

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**Конкін В.М.**

**Киркач Б.М.**

**Погорілов С.Ю.**

**Кравцова Н.В.**

**„РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ  
ЗГИНАННІ”**

Навчально-методичний посібник з розділу курсу „Опір матеріалів”  
для студентів машинобудівних спеціальностей

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 14.05.2003р.

Харків 2003

ББК 30.121  
К64  
УДК 620.17

Р е ц е н з е н т и : канд-т техн. наук, доц. В.Г.Сукіасов (Національний технічний університет „Харківський політехнічний інститут”),

канд-т техн. наук, доц. О.О.Чупринін (Харківська державна академія міського господарства)

Автори: Киркач Б.М.  
Конкін В.М.  
Погорілов С.Ю.  
Кравцова Н.В.

Розрахунки на міцність та жорсткість при згинанні. Навчально – методичний посібник з розділу курсу „Опір матеріалів” для студентів машинобудівних спеціальностей. –Харків: НТУ „ХПІ”, 2003 – с.

У першому розділі посібника розглянуто згинання прямолінійних стержнів, визначення внутрішніх силових факторів при прямому поперечному згинанні. У другому розділі розглянуто визначення нормальних напружень при чистому згинанні, дотичних напружень при поперечному згинанні балок, наведено розрахунки на міцність з урахуванням нормальних і дотичних напружень. У третьому розділі розглянуто визначення переміщень при прямому згинанні з використанням диференційного рівняння пружної лінії та інтеграла Мора. У четвертому розділі надаються розрахункові схеми та чисельні дані для виконання індивідуальних розрахунково–проектувальних завдань, а також приклади їх розв’язання та оформлення.

Посібник призначений для студентів машинобудівних спеціальностей. Може бути корисним для викладачів, а також для аспірантів та наукових працівників, які у своїй практичній діяльності зустрічаються з необхідністю розрахунків прямолінійних стержнів на прямий поперечний згин.

Іл. 37. Табл. 3. Бібліогр. 2 назв.

ББК 30.121

## Вступ

# 1 Згинання прямолінійних стержнів

## 1.1 Класифікація згинання та типи опор

Згинанням називається тип деформування стержня, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти.

**Класифікація згинання.** Згинання підрозділяється на поперечне – зовнішнє навантаження діє в напрямку, перпендикулярному осі стержня, подовжнє – зовнішні сили діють уздовж осі стержня та подовжньо – поперечне.

Поперечне згинання підрозділяється на плоске, при якому згинальні сили лежать в одній площині, та просторове, при якому зовнішні згинальні сили довільно орієнтовані у просторі.

Плоске згинання підрозділяється на пряме та косе. У випадку прямого згинання площина дії згинальних навантажень збігається з однією з головних осей інерції перерізу. На рис 1.1 показаний випадок навантаження стержня при прямому поперечному згинанні. Зовнішні сили розташовані у площині  $YOZ$ , що збігається з головною віссю перерізу  $Y$ . При косому згинанні площина дії згинальних навантажень не збігається з жодною з головних осей інерції.

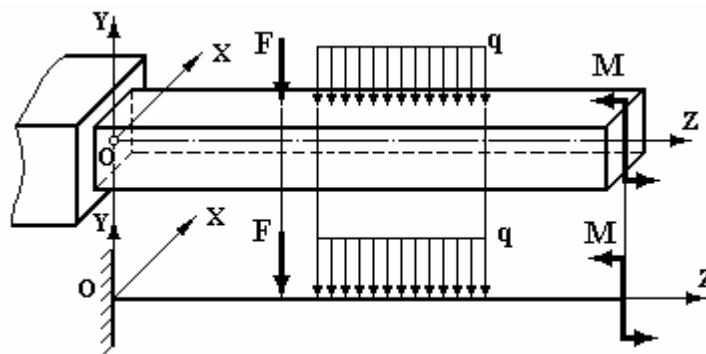


Рис. 1

З прямого поперечного згинання ( $Q_y \neq 0$  і  $M_x \neq 0$ ) виділяється чисте згинання, при якому поперечна сила  $Q_y$  дорівнює нулю, а згинальний момент  $M_x$  є єдиним внутрішнім силовим фактором у перерізу стержня і виявляється постійним на ділянці стержня.

