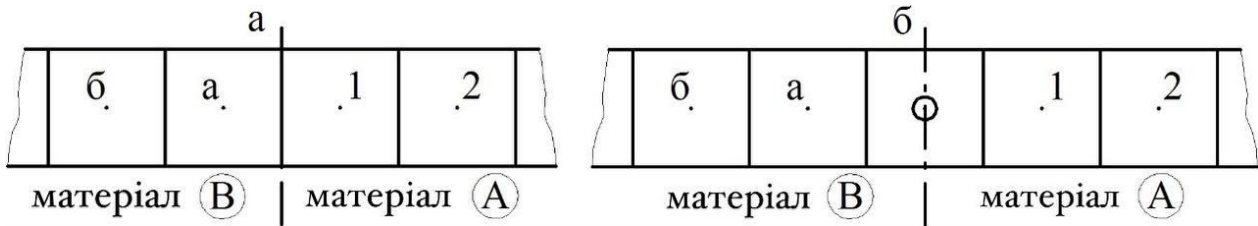


Рис.5

У першому випадку (а) отримуємо наступні рівняння, в яких індекси А та Б відносяться відповідно до двох матеріалів:

$$\lambda_{a1}(T_a - T_1)d\tau + \lambda_{21}(T_2 - T_1)d\tau = c_A \rho_A (T'_1 - T_1) dx^2$$

введемо комплексні коефіцієнти $\lambda_{a1} = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = X_A \lambda_A$; $\lambda_{21} = \lambda_A$

далі запишемо це рівняння у такому вигляді:

$$X_A \lambda_A (T_a - T_1)d\tau + \lambda_A (T_2 - T_1)d\tau = c_A \rho_A (T'_1 - T_1) dx^2$$

вводимо модуль $M_A = \frac{c_A \rho_A dx^2}{\lambda_A d\tau}$

$$\frac{X_A}{M_A} (T_a - T_1) + \frac{1}{M_A} (T_2 - T_1) = T'_1 - T_1$$

і вирішуючи щодо T_1' , отримаємо:

$$T_1' = \frac{X_A}{M_A} T_a + \frac{T_2}{M_A} + \left(1 - \frac{X_A + 1}{M_A}\right) T_1$$

Для другого випадку (б) застосування тих же положень, що дає для точки 0

$$\begin{aligned} \lambda_B(T_a - T_0)d\tau + \lambda_A(T_1 - T_0)d\tau &= \left(\frac{c_A\rho_A dx^2}{2} + \frac{c_B\rho_B dx^2}{2}\right)(T_0' - T_0) = \\ &= \left(\frac{\lambda_A M_A d\tau}{2} + \frac{\lambda_B M_B d\tau}{2}\right)(T_0' - T_0) = \frac{z d\tau}{2}(T_0' - T_0) \end{aligned}$$

$$\text{де } M = \frac{c\rho dx^2}{\lambda} \text{ и } z = \lambda_A M_A + \lambda_B M_B$$

і вирішуючи щодо T_0' , отримаємо:

$$T_0' = \frac{2\lambda_B T_a}{z} + \frac{2\lambda_A T_1}{z} + \left[1 - \frac{2(\lambda_A + \lambda_B)}{z}\right] T_0$$

Розрахунок прихованої теплоти плавлення, що звільняється.

У завданнях, що відносяться до затвердіння металів, необхідно враховувати виділення теплоти кристалізації, щоб розрахунок мав реальну цінність. Для цього визначають величину наступної залежності:

$$K = \frac{L}{C}$$

де L - прихована теплота затвердіння, ккал/кг

C - теплоємність, ккал/кг °С

підставивши розмірності, отримаємо:

$$K = \frac{\text{ккал кг}^\circ\text{С}}{\text{кг ккал}}$$

Отже, величину K можна розглядати як зміну температури металу, в процесі якого виділяється кількість тепла, що дорівнює прихованій теплоті. Щоб прийняти до уваги приховану теплоту, застосовують такий спосіб. Коли при звичайному ході розрахунку температура в контрольних точках сітки падає нижче точки затвердіння металу або сплаву, число градусів, відповідне цій різниці,

додають до обчисленої температури, зазначене число градусів заносять в окремий звіт. При наступних діях роблять подальший додаток до цього рахунку весь час наводячи температуру контрольної точки до температури затвердіння. Коли число цих градусів в окремому рахунку досягає величини K , це означає, що вся прихована теплота використана. Після цього дають можливість температурі в контрольній точці знову знизитися, і розрахунок продовжують нормальним шляхом.

