МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Т. В. Миланич

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Учебно-методическое пособие

для студентов специальностей 7.090803 «Электронные системы»,
7.090804 «Физическая и биомедицинская электроника»,
7.092203 «Электромеханические системы
автоматизации и электропривод»
дневной и заочной форм обучения

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 3 от 26.12.2007 г.

Харьков НТУ «ХПИ» 2008

В соответствии со скорректированными рабочими планами, студентам для изучения предлагаются только 2-й и 3-й разделы настоящего учебно-методического пособия.

УДК 621.316.31
ББК 31.264.5
М60

Рецензенты: *Я.В. Щербак*, д-р техн. наук, проф. УкрГАЖТ,
И.И.Чикотило, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

Викладено сучасні методи аналізу електронних систем, які одержали в останній час широке розповсюдження: спрямовані графи, топологічні методи дослідження усталених та перехідних процесів. Розглянуто особливості топології нелінійних ланцюгів з використанням умовних елементів – уністорів. Матеріал, що викладається, супроводжується конкретними прикладами.

Призначено для студентів спеціальностей 7.090803 «Електронні системи», 7.090804 «Фізична і біомедична електроніка» та 7.092203 «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» денної та заочної форм навчання.

Миланич, Т. В.

М60 Современные методы анализа электронных схем: учеб.-метод.-пособие / Т. В. Миланич. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – 80 с. – На рус. яз.

ISBN 978-966-593-597-1

Изложены получившие в настоящее время широкое распространение современные методы анализа электронных систем: направленные графы, топологические методы исследования установившихся и переходных процессов. Рассмотрены особенности топологии нелинейных цепей с использованием условных элементов – унисторов.

Предназначено для студентов специальностей 7.090803 «Электронные системы», 7.090804 «Физическая и биомедицинская электроника» и 7.092203 «Электромеханические системы автоматизации и электропривод» дневной и заочной форм обучения.

Іл. 52. Бібліогр. 3 назв.

ББК 31.264.5

ISBN 978-966-593-597-1

© Т.В. Миланич, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление…….. 5

1 Направленные графы…….. 6

1.1 Основные сведения о направленных графах. Линейные графы. Основные определения и понятия……. 6

1.2 Запись уравнений электрической цепи в виде направленного графа. Графы простейших электрических схем 10

1.3 Правила составления графов сложных электрических цепей…….. 13

1.4 Общая формула передачи графа……... 18

1.5 Примеры анализа цепей при помощи графов……. 21

1.6 Инверсия графа…….. 23

1.7 Составление графов четырехполюсников……... 29

1.7.1 Графы двухобмоточного трансформатора……..…… 32

1.7.2 Графы биполярного транзистора ……... 34

1.7.3 Граф полевого транзистора …… 35

1.8 Пример анализа электронных схем, содержащих четырехполюсники, при помощи направленных графов…….. 36

2 Ненаправленные графы. Топологический анализ электрических цепей……..... 40

2.1 Основные положения топологического метода……... 40

2.2 Основные определения и понятия…… 41

2.3 Определитель сложной схемы и его нахождение……... 43

2.4 Примеры анализа линейных схем топологическим методом 46

2.5 Особенности топологического анализа нелинейных цепей. Унисторы и их свойства…….. 52

2.6 Унисторные схемы замещения электронных многополюсников…… 55

2.6.1 Унисторная схема замещения биполярного транзистора……..... 55
2.6.2 Унисторная схема замещения полевого транзистора... 58
2.6.3 Топологическая схема замещения двухобмоточного трансформатора…….. 59
2.7 Правила топологического анализа цепей, содержащих унисторы……... 61

3 Топологический анализ переходных процессов в электрических цепях…… 64
3.1 Основные положения……... 65
3.2 Универсальная топологическая формула…… 68
3.3 Топологический анализ переходных процессов в цепях с нулевыми начальными условиями……. 70
3.4 Топологический анализ переходных процессов в цепях с ненулевыми начальными условиями……. 74
3.5 Универсальная топологическая формула для частных случаев цепей второго порядка…….. 77
3.5.1 Наличие кратных корней характеристического уравнения…… 77
3.5.2 Цепь с малым затуханием (α→0)…… 77
3.6 Универсальная топологическая формула для цепи первого порядка……..... 78

Список литературы…… 80

ВСТУПЛЕНИЕ

В настоящее время электроника является той областью науки и техники, без которой невозможно представить развитие самых различных сфер жизни и деятельности человека. В процессе своего развития электронные устройства становятся все более сложными и разнообразными, что требует разработки более совершенных и эффективных методов анализа и расчета. В частности, на протяжении последних сорока лет в инженерную практику прочно внедряются топологические методы анализа (направленные и ненаправленные графы), основанные на графическом изображении соотношений между различными переменными, характеризующими состояние системы.

Направленные и ненаправленные графы (последние обычно относят к собственно топологическим методам) позволяют составить оптимальную с точки зрения экономичного использования ЭВМ программу решения той или иной задачи. При этом полностью отпадает необходимость в составлении уравнений или матриц и последующих действий над ними. Решения находят непосредственно по изображению схемы цепи. Топологические методы успешно применяются также и для анализа переходных процессов в электрических и электронных цепях.

Применение графов к анализу электрических и электронных цепей наиболее полно было изложено в трудах С. Мэзона [1]. В настоящее время этот метод продолжает совершенствоваться и развиваться как в нашей стране, так и за рубежом. Большой вклад в развитие топологических методов применительно к анализу и синтезу преобразователей электрической энергии, выполненных на силовых полупроводниковых вентилях, внес, в частности, основатель кафедры промышленной и биомедицинской электроники НТУ «ХПИ» профессор В.Т. Долбня. Им разработана оригинальная методика анализа переходных электромагнитных процессов в электронных цепях и системах, основанная на приемах топологии [2], [3].

1 НАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ

1.1 Основные сведения о направленных графах. Линейные графы. Основные определения и понятия

История математики дает представление о различных способах и правилах выполнения необходимых математических действий. В древние века эти правила излагались в довольно громоздкой словесной форме, не всегда содержали общие рекомендации, а чаще всего описывали решение одной какой-либо конкретной задачи. Начиная с XVI века, появляется абстрактная математическая символика, при помощи которой правила выполнения математических действий представляются в виде соответствующих формул, обладающих общностью для различных задач данного класса. Формульная символика, развиваясь и совершенствуясь, широко применяется и в настоящее время.

Появившийся сравнительно недавно метод графов основан не на буквенной, а на рисуночной форме записи математических действий. Взаимосвязь между величинами или любую систему уравнений можно изобразить в виде специального рисунка, называемого графом. Оказалось, что из такого рисунка гораздо проще получать всевозможные схемные или системные функции, чем путем решения системы уравнений, представленной в символьной (алгебраической) или в матричной формах.

Граф представляет собой совокупность точек, называемых вершинами или *узлами*, и линий, соединяющих некоторые из этих точек. Линии называются ребрами или *ветвями* графа. Если ветвям приписаны направления, граф называется *направленным*, в противном случае – *ненаправленным*. Граф, отражающий систему линейных уравнений, называется *линейным*. В настоящем разделе мы будем рассматривать только линейные графы.

На рис.1.1 приведен типовой граф, содержащий пять узлов и девять ветвей. Каждый *i*-й узел характеризуется величиной, называемой *узловым сигналом* x_i. Отдельные узлы соединены имеющими направление ветвями. Каждая ветвь характеризуется коэффициентом t_{jk}, называемым *передачей*

ветви. Первый индекс соответствует номеру узла, в котором ветвь начинается, а второй – номеру узла, в котором ветвь заканчивается.

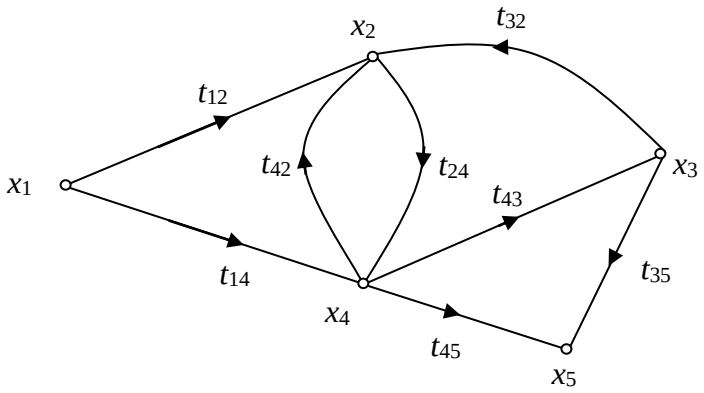


Рисунок1.1

Условимся, что каждая ветвь с передачей t_{jk} переносит информацию от узла x_j к узлу x_k, причем эта информация равна узловому сигналу x_j, умноженному на передачу ветви $t_{jk.}$.

На графе, приведенном на рис. 1.1, можно выделить три разновидности узлов. К узлу x_1 никакая ветвь не подходит, что свидетельствует о том, что сигнал не является функцией других сигналов, т.е. он является независимым. Такие узлы в дальнейшем будем называть *узлами-источниками.*

Узлы, с которыми связаны как подходящие, так и отходящие ветви, назовем просто узлами. Так, к узлу x_2 подходят ветви с передачами t_{12}, t_{32} и t_{42} соответственно от узлов x_1, x_3 и x_4 , и от него уходит ветвь t_{24} к узлу x_4. Условимся, что в этом и в подобных случаях сигнал в узле определяется как сумма информаций, поступающих в узел по всем подходящим к нему ветвям, тогда как выходящие из узла ветви никак на его сигнал не влияют:

$$x_2 = t_{12}x_1 + t_{42}x_4 + t_{32}x_3 .$$

Таким же образом сигнал в четвертом узле определяется лишь суммой информаций, поступающих по входящим в него ветвям:

$$x_4 = t_{14}x_1 + t_{24}x_2 .$$

К узлу x_3 подходит только одна ветвь t_{43} от четвертого узла:

$$x_3 = t_{43}x_4 .$$

К узлу x_5 подходят две ветви с передачами t_{35} и t_{45}, и от него не отходит ни одной ветви. Такие узлы будем называть *узлами-стоками*.

$$x_5 = t_{35} + t_{45}.$$

Для дальнейшего изучения графов введем следующие понятия: *путь, величина пути, контур, величина контура*.

Путем между двумя различными узлами называется непрерывная последовательность одинаково направленных ветвей, в которой каждый узел встречается не более одного раза. Так, путем от узла x_1 к узлу x_5 в графе на рис.1.1 является любая из последовательностей $t_{14} - t_{45}$; $t_{14} - t_{43} - t_{35}$; $t_{12} - t_{24} - t_{45}$; $t_{12} - t_{24} - t_{43} - t_{35}$. Не является путем последовательность $t_{12} - t_{42} - t_{45}$, так как в ней одна из ветвей (t_{42}) направлена в обратную сторону. Путем не является также последовательность $t_{14} - t_{42} - t_{24} - t_{45}$, так как в ней узел x_4 встречается дважды.

Передачей или величиной пути P_{jk} от узла x_j к узлу x_k является произведение передач ветвей, образующих путь. Так, указанные выше пути имеют следующие передачи:

$P_{15(1)}=t_{14}\,t_{45}$; $P_{15(2)}=t_{14}\,t_{43}\,t_{35}$; $P_{15(3)}=t_{12}\,t_{24}\,t_{45}$; $P_{15(4)}=t_{12}\,t_{24}\,t_{43}\,t_{35}$.

Если произведение сомножителей записывать в том же порядке, в каком следуют ветви, то, с учетом принятой выше индексации передач ветвей, первый индекс каждого последующего сомножителя будет равен второму индексу предшествующего. Первый индекс последовательности соответствует номеру узла, в котором путь начинается, а последний – номеру узла, в котором путь заканчивается.

Контуром называется замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в одном и том же узле. *Передачей или величиной контура* L называется произведение передач ветвей, образующих этот контур.

Так, в графе на рис.1.1 есть два контура с величинами $L_1=t_{24}t_{42}$ и $L_2=t_{24}t_{43}t_{32}$. Последовательность индексов здесь также будет упорядоченной,

если сомножители записывать в том порядке, в каком следуют ветви при обходе контура. Так как контур – это путь, начинающийся и заканчивающийся в одном и том же узле, первый индекс последовательности равен последнему. Такие последовательности называются замкнутыми. В противоположность контуру последовательность индексов передачи пути между двумя узлами будет разомкнутой.

На рис.1.2 показаны элементарные эквивалентные преобразования графов. Здесь передачи ветвей обозначены различными буквами без цифровых индексов. Приведенные рядом уравнения поясняют эти преобразования.

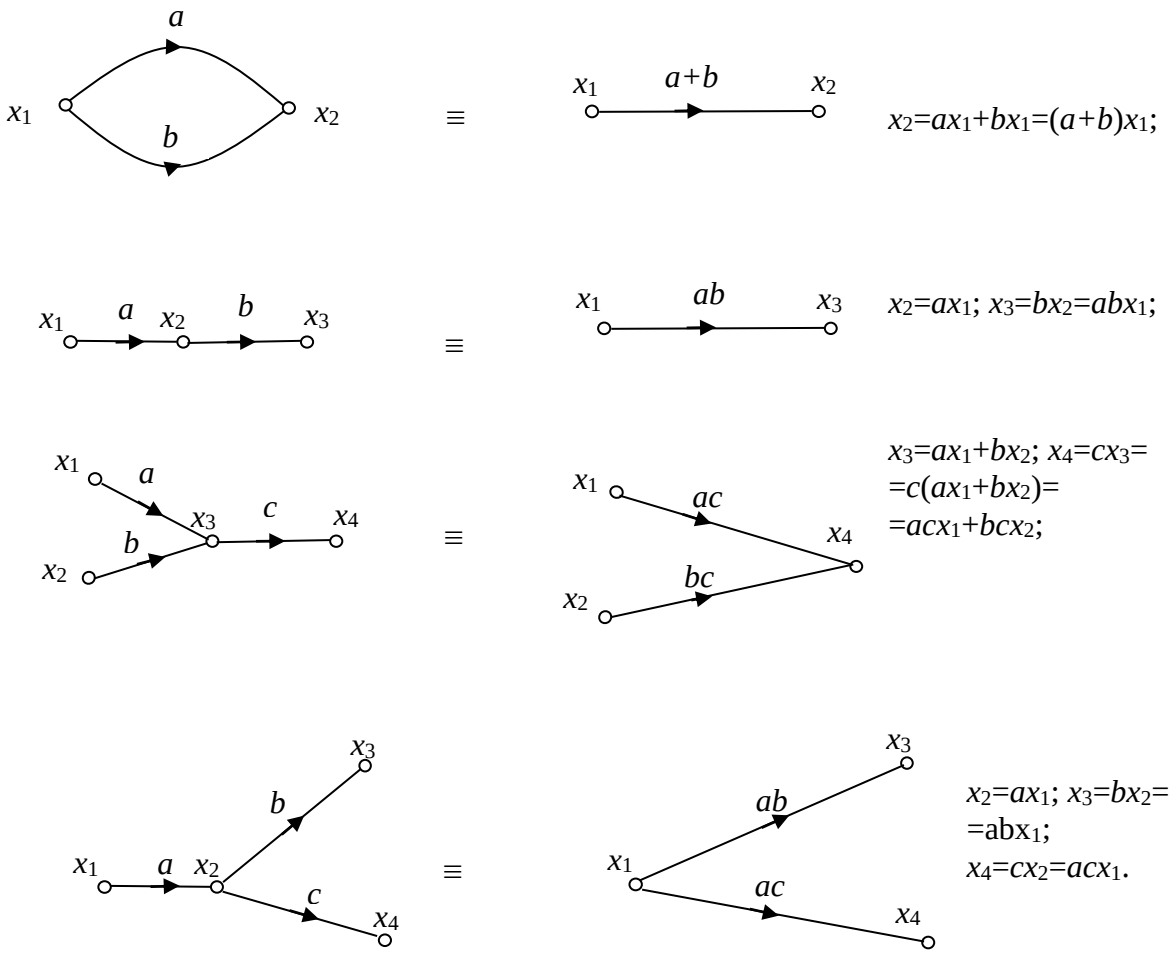


Рисунок 1.2

1.2 Запись уравнений электрической цепи в виде направленного графа. Графы простейших электрических схем

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из резистора с сопротивлением R, к которому приложено напряжение u (см. рис. 1.3). При этом в резисторе появляется ток, который по закону Ома определяется уравнением $i = \frac{1}{R}u$. Это уравнение в алгебраической форме представляет собой взаимосвязь между переменными u и i через параметр R, причем переменная u является аргументом, а переменная i – функцией. Это же состояние цепи можно описать и другим уравнением $u = iR$, где аргументом будет переменная i, а функцией – переменная u. Каждое из этих уравнений может быть записано в виде графа, узлами которого служат токи и напряжения, а передачи ветвей характеризуются соотношениями между этими переменными. Граф на рис.1.4,а соответствует первому уравнению, а на рис. 1.4,б – второму. Очевидно, что поменять местами аргумент и функцию в графе не сложнее, чем перейти от первого уравнения ко второму алгебраическим путем. Для этого нужно всего лишь заменить направление и передачу пути на обратные.

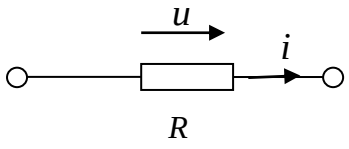


Рисунок 1.3

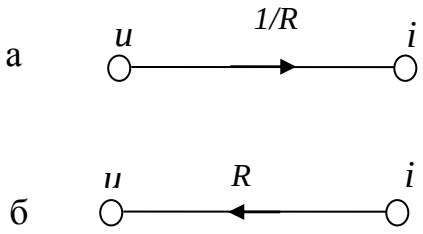
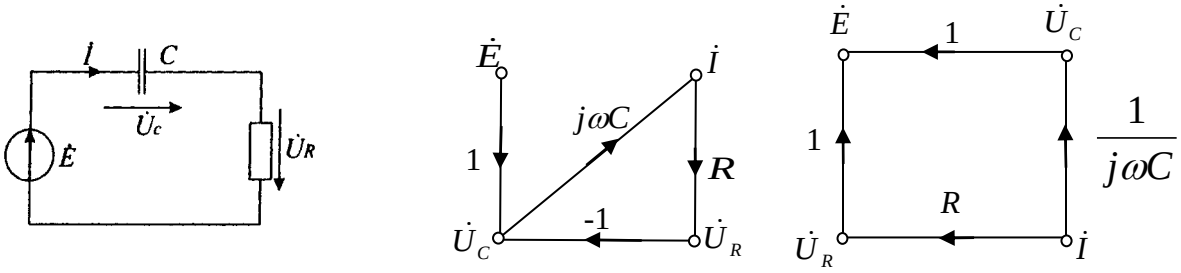


Рисунок 1.4

Усложним цепь, введя еще один элемент, например, конденсатор C, и будем считать, что в цепи действуют синусоидальные напряжения и токи (рис. 1.5,а).



а б в

Рисунок 1.5

Для этой схемы можно составить несколько вариантов независимых уравнений, используя второй закон Кирхгофа и закон Ома:

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= \dot{E} - \dot{U}_R; \\ \dot{I} &= j\omega C \cdot \dot{U}_C; \\ \dot{U}_R &= R \cdot \dot{I}, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{U}_C + \dot{U}_R; \\ \dot{U}_C &= \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}; \\ \dot{U}_R &= R \cdot \dot{I}\ . \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Условимся далее пользоваться законами Ома и Кирхгофа в их простейшем приложении:

- *закон Ома – для одной ветви, а не для их совокупности (ветвью условимся называть участок цепи, содержащий один элемент);*
- *первый закон Кирхгофа – для одного узла, а не для более сложной части схемы;*
- *второй закон Кирхгофа – для простейшего контура (ячейки), который не состоит из совокупности более простых контуров.*

Другими словами, будем избегать уравнений вида $\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}$, которые, хотя и являются правильными, не относятся к простейшим.

Так как в схеме действуют четыре переменных $\dot{E}, \dot{I}, \dot{U}_C$ и $\dot{U}_R$, то в графе будет четыре узла. На рис. 1.5,б и 1.5,в изображены графы, соответствующие системам независимых уравнений (1.1) и (1.2). Рассмотрим первый из них (рис.1.5,б). Узел $\dot{E}$ является источником, сигнал в нем не зависит от сигналов в других узлах. К узлу $\dot{U}_C$ подходят две ветви. В соответствии с принятыми выше правилами, сигнал в этом узле равен сумме информаций, приносимых этими ветвями: $\dot{U}_C = 1 \cdot \dot{E} - 1 \cdot \dot{U}_R$. Другими словами, узлу $\dot{U}_C$ соответствует первое уравнение системы (1.1). Выходящая из узла $\dot{U}_C$ ветвь на его сигнал, по определению, не влияет. К узлу $\dot{I}$ подходит лишь одна ветвь от узла $\dot{U}_C$, поэтому сигнал в узле $\dot{I}$ равен произведению сигнала в узле $\dot{U}_C$ на передачу ветви $j\omega C$, т.е. $\dot{I} = j\omega C \cdot \dot{U}_C$. Это уравнение отражает закон Ома для конденсатора и соответствует второму уравнению системы (1.1). Наконец, для узла $\dot{U}_R$ получим третье уравнение системы (1.1), отражающее закон Ома для резистора *R*, а именно, $\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$.