*Розглянемо згинання балок.* Балкою називається стержень, закріплений на опорах та працюючий на згинання. Кількість зовнішніх зв'язків в опорах забороняє переміщення балки як твердого цілого. Плоскі опори балок та реактивні зусилля в них показані на рис. 2.

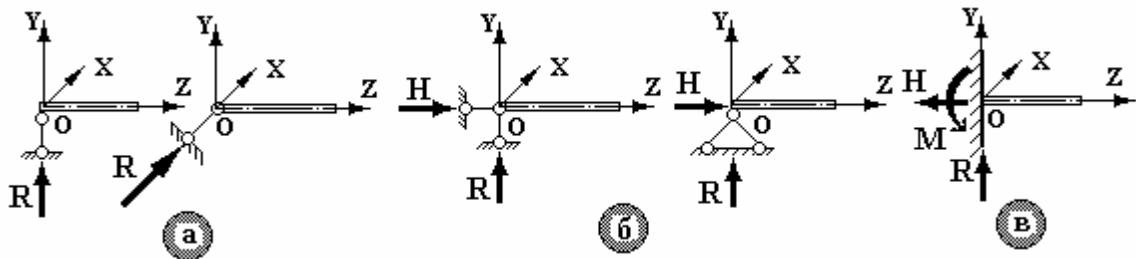


Рис. 2.

У шарнірно-рухомій опорі (рис. 2а) виникає одна реактивна сила  $R$ , що діє перпендикулярно поверхні опори (у напрямку показаного зв'язку). У шарнірно-нерухомій опорі (рис. 2б) виникають дві складових реакції: вертикальна  $R$  і горизонтальна  $H$ . У затисненні (жорсткому затисненні) (рис. 1.2в), виникають три складових: вертикальна  $R$ , горизонтальна  $H$  і момент  $M$ .

Для кінематичної незмінюваності плоских балок необхідна кількість зовнішніх зв'язків три, причому при плоскому згинанні горизонтальна складова  $H$  реакції в шарнірно-нерухомій опорі тотожно дорівнює нулю. Тому надалі використовуємо два рівняння рівноваги. Якщо кількість зовнішніх поперечних зв'язків більше двох, то така балка називається

статично невизначуваною (багатоопорною). Типи і найменування балок, що зустрічаються, показані на рис. 3.

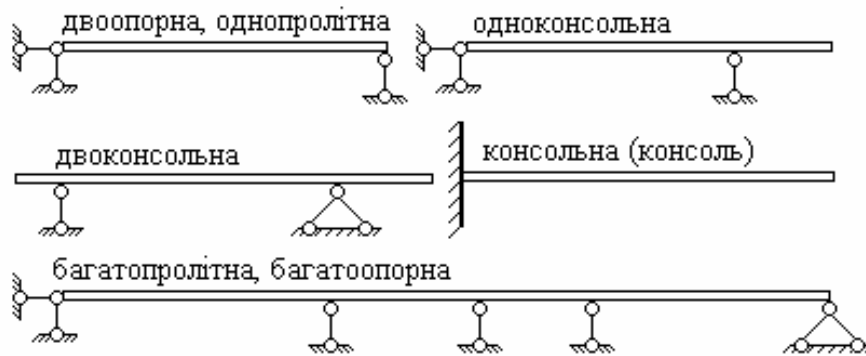


Рис. 3.

## 1.2 Поперечна сила $Q_y$ та згинальний момент $M_x$ , як внутрішні силові фактори при згинанні.

Проаналізуємо внутрішні силові фактори у поперечному перерізі балки при прямому поперечному згинанні, а потім сформулюємо основні **правила побудови епюр  $Q_y$  і  $M_x$** .