Очевидно, що цей метод розрахунку поширюється також на сплави, що твердіють в інтервалі температур. У разі необхідно спочатку визначити з діаграми стану сплаву інтервал затвердіння. Потім цей інтервал поділяють на кілька окремих ступенів і до кожної з них відносять відповідне число градусів від величини K . При виконанні розрахунків припускають, що прихована теплота звільняється в кінці кожного ступеня, а не безперервно протягом усього інтервалу кристалізації. Слід мати на увазі, що такий спосіб може внести до уваги тимчасову помилку, яка, однак, зникає після завершення затвердіння.

Приклад рішення завдання затвердження методом Дюзінбера при значенні коефіцієнта тепловіддачі не рівнем безкінцевості

Щоб показати застосування описаних вище методів, використовуємо їх для вирішення одновимірної задачі затвердіння. Потрібно визначити тривалість затвердіння латунної пластини товщиною 14 см, що відливається в чавунну форму (металеву форму) з товщиною стінок 7см. Початкова температура форми передбачається рівною 0°C. Метал заливається у форму при температурі 1100°C і твердне при температурі 1000°C. Для металу та форми прийняті наступні теплофізичні характеристики:

	Латунь	Форма
Коефіцієнт теплопровідності, кал/см · с · °C	0,3	0,15
Питома теплоємність, кал/г	0,1	0,12
Щільність, г/см ³	8,0	7,0
Коефіцієнт температуропровідності, см ² /с	0,375	0,178
Питома теплота плавлення, кал/г	40	-

Так як пластина має довжину, що значно перевищує її товщину, то можна знехтувати впливом кутів і країв і розглядати лише одновимірний тепловий потік, спрямований перпендикулярно від центру виливки.

Зважаючи на розміри виливки, зручно скористатися сіткою з квадратними клітинами 2×2см. Одну з контрольних точок розташовують по зовнішній поверхні форми. Сітка, що при цьому виходить, представлена на рисунку 6.

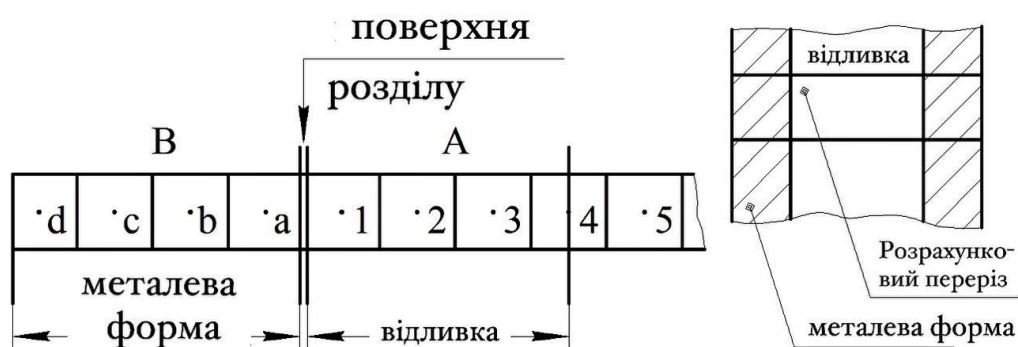


Рис 6.

Передбачається, що коефіцієнт тепловіддачі поверхні дорівнює 0,14кал/см²·°C.

Вибираємо $M = 3$, згідно з рівнянням $M = \frac{dx^2}{ad\tau}$ отримуємо:

$$d\tau = \frac{2^2}{0,375 \cdot 3} = 3,56c$$

Для форми підрахуємо M , що дорівнює:

$$M = \frac{2^2}{0,178 \cdot 3,56} = 6,3$$

Вводячи це значення в рівняння, отримані раніше:

$$B_{12} = \frac{1}{M} = \frac{1}{6,3} = 0,159; \quad B_{22} = \frac{M-2}{M} = \frac{4,3}{6,3} = 0,682$$

Тепер потрібно обчислити зважені коефіцієнти для елементів, що примикають до зіткнення поверхні виливки з формою

.