Как видим, каждому узлу графа соответствует один из элементарных законов электротехники, а граф на рис. 1.5,б является рисуночной записью системы уравнений (1.1), описывающей исследуемую цепь.

Обратим внимание на то, что в системе (1.1) имеется лишь одна независимая переменная – величина приложенной к цепи э.д.с. $\dot{E}$. На графе это отражено единственным узлом-источником $\dot{E}$. Очевидно, что если бы к цепи было приложено *n* независимых источников энергии, то граф содержал бы *n* узлов-источников.

Обычно уравнение можно разрешить относительно любой переменной, меняя местами функцию и аргумент, т.е. зависимые и независимые переменные. Подобно этому и граф может быть составлен так, что узлами-источниками будут не источники энергии, а какие-либо другие переменные. Так, на рис.1.5,в изображен второй вариант графа, соответствующий системе уравнений (1.2), отличающейся от системы (1.1)

лишь другой формой записи входящих в нее тех же трех уравнений. Здесь узлом-источником является ток $\dot{I}$.

Таким образом, число узлов-источников графа должно точно соответствовать числу независимых источников энергии, действующих в исследуемой цепи. Сами же узлы-источники не обязательно должны совпадать с фактическими источниками энергии, т.е. в качестве узла-источника может выступать любая переменная цепи.

1.3 Правила составления графов сложных электрических цепей

Для составления графа сложной цепи нет необходимости записывать предварительно систему уравнений в буквенном виде. Граф составляется непосредственно по рисунку схемы. Как уже указывалось выше, рекомендуется пользоваться законами электротехники в простейшем виде. Именно в этом случае граф составляется легко, будет наиболее простым и удобным для последующего анализа, уменьшается вероятность внесения ошибок в процессе его составления. Стремление же усложнить применение законов Ома и Кирхгофа повлечет за собой нерациональное усложнение графа.

При составлении графа сложной цепи целесообразно руководствоваться следующими правилами.

1 Предварительно обозначить на схеме произвольно выбранные направления токов в ветвях и падения напряжений на них.

2 Начинать построение графа можно с узла, принадлежащего любой переменной. К этому узлу подводят ветви от других узлов в соответствии с рассматриваемым законом Ома или Кирхгофа. Появившиеся при этом новые узлы пока что будут узлами-источниками.

3 Каждый из появившихся узлов-источников следует превратить в обычный узел, определяя соответствующую ему переменную. Таким образом, граф постепенно достраивается.

4 При определении вновь появляющихся узлов-источников желательно чередовать законы Ома и Кирхгофа. Так, если вновь

появившийся узел возник в результате применения какого-либо из законов Кирхгофа, его следует определить уже по закону Ома и наоборот.

5 Уравнения, входящие в систему, должны быть независимыми и не должны повторяться, иначе система будет неразрешимой. Поэтому при составлении графа нужно следить, чтобы каждое уравнение (по закону Ома для данной ветви, по первому закону Кирхгофа для данного узла или по второму закону Кирхгофа для данного контура) использовалось лишь один раз.

6 Каждая переменная (напряжение или ток) может быть определена при помощи всего лишь двух законов – Ома и одного из законов Кирхгофа. Если один из этих законов уже был использован, следует применять оставшийся неиспользованным другой. Если же не употреблялся ни один из двух законов, применяют любой из них. А если были использованы оба закона, определить переменную в таком узле уже нельзя – узел останется узлом-источником.

7 Составление графа считается законченным, если в его узлах окажутся все переменные схемы, а число узлов-источников, переменные в которых уже не удается определить, будет точно равно числу независимых источников энергии, действующих в цепи.

Рассмотрим применение этих правил на конкретной схеме, приведенной на рис.1.6.

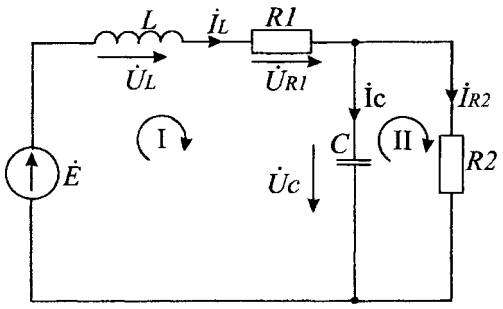


Рисунок 1.6

В соответствии с правилом 1 обозначим на схеме направления токов $\dot{I}_L, \dot{I}_C$ и $\dot{I}_{R2}$ (при помощи стрелок на ветвях) и падения напряжений на элементах $\dot{U}_L, \dot{U}_{R1}, \dot{U}_C$ (при помощи стрелок рядом с изображением

элемента). Вместе с источником приложенного напряжения $\dot{E}$ в цепи действует семь переменных, следовательно, правильно составленный граф должен иметь семь узлов.

Начинаем составление графа с любого узла, например, с узла $\dot{U}_C$. Это напряжение можно определить либо по закону Ома для конденсатора *C*:

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C,$$

либо по второму закону Кирхгофа для контура, образованного ветвями *L*, *R1*,*C* и источником энергии $\dot{E}$:

$$\dot{U}_C = \dot{E} - \dot{U}_L - \dot{U}_{R1}.$$

Применить можно любой из них. Воспользуемся законом Ома и достроим граф, введя новый узел $\dot{I}_C$ и ветвь с передачей $\frac{1}{j\omega C}$ (рис.1.7, а):

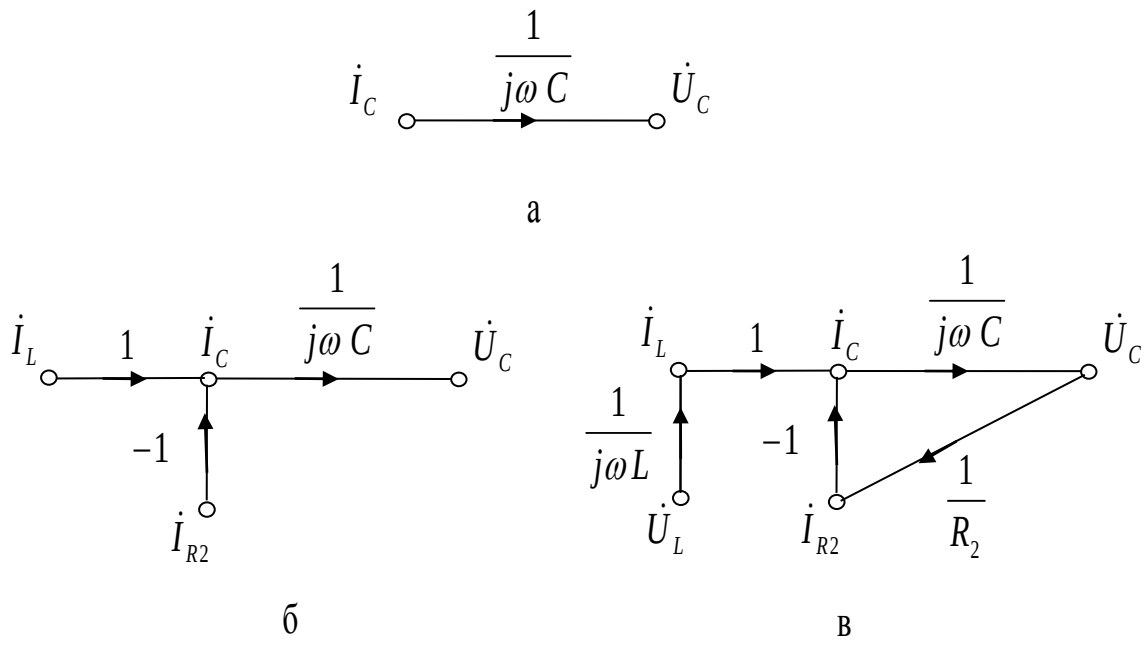


Рисунок 1.7

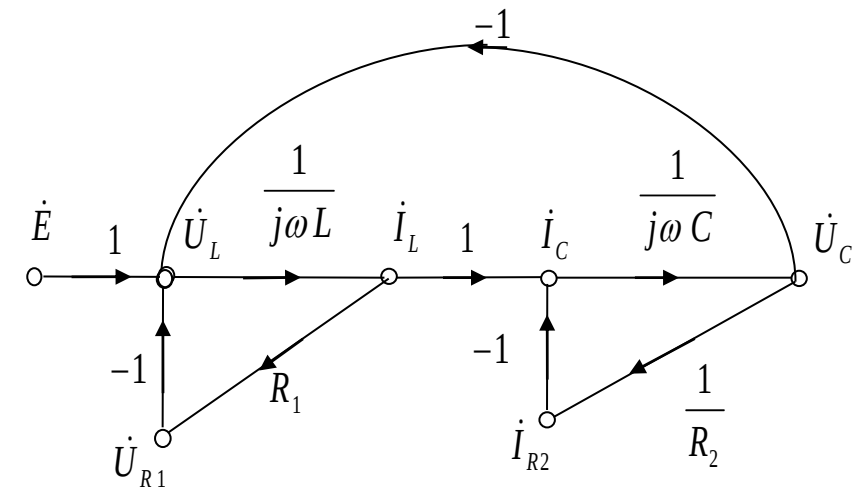
Появившийся узел-источник $\dot{I}_C$ нужно превратить в обычный узел, используя либо закон Ома для конденсатора *C*, либо первый закон Кирхгофа для того узла схемы, с которым связаны элементы *R*1, *C* и *R*2. Но закон Ома для конденсатора уже был использован ранее. Кроме того,

правилом 4 рекомендуется чередовать законы Ома и Кирхгофа. Так как узел $\dot{I}_C$ появился благодаря закону Ома, соответствующий ему ток желательно определить по первому закону Кирхгофа. Итак, поскольку $\dot{I}_C = \dot{I}_L - \dot{I}_{R2}$, вносим в граф два новых узла $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_{R2}$ и соединяем их ветвями с узлом $\dot{I}_C$, как показано на рис.1.7, б. Узел-источник $\dot{I}_C$ превратился в обычный узел, но появились два новых узла-источника: $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_{R2}$. Их желательно определить уже при помощи закона Ома, поскольку появились они благодаря закону Кирхгофа. Для узла $\dot{I}_L$ есть либо уравнение $\dot{I}_L = \dfrac{\dot{U}_L}{j\omega L}$, либо уравнение $\dot{I}_L = \dfrac{\dot{U}_{R1}}{R_1}$, так как этот ток протекает в двух элементах. Использовать можно любое из этих уравнений, допустим, первое из них. Для узла же $\dot{I}_{R2}$ существует лишь один вариант: $\dot{I}_{R2} = \dfrac{\dot{U}_C}{R_2}$. В результате граф примет вид, показанный на рис.1.7,в. Переменная $\dot{U}_C$, входящая в уравнение для $\dot{I}_{R2}$, на графе уже обозначена своим узлом. Таким образом, появился лишь один новый узел-источник $\dot{U}_L$, и это напряжение следует найти по второму закону Кирхгофа для контура I: $\dot{U}_L = \dot{E} - \dot{U}_C - \dot{U}_{R1}$.

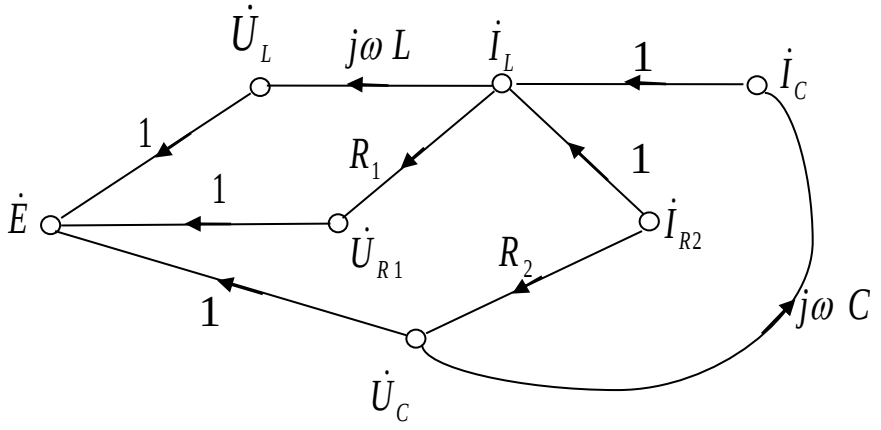
После этого снова появятся два узла-источника. Напряжение $\dot{U}_{R1}$ находим по ещё неиспользованному закону Ома для резистора $R1$: $\dot{U}_{R1} = R_1 \cdot \dot{I}_L$. Определить узел-источник $\dot{E}$ нет возможности, так как второй закон Кирхгофа уже был использован, а закон Ома для ветви $\dot{E}$ лишен смысла, поскольку источник приложенного напряжения предполагается идеальным с нулевым внутренним сопротивлением (рис.1.8,а).

Проверка по пункту 7 правил подтверждает правильность составления графа: в нем точно семь узлов – по числу и по значению действующих в нем переменных, и всего один узел-источник — к цепи действительно приложен лишь один источник энергии.

Как уже упоминалось, узлом-источником может быть не только переменная, соответствующая реально существующему источнику энергии. Достаточно, например, начать построение графа с узла $\dot{E}$, применив второй закон Кирхгофа: $\dot{E} = \dot{U}_L + \dot{U}_{R1} + \dot{U}_C$, чтобы узел $\dot{E}$ превратился в узел-сток. В результате получим новый вариант графа (рис.1.8,б).



а



б

Рисунок 1.8

Здесь для трех появившихся узлов-источников используем соответствующие уравнения по закону Ома: $\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I}_L$, $\dot{U}_{R1} = R_1 \cdot \dot{I}_L$, $\dot{U}_C = R_2 \cdot \dot{I}_{R2}$, что приводит к появлению новых узлов-источников $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_{R2}$.

(Для определения напряжения $\dot{U}_C$ можно было воспользоваться и уравнением $\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C$). Для вновь появившихся узлов-источников $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_{R2}$ следует применить первый закон Кирхгофа. С его помощью находим, например, $\dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_{R2}$. А вот определить $\dot{I}_{R2}$ уже не удается — и закон Ома для элемента R_2, и первый закон Кирхгофа для единственного независимого узла схемы, где сходятся эти три тока, уже были использованы. Этот узел так теперь и останется узлом-источником и заменит в этом качестве узел $\dot{E}$. Что же касается узла $\dot{I}_C$, то для его определения есть ещё неиспользованный закон Ома: $\dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{U}_C$. В новом варианте графа те же семь узлов, но они по-иному соединены ветвями. Узел-источник по-прежнему один, хотя принадлежащая ему переменная $\dot{I}_{R2}$ и не является реальным источником энергии.

1.4 Общая формула передачи графа

Выясним теперь, как из полученных графов определить какую-либо переменную, действующую в схеме, показанной на рис. 1.6. Для этого сначала рассмотрим графы, приведенные на рис. 1.8, с позиций определений, принятых в подразделе 1.1.

К любому узлу графа, включающему в себя зависимую переменную, можно прийти, двигаясь от узла-источника по ветвям в направлении стрелок. Если при этом не заходить дважды в один и тот же узел, то такая последовательность ветвей будет называться *путем передачи*. Таким образом, *путь передачи – это непересекающаяся последовательность ветвей в направлении, указанном стрелками, связывающая узел-источник с любым другим узлом графа.* В одном графе может существовать один или несколько путей передачи к одному и тому же узлу. Например, в графе, изображенном на рис 1.8,а, попасть в узел $\dot{U}_{R1}$, начиная двигаться от узла-источника $\dot{E}$, можно только, следуя по ветвям через узлы $\dot{U}_L, \dot{I}_L, \dot{U}_{R1}$. В

графе на рис.1.8,б от узла-источника $\dot{I}_{R2}$ в узел $\dot{E}$ можно попасть пятью способами: через узлы $\dot{I}_L$, $\dot{U}_L$, через узлы $\dot{I}_L$, $\dot{U}_{R1}$, через узел $\dot{U}_C$ и через узлы $\dot{U}_C$, $\dot{I}_C$, $\dot{I}_L$ и далее либо через узел $\dot{U}_L$, либо через узел $\dot{U}_{R1}$.

Любой путь передачи характеризуется величиной *P*, которая представляет собой произведение передач ветвей, входящих в этот путь. Так, в графе на рис.1.8,а путь передачи к узлу $\dot{I}_{R2}$ имеет величину $P = \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{R_2}$. В графе на рис. 1.8,б рассмотренные выше пути передачи имеют следующие величины: $P_1 = j\omega L$; $P_2 = R_1$; $P_3 = R_2$; $P_4 = R_2 \cdot j\omega C \cdot j\omega L$ и $P_5 = R_2 \cdot j\omega C \cdot R_1$.

В графе, как уже упоминалось в подразделе 1.1, могут существовать также замкнутые непересекающиеся последовательности ветвей с одинаковой ориентацией стрелок – контуры.

В графе на рис.1.8,а имеется три контура, образованных ветвями, проходящими через узлы $\dot{U}_L, \dot{I}_L, \dot{U}_{R1}$; $\dot{I}_C, \dot{U}_C, \dot{I}_{R2}$; $\dot{U}_L, \dot{I}_L, \dot{I}_C, \dot{U}_C$. Они характеризуются величинами: $L_1 = -\frac{R_1}{j\omega L}$; $L_2 = -\frac{1}{j\omega C R_2}$; $L_3 = -\frac{1}{j\omega C j\omega L}$.

А вот в графе на рис.1.8,б нет ни одного контура.

Отметим две важные особенности контуров.

- *Величина передачи контура не имеет размерности.* Это – непременное условие правильно составленного графа. Если окажется, что какой-либо контур имеет размерную величину, это будет говорить о том, что при составлении графа была допущена ошибка.
- *В рационально составленном графе линейной цепи величины передач всех контуров имеют отрицательный знак.*

Нарушение второго требования еще не говорит о допущенной ошибке. Положительные контуры могут появиться и в правильно составленном графе линейной цепи, но это лишь усложняет граф и свидетельствует о том, что при его составлении не использовались рекомендации, изложенные в подразделе 1.1, о применении законов Ома и

Кирхгофа в простейшем приложении. Если же составляется граф нелинейной цепи, где какие-либо элементы имеют отрицательные сопротивления или проводимости, появление положительных контуров вполне возможно. Но и в этом случае они не должны иметь размерности.

Вернемся теперь к вопросу об определении любой неизвестной переменной из графа. Для этой цели автором метода С. Мэзоном [1] была предложена общая формула передачи графа, в литературе часто называемая «формулой Мэзона»:

$$T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}. \qquad (1.3)$$

Под передачей T подразумевается отношение определяемой переменной x_i *к переменной* x_0*, находящейся в узле-источнике*:

$$T = \frac{x_i}{x_0}, \qquad (1.4)$$

откуда искомая переменная $x_i = x_0 T$.

Передачу T следует определять по формуле (1.3). В знаменателе этой формулы находится *определитель графа* Δ.

Определитель графа Δ находится по формуле (1.5):

$$\Delta = \left[(1 - L_1)(1 - L_2)\ldots(1 - L_n)\right]^*, \qquad (1.5)$$

где $L_1, L_2, \ldots L_n$ – величины всех контуров графа. Звездочка над прямыми скобками указывает на то, что после перемножения биномов вида $(1-L_i)$ из полученных слагаемых следует исключить те, которые содержат произведения контуров, касающихся друг друга хотя бы в одном узле. Таким образом, выражение (1.5) можно записать в виде (1.6):

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + \ldots + L_n) + (L_1 L_2 + L_1 L_3 + \ldots)^* - (L_1 L_2 L_5 + L_2 L_4 L_7 + \ldots)^* + \ldots \qquad (1.6)$$

Знак каждого слагаемого определяется множителем $(-1)^k$, где k — количество контуров в данном произведении.

Таким образом, *определитель графа равен алгебраической сумме слагаемых, включающей единицу, величины всех контуров по одному и все возможные произведения некасающихся контуров по два, по три и т.д.*

Условимся для простоты величину пути передачи P_k в дальнейшем именовать просто путем, а величину контура L – просто контуром.

В числителе формулы Мэзона находится сумма произведений путей P_k на их алгебраические дополнения Δ_k.

Алгебраическим дополнением пути Δ_k *служит определитель графа* Δ*, из которого следует исключить все слагаемые, содержащие контуры, которых путь коснулся хотя бы в одном узле.*

Отметим преимущество метода графов по сравнению с классическими или матричными методами. Поскольку в рационально составленном графе все контуры имеют отрицательные величины, при перемножении биномов не могут появиться отрицательные слагаемые. А при нахождении определителя системы уравнений или определителя матрицы отрицательные слагаемые появляются в большом количестве, затем они сокращаются с равными по модулю положительными слагаемыми, что сильно загромождает процесс нахождения определителя.

Отметим еще раз, что формула Мэзона справедлива лишь в том случае, когда переменная в знаменателе выражения (1.4) является именно узлом-источником графа. Так как в схеме на рис.1.6 действует источник энергии $\dot{E}$, и все прочие переменные зависят именно от него, необходимо, чтобы в графе независимая переменная $\dot{E}$ находилась именно в узле-источнике. Поэтому граф на рис.1.8,б не подойдет для определения зависимых переменных цепи (в нем узлом-источником является переменная $\dot{I}_{R2}$). Как им воспользоваться, если он уже составлен, будет рассмотрено ниже в подразделе 1.6.