Розглянемо консольний стержень з затисненим правим торцем та навантажений силами  $F_1$  і  $F_2$  (рис 1.4). Нехай  $F_1 > F_2$ .

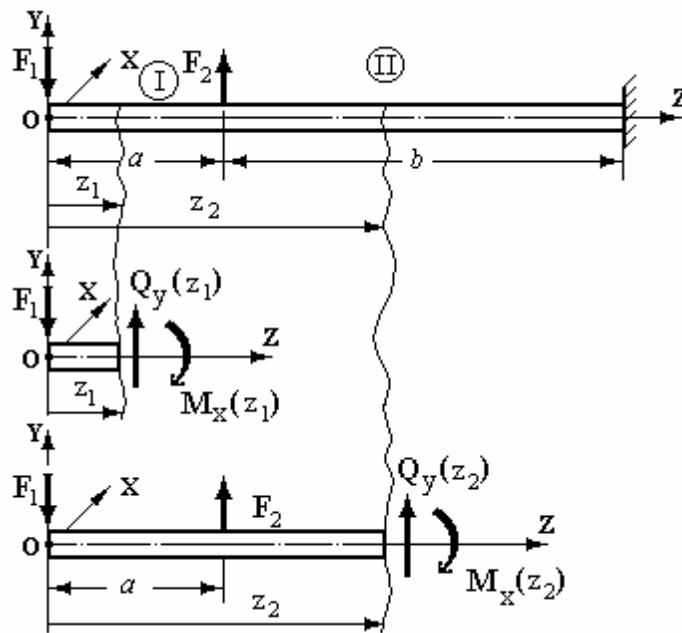


Рис. 1.4.

Скористаємося методом перерізів. Виберемо переріз на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінімо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами  $Q_y$  і  $M_x$ . З умов статички (суми проєкцій сил на вісь Y та суми моментів відносно осі X, що проходить через центр ваги розглянутого перерізу) визначимо їхні значення.

1 ділянка:  $\Sigma F_i = -F_1 + Q_y(z_1) = 0$ , відкіля  $Q_y(z_1) = F_1$ ;

$$\Sigma M_i = F_1 \cdot z_1 - M_x(z_1) = 0, \text{ відкіля } M_x(z_1) = F_1 \cdot z_1.$$

2 ділянка,  $\Sigma F_i = -F_1 + F_2 + Q_y(z_2) = 0$ , відкіля  $Q_y(z_2) = F_1 - F_2$ ;

$$\Sigma M_i = F_1 \cdot z_2 - F_2 \cdot (z_2 - a) - M_x(z_2) = 0, \text{ відкіля } M_x(z_2) = F_1 \cdot z_2 - F_2 \cdot (z_2 - a).$$

Використовуючи такі позначення, сформулюємо наступні правила для визначення поперечної сили та згинального моменту при згинанні.

***Поперечна сила в даному перерізі –  $Q_y(z)$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на нормаль (вісь Y) до осі стержня всіх сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх однобічних сил), та***

утворює заміну дії відкинутої частини на залишену. Правило знаків. Поперечна сила вважається позитивною (додатною), якщо обертає розглянуту відсічену частину балки відносно центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, та негативною (від'ємною) - якщо проти годинникової стрілки.

Згинальний момент в даному перерізі –  $M_x(z)$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо центра ваги перерізу всіх сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх однобічних сил), та утворює заміну дії відкинутої частини на залишену. Правило знаків.

Згинальний момент вважається позитивним (додатним), якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте внизу), та негативним (від'ємним)- якщо навпаки. Таким чином, епюра згинальних моментів будується з боку стиснутого волокна.