			A – виливка
Точка 1	$X_A = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{0,15}{0,45} = 0,333$		B – форма
(виливка)			

$$B_{a1} = \frac{X_A}{M_A} = \frac{0,333}{3} = 0,111 \quad B_{21} = \frac{1}{M_A} = 0,333$$

$$B_{aa} = 1 - \frac{X_A + 1}{M_A} = 1 - \frac{1,333}{3} = 0,556$$

Точка 1	$X_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{0,3}{0,45} = 0,667$	A – виливка
(форма)		B - форма

$$B_{a1} = \frac{X_B}{M_B} = \frac{0,667}{6,3} = 0,106 \quad B_{ea} = \frac{1}{M_B} = \frac{1}{6,3} = 0,159$$

$$B_{aa} = 1 - \frac{X_B + 1}{M_B} = 1 - \frac{0,667 + 1}{6,3} = 0,735$$

Щоб знайти коефіцієнти зовнішньої поверхні металевої форми, користуємося рівняннями, отриманими раніше.

$$N = \frac{adx}{\lambda} = \frac{0,14 \cdot 2}{0,15} = 1,865$$

$$B_{ad} = \frac{2N}{M} = \frac{2 \cdot 1,865}{6,3} = 0,592$$

$$B_{cd} = \frac{2}{M} = \frac{2}{6,3} = 0,318$$

$$B_{dd} = 1 - \frac{2N + 2}{M} = 1 - \frac{2 \cdot 1,865 + 2}{6,3} = 0,09$$

Розрахунок починається з точок 1 та а. Згадаймо рівняння для визначення значення температури у наступний момент часу (через крок за часом)

$$T'_1 = \frac{X_A}{M_A} T_a + \frac{T_2}{M_A} + \left(1 - \frac{X_A + 1}{M_A}\right) T_1 = B_{a_1} T_a + B_{21} T_2 + B_{11} T_1 =$$

$$= 0,111 \cdot 0 + 0,333 \cdot 1100 + 0,556 \cdot 1100 = 366 + 612 = 978$$

Підставляючи в рівняння коефіцієнти, отримані для форми, отримаємо - нову $T = 117^\circ\text{C}$.

Можна позначити, що знайдена температура в точці 1 впала нижче точки затвердіння 1000°C , так що слід застосувати прийом зазначений раніше.

$$\lambda = \frac{L}{C} = \frac{40}{0,1} = 400^\circ$$

Тому коригують ту температуру в точці 1, доводячи її до 1000°C і заносять надлишок в 22°C в окрему графу таблиці (крайня справа). Потім розрахунок продовжують, як описано нижче, поки в кінці етапу не буде накопичено 400 надлишкових градусів.

Після 10-го етапу температура в точці 2 падає нижче 1000°C як раніше коригуємо цю цифру до 1000° , а надлишок записуємо в праву крайню графу. В результаті розрахунку встановлено, що повне затвердіння виливків відбудеться на 50 етапі, що складе 174,5с.

Зазначений розрахунок можна здійснити на ЕОМ.

Після цього складемо таблицю:

Таблиця

№ етапу, що дорівнює числу одиниць	e	d	c	b	a	1	2	3	4	5	Облік прихованого тепл. в $^\circ\text{C}$ (поточний результат)
0	0	0	0	0	0	1100	1100	1100	1100	1100	
1	0	0	0	0	117	1000	1100	1100	1100	1100	22

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання
практичних робіт
з навчальної дисципліни “ Теплообмін у ливарній формі ”
для студентів денної та заочної форми навчання
за спеціальністю G10 Металургія та G9 Прикладна механіка
Українською мовою

Видання друге, перероблене й доповнене

Укладач
АКИМОВ Олег Вікторович

Відповідальний за випуск
Роботу до видання рекомендувала

проф. *Дьомін Д. О.*
проф. *Пономаренко О. І.*

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 281

Підп. до друку 2025 р. Гарнітура Times New Roman
Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від
21.08.2017 р.

Електронна версія