1.5 Примеры анализа цепей при помощи графов

Покажем, как при помощи формулы Мэзона определить любую переменную для схемы на рис.1.6, используя граф на рис.1.8,а.

Пусть нам требуется найти $\dot{U}_{R1}$ в зависимости от $\dot{E}$, то есть в выражении (1.4) $x_i = \dot{U}_{R1}$, $x_0 = \dot{E}$. В этом случае $\dot{U}_{R1} = \dfrac{\dot{E}\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$. Готовый

ответ получают непосредственно по виду графа. При этом не требуется никаких промежуточных выкладок.

Рекомендуется начинать с определения знаменателя. Первым его слагаемым является единица, затем идут все контуры по одному. В соответствии с формулой (1.6) они должны вычитаться, но, поскольку их величины отрицательны, то каждый контур входит в знаменатель со знаком «плюс». Контуры для этого графа уже были найдены ранее. Записывая их в знаменатель, желательно под каждым из них в скобках указывать его номер. После того, как записаны все три контура, проверяем все возможные пары и выявляем те из них, которые на рисунке друг друга не касаются. В данном графе не касаются друг друга только первый и второй контуры, их произведение и добавляем в знаменатель. В единственном произведении из трех контуров $L_1L_2L_3$ есть контуры, касающиеся друг друга, поэтому это сочетание в знаменатель не попадает. Таким образом, знаменатель записывают без труда непосредственно по виду графа:

$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{E}\sum P_k\Delta_k}{1+\underset{(1)}{\frac{R_1}{j\omega L}}+\underset{(2)}{\frac{1}{j\omega CR_2}}+\underset{(3)}{\frac{1}{j\omega Cj\omega L}}+\underset{(1,2)}{\frac{R_1}{j\omega CR_2\, j\omega L}}}. \qquad (1.7)$$

Переходя к числителю, замечаем, что к искомому узлу $\dot{U}_{R1}$ есть только один путь $P_1 = \frac{R_1}{j\omega L}$. Он касается первого и третьего контуров. Следовательно, алгебраическим дополнением этого пути будет уже найденный определитель, из которого удалены слагаемые, содержащие первый и третий контуры. Остается сумма, состоящая из единицы и второго контура: $\Delta_1 = 1 + \frac{1}{j\omega CR_2}$.

Подставив выражения для P_1 и Δ_1 в числитель выражения (1.7), окончательно имеем:

$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{E}\dfrac{R_1}{j\omega L}\left(1+\dfrac{1}{j\omega CR_2}\right)}{1+\dfrac{R_1}{j\omega L}+\dfrac{1}{j\omega CR_2}+\dfrac{1}{j\omega Cj\omega L}+\dfrac{R_1}{j\omega CR_2\, j\omega L}}. \qquad (1.8)$$

При определении любой другой переменной знаменатель (определитель графа) не изменится, изменится лишь числитель. Так, при определении, скажем, $\dot{I}_C$ единственный путь передачи будет иметь вид $P = \dfrac{1}{j\omega L}$. Этот путь коснулся всех трех контуров, следовательно, из определителя следует удалить все слагаемые, кроме единицы, которая и будет алгебраическим дополнением пути. Поэтому

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}\dfrac{1}{j\omega L}}{\Delta},$$

где Δ – определитель графа, т.е. знаменатель выражения (1.8).

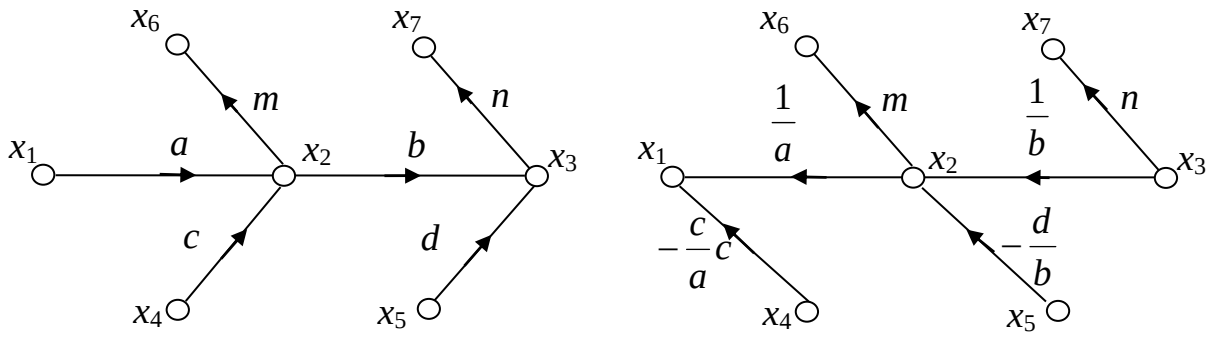
1.6 Инверсия графа

Этим термином обозначается *изменение направления ветвей какого-либо пути передачи или отдельно взятого контура*.

Инверсия простейшего графа для схемы, приведенной на рис. 1.3, уже была рассмотрена в подразделе 1.1. В уравнениях $i = \dfrac{1}{R}u$ и $u = Ri$ каждая переменная выступает в первом случае в виде аргумента (независимой переменной), во втором – в виде функции (зависимой переменной). В графах на рис.1.4,а и 1.4,б это выражалось изменением направления единственной ветви графа и ее передачи на обратные. При инверсии ветви узел-источник превращается в зависимый узел, и наоборот.

Рассмотрим общий случай разветвленного графа (рис.1.9,а) и установим общие правила инверсии.

Выберем, например, путь $P = ab$ от узла-источника x_1 к узлу x_3 и запишем уравнения для всех узлов этого пути: x_1 – независимая переменная; $x_2 = ax_1+cx_4$; $x_3=bx_2+dx_5$. Как уже отмечалось в подразделе 1.1, выходящие из узлов x_2 и x_3 ветви (в данном случае m и n) не влияют на значения переменных, находящихся в этих узлах.



а б

Рисунок 1.9

Инверсия каждой ветви равносильна решению приведенных выше уравнений относительно других переменных. Сделав такие преобразования, получим:

$$x_1 = \frac{1}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_4;\ x_2 = \frac{1}{b}x_3 - \frac{d}{b}x_5.$$

Сохраняя расположение узлов, составим по преобразованным уравнениям новый граф (рис.1.9,б) и, сравнивая его с исходным, отметим появившиеся изменения и сформулируем их в виде правил инверсии.

1 Направления и передачи ветвей инверсируемого пути изменяются на обратные.

2 Стоки ветвей, входящих в узлы инверсируемого пути, переносятся вместе со стоками инверсируемых ветвей в другие узлы этого пути (так, сток ветви с переносится из узла x_2 в узел x_1 вместе со стоком инверсируемой ветви а).

3 Передачи переносимых ветвей следует разделить на передачи соответствующих инверсируемых ветвей и изменить знак на

противоположный (так, ветвь, входившая в узел x_2 от узла x_4 с передачей c, будет теперь входить в узел x_1 с передачей $-\frac{c}{a}$).

4 Ветви, выходящие из узлов инверсируемого пути, но не принадлежащие этому пути, ни своего расположения, ни своих передач не изменяют (ветви m и n).

Обратим внимание на важный факт: *узел, в котором заканчивается путь, выбранный для инверсии, всегда после инверсии превращается в узел-источник.* Во-первых, инверсируемая ветвь, заканчивающаяся в этом узле, уже не входит в него, а из него выходит, а во-вторых, из этого узла переносятся в другой узел все входившие в него ветви со стороны других узлов.

Кроме того, справедливы следующие два правила:

5 Инверсировать можно только путь передачи (т.е. последовательность ветвей, начинающуюся в узле-источнике).

6 Инверсировать можно любой контур графа.

Проверим справедливость правила 5. Попытаемся инверсировать в графе на рис.1.9,а лишь одну ветвь *b* (рис.1.10).

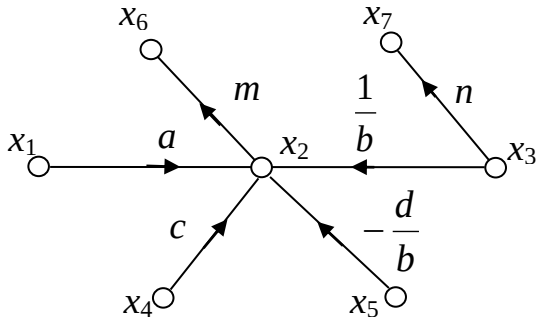


Рисунок 1.10

Из полученного графа найдем уравнение для переменной x_2:

$$x_2 = ax_1 + \frac{1}{b}x_3 + cx_4 - \frac{d}{b}x_5.$$

Это уравнение противоречит как исходному уравнению $x_2 = ax_1 + cx_4$, так и уравнению для инверсированного ранее графа на рис. 1.9,б:

$x_2 = \frac{1}{b} x_3 - \frac{d}{b} x_5$. Ошибка в действиях по выполнению инверсии объясняется тем, что, при сохранении для переменной x_2 зависимости от переменных x_1 и x_4, ей была «навязана» зависимость от двух других переменных — x_3 и x_5, чего в исходном графе нет, или же, при добавлении зависимости от узлов x_3 и x_5, была сохранена ранее имевшаяся зависимость от узлов x_1 и x_4. Чтобы исправить положение, нужно инверсировать также и ветвь a (или c) и тем самым избавиться от влияния переменных x_1 и x_4 на переменную x_2. Если бы переменная x_1 (или x_4) в исходном графе тоже была зависимой, следовало бы инверсировать и предыдущую ветвь, входящую в узел x_1 (или в x_4) и так делать до тех пор, пока не пришли бы либо к узлу-источнику, сигнал в котором до инверсии был независимым, либо к узлу, с которого была начата инверсия, так как он уже превратился в узел-источник.

Для проверки справедливости правила 6 проинверсируем какой-либо контур графа на рис.1.8,а, например, L_3. В полученном после инверсии графе (рис.1.11) контуров стало четыре:

$$L_1 = -\frac{R_1}{R_2};\ L_2 = -j\omega C R_1;\ L_3 = -j\omega C j\omega L;\ L_4 = -\frac{j\omega L}{R_2}.$$

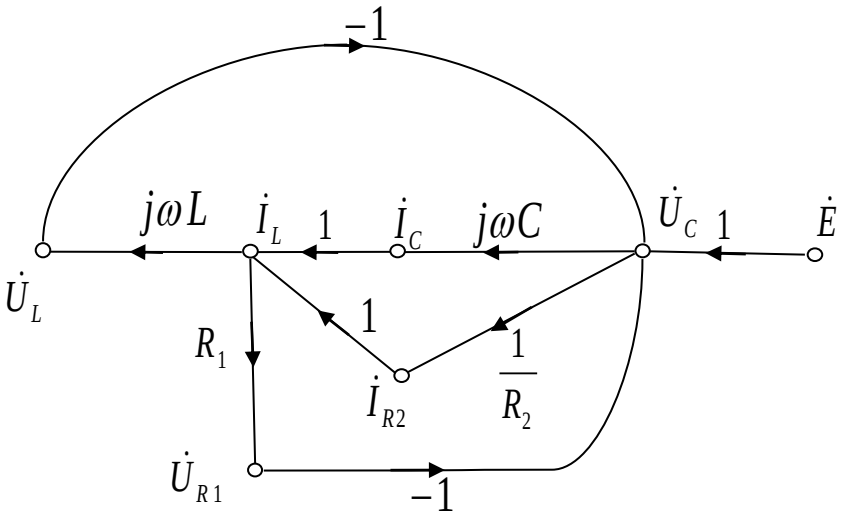


Рисунок 1.11

Убеждаемся, что все они не имеют размерности. Все контуры друг друга касаются (проходят через одни и те же два узла $\dot{I}_L$ и $\dot{U}_C$), следовательно, определитель не будет содержать никаких произведений контуров. Найдем снова переменную $\dot{U}_{R1}$. Путей передачи от $\dot{E}$ к $\dot{U}_{R1}$ теперь уже два – через узел $\dot{I}_{R2}$ $(P_1 = \frac{R_1}{R_2})$ и через узел $\dot{I}_C$ $(P_2 = j\omega CR_1)$. Оба они касаются всех четырех контуров, следовательно, их алгебраические дополнения равны единице. Окончательно имеем

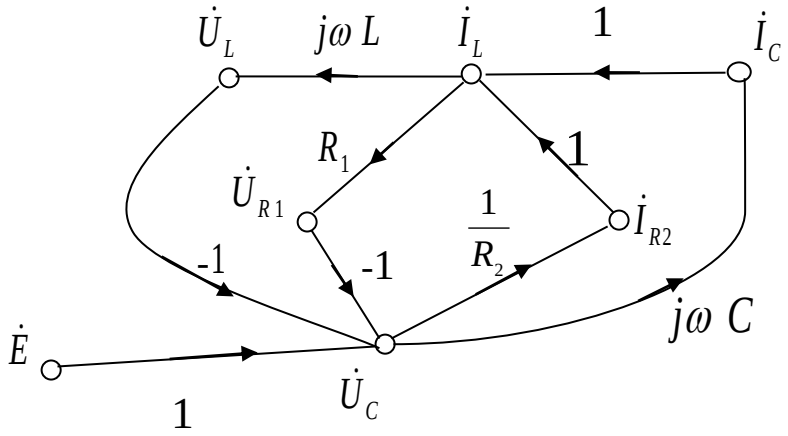
$$\dot{U}_{R1} = \frac{\dot{E}(j\omega CR_1 + \frac{R_1}{R_2})}{1 + \frac{R_1}{R_2} + j\omega CR_1 + j\omega Cj\omega L + \frac{j\omega L}{R_2}}. \qquad (1.9)$$

(1) (2) (3) (4)

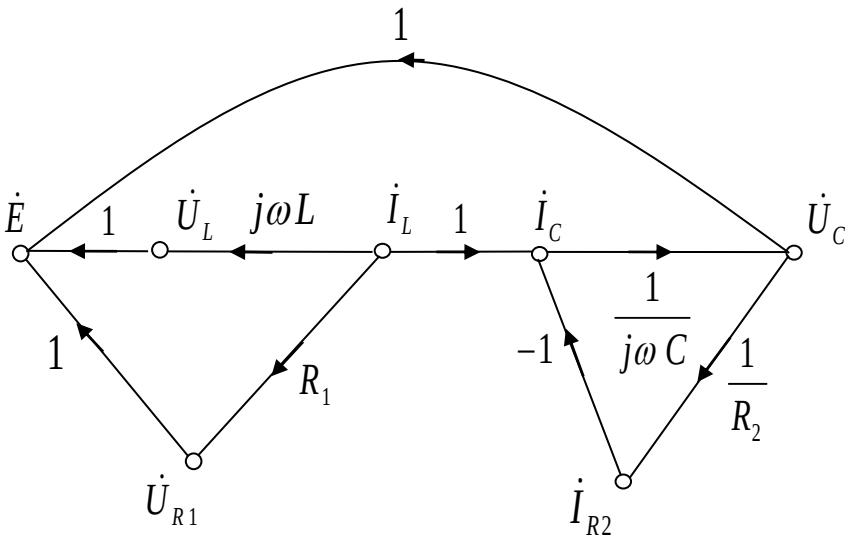
Внешне ответ отличается от полученного в подразделе 1.4 выражения (1.8), но легко убедиться, что оба выражения идентичны, для чего достаточно числитель и знаменатель выражения (1.8) умножить на $(j\omega C \cdot j\omega L)$.

То обстоятельство, что узел, в котором заканчивается путь передачи, выбранный для инверсии, превращается после инверсии в узел-источник, позволяет превратить в источник любой узел графа, а это понадобится для того, чтобы воспользоваться формулой Мэзона для тех графов, к которым она изначально неприменима. Так, для нахождения переменной $\dot{U}_{R1}$ в зависимости от $\dot{E}$ граф, приведенный на рис.1.8,б, не подходит, так как переменная $\dot{E}$ в этом графе не является узлом-источником. Чтобы превратить узел $\dot{E}$ в источник, выполним инверсию любого пути передачи от узла-источника $\dot{I}_{R2}$ к $\dot{E}$ из пяти имеющихся. Так как безразлично, какой путь выбрать, возьмем тот, который имеет поменьше ветвей, а именно путь $P_3 = R_2$ через узел $\dot{U}_C$. При его инверсии будут перенесены из узла $\dot{E}$ также

ветви, входившие в него от узлов $\dot{U}_L$ и $\dot{U}_{R1}$, в результате чего получим граф, изображенный на рис.1.12,а. Он, кстати, совпадает с графом на рис.1.11, и выражение для переменной $\dot{U}_{R1}$ из него уже было получено (выражение 1.9).



а



б

Рисунок 1.12

Инверсия может понадобиться и в случае нахождения иных функций схемы по уже составленному графу, например, для нахождения входного сопротивления $Z_{вх}$ цепи, приведенной на рис.1.6, с помощью графа,

приведенного на рис.1.8,а. Так как $Z_{вх} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_L}$, то для определения этой функции нужно превратить находящуюся в ее знаменателе переменную $\dot{I}_L$ в узел-источник графа. Инверсируя путь передачи от $\dot{E}$ к $\dot{I}_L$, получим новый вариант графа (рис.1.12,б), у которого узел $\dot{I}_L$ стал источником. Здесь всего один контур $L_1 = -\frac{1}{j\omega CR_2}$, следовательно, определитель $\Delta = 1 + \frac{1}{j\omega CR_2}$, а от источника $\dot{I}_L$ к $\dot{E}$ три пути, два из которых этого контура не касаются, и их дополнениями будет не измененный определитель Δ. Отсюда

$$Z_{вх} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_L} = \frac{j\omega L(1 + \frac{1}{j\omega CR_2}) + R_1(1 + \frac{1}{j\omega CR_2}) + \frac{1}{j\omega C}}{1 + \frac{1}{j\omega CR_2}} =$$

$$= j\omega L + R_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_2}}.$$

1.7 Составление графов четырехполюсников

Электронная цепь, как правило, содержит помимо пассивных линейных элементов активные и нелинейные элементы (полупроводниковые приборы, логические элементы, трансформаторы и т.п.). Большинство из них могут быть представлены в виде четырех- или трехполюсников. Всю исследуемую цепь, в свою очередь, можно представить, как последовательность таких четырехполюсников (рис. 1.13).

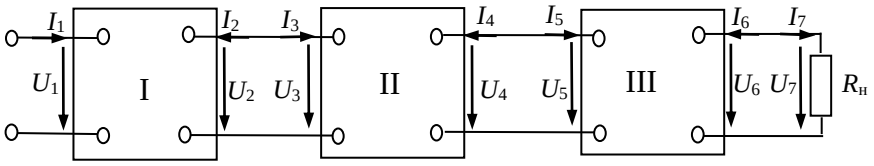


Рисунок 1.13

При анализе цепей методом графов удобно иметь готовые графы отдельных четырехполюсников, что значительно облегчает построение полного графа исследуемой цепи. Условимся токи и напряжения отдельных четырехполюсников всюду ориентировать так, как показано на рис. 1.13, т.е. *напряжения считать приложенными от верхнего вывода к нижнему, а токи – входящими в четырехполюсник.* Тогда граф всей цепи можно построить, используя стандартные графы входящих в нее элементов, располагая их в том же порядке, в каком расположены сами четырехполюсники.

При составлении графа цепи, изображенной на рис. 1.13, пользуются следующими правилами. Поскольку напряжения $\dot{U}_2 = \dot{U}_3; \dot{U}_4 = \dot{U}_5; \dot{U}_6 = \dot{U}_7$, соответствующие узлы графов соединяют ветвями с единичными передачами так, чтобы определить большинство узлов-источников. Аналогично соединяют токовые узлы ветвями с передачами, равными -1, в соответствии с уравнениями $\dot{I}_3 = -\dot{I}_2; \dot{I}_5 = -\dot{I}_4; \dot{I}_7 = -\dot{I}_6$. Граф цепи с соединяющими ветвями показан на рис. 1.14.