Схематично прийняті правила знаків виглядають так:

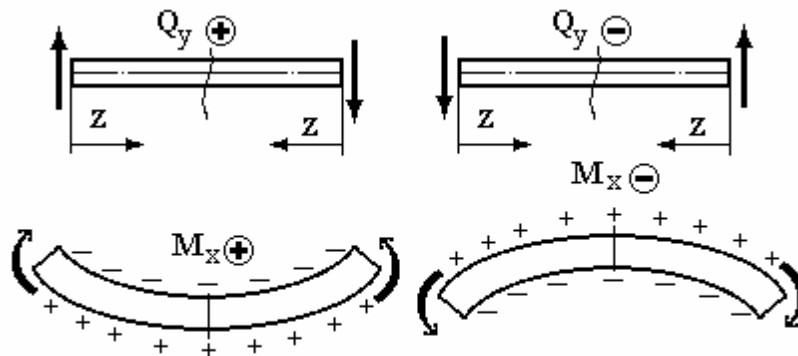


Рис. 1.5.

### 1.3 Диференціальні залежності при згинанні

Розглянемо балку, навантажену довільним розподіленим навантаженням  $q(z)$  (рис.1.6а). В перерізі на відстані  $z$  виділимо елемент довжиною  $dz$  (рис.1.6а). В перерізі I діють внутрішні силові фактори  $Q_y$  і  $M_x$ , в перерізі II на відстані  $dz$  від першого діють внутрішні зусилля  $Q_y + dQ_y$  і  $M_x + dM_x$ . У межах нескінченно малого  $dz$  навантаження  $q(z)$  можна вважати рівномірним розподіленим та рівним  $q$ .

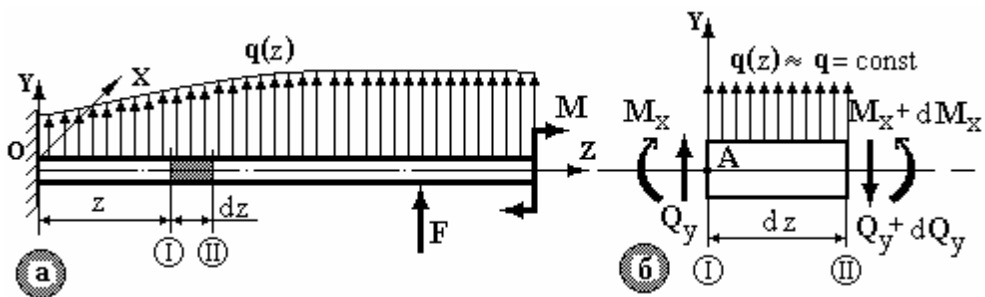


Рис. 1.6.

Оскільки балка під дією зовнішнього навантаження знаходиться в рівновазі, то і кожен її елемент під дією зовнішніх та внутрішніх зусиль також знаходиться в рівновазі (рис.1.6б).

Запишемо умови статички:

1.  $\sum F_y = 0$ ;  $Q_y - Q_y - dQ_y + qdz = 0$ , відкіля  $qdz - dQ_y = 0$ , отже

$$q = \frac{dQ_y}{dz} \quad (1.1)$$

2.  $\sum M_A = 0$  ;  $-M_x + q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - (Q_y + dQ_y) \cdot dz + M_x + dM_x = 0$ ,

приводячи подібні члени та зневажаючи нескінченно малими другого порядку в порівнянні з нескінченно малими першого порядку, одержимо:  $-Q_y dz + dM_x = 0$ , відкіля:



$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}. \quad (1.2)$$

3. Підставляючи вираз (1.2) у залежність (1.1), одержимо :

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2M_x}{dz^2}. \quad (1.3)$$

Диференціальні залежності (1.2) і (1.3) дозволяють установити деякі особливості розподілів поперечних сил та згинальних моментів. **Приведені нижче правила можуть використовуватися для побудови та перевірки епюр  $M_x$  і  $Q_y$ .**

1. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє ( $q=0$ ), епюра  $Q_y$  постійна, а епюра  $M_x$  представляє лінійну функцію.
2. На ділянках з рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  епюра  $Q_y$  лінійна, а епюра  $M_x$  - квадратна парабола, причому опуклість параболи спрямована в протилежну сторону дії розподіленого навантаження. У точці  $z = z^*$ , де поперечна сила  $Q_y(z^*) = 0$  (змінює знак), момент  $M_x$  досягає екстремального значення ( $M_{x\max}, M_{x\min}$ ).
3. На ділянках, де  $Q_y = 0$ , епюра  $M_x$  постійна.
4. Наступні пункти сформульовані для правої осі  $z$  (для правої системи координат). На ділянці, де поперечна сила  $Q_y$  позитивна, епюра моменту  $M_x$  зростає, і убуває - якщо  $Q_y$  негативна.
5. У перерізах, де до балки прикладені зовнішні зосереджені сили:
  - а) на епюрі  $Q_y$  спостерігаються стрибки на їхню величину й у напрямку прикладених зосереджених сил ;
  - б) на епюрі  $M_x$  з'являються злами, причому вістря зламів спрямовані проти дії зосереджених сил.

6. У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $M_x$  спостерігаються стрибки на величини цих моментів.
7. Епюра  $Q_y$  являє собою діаграму першої похідної від функції моменту  $M_x$ , тобто ординати  $Q_y$  пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюрі  $M_x$ .

Далі розглянемо приклади побудови епюр поперечних сил  $Q_y$  та згинальних моментів  $M_x$ .

### Приклад 1.

Показуємо поточний переріз з координатою  $z$  (рис. 1.7), межі її зміни, записуємо функції  $Q_y$  і  $M_x$ . При обліку рівномірно розподіленого навантаження  $q$  використовуємо такий спосіб: заміняємо його зосередженою  $q \cdot z$  силою, прикладеною у середині ділянки (плече зосередженої сили  $0,5z$ ).

$0 \leq z \leq \ell \Rightarrow Q_y(z) = q \cdot z; M_x(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2}$ . Далі обчислюємо значення  $Q_y$  і

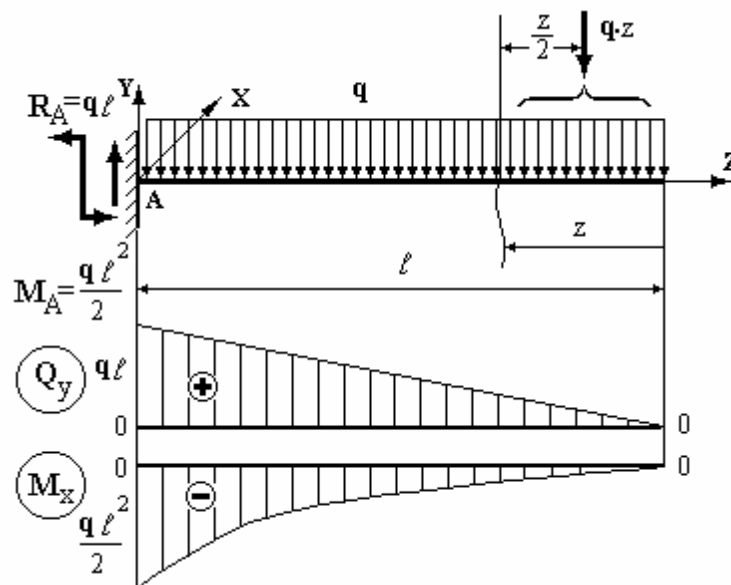


Рис. 1.7.

$M_x : z = 0 \Rightarrow Q_y = 0 ; M_x = 0 ; z = \ell \Rightarrow Q_y = q \cdot \ell ; M_x = -\frac{q \cdot \ell^2}{2}$ . По епюрі, використовуючи правила перевірки, визначаємо опорні реакції  $R_A$  і  $M_A$ . Реакція  $R_A = q \cdot \ell$  дорівнює величині стрибка на епюрі  $Q_y$  в цьому перерізі та спрямована нагору, тому що  $Q_y$  позитивна. Якщо будувати епюру  $Q_y$ , йдучи ліворуч, реакція  $R_A$  повинна давати позитивне значення  $Q_y$ , тобто повинна бути спрямована нагору. З умов статки  $\sum F_{yi} = R_A - q \cdot \ell = 0$  одержуємо те ж саме значення  $R_A = q \cdot \ell$ .