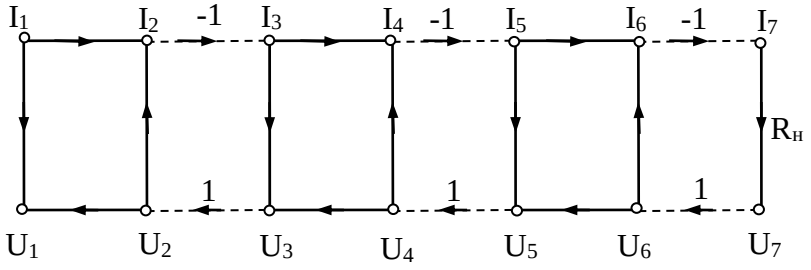


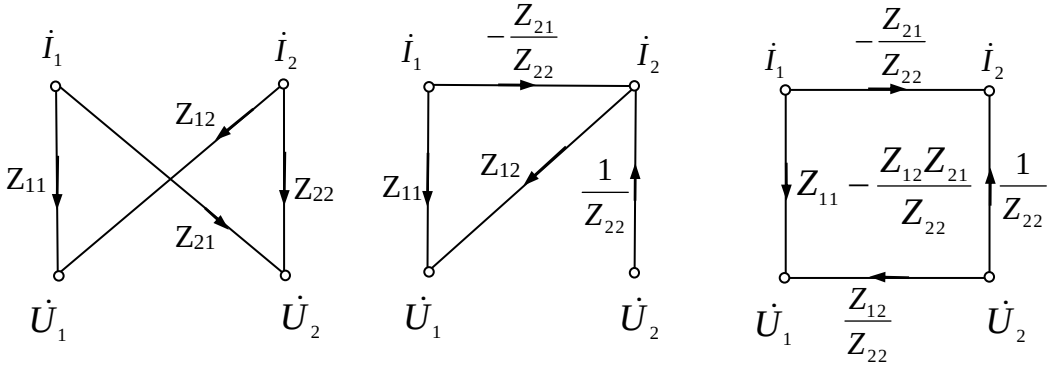
Рисунок 1.14

В теории четырехполюсников используются различные системы параметров. Запишем систему уравнений отдельного четырехполюсника через *Z*-параметры:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{aligned}. \qquad (1.10)$$

Напомним, что в линейных цепях $Z_{12} = Z_{21}$, а в нелинейных $Z_{12} \neq Z_{21}$.

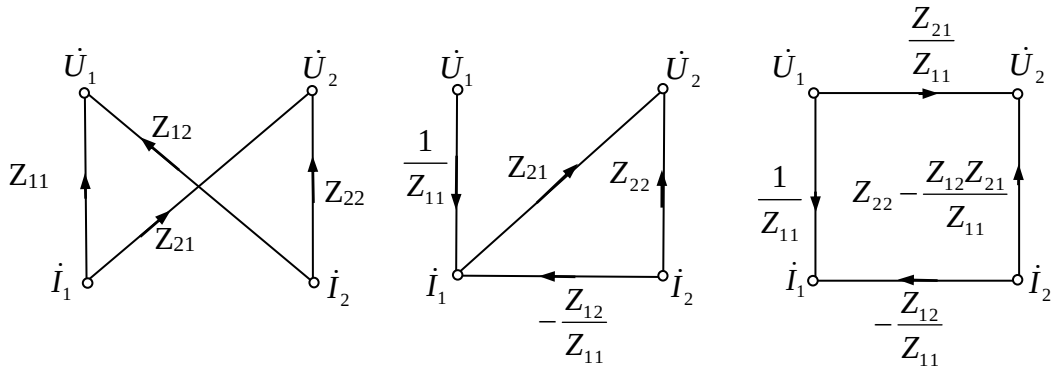
В системе (1.10) независимыми переменными являются токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Следовательно, в графе будут два узла-источника. Построим граф таким образом, чтобы токи располагались вверху, а напряжения внизу (рис. 1.15,а). *Желательно, чтобы узлы-источники в графе четырехполюсника располагались слева вверху и справа внизу.* Чтобы получить такой граф, проинверсируем граф на рис. 1.15,а таким образом, чтобы узел $\dot{U}_2$ стал источником (рис. 1.15,б). Теперь найдем пути передачи от узлов-источников $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2$ к узлу $\dot{U}_1$. В первом случае таких путей два: это параллельные ветви между узлами $\dot{I}_1$ и $\dot{U}_1$. Объединим их в одну с передачей $Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{Z1}}{Z_{22}}$. Во втором случае единственный путь от узла $\dot{U}_2$ к узлу $\dot{U}_1$ состоит из двух последовательных ветвей. Заменим его также одной ветвью с передачей $\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ (рис.1.15,в).



а б в

Рисунок 1.15

Другой вариант обобщенного графа четырехполюсника, полученный при помощи аналогичных преобразований, приведен на рис. 1.16.



а б в

Рисунок 1.16

1.7.1 Графы двухобмоточного трансформатора

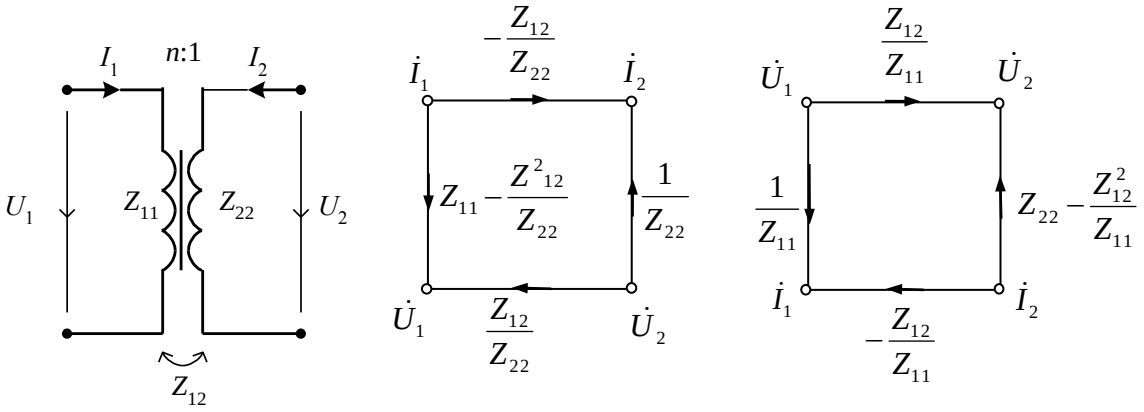
Двухобмоточный трансформатор с коэффициентом трансформации n представляет собой четырехполюсник (рис.1.17,а). Его можно описать системой уравнений (1.10), в которой

$Z_{11} = r_1 + j\omega L_{\sigma 1} + j\omega n^2 L$ – сопротивление первичной обмотки, состоящее из активной составляющей r_1 и составляющих, обусловленных индуктивностью рассеяния $L_{\sigma 1}$ и собственной индуктивности первичной обмотки n^2L;

$Z_{22} = r_2 + j\omega L_{\sigma 2} + j\omega L$ – сопротивление вторичной обмотки с аналогичными составляющими;

$Z_{12} = Z_{21} = j\omega M = j\omega nL$ – сопротивление взаимоиндукции между обмотками.

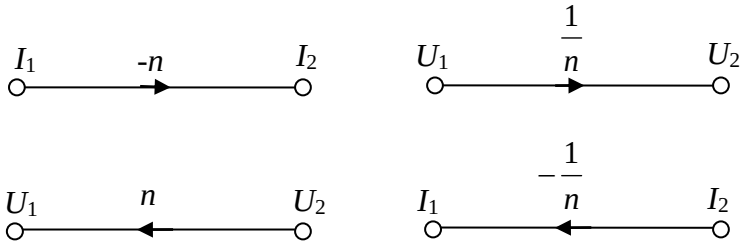
Воспользовавшись графами четырехполюсников, приведенными на рис. 1.15 и рис. 1.16, получим графы реального трансформатора (рис. 1.17,б и в).



а б в

Рисунок 1.17

Иногда для упрощения расчетов целесообразно пользоваться понятием «идеального трансформатора». У идеального трансформатора отсутствуют потери в меди, в стали и индуктивности рассеяния магнитного потока. Полагаем $r_1 = r_2 = 0;\ L_{\sigma 1} = L_{\sigma 2} = 0;\ Z_{11} = j\omega n^2 L \to \infty$, т.е. $L \to \infty$. Подставляя в графы на рис. 1.17,а и 1,17,б значения $Z_{11} = j\omega n^2 L$; $Z_{12} = Z_{21} = j\omega nL$; $Z_{22} = j\omega L$ при условии, что $L \to \infty$, получим графы идеального трансформатора (рис. 1.18).

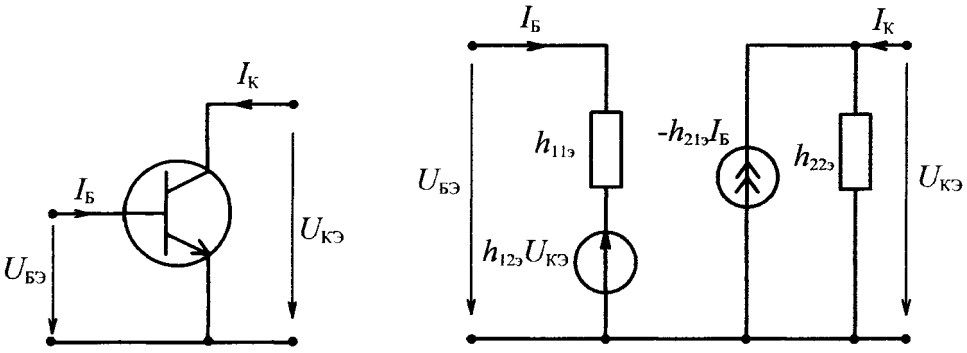


а б

Рисунок 1.18

1.7.2 Графы биполярного транзистора

Общепринятая эквивалентная схема биполярного транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером (рис. 1.19,а), приведена на рис. 1.19,б. (Тип транзистора роли не играет.) При ее построении использовались гибридные параметры, которые наиболее часто применяются при анализе цепей, содержащих биполярные и полевые транзисторы.



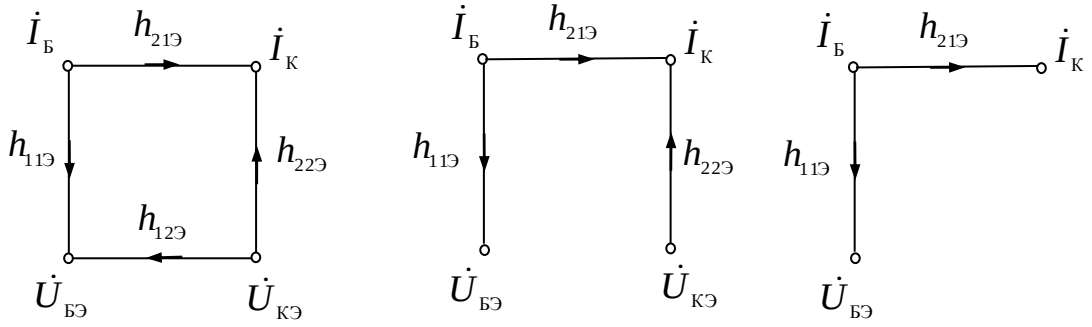
а б

Рисунок 1.19

Система гибридных параметров, описывающих эту схему, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{БЭ} &= h_{11э}\dot{I}_Б + h_{12э}\dot{U}_{КЭ}; \\ \dot{I}_К &= h_{21э}\dot{I}_Б + h_{22э}\dot{U}_{КЭ}, \end{aligned} \qquad (1.11)$$

что сразу приводит к графу требуемого вида (рис. 1.20,а).



а б в

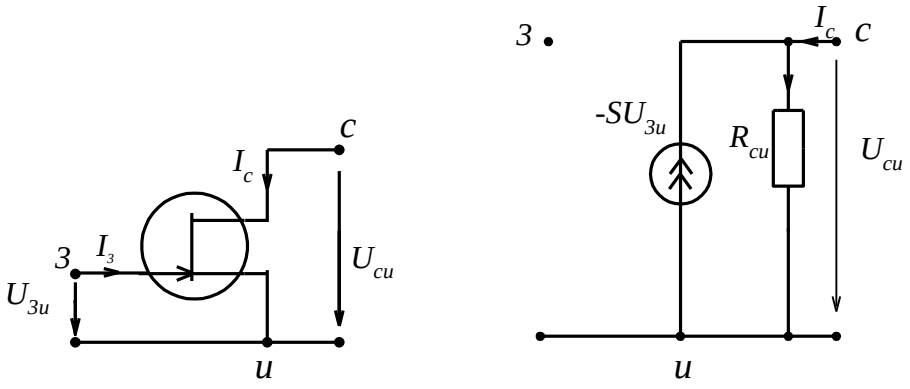
Рисунок 1.20

Очевидно, что для транзистора, включенного по схеме с общей базой или с общим коллектором, эквивалентные схемы и графы будут такими же, но с другими индексами параметров.

При расчетах обычно полагают $h_{12э}$=0. Если, к тому же, сопротивление коллекторной нагрузки меньше сопротивления коллекторного перехода в 30…50 раз, то можно пренебречь и проводимостью $h_{22э}$. Соответствующие упрощенные графы приведены на рис. 1.20,б и в.

1.7.3 Граф полевого транзистора

Полевой транзистор обладает очень большим входным сопротивлением, вследствие чего потребляет ничтожно малый входной ток (ток затвора), которым при инженерных расчетах обычно пренебрегают ($i_з$=0). Поэтому из его эквивалентной схемы можно исключить левую часть. Таким образом, полевой транзистор, включенный по схеме с общим истоком (рис. 1.21,а), можно представить в виде эквивалентной схемы, приведенной на рис. 1.21,б.



а б

Рисунок 1.21

Эту схему можно описать уравнением, составленным по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_{\text{С}} - S\dot{U}_{\text{зи}} = \frac{\dot{U}_{\text{си}}}{R_{\text{си}}}.$$

Разрешив это уравнение относительно напряжения $U_{\text{си}}$ и сделав замену $SR_{\text{си}} = \mu$, получим выражение, пригодное для построения стандартного графа четырехполюсника:

$$\dot{U}_{\text{си}} = \dot{I}_{\text{С}} R_{\text{си}} - \mu\dot{U}_{\text{зи}}.$$

Граф полевого транзистора приведен на рис. 1.22.

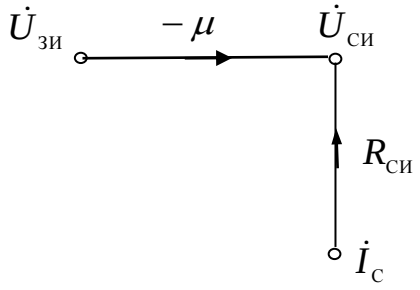


Рисунок 1.22

1.8 Пример анализа электронных схем, содержащих четырехполюсники, при помощи направленных графов

На рисунке 1.23 изображена схема усилительного каскада на биполярном транзисторе с трансформаторным выходом. Требуется получить выражение для коэффициента усиления по напряжению $\dot{K} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}$.

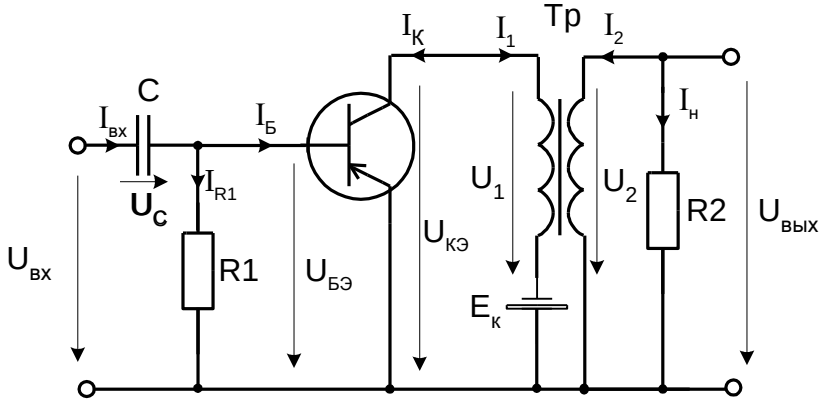


Рисунок 1.23

Поскольку нас интересует реакция схемы лишь на входное напряжение $\dot{U}_{вх}$, источник постоянного напряжения питания $E_К$, в соответствии с принципом наложения, закоротим, получив схему для переменной составляющей сигнала.

В схеме имеются два четырехполюсника – биполярный транзистор и трансформатор. Направления токов и напряжений четырехполюсников, соответствуют тем, которые были выбраны при построении их графов.

Расположим графы четырехполюсников в том же порядке, в каком сами четырехполюсники расположены в схеме (рис. 1.24).

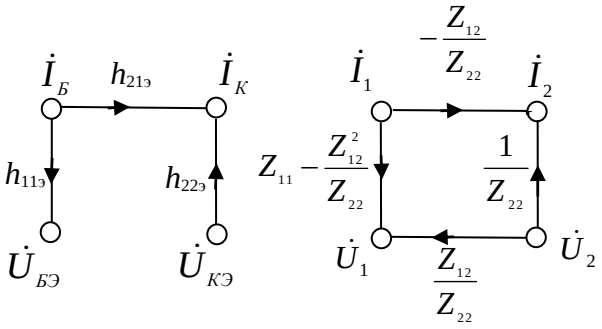


Рисунок 1.24

Соединим оба графа ветвями в соответствии с уравнениями $\dot{I}_1 = -\dot{I}_К$ и $\dot{U}_{КЭ} = \dot{U}_1$. Достраиваем полученный граф, определяя имеющиеся в нем узлы-источники путем последовательного применения уравнений:

$$\dot{I}_Б = \dot{I}_C - \dot{I}_{R1}; \quad \dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C; \dot{U}_C = \dot{U}_{вх} - \dot{U}_{БЭ}; \; \dot{I}_{R1} = \frac{\dot{U}_{БЭ}}{R_1}; \; \dot{I}_н = -\dot{I}_2; \; \dot{U}_{вых} = \dot{I}_н R_2.$$

В итоге приходим к полному графу каскада (рис. 1.25).

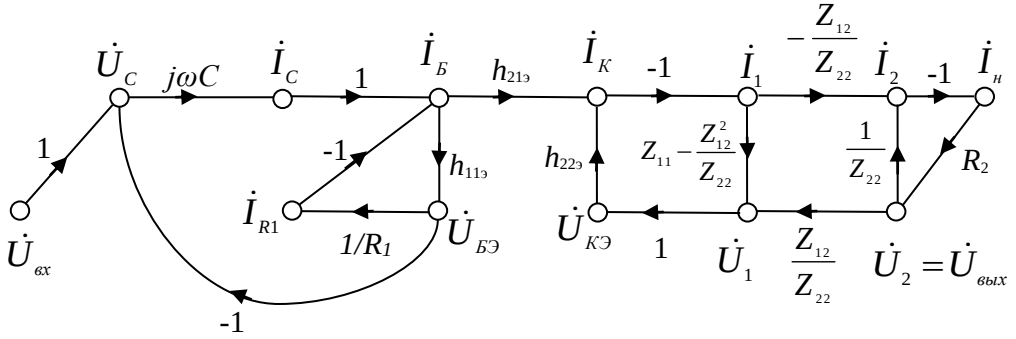


Рисунок 1.25

В графе имеется пять контуров с передачами

$$L_1 = -j\omega C h_{11э};\ L_2 = -\frac{h_{11э}}{R_1};\ L_3 = -h_{22}(Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}});$$

$$L_4 = -h_{22э}R_2\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}^2};\ L_5 = -\frac{R_2}{Z_{22}},$$

причем контуры L_1 и L_2 не касаются остальных контуров, контур L_3 не касается также и контура L_5. Определитель графа, найденный по формуле (1.6), будет иметь вид:

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5)+(L_1+L_2)(L_3+L_4+L_5)+L_3L_5-L_1L_3L_5-L_2L_3L_5.$$

Путь передачи от $\dot{U}_{вх}$ к $\dot{U}_{вых}$ только один, причем он касается всех контуров. Величина пути равна $-j\omega C h_{21э}\frac{Z_{12}}{Z_{22}}R_2$, а его алгебраическое дополнение равно единице. Окончательно

$$\dot{K} = \frac{-j\omega C h_{21э} Z_{12} R_2}{Z_{22}\left[\begin{array}{l} 1+j\omega C h_{11э}+\frac{h_{11э}}{R_1}+h_{22э}(Z_{11}-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}})+h_{22э}R_2\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}^2}+\frac{R_2}{Z_{22}}+(j\omega C h_{11э}+\frac{h_{11э}}{R_1})\times \\ \times(h_{22э}(Z_{11}-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}})+h_{22э}R_2\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}^2}+\frac{R_2}{Z_{22}})+h_{22э}(Z_{11}-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}})\frac{R_2}{Z_{22}}(1+j\omega C h_{11э}+\frac{h_{11э}}{R_1}) \end{array}\right]}.$$

Если учесть, что коллекторный переход транзистора шунтируется малым сопротивлением обмотки трансформатора, то при построении графа схемы можно пользоваться упрощенным графом биполярного транзистора (рис. 1.20,в), полагая $h_{22э}=0$.

Тогда полный граф схемы примет вид, показанный на рисунке 1.26, а выражение для коэффициента усиления будет иметь вид:

$$\dot{K} = \frac{-\,j\omega C h_{21э}\,\dfrac{Z_{12}}{Z_{22}}\,R_2}{1+\,j\omega C h_{11э}+\dfrac{h_{11э}}{R_1}+\dfrac{R_2}{Z_{22}}+\,j\omega C h_{11э}\cdot\dfrac{R_2}{Z_{22}}+\dfrac{h_{11э}}{R_1}\cdot\dfrac{R_2}{Z_{22}}}.$$

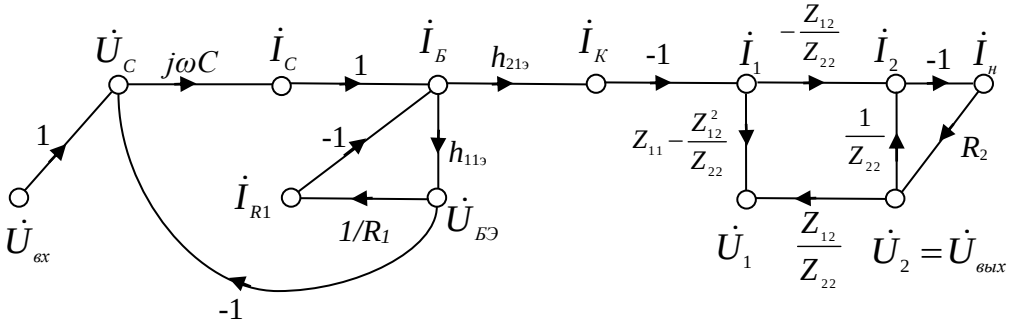


Рисунок 1.26

Наконец, если считать трансформатор идеальным, то граф примет вид, приведенный на рис.1.27, а коэффициент усиления определится выражением

$$\dot{K} = \frac{-\,j\omega C h_{21э} n R_2}{1+\,j\omega C h_{11э}+\dfrac{h_{11э}}{R_1}}.$$

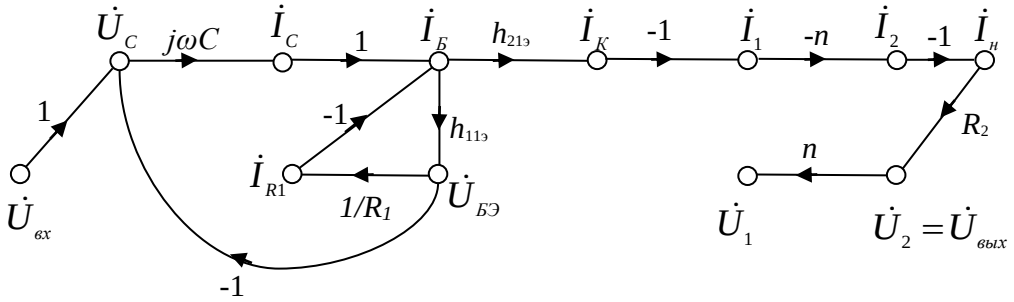


Рисунок 1.27

2 НЕНАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1 Основные положения топологического метода

В предыдущем разделе было показано, что направленные графы могут значительно упростить анализ электрических цепей и систем. Для этого требуется составление направленного графа, что было рассмотрено в подразделе 1.2. Эта операция несложна и по затратам времени сопоставима с составлением системы уравнений или матрицы схемы. Зато после этого ответ записывается непосредственно по виду графа без промежуточных выкладок.

Оказывается, что при анализе обычных электрических схем можно исключить составление направленного графа и получить ответ непосредственно по схемному рисунку исследуемой цепи. Это оказалось возможным при использовании так называемых ненаправленных графов, теория которых также была разработана С. Мэзоном [I]. Ниже будет показано, каким образом топологический анализ вытекает из метода направленных графов.

В подразделе 1.2 говорилось о том, что для каждой схемы можно составить несколько внешне не похожих друг на друга направленных графов, узлами которых являются как падения напряжений на ветвях, так и протекающие в этих ветвях токи. Но можно составить граф, узлами которого будут переменные одного рода. Если этими переменными служат только узловые напряжения или только контурные токи, граф будет называться *нормализованным.* В отличие от направленных графов, для каждой схемы можно составить лишь один нормализованный граф.

Если узлами нормализованного графа являются только узловые напряжения, граф называется *узловым,* или *У-графом*, если же в узлах расположены контурные токи – *контурным*, или *К-графом*.

Узловой граф замечателен тем, что по рисунку он полностью совпадает со схемой цепи. Таким образом, рисунок схемы является не только информацией о том, как соединены элементы схемы друг с другом,

но он выступает в то же время и как рисуночная форма записи системы уравнений для изображаемой им цепи.

Этого нельзя сказать о контурном графе, и поскольку он не обладает никакими особыми достоинствами по сравнению с узловым, далее будут рассматриваться только *У*-графы.

Ветви как узлового, так и контурного графов не имеют направлений, поэтому нормализованные графы называются еще *ненаправленными.*

2.2 Основные определения и понятия

Для анализа цепей топологическим методом применяется та же формула С.Мэзона, что и для направленных графов:

$$T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}. \qquad (2.1)$$

Однако для того чтобы воспользоваться ею, необходимо познакомиться с определенными правилами действий. Рассмотрим эти правила, опуская их выводы.

Прежде всего, введем некоторые новые понятия и определения.

Деревом схемы будем называть совокупность ветвей, соединяющих все узлы схемы, но не образующих ни одного контура. В любом дереве число входящих в него ветвей на единицу меньше полного числа узлов схемы.

Величиной дерева называется произведение проводимостей образующих его ветвей. Далее величину дерева будем называть просто деревом.

Определителем схемы Δ является сумма величин всех деревьев (сумма всех деревьев), содержащихся в схеме.

Целесообразно знать определители простейших схем.

1 На рис.2.1,а приведена трехузловая схема, каждая пара узлов которой соединена проводимостью y_i. Эта схема состоит из трех деревьев: y_1y_2, y_1y_3, y_2y_3. Следовательно, определитель схемы $\Delta=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3$. Это

выражение удобно применять в преобразованном виде: $\Delta=y_1(y_2+y_3)+y_2y_3$ и сформулировать его следующим образом:

Определитель треугольника равен проводимости одной из его сторон, умноженной на сумму проводимостей двух других сторон, плюс произведение проводимостей этих двух сторон.

а б

Рисунок 2.1

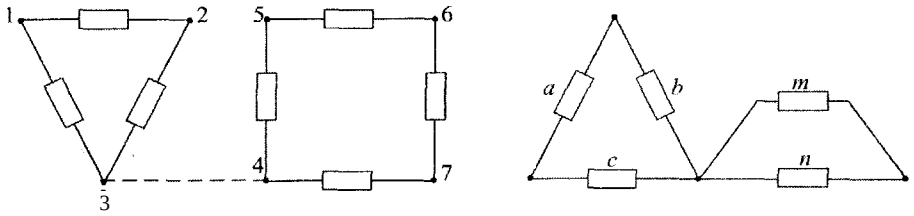
2 Если *n* ветвей соединены параллельно между двумя узлами (рис.2.1,б), то каждая из этих ветвей является деревом, следовательно, $\Delta=y_1+y_2+\ldots+y_n$. Отсюда вытекает следующее правило:

Определитель двухузловой схемы равен сумме проводимостей ветвей, соединенных с одним из узлов.

3 Если схема полностью закорочена (состоит из одного узла), полагают, что её определитель равен единице ($\Delta=1$).

4 Если в результате каких-либо преобразований схема распадается на две или несколько изолированных друг от друга частей (такой частью может быть и один из узлов), определитель всей схемы равен нулю (рис.2.2,а). Это следует из того, что каждое из деревьев, в которые должны входить все узлы схемы, должно содержать также отсутствующую ветвь (например, между узлами 3 и 4 на рисунке 2.2,а), проводимость которой равна нулю. Следовательно, и величина каждого дерева равна нулю, поэтому и определитель, как сумма всех деревьев, равен нулю ($\Delta=0$).

5 Если схема состоит из подсхем, соединенных друг с другом лишь одним узлом (рис.2.2,б), определитель всей схемы равен произведению определителей отдельных подсхем.



а б

Рисунок 2.2

Левая часть рассматриваемой схемы является треугольником и содержит три дерева *ab, ac, bc*. Чтобы связать эту подсхему с последним четвертым узлом, нужно добавить одну из двух параллельных ветвей *m* или *n*. Всего получим шесть деревьев, сумма которых дает определитель всей схемы:

$$\Delta = abm + abn + acm + acn + bcm + bcn.$$

Эту сумму путем группировки слагаемых можно представить в виде

$$\Delta = ab(m + n) + ac(m + n) + bc(m + n) = (ab + ac + bc)(m + n).$$

Но выражение в первых скобках – это определитель треугольника Δ_1, а во вторых скобках — определитель двухузловой схемы Δ_2, следовательно, $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$.

2.3 Определитель сложной схемы и его нахождение

В более сложных схемах, чем треугольник, непосредственное отыскание всех деревьев становится громоздким и не исключена возможность допущения ошибок при их выявлении – некоторые деревья можно просто не заметить. Например, схема с пятью узлами (рис.2.3), каждая пара которых соединена одной ветвью (так называемый полный граф), имеет 125 деревьев! Естественно, при их отыскании часть из них можно просто пропустить. Поэтому С. Мэзоном были разработаны более эффективные способы нахождения определителя.

Познакомимся с одним из них, называемым *разложением по двум узлам*. Для этого выбираем в схеме любые два узла и далее пользуемся формулой

$$\Delta = \sum P'_k \Delta'_k ,$$

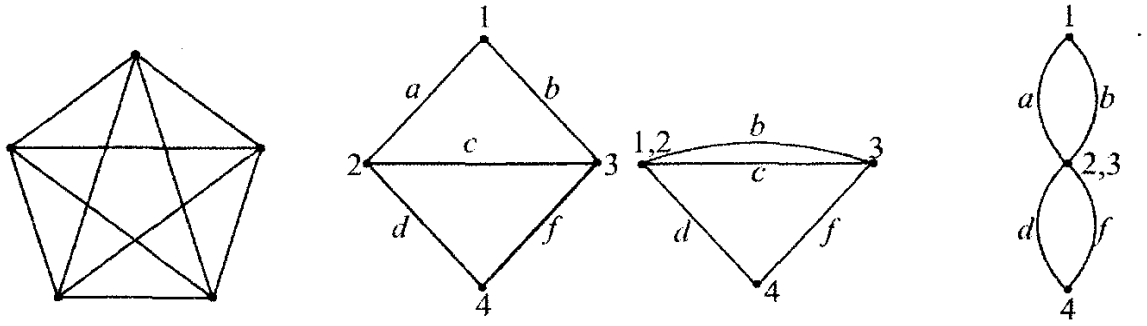
где P'_k – k-й путь между выбранными узлами, Δ'_k – алгебраическое дополнение k-го пути.

Путем P_k между двумя узлами называется непересекающаяся последовательность ветвей, соединяющая эти два узла (вдоль этой последовательности каждый узел должен встретиться не более одного раза).

Величиной пути или просто путем будем называть произведение проводимостей ветвей, образующих путь.

Алгебраическим дополнением пути Δ_k служит определитель схемы, которая образуется после закорачивания всех узлов, входящих в путь.

Рассмотрим применение этого правила на примере схемы, приведенной на рис.2.4,а. В ней четыре узла. Узловую пару можно выбрать тремя способами: по одной диагонали (узлы 1 и 4), по другой диагонали (узлы 2 и 3) или по одной из сторон четырехугольника, безразлично какой, так как с этой точки зрения схема симметрична.



а б в

Рисунок 2.3 Рисунок 2.4

1 Возьмем вначале узловую пару (1–4). Между этими узлами четыре пути с величинами $P'_1 = ad;\ P'_2 = bf;\ P'_3 = acf;\ P'_4 = bcd.$

Алгебраическое дополнение пути P_1 найдем, закоротив узлы этого пути 1, 2 и 4. Получится двухузловая схема, где между узлом, в который слились узлы 1, 2 и 4, и узлом 3 имеется три параллельные ветви с

проводимостями b, c и f. Следовательно, $\Delta_1' = b + c + f$. Полезно заметить на будущее, что если путь прошел через все узлы, кроме одного, то его алгебраическим дополнением будет сумма проводимостей ветвей, связанных с узлом, не вошедшим в этот путь. Аналогично $\Delta_2' = a + c + d$.

Пути P_3' и P_4' проходят через все узлы схемы, и после их закорачивания образуется один единственный узел. Поэтому алгебраическое дополнение пути, проходящего через все узлы, равно единице.

После всего этого получим

$$\Delta = ad(b + c + f) + bf(a + c + d) + acf + bcd.$$

2 Если выбрать узловую пару (2–3), то путями будут $P_1' = ab;\ P_2' = c;\ P_3' = df$.

Алгебраическим дополнением первого пути, не проходящего лишь через один узел 4, будет сумма $\Delta_1' = d + f$, а третьего — $\Delta_3' = a + b$. После закорачивания второго пути образуется две подсхемы, соединенные в одном узле (рис.2.4,в). Обе подсхемы двухузловые, их определители $\Delta_1 = a + b$ и $\Delta_2 = d + f$. Поэтому полный определитель подсхемы $\Delta_2' = \Delta_1 \cdot \Delta_2 = (a + b)(d + f)$.

Итак, определитель $\Delta = ab(d + f) + c(a + b)(d + f) + df(a + b)$. Нетрудно увидеть, что он совпадает с полученным ранее при другом выборе узловой пары.

3 Если выбрать узловую пару по одной стороне четырехугольника (например, 1–2), то здесь тоже можно обнаружить три пути: $P_1' = a;\ P_2' = bc;\ P_3' = bdf$. После закорачивания первого пути получим треугольник, показанный на рис.2.4,б. По правилу нахождения определителя треугольника выбираем наиболее сложную его сторону, состоящую из суммы проводимостей двух параллельных ветвей, умножаем ее на сумму двух других сторон и добавляем произведение этих сторон: $\Delta_1' = (b + c)(d + f) + df$. Дополнение второго пути $\Delta_2' = d + f$ а третьего $\Delta_3' = 1$. Окончательно $\Delta = a\left[(b + c)(d + f) + df\right] + bc(d + f) + bdf$.

Из этих примеров видно, что чем проще путь, тем сложнее найти его алгебраическое дополнение, и наоборот. Но поскольку пути, даже содержащие большое число ветвей, найти значительно проще, чем дополнения в виде определителей подсхем, целесообразно выбирать такую пару узлов, чтобы пути между ними содержали по возможности больше ветвей. В нашем примере удачнее всего выбраны узлы 1 и 4.

Если непосредственное нахождение алгебраического дополнения оказывается сложным, его следует определять, в свою очередь, путем повторного разложения по двум узлам, но уже более простой подсхемы.

2.4 Примеры анализа линейных схем топологическим методом

Для удобства и облегчения анализа топологическим методом С. Мэзон предложил любую схемную функцию определять как отношение выходной величины m, измеряемой условным измерительным прибором (вольтметром или амперметром), к входной величине s, представленной условным источником энергии (тока или напряжения):

$$T = \frac{m}{s}, \tag{2.2}$$

а саму передачу T находить по формуле 2.1. Заметим, что величиной m может быть любая переменная (ток или напряжение), действующая в схеме. Эту переменную можно определить как

$$m = s\frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}. \tag{2.3}$$

Но теперь в понятия путей передачи P_k и их алгебраических дополнений Δ_k следует вкладывать иной смысл.

Введем новые определения.

Путем передачи P_k называется путь между двумя узлами источника энергии, обязательно включающий измерительный прибор. Величина пути передачи равна произведению проводимостей входящих в него ветвей. При этом проводимость измерительного прибора полагается равной единице.

Алгебраическим дополнением Δ_k *пути передачи* является определитель схемы, образующейся после закорачивания пути передачи.

Перед нахождением определителя Δ необходимо исключить из схемы как введенный в нее условный измерительный прибор, так и источник энергии следующим образом: *источник напряжения и амперметр следует закоротить, а источник тока и вольтметр удалить из схемы*.

Определим, воспользовавшись этими правилами, ток в катушке $\dot{I}_L$ для схемы, приведенной на рис.2.5.

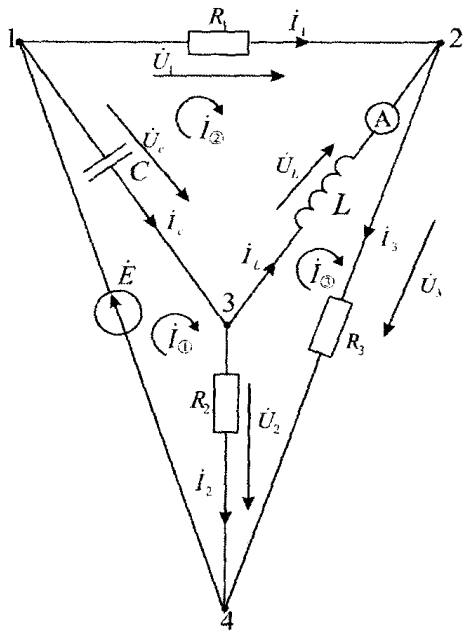


Рисунок 2.5

Поместив амперметр последовательно с катушкой *L*, найдем пути передачи. Пройти между узлами 1 и 4, принадлежащими источнику *E,* и при этом пройти через амперметр можно двумя способами: через конденсатор *C,* затем через катушку, прибор и резистор R_3. Этот путь $P_1 = j\omega C \cdot \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{1}{R_3}$. Он прошел через все узлы, следовательно, его алгебраическое дополнение равно единице.

Второй путь проходит через ветви R_1, *A*, *L*, R_2. Поскольку в этом случае путь проходит прибор в противоположном направлении, будем

считать этот путь отрицательным $P_2 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{1}{R_2}$. Его дополнение также равно единице.

Наконец, закорачивая амперметр и источник *E,* получим схему (рис.2.6) в виде треугольника, определитель которой

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} \right) + \frac{1}{j\omega L} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Следовательно,

$$\dot{I}_L = \dot{E} \frac{j\omega C \cdot \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} \right) + \frac{1}{j\omega L} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)}.$$

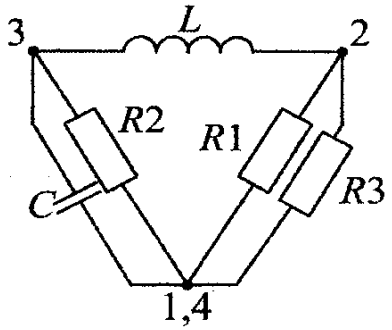


Рисунок 2.6

Еще раз напомним, что числителю передачи *T* соответствует показание прибора *m,* а знаменателю – величина источника *s*. Подтвердим это следующим примером.

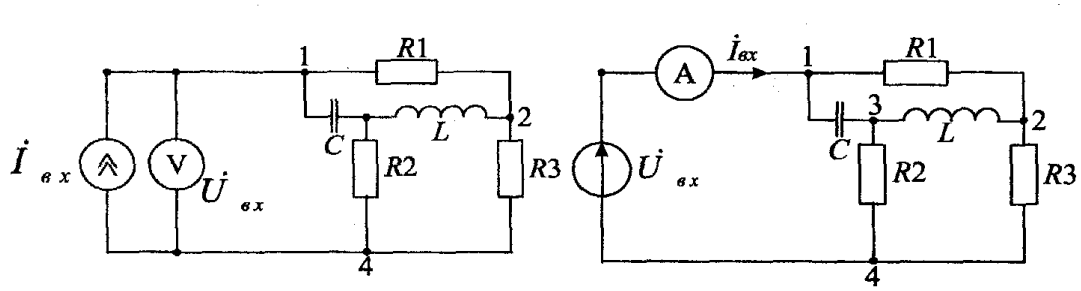
Пусть требуется найти входное сопротивление схемы (рис. 2.5) между узлами I и 4. Входным сопротивлением является отношение напряжения $\dot{U}_{вх}$ к силе тока $\dot{I}_{вх}$:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_{вх}}{\dot{I}_{вх}}.$$

Так как в числителе должно находиться показание условного вольтметра, изобразим его на входе схемы (рис.2.7, а). Знаменатель соответствует величине источника тока, который тоже изобразим на схеме между входными зажимами.

Путем передачи здесь будет лишь ветвь вольтметра с проводимостью, равной единице (P_1=1). Зато его алгебраическим дополнением окажется определитель схемы, которая уже встречалась нам на рис.2.6:

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L}\right) + \frac{1}{j\omega L}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right).$$



а б

Рисунок 2.7

Для нахождения знаменателя (определителя схемы) следует удалить из рисунка схемы как источник тока, так и вольтметр. Получим схему, подобную той, что рассматривалась на рис.2.4,а. Ее определитель, полученный путем разложения по узлам 1 и 4, равен

$$\Delta = \frac{j\omega C}{R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L}\right) + \frac{1}{R_1 R_3}\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{j\omega C}{j\omega L R_3} + \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{j\omega L}\cdot\frac{1}{R_2}.$$

Следовательно,

$$Z_{вх} = \frac{\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L}\right) + \frac{1}{j\omega L}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)}{\frac{j\omega C}{R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L}\right) + \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_3}\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{j\omega C}{j\omega L R_3} + \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{j\omega L}\cdot\frac{1}{R_2}}.$$

Если в схеме оставить источник напряжения $\dot{U}_{вх}$ и поместить на ее входе амперметр (рис.2.7, б), то мы фактически находим функцию $Y_{вх} = \dfrac{\dot{I}_{вх}}{\dot{U}_{вх}}$ т.е. входную проводимость схемы. В этом случае в схеме будет четыре пути передачи со своими дополнениями и числитель равен

$$\frac{j\omega C}{R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L}\right)+\frac{1}{R_1R_3}\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{j\omega C}{j\omega LR_3}+\frac{1}{j\omega LR_1R_2},$$

а определитель, найденный после закорачивания прибора и источника напряжения, т.е. для уже рассмотренного треугольника

$$\Delta=\left(\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L}\right)+\frac{1}{j\omega L}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right).$$

Отношение числителя к знаменателю обратно дроби для $Z_{вх}$, что и следовало ожидать.

Рассмотрим в заключение пример анализа полосового фильтра, известного под названием «двойной Т-образный мост» (рис.2.8). Требуется найти его передаточную функцию $\dot{K} = \dfrac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}$. Мысленно дополним схему источником входного напряжения $\dot{U}_{вх}$ и вольтметром, присоединенном параллельно резистору нагрузки $R1$.

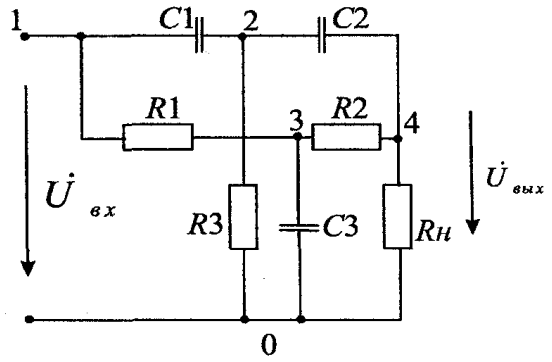


Рисунок 2.8

Анализ классическими методами привел бы к необходимости составления и решения системы уравнений четвертого порядка, поскольку в схеме четыре независимых контура. Направленный граф имел бы 15 узлов и большое количество контуров.

Топологический же метод позволяет записать ответ сразу путем рассмотрения схемы. Путей передачи здесь два. Один проходит через конденсаторы $C1$ и $C2$, вне его остается лишь один узел 3, с которым связаны резисторы $R1$, $R2$ и конденсатор $C3$. Второй путь проходит через резисторы $R1$, $R2$, и вне его остается тоже один узел 2, связанный с конденсаторами $C1$, $C2$ и резистором $R3$. Таким образом, числитель передаточной функции

$$j\omega C_1 \cdot j\omega C_2(g_1 + g_2 + j\omega C_3) + g_1 g_2(j\omega C_1 + j\omega C_2 + g_3).$$

(Здесь и далее вводим обозначение g_i вместо $\frac{1}{R_i}$).

Для нахождения определителя схемы закорачиваем источник входного напряжения (узел 1 соединяем с базовым узлом 0) и удаляем вольтметр. Определитель схемы находим путем разложения по двум оптимально выбранным узлам 2 и 3. Между этими узлами существует четыре пути:

1 Проходящий через узлы 2–01–3 путь $P_1' = (g_3 + j\omega C_1)(g_1 + j\omega C_3)$ с дополнением, относящимся к узлу 4, $\Delta_1 = g_2 + g_н + j\omega C_2$.

2 Проходящий через узлы 2–4–3 путь $P_2' = j\omega C_2 g_2$ с дополнением $\Delta_2 = g_1 + g_3 + g_н + j\omega C_1 + j\omega C_3$, относящимся к узлу 01.

3 Путь через узлы 2–01–4–3 $P_3' = (g_3 + j\omega C_1) g_н g_2$.

4 Путь через узлы 2–4–01–3 $P_4' = j\omega C_2 g_н (g_1 + j\omega C_3)$.

Последние два пути проходят через все узлы схемы и их дополнения равны единицам. Итак,

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{j\omega C_1 \cdot j\omega C_2(g_1 + g_2 + j\omega C_3) + g_1 g_2(j\omega C_1 + j\omega C_2 + g_3)}{\left|\begin{array}{l}(g_3 + j\omega C_1)(g_1 + j\omega C_3)(g_2 + g_н + j\omega C_2) + g_2 g_н(g_3 + j\omega C_1) + \\ + j\omega C_2 g_2(g_1 + g_3 + g_н + j\omega C_1 + j\omega C_3) + j\omega C_2 g_н(g_1 + j\omega C_3)\end{array}\right|}.$$

2.5 Особенности топологического анализа нелинейных цепей. Унисторы и их свойства

Отличие несимметричных элементов от линейных симметричных состоит в том, что при изменении направления протекающего в них тока проводимость их также изменяется. Рассмотрим простую схему (рис. 2.9), составленную из трех несимметричных элементов

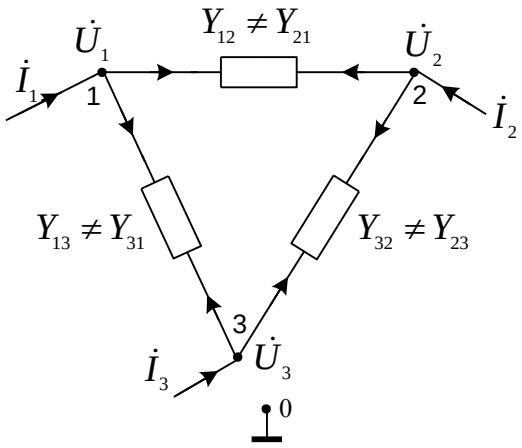


Рисунок 2.9

Базовый узел вынесен отдельно (схема с вынесенным базовым узлом). Составим для этой схемы систему уравнений по 1-му закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)Y_{12} + (\dot{U}_1 - \dot{U}_3)Y_{13} = (Y_{12} + Y_{13})\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 - Y_{13}\dot{U}_3; \\
\dot{I}_2 &= (\dot{U}_2 - \dot{U}_1)Y_{21} + (\dot{U}_2 - \dot{U}_3)Y_{23} = -Y_{21}\dot{U}_1 + (Y_{21} + Y_{23})\dot{U}_2 - Y_{23}\dot{U}_3; \qquad (2.4) \\
\dot{I}_3 &= (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)Y_{31} + (\dot{U}_3 - \dot{U}_2)Y_{32} = -Y_{31}\dot{U}_1 - Y_{32}\dot{U}_2 + (Y_{31} + Y_{32})\dot{U}_3.
\end{aligned}$$

Заменим $Y_{12} + Y_{13} = Y_{11}$; $Y_{21} + Y_{23} = Y_{22}$; $Y_{31} + Y_{32} = Y_{33}$ и перепишем систему уравнений (2.4) в соответствии с принятыми заменами:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 - Y_{13}\dot{U}_3; \\
\dot{I}_2 &= -Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 - Y_{23}\dot{U}_3; \qquad (2.5) \\
\dot{I}_3 &= -Y_{31}\dot{U}_1 - Y_{32}\dot{U}_2 + Y_{33}\dot{U}_3.
\end{aligned}$$

Отметим, что первые индексы проводимостей в системе уравнений (2.5) соответствуют номеру строки, а вторые – номеру столбца. Строго

говоря, математическая запись системы (2.5) противоречит законам электротехники, т.к. каждое слагаемое правой части ($Y_{11}\dot{U}_1$; $Y_{12}\dot{U}_2$ и т.д.) представляет собой некоторый ток. Но форма записи такова, будто бы этот ток протекает через элемент под воздействием напряжения, приложенного лишь к одному узлу. Физически таких элементов нет, но условно можно допустить их существование. Такие фиктивные элементы были названы *унисторами.* Условное обозначение унистора в виде стрелки, показывающей направление тока, приведено на рис.2.10. Если унистор направлен от узла k к узлу i , условимся его проводимость обозначать символом Y_{ik}.

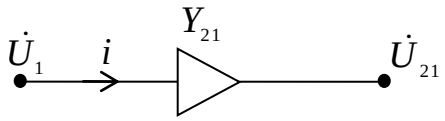


Рисунок 2.10

Теперь появляется возможность нелинейный элемент, обладающий в одном направлении проводимостью Y_{ik}, а в другом – проводимостью Y_{ki}, условно заменить двумя параллельными унисторами, направленными в разные стороны и имеющими различные проводимости, а схему на рис. 2.9 представить в унисторном эквиваленте (рис. 2.11).

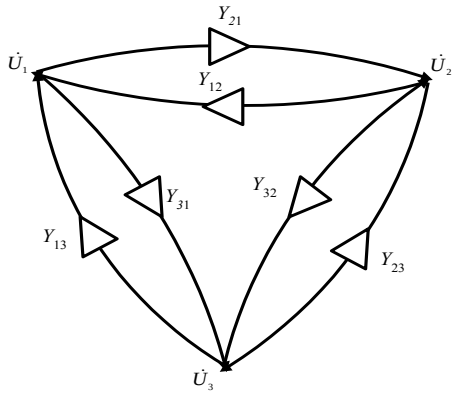


Рисунок 2.11

Некоторые свойства унистора поясним с помощью рисунка 2.12.

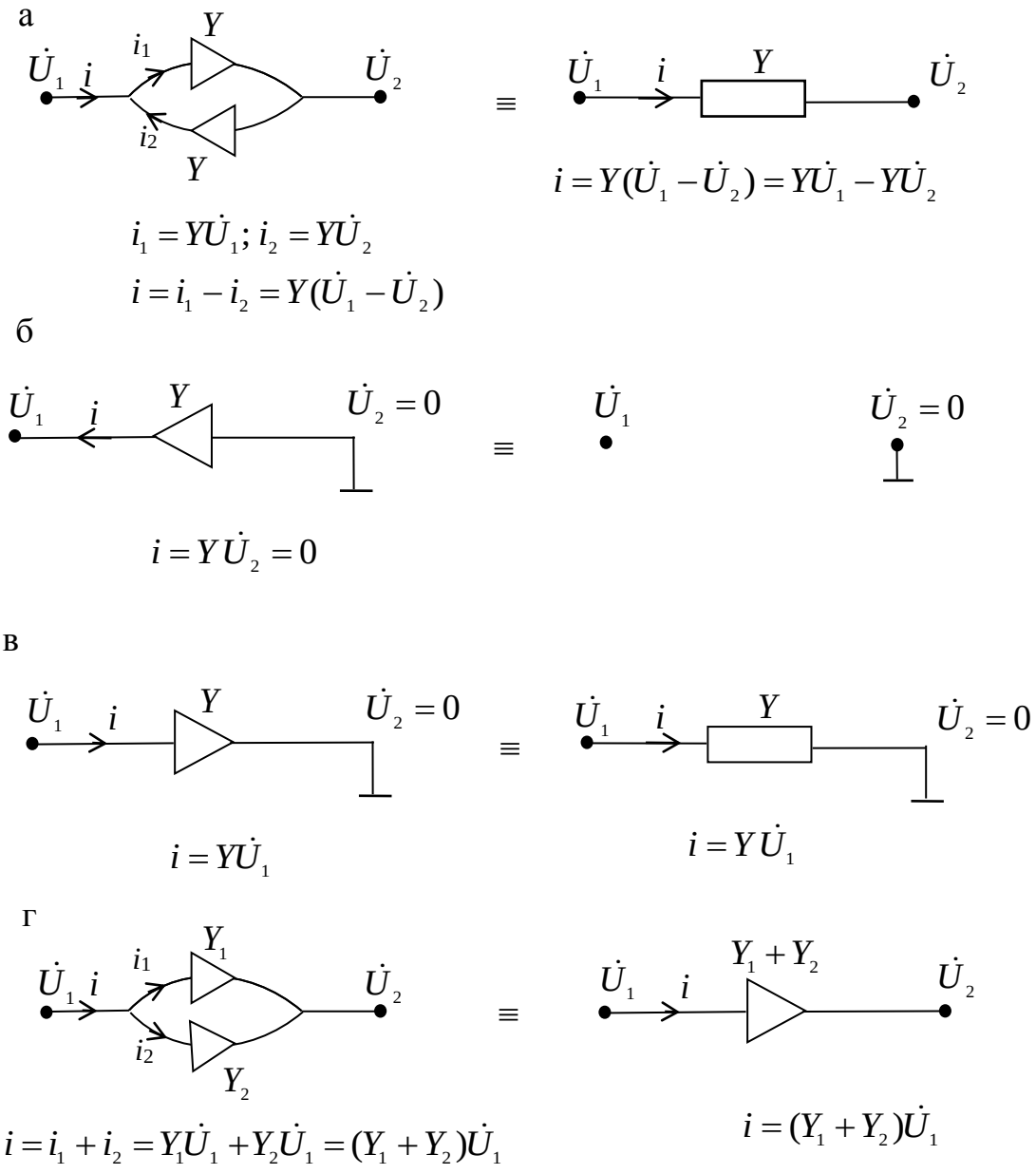


Рисунок 2.12

На рис. 2.12,а справа изображен обычный симметричный элемент с проводимостью Y, ток в котором равен $i = (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)Y$. Раскрыв скобки и введя понятие унистора, придем к выводу, что выражение для тока имеет

два слагаемых $i_1 = Y\dot{U}_1$ и $i_2 = Y\dot{U}_2$, представляющих токи через унисторы: $i = Y\dot{U}_1 - Y\dot{U}_2 = i_1 - i_2$. После этого придем к схеме, изображенной на рис.2.12,а слева. Таким образом, симметричный элемент с проводимостью *Y* может быть заменен парой встречно направленных параллельно соединенных унисторов, каждый из которых имеет ту же проводимость, что и симметричный элемент. И наоборот, если между двумя узлами есть два унистора различного направления с одинаковыми проводимостями, их можно заменить одним симметричным элементом с той же проводимостью.

Если унистор направлен от узла с нулевым напряжением, то, по определению, ток в нем должен быть равен нулю. Следовательно, унистор, направленный от заземленного узла, эквивалентен разомкнутой ветви (рис.2.12,б).

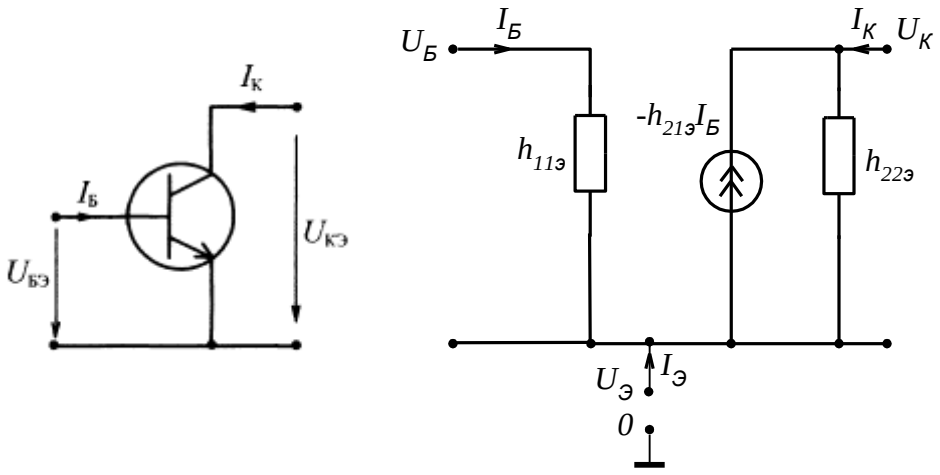
Если же унистор направлен к узлу с нулевым напряжением (к заземленному узлу), то его ток $i = Y\dot{U}_1$ ничем не отличается от тока в симметричной ветви при $U_2 = 0$: $i = Y(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = Y\dot{U}_1$. Следовательно, унистор, направленный к заземленному узлу, эквивалентен обычной симметричной ветви (рис. 2.12,в). Наконец, рис. 2.12,г иллюстрирует очевидное утверждение, что одинаково направленные унисторы, включенные параллельно между двумя узлами, можно заменить одним с суммарной проводимостью.

2.6 Унисторные схемы замещения электронных многополюсников

Введение унистора позволяет получить удобные для топологического метода схемы замещения несимметричных многополюсников – электронных и полупроводниковых усилительных приборов.

2.6.1 Унисторная схема замещения биполярного транзистора

На рис.2.13,а приведено условное изображение биполярного транзистора, а на рис.2.13,б – его общепринятая схема замещения в *h*-параметрах.



а б

Рисунок 2.13

Составим для нее систему уравнений по первому закону Кирхгофа:

$$I_Б = (U_Б - U_Э)\frac{1}{h_{11Э}};$$

$$I_К = h_{21Э}I_Б + (U_К - U_Э)h_{22Э};$$

$$I_Э = -I_Б - I_К$$

Приведем ее к виду (2.5). Раскрыв скобки и подставив $I_Б$ из первого уравнения во второе и третье, а $I_К$ из второго уравнения – в третье, получим:

$$I_Б = \frac{1}{h_{11Э}}U_Б - \frac{1}{h_{11Э}}U_Э;$$

$$I_К = \frac{h_{21Э}}{h_{11Э}}U_Б + h_{22Э}U_К - (h_{22Э} + \frac{h_{21Э}}{h_{11Э}})U_Э; \qquad (2.6)$$

$$I_Э = -\frac{1+h_{21Э}}{h_{11Э}}U_Б - h_{22Э}U_К + (h_{22Э} + \frac{1+h_{21Э}}{h_{11Э}})U_Э.$$

Сравнив системы уравнений (2.5) и (2.6), получим следующие выражения для проводимостей, входящих в систему уравнений (2.5):

$$Y_{12} = 0; \qquad Y_{21} = -\frac{h_{21э}}{h_{11э}}$$

;

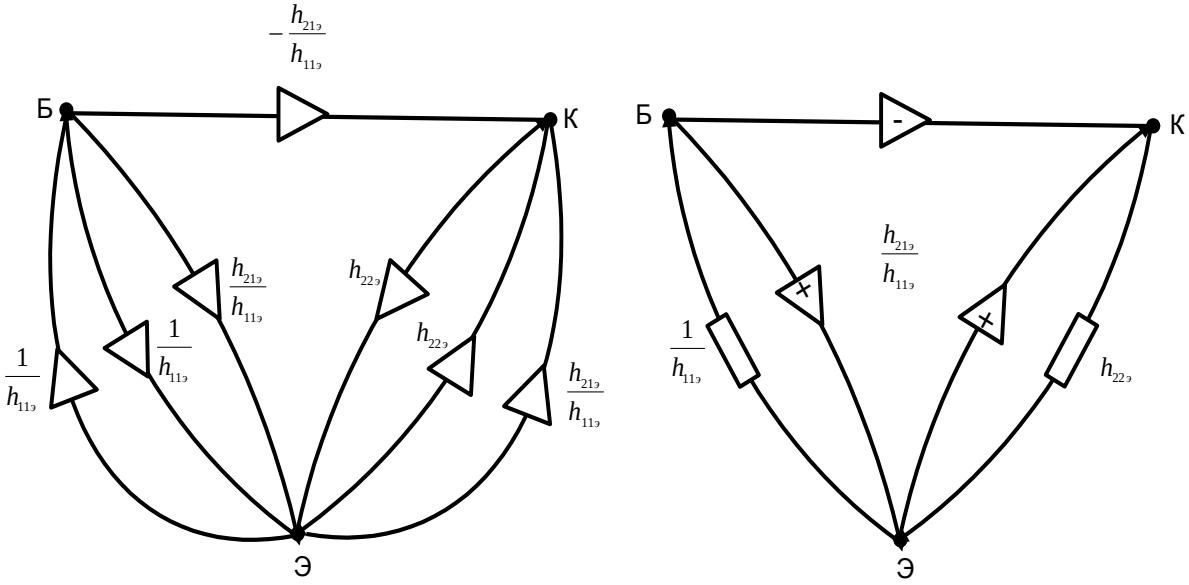
$$Y_{23} = (h_{22Э} + \frac{h_{21Э}}{h_{11Э}});$$

$$Y_{32} = h_{22Э};$$

$$Y_{13} = \frac{1}{h_{11Э}};$$

$$Y_{31} = \frac{1 + h_{21Э}}{h_{11Э}}$$

Если теперь подставить значения проводимостей унисторов в схему на рис.2.11, заменив номера узлов обозначениями выводов транзистора (Б, К, Э), получим унисторную схему замещения транзистора (рис. 2.14,а). Используя свойства параллельно соединенных и одинаково направленных (рис. 2.12,г) или встречно направленных (рис. 2.12,а) унисторов, придем к схеме на рис. 2.14,б.



а б

Рисунок 2.14

В последней схеме сохранились лишь унисторы с одинаковой (без учета знака) проводимостью $\frac{h_{21Э}}{h_{11Э}}$, соединенные в треугольник. Остальные унисторы преобразовались в симметричные проводимости. Проводимость

всех трех унисторов удобно обозначать одним символом, помещенным внутри треугольника, а знак располагать непосредственно в стрелке унистора.

2.6.2 Унисторная схема замещения полевого транзистора

Условное обозначение и эквивалентная схема замещения полевого транзистора приведены на рис. 2.15.

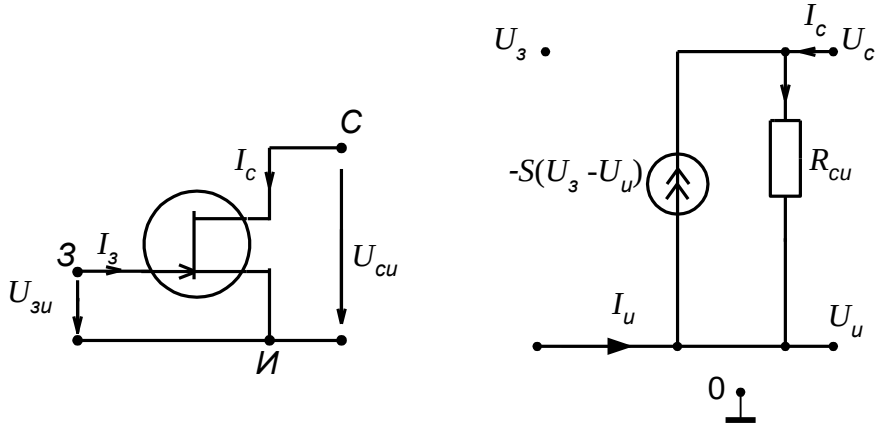


Рисунок 2.15

Учитывая, что током затвора можно пренебречь (см. п. 1.7.4), составим для эквивалентной схемы систему уравнений по первому закону Кирхгофа:

$$I_з = 0;$$

$$I_с = S(U_з - U_и) + \frac{1}{R_{си}}(U_с - U_и);$$

$$I_и = -I_с = -S(U_з - U_и) - \frac{1}{R_{си}}(U_с - U_и)$$

и приведем ее к виду системы (2.5):

$$I_з = 0;$$

$$I_с = SU_з + \frac{1}{R_{си}}U_с - (S + \frac{1}{R_{си}})U_и;$$

$$I_и = -SU_з - \frac{1}{R_{си}}U_с + (S + \frac{1}{R_{си}})U_и .$$

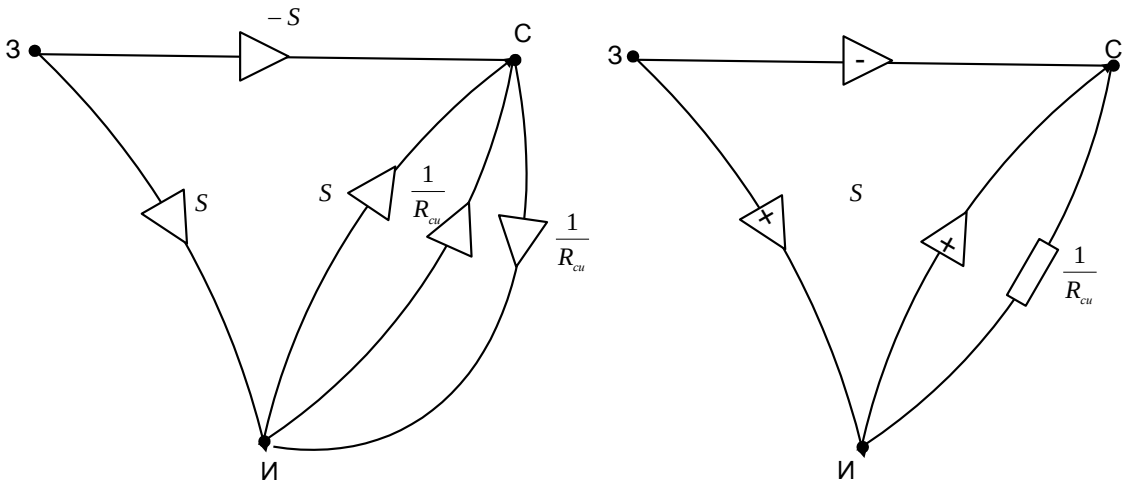
Сравнив полученную систему уравнений с системой (2.5), найдем выражения для проводимостей:

$$Y_{12} = 0;\ Y_{21} = -S;$$

$$Y_{23} = S + \frac{1}{R_{си}};\ Y_{32} = \frac{1}{R_{си}};$$

$$Y_{13} = 0;\ Y_{31} = S.$$

Подставляя значения проводимостей унисторов в схему на рис. 2.11 и обозначив узлы названиями выводов транзистора, получим унисторную схему замещения полевого транзистора (рис. 2.16).



а б

Рисунок 2.16

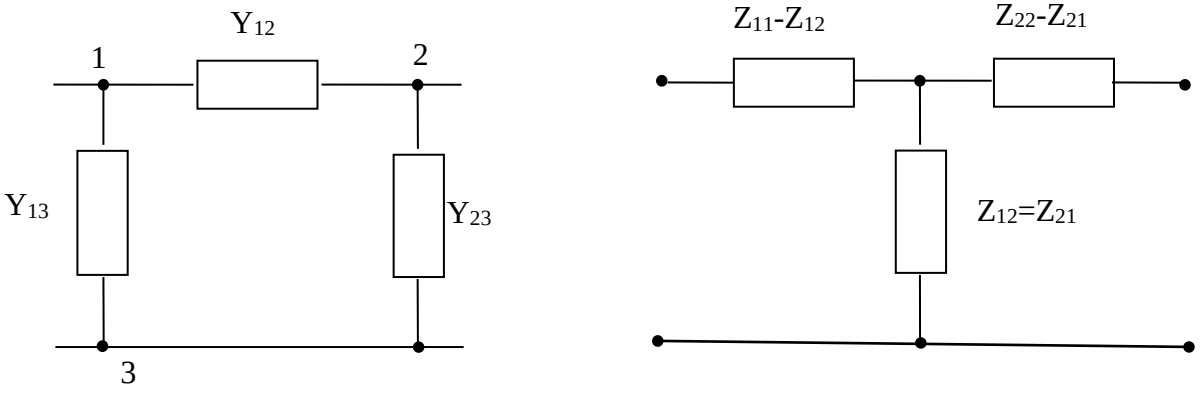
2.6.3 Топологическая схема замещения двухобмоточного трансформатора

При составлении узлового ненаправленного графа трансформатора удобно применить П-образную схему замещения (рис. 2.17,а), параметры которой можно получить из Т-образной схемы (рис. 2.17,б) путем преобразования звезды в треугольник.

При этом значения проводимостей Y_{ik} можно вычислить по формулам:

$$Y_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2};\ Y_{13} = \frac{Z_{22} - Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2};\ Y_{23} = \frac{Z_{11} - Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}.$$

Здесь значения Z_{11}, Z_{22} и Z_{12} соответствуют параметрам реального трансформатора (см. раздел 1, п. 1.7.1).



а б

Рисунок 2.17

В случае идеального трансформатора $Z_{11} = j\omega n^2 L$; $Z_{12} = j\omega nL$; $Z_{22} = j\omega L$ (см. раздел 1, п. 1.7.2), и проводимости Y_{12}, Y_{13} и Y_{23} превращаются в бесконечность. Но, если учесть активное сопротивление первичной обмотки $r = \frac{1}{g} \neq 0$, то, полагая $Z_{11} = r + j\omega n^2 L$, получим $Y_{12} = ng$; $Y_{13} = (1-n)g$; $Y_{23} = n(n-1)g$. Топологическая схема замещения идеального трансформатора приведена на рис. 2.18.

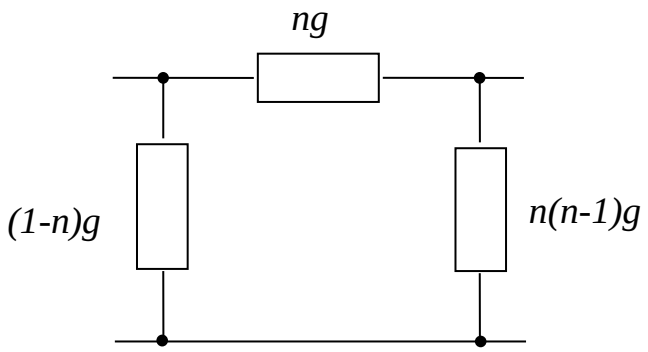


Рисунок 2.18

После получения окончательного выражения для искомой передаточной функции от искусственно введенного сопротивления r следует избавиться, приняв $g \to \infty$.

2.7 Правила топологического анализа цепей, содержащих унисторы

При анализе электронных схем, содержащих нелинейные элементы, необходимо прежде всего заменить эти элементы их эквивалентными унисторными схемами. Далее, согласуясь с правилами топологического анализа, дополняем схему условными источником энергии и измерительным прибором. Вид источника и прибора определяется искомой передаточной функцией. Один из узлов измерительного прибора полагаем заземленным. Особенности анализа схем, содержащих унисторы, состоят в следующем.

- Если в пути передачи P_k имеется унистор, то его необходимо полагать обычной проводимостью в том случае, если этот унистор направлен к измерительному прибору. При обратном направлении унистора такой путь учитывать не следует.
- Алгебраическое дополнение пути передачи находится так же, как и в случае линейных цепей.
- При нахождении знаменателя (определителя схемы) следует:

○ удалить источник энергии и измерительный прибор (источник э.д.с. и амперметр закоротить, а источник тока и вольтметр – разомкнуть);

○ заземлить любой узел схемы. Лучше заземлять узел, от которого направлено наибольшее количество унисторов, чтобы не учитывать их при нахождении определителя. Определитель, независимо от сложности схемы, следует находить путем разложения по двум узлам, один из которых – ранее заземленный.

- Если при нахождении алгебраического дополнения Δ_k в схеме, которая получилась после закорачивания пути передачи, тоже окажется унистор, находить это дополнение надо так же, как и определитель схемы.

Рассмотрим пример топологического анализа усилительного каскада на биполярном транзисторе, схема которого для переменного входного сигнала приведена на рис. 2.18.

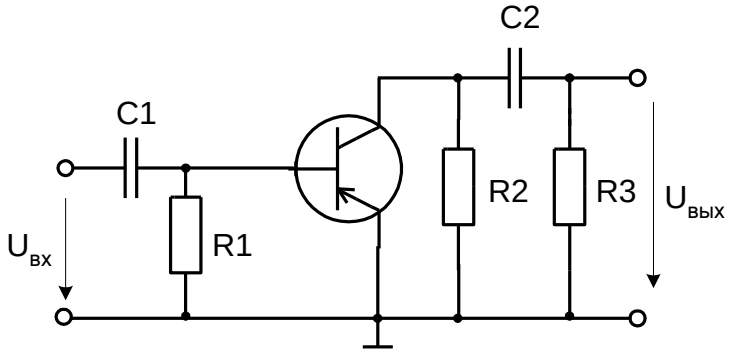


Рисунок 2.18

Пусть требуется определить коэффициент усиления входного переменного сигнала $\dot{K} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}$. В соответствии с выше приведенными правилами заменим транзистор его эквивалентной унисторной схемой и дополним схему каскада условным источником входного напряжения и условным вольтметром (рис.2.19).

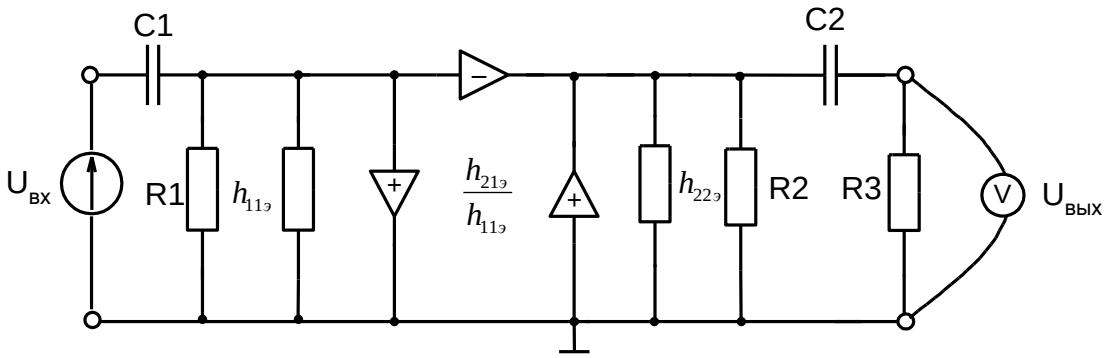


Рисунок 2.19

В схеме имеется один путь передачи, проходящий через прибор. Его величина $P_1 = -j\omega C_1 \frac{h_{21э}}{h_{11э}} j\omega C_2$. Путь проходит через все узлы схемы, поэтому его алгебраическое дополнение равно единице.

Для нахождения знаменателя закорачиваем источник входного напряжения и удаляем вольтметр. Заземляем узел, от которого направлено два унистора. В результате схема разбилась на две части, соединенные одним узлом (рис. 2.20). Во второй части унистор также направлен от заземленного узла, поэтому его не учитываем.

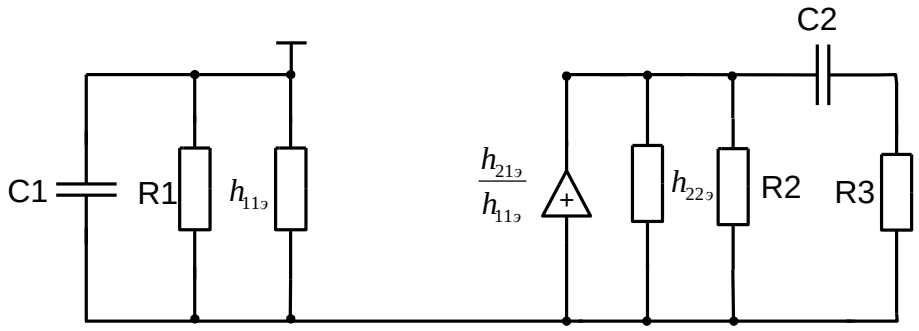


Рисунок 2.20

Определитель такой схемы равен произведению определителей отдельных частей $\Delta=\Delta_1 \cdot \Delta_2$. Первая часть представляет собой двухузловую схему, определитель которой равен сумме проводимостей между узлами

$\Delta_1 = j\omega C_1 + g_1 + \frac{1}{h_{11э}}$. Вторая часть образует треугольник, определитель которого равен $\Delta_2 = (h_{22э} + g_2)(g_3 + j\omega C_2) + j\omega C_2 g_3$.

Таким образом, определитель схемы будет равен

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2 = (j\omega C_1 + g_1 + \frac{1}{h_{11э}})\left[(h_{22э} + g_2)(g_3 + j\omega C_2) + g_3 j\omega C_2\right]$$

Окончательный результат

$$\dot{K} = \frac{-j\omega C_1 \frac{h_{21э}}{h_{11э}} j\omega C_2}{(j\omega C_1 + g_1 + \frac{1}{h_{11э}})\left[(h_{22э} + g_2)(g_3 + j\omega C_2) + g_3 j\omega C_2\right]}.$$

3 ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Анализ переходных процессов в электрических цепях относится к наиболее трудоемким аналитическим задачам. Это объясняется тем, что эти процессы описываются не обычными алгебраическими, а дифференциальными уравнениями. Классические методы решения дифференциальных уравнений усложняются необходимостью определения постоянных интегрирования (учета начальных или конечных условий), определяемых из физических соображений.

Для облегчения решения подобных задач уже многие годы используется математический аппарат (преобразование Лапласа), предложенный для этих целей в 1862г. М.Е. Ващенко-Захарченко, или же подобного рода преобразование О. Хевисайда, разработанное им в 1892г.

В 1970г. В.Т. Долбней был предложен топологический метод анализа переходных процессов, позволяющий существенно снизить трудоемкость расчетов и сократить затраты времени [2].

Рассмотрим этот метод, приняв некоторые ограничения, а именно: будем рассматривать только цепи второго порядка при воздействии на них единичного скачка возмущающего воздействия *F=const* (где *F* – величина

напряжения *E* или тока *I*). Эти ограничения обусловлены двумя обстоятельствами.

1 Переходный процесс в цепях высших порядков мало отличается от переходного процесса в цепях второго или третьего порядков. Поэтому на практике схемы высоких порядков стараются заменить упрощенными схемами второго или третьего порядков, которые затем и подвергаются анализу. Цепи порядка выше второго не имеют аналитического решения. Корни кубического уравнения или уравнения четвертой степени, полученные при помощи формул Кардано и Феррари, не пригодны для анализа, а аналитического решения уравнений пятого и более порядков вообще не существует.

2 Если располагать реакцией схемы на воздействие в виде единичного скачка напряжения (так называемой переходной характеристикой), то при помощи интегралов Дюамеля (интегралов наложения) можно получить аналитическое описание переходного процесса при воздействии на схему возмущения любого вида. Поэтому в принципе важно получить именно переходную характеристику.

Отметим, что в первом приближении порядок цепи определяется количеством имеющихся в ней реактивных элементов – катушек индуктивности и конденсаторов.

3.1 Основные положения

Топологический метод исследования переходных процессов основан на использовании формулы Мэзона в операторном виде:

$$\frac{f(p)}{F(p)} = \frac{\sum P_k(p)\Delta_k(p)}{\Delta(p)}, \qquad (3.1)$$

где $F(p)$ – лапласово изображение возмущающей функции;

$f(p)$ – лапласово изображение искомой функции времени;

$\Delta(p)$ – определитель цепи в операторной форме;

$P_k(p)$ – k-й путь передачи в операторной форме;

$\Delta_k(p)$ – алгебраическое дополнение *k*-го пути передачи в операторной форме.

Параметры схемы заменяются их изображениями: $\omega L = pL$; $\omega C = pC$.

Переходный процесс в электрической схеме описывается характеристическим уравнением, которое представляет собой определитель схемы, выраженный в операторном виде и приравненный нулю: $\Delta(p) = 0$.

Если исследуемая цепь имеет второй порядок, то знаменатель передаточной функции (3.1) (ее характеристический полином) в общем случае имеет вид

$$\Delta(p) = p^2 + 2\alpha + \omega_0^2. \qquad (3.2)$$

Корни полинома $p_1 = -\alpha + \beta;\ p_2 = -\alpha - \beta$. (3.3)

Числитель, в соответствии с формулой (3.1), представляет собой сумму произведений путей передачи для искомой переменной и их алгебраических дополнений в операторном виде.

Введем новые понятия.

- *Начальные и конечные состояния реактивных элементов*

В начальный момент времени после приложения к цепи единичного скачка напряжения или тока катушка индуктивности ведет себя как разрыв цепи (тока в ней нет). Назовем это состояние начальным состоянием катушки. В установившемся режиме идеальную катушку индуктивности можно полагать закороченной. Это состояние катушки назовем конечным. Аналогично начальное состояние конденсатора – закороченное, конечное – разомкнутое.

Таким образом, в электрической схеме реактивные элементы могут находиться в двух крайних состояниях. Исходя из этого, назовем *начальной схемой* схему, в которой все реактивные элементы приведены в начальное состояние, а *конечной схемой* – схему, в которой все реактивные элементы приведены в конечное состояние.

Рассмотрим методику определения коэффициентов характеристического уравнения (3.2) α и ω_0^2 для цепей второго порядка:

$$\alpha = \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{\tau_i}; \quad \omega_0^2 = \frac{\Delta_к}{\Delta_н П_N}, \tag{3.4}$$

где

τ_i – постоянная времени контура, образованного одним из реактивных элементов и остальной частью схемы, при условии, что все прочие реактивные элементы находятся в начальном состоянии (конденсаторы закорочены, а катушки индуктивности удалены из схемы);

$\Delta_к$ – определитель конечной схемы;

$\Delta_н$ – определитель начальной схемы;

$П_N$ – произведение величин всех реактивных элементов, входящих в схему.

- *Специальные функции*

Зная корни характеристического уравнения, можно определить так называемые специальные функции [2], которые характеризуют переход схемы из начального состояния в конечное. Назовем их «синус-функцией» ($Sf(t)$) и «косинус-функцией» ($Cf(t)$).

При вещественных корнях характеристического уравнения, когда $\alpha^2 > \omega_0^2$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ – вещественное, и переходный процесс в схеме будет апериодическим. Значения специальных функций в этом случае будут определяться выражениями (3.5).

$$Sf(t) = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} sh\beta t;$$

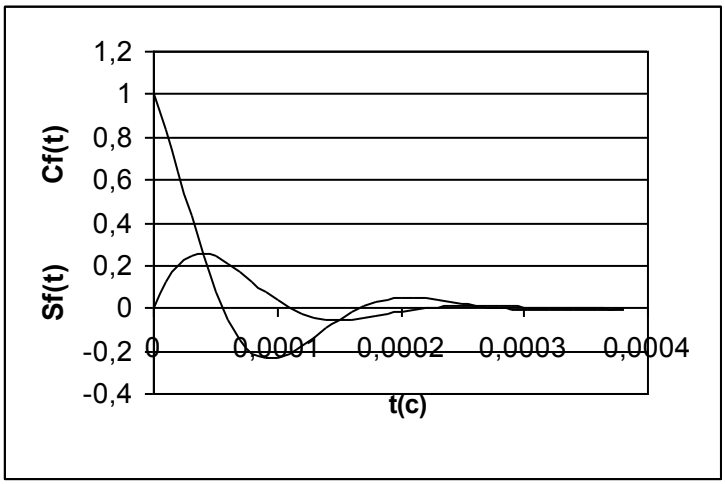
$$Cf(t) = e^{-\alpha t} ch\beta t. \tag{3.5}$$

Если же при подстановке численных значений параметров схемы в выражения (3.4) окажется, что $\alpha^2 < \omega_0^2$, т.е. $\beta = j\omega$, корни уравнения будут комплексными, и изменение специальных функций во времени имеет колебательный характер. В этом случае $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ и специальные функции примут вид:

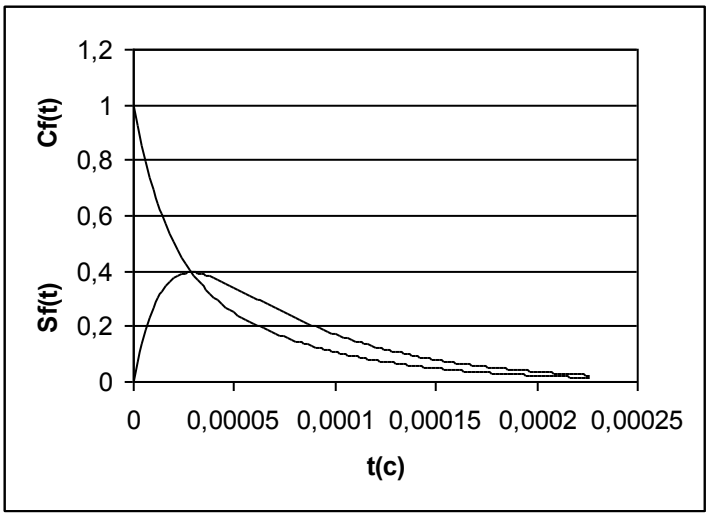
$$Sf(t) = \frac{\alpha}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t;$$

$$Cf(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t. \qquad (3.6)$$

На рис. 3.1,а изображены типичные специальные функции колебательного характера, а на рис. 3.1,б – апериодического.



а



б

Рисунок 3.1

Отметим, что $Sf(0)=0;\ Cf(0)=1;\ Sf(\infty)=Cf(\infty)=0$ независимо от характера переходного процесса.

3.2 Универсальная топологическая формула

Универсальная топологическая формула для анализа переходных процессов в любых цепях второго порядка при воздействии постоянного во времени возмущения *F=const* имеет вид:

$$f(t)=f(\infty)+\left[\frac{FA_1}{\alpha B_0}-f(0)-f(\infty)\right]Sf(t)+\left[f(0)-f(\infty)\right]Cf(t). \qquad (3.7)$$

Значения входящих в эту формулу величин $f(0)$ и $f(\infty)$ легко определяются по внешнему виду цепи в начале переходного процесса, когда катушки индуктивности полагаем удаленными из схемы, а конденсаторы закороченными (для $f(0)$) и в конце его, когда, наоборот, катушки индуктивности полагаем закороченными, а конденсаторы – удаленными из схемы (для $f(\infty)$).

Коэффициент B_0 находится из выражения

$$B_0=\Delta_н \Pi_C, \qquad (3.8)$$

где $П_C$– произведение величин емкостей всех конденсаторов, имеющихся в схеме. Обычно цепи второго порядка содержат два реактивных элемента (если предварительно выполнить элементарные топологические преобразования, например, замену параллельного или последовательного соединения нескольких однотипных реактивных элементов одним):

- либо два конденсатора $C1$ и $C2$, тогда $B_0 = \Delta_н C_1 C_2$;
- либо две катушки индуктивности L_1 и L_2; $B_0 = \Delta_н$;
- либо один конденсатор и катушку C и L, $B_0 = \Delta_н C$.

Под коэффициентом A_1 понимают такие слагаемые пути передачи (с учетом алгебраического дополнения), в которых оператор p находится в степени s-1 (p^{s-1}), где s – количество конденсаторов в схеме. Таким образом, если в схеме есть два конденсатора, A_1 будет коэффициентом слагаемого, включающего одну из емкостей. Если в схеме один конденсатор и одна катушка индуктивности, то при слагаемом с A_1 не будет оператора p: либо в нем нет величин реактивных элементов вообще, либо оно содержит отношение $\frac{C}{L}$. Если в схеме нет конденсаторов, т.е. s=0, A_1 включает в себя одну из индуктивностей L_1 или L_2. Сам оператор p в выражение для A_1 не входит.

Отметим, что коэффициенты универсальной формулы $\alpha, \beta, \omega_0^2, B_0$ определяются по виду схемы и одинаковы для любой переходной переменной. Коэффициент же A_1, а также величины $f(0)$ и $f(\infty)$ определяются конкретной переходной переменной и для разных переходных переменных будут различными.

3.3 Топологический анализ переходных процессов в цепях с нулевыми начальными условиями

Пусть в схеме (рис. 3.2), содержащей конденсатор C и катушку индуктивности L при нулевых начальных условиях, замыкается ключ K. Требуется найти возникающий после этого переходный ток в какой-либо

ветви или переходное напряжение между какими-либо двумя узлами. Предварительно найдем значения коэффициентов, входящих в универсальную топологическую формулу, полагая закороченным источник напряжения *E*, как это принято при топологическом анализе.

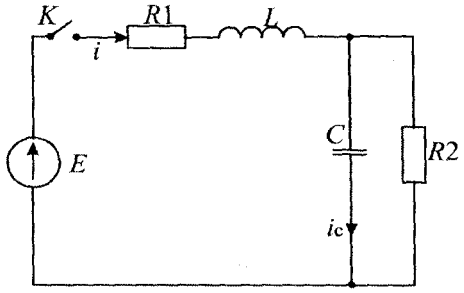


Рисунок 3.2

Рассматривая поочередно реактивные элементы *L* и *C*, находим соответствующие постоянные времени. Так, приводя в начальное состояние конденсатор *C* (т.е. закорачивая его), убеждаемся, что катушка *L* входит в контур вместе с резистором *R*1, следовательно, постоянная времени $\tau_1 = \frac{L}{R_1}$.

Если же привести в начальное состояние катушку индуктивности *L* (т.е. удалить её из схемы), замечаем, что конденсатор *C* входит в контур вместе с резистором *R*2, т. е. $\tau_2 = CR_2$. Используя выражение (3.4), получаем

$$\alpha = \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2}\right).$$

При приведении реактивных элементов в начальное состояние убеждаемся, что в схеме остается лишь резистор *R*1, следовательно, определитель начальной схемы $\Delta_н = \frac{1}{R_1} = g_1$. При конечном же состоянии реактивных элементов в схеме образуется параллельное соединение резисторов *R*1 и *R*2, т.е. определитель конечной схемы имеет вид

$$\Delta_к = g_1 + g_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Отсюда по выражению (3.4) находим

$$\omega_0^2 = \frac{\Delta_к}{LC\Delta_н} = \frac{R_1 + R_2}{LCR_2}.$$

Далее определяем $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ или $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ в зависимости от того, каково соотношение между α и ω_0 при подстановке численных значений параметров схемы. Затем, учитывая, что в схеме один конденсатор, из выражения (3.8) получаем $B_0 = \Delta_н C = g_1 C;\ s = 1.$

Теперь приступаем к определению какой-либо переходной величины.

Пусть нужно найти переходный ток в конденсаторе $i_C(t)$. В начальный момент, когда катушку L можно считать удаленной, а конденсатор C закороченным, ток в конденсаторе $i_C(0) = f(0) = 0$. В конце переходного процесса (катушка L закорочена, конденсатор C удален) $i_C(\infty) = f(\infty) = 0$.

Для нахождения коэффициента A_1 нужно взять лишь такое слагаемое пути передачи, которое содержит оператор p в степени $(s-1)$, т.е. в конкретном случае – в нулевой. Такой путь передачи имеется, он состоит из одного слагаемого и равен $\frac{g_1 C}{L}$.

Подставляя все найденные значения в формулу (3.7), получаем ответ:

$$i_C(t) = \frac{Eg_1 C}{\alpha L g_1 C} Sf(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} sh\beta t,$$

или

$$i_C(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

в зависимости от соотношения между α и ω_0, что может быть выяснено только после подстановки численных значений параметров.

Пусть в этой же схеме нужно определить ток $i(t)$, протекающий через резистор $R1$. В этом случае $f(0) = i(0) = 0;\ f(\infty) = i(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2}$. В сумме

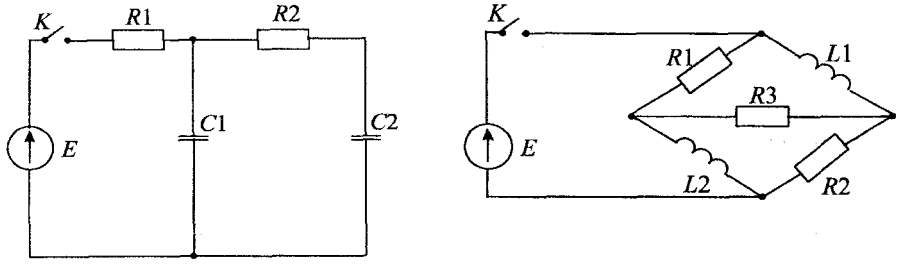
путей передачи $g_1\dfrac{C}{L}+\dfrac{g_1g_2}{pL}$ есть слагаемое (первое), содержащее оператор p в нулевой степени, т.е. $A_1=g_1\dfrac{C}{L}$. Следовательно,

$$i(t)=\frac{E}{R_1+R_2}+\left(\frac{Eg_1C}{\alpha g_1CL}-\frac{E}{R_1+R_2}\right)Sf(t)+\left(\frac{E}{R_1+R_2}\right)Cf(t)=$$

$$=\frac{E}{R_1+R_2}+\left(\frac{E}{\alpha L}-\frac{E}{R_1+R_2}\right)\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}sh\beta t-\frac{E}{R_1+R_2}e^{-\alpha t}ch\beta t\,.$$

Как видим, время, затрачиваемое на получение решения, почти не превышает времени, затрачиваемого просто на запись окончательного ответа.

Рассмотрим пример анализа схемы с двумя конденсаторами (рис.3.3,а).



а б

Рисунок 3.3

Здесь $\alpha=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}+\dfrac{1}{C_2R_2}\right]$; $\omega_0^2=\dfrac{1}{C_1C_2R_1R_2}$; $B_0=C_1C_2$; $s=2$.

Пусть требуется найти напряжение $u_{C2}(t)$ на конденсаторе $C2$. В этом случае $f(0)=0;\ f(\infty)=E$. Коэффициент A_1 должен содержать оператор p в степени s-1=1. В единственном пути передачи g_1g_2 оператор p отсутствует. Следовательно, A_1=0 и $u_{C2}(t)=E-ESf(t)-ECf(t)$.

Если же нужно найти напряжение на конденсаторе $C1$, то $A_1 = g_1 C_2$. Как и ранее, $f(0) = 0;\ f(\infty) = E$ и

$$u_{C1}(t) = E + \left(\frac{E}{\alpha R_1 C_1} - E \right) Sf(t) - ECf(t).$$

Рассмотрим еще одну цепь второго порядка, не содержащую конденсаторов (рис.3.3,б). Для этой схемы

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R_2(R_1 + R_3)}{L_1(R_1 + R_2 + R_3)} + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{L_2(R_1 + R_2 + R_3)} \right) =$$

$$= \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}\left(\frac{R_2(R_1 + R_3)}{L_1} + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{L_2} \right);$$

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 R_2 R_3}{L_1 L_2 (R_1 + R_2 + R_3)};\ \ B_0 = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3};\ \ s = 0.$$

Если требуется найти ток i в резисторе $R3$, то $i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$; $i(\infty) = -\frac{E}{R_3}$. Из двух путей передачи $g_1 g_2 g_3$ и $-\frac{g_3}{p^2 L_1 L_2}$ ни один не подходит, так как A_1 – это коэффициент слагаемого с $p^{s-1} = p^{-1}$. Поэтому A_1=0 и

$$i(t) = -\frac{E}{R_3} + \left(\frac{E}{R_3} - \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \right) Sf(t) + \left(\frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{E}{R_3} \right) Cf(t).$$

Если нужно найти ток в катушке $L1$, то $i_{L_1}(0) = 0;\ i_{L_1}(\infty) = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3}$.

Из двух путей передачи первый путь $\frac{g_3}{p^2 L_1 L_2}$ не подходит, так как оператор p должен иметь степень -1, второй же путь $\frac{g_2}{pL_1}$ имеет алгебраическое

дополнение $g_1 + g_3 + \frac{1}{pL_2}$. Первое и второе слагаемые произведения этого пути и его дополнения $\frac{g_1 g_2}{pL_1} + \frac{g_2 g_3}{pL_1} + \frac{g_2}{p^2 L_1 L_2}$ определяют A_1:

$$A_1 = \frac{g_2(g_1 + g_3)}{L_1} = \frac{R_1 + R_3}{L_1 R_1 R_2 R_3}.$$

Отсюда

$$i_{L_1}(t) = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} + \left(\frac{E(R_1 + R_3)}{\alpha L_1 (R_1 + R_2 + R_3)} - \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} \right) Sf(t) - \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} Cf(t).$$

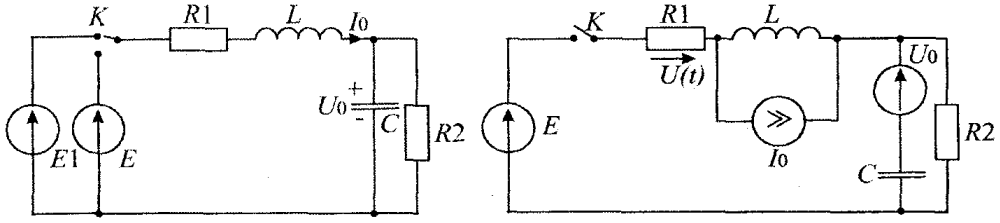
Необходимо помнить, что в цепях, содержащих реактивные элементы одного вида (только катушки индуктивности или только конденсаторы), колебательного процесса быть не может. В этих случаях всегда $\alpha > \omega_0$.

3.4 Топологический анализ переходных процессов в цепях с ненулевыми начальными условиями

Рассмотрим теперь, как выполнять топологический анализ переходных процессов в цепях с ненулевыми начальными условиями.

Допустим, что в рассматриваемой ранее схеме действуют два источника напряжения (рис.3.4, а). При подключении к схеме источника E_1 через какое-то время в катушке индуктивности установится ток $I_0 = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$, а конденсатор зарядится до напряжения $U_0 = \frac{E_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Если перевести ключ в другое положение, к схеме подключится другой источник напряжения E. Но в катушке индуктивности в этот момент будет существовать ток I_0, а конденсатор будет заряжен напряжением U_0. Эти две величины и определяют ненулевые начальные условия, существующие к моменту подключения к схеме нового источника напряжения E, как это принято при топологическом анализе.



а б

Рисунок 3.4

Один из известных способов учета ненулевых начальных условий состоит в том, что схему приводят к нулевым начальным условиям, заменяя катушку L с током I_0 обесточенной катушкой с параллельно соединенным с ней условным источником тока I_0, а заряженный напряжением U_0 конденсатор C – разряженным конденсатором, соединенным последовательно с условным источником напряжения U_0 (рис.3.4, б). Затем анализируют схему, как в случае с нулевыми начальными условиями, но при воздействии на нее трех источников энергии: E, I_0 и U_0. При этом величины I_0 и U_0 полагаются постоянными и неизменными на протяжении всего переходного процесса. При анализе используют принцип наложения, определяя реакцию схемы на каждое из воздействий, закорачивая остальные источники напряжения и размыкая остальные источники тока. Полученные результаты суммируют.

Анализ снова начинаем с определения α, ω_0^2, B_0 и s по виду схемы при закороченных источниках напряжения E и U_0 и с разомкнутым источником тока I_0. Как и ранее, получим

$$\alpha = \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2}\right);\ \ \omega_0^2 = \frac{R_1 + R_2}{LCR_2};\ \ B_0 = g_1 C;\ \ s = 1.$$

Пусть требуется найти переходное напряжение $u(t)$ на резисторе R_1. При определении $f(0)$ полагаем катушку L удаленной, а конденсатор C закороченным. При этом $u(0) = R_1 I_0$. В установившемся режиме считаем

катушку L закороченной, а конденсатор C удаленным. При этом источники I_0 и U_0 в схеме не действуют (I_0. закорочен, цепь для U_0 разомкнута) и

$$u(\infty) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}.$$

В универсальной топологической формуле под F понимаем (в соответствии с принципом наложения) сумму воздействий от E, I_0 и U_0 с определением для каждого из них своего коэффициента A_1.

Так, от E имеем два пути передачи: $\frac{C}{L}$ и $\frac{g_2}{pL}$. Из них принимается во внимание только путь $\frac{C}{L}$, не содержащий оператор p. От источника I_0 из двух путей pC и g_2 принимаем во внимание только последний. Подходит также и единственный путь от источника U_0, равный $-\frac{C}{L}$. Таким образом,

$$u(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} + \left(\frac{EC}{\alpha L g_1 C} + \frac{I_0 g_2}{\alpha g_1 C} - \frac{U_0 C}{\alpha L g_1 C} - R_1 I_0 - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \right) Sf(t) +$$

$$+ \left(R_1 I_0 - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \right) Cf(t)$$

или, в более компактной форме,

$$u(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} + \left[\frac{E - U_0}{\alpha L} + \left(\frac{1}{\alpha C R_2} - 1 \right) I_0 - \frac{E}{R_1 + R_2} \right] R_1 Sf(t) +$$

$$+ \left[I_0 - \frac{E}{R_1 + R_2} \right] R_1 Cf(t).$$

3.5 Универсальная топологическая формула для частных случаев цепей второго порядка

3.5.1 Наличие кратных корней характеристического уравнения

Отметим, что при наличии кратных корней применение классического метода анализа с помощью теоремы разложения невозможно (знаменатель изображения обращается в нуль). При применении же топологического метода проблем не возникает.

В выражении для определения корней характеристического уравнения $p_1 = p_2 = -\alpha \pm \beta$ полагаем β=0. При этом специальные функции примут следующие значения:

$$Cf(t) = e^{-\alpha t} ch\beta t = e^{-\alpha t};$$

$$Sf(t) = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} sh\beta t = \frac{\alpha t}{\beta t} e^{-\alpha t} sh\beta t = \alpha t e^{-\alpha t}.$$

Здесь в выражении для *Cf(t)* учитываем, что *ch*(0)=1, а в выражении для *Sf(t)* умножим числитель и знаменатель на *t* и используем первый замечательный предел: $\lim\limits_{\beta t \to 0} \frac{sh\beta t}{\beta t} = 1.$

Вид специальных функций соответствует апериодическому характеру переходного процесса, а универсальная топологическая формула (3.7) принимает вид:

$$f(t) = f(\infty) + \left[\frac{FA_1}{\alpha B_0} - f(0) - f(\infty) \right] \alpha t e^{-\alpha t} + \left[f(0) - f(\infty) \right] e^{-\alpha t}.$$

3.5.2 Цепь с малым затуханием (α→0)

Пусть декремент затухания цепи очень мал ($\alpha \to 0$). Тогда $\beta \to j\omega_0$ ($\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$). При этом второе слагаемое универсальной формулы (3.7) примет вид $\frac{FA_1}{\alpha B_0} \cdot \frac{\alpha}{j\omega_0} \cdot e^{-\alpha t} \cdot shj\omega_0 t = \frac{FA_1}{B_0 \omega_0} \cdot \frac{shj\omega_0 t}{j} = \frac{FA_1}{B_0 \omega_0} \sin \omega_0 t$ (здесь использована подстановка $\frac{shjx}{j} = \sin x$).

Для третьего слагаемого используем подстановку $chjx = \cos x$.

В итоге универсальная топологическая формула примет следующий вид:

$$f(t) = f(\infty) + \left[\frac{FA_1}{\omega_0 B_0}\right]\sin\omega_0 t + \left[f(0) - f(\infty)\right]\cos\omega_0 t .$$

3.6 Универсальная топологическая формула для цепи первого порядка

В заключение приведем без вывода формулу для определения переходных переменных для цепей первого порядка:

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(0) - f(\infty)\right]e^{-2\alpha t} .$$

Рассмотрим пример ее применения.

Пусть необходимо определить изменение во времени напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ в схеме (рис. 3.5) после замыкания ключа *K*.

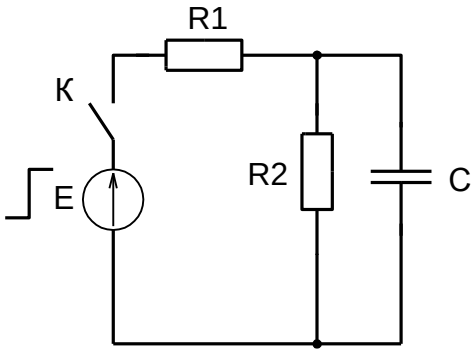


Рисунок 3.5

Найдем выражение для 2α:

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C ;$$

$$2\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} .$$

Установившееся значение искомой переменной (при разомкнутом конденсаторе) $u_C(\infty) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}$, а ее начальное значение (при закороченном конденсаторе) $u_C(0) = 0$. Таким образом, искомую переходную переменную можно определить по следующему выражению:

$$u_C(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} - \frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-2\alpha t} =$$

$$= \frac{ER_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}) \quad .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы/ Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 620 с.

2. Долбня В.Т. Топологические методы исследования переходных процессов в электрических и электронных цепях: Учеб. пособие. – Харьков: Харьк. политехн. ин-т, 1982. – 84 с.

3. Долбня В.Т. Топологический анализ и синтез электрических и электромеханических систем: Монография. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005. – 356 с.

Навчальне видання

МИЛАНІЧ Тетяна Вікторівна

СУЧАСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОННИХ СХЕМ

Навчально-методичний посібник

Російською мовою

Роботу до друку рекомендував В.І. Мілих

В авторській редакції

План 2007 р., п. 9 /17-08

Підп. до друку 24.01.2008 р. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Папір офсетн. Riso-друк.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 4,5. Обл.-вид. арк. 5,5.
Наклад 200 прим. Зам №.48. Ціна договірна

Видавничий центр НТУ „ХПІ”
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул.. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ „ХПІ” Харків, вул. Фрунзе, 21