На епюрі  $M_x$  в затисненні скачок моменту на величину  $\frac{q \cdot \ell^2}{2}$ , отже

$M_A = \frac{q \cdot \ell^2}{2}$ . Так як  $M_x$  в затисненні негативний, то  $M_A$  повинний бути

спрямований проти годинникової стрілки. З умови статки

$$\sum M_{Ai} = -q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} + M_A = 0 \text{ одержуємо: } M_A = \frac{q \cdot \ell^2}{2}.$$

## Приклад 2.

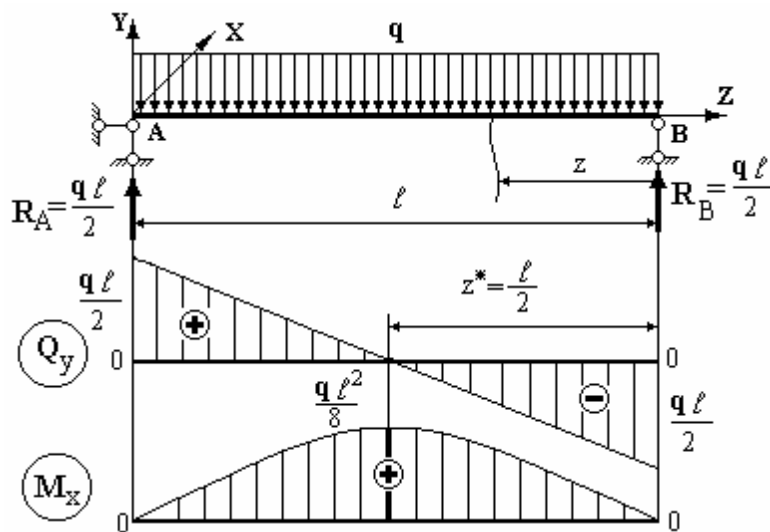


Рис. 1.8.

1. Визначаємо опорні реакції.

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot \ell - q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \text{ відкіля: } R_B = \frac{q \cdot \ell}{2}.$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot \ell + q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \text{ відкіля: } R_A = \frac{q \cdot \ell}{2}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_{yi} \equiv 0, R_A + R_B - q \cdot \ell \equiv \frac{q \cdot \ell}{2} + \frac{q \cdot \ell}{2} - q \cdot \ell \equiv 0.$$

**З огляду на симетрію задачі реакції однакові та рівні половині зовнішнього навантаження.**

2. Показуємо поточний переріз з координатою  $z$ , межі її зміни та записуємо функції  $Q_y$  і  $M_x$ :

$$0 \leq z \leq \ell \Rightarrow$$

$$Q_y(z) = q \cdot z - R_B = q \cdot z - \frac{q \cdot \ell}{2}; M_x(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_B \cdot z = -q \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot z.$$

Далі обчислюємо значення  $Q_y$  і  $M_x$ :

$$z = 0 \Rightarrow Q_y = -\frac{q\ell}{2}, M_x = 0, z = \ell \Rightarrow Q_y = +\frac{q\ell}{2}, M_x = 0.$$

Звертаємо увагу, що в точці, де  $Q_y = qz^* - \frac{q\ell}{2} = 0$ , згинальний момент  $M_x$

повинний мати екстремальне значення. Таким чином,  $z^* = \frac{\ell}{2}$  і

$$M_{x \max} = -\frac{qz^{*2}}{2} + \frac{q\ell}{2} z^* = -\frac{q\ell^2}{8} + \frac{q\ell^2}{4} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

### Приклад 3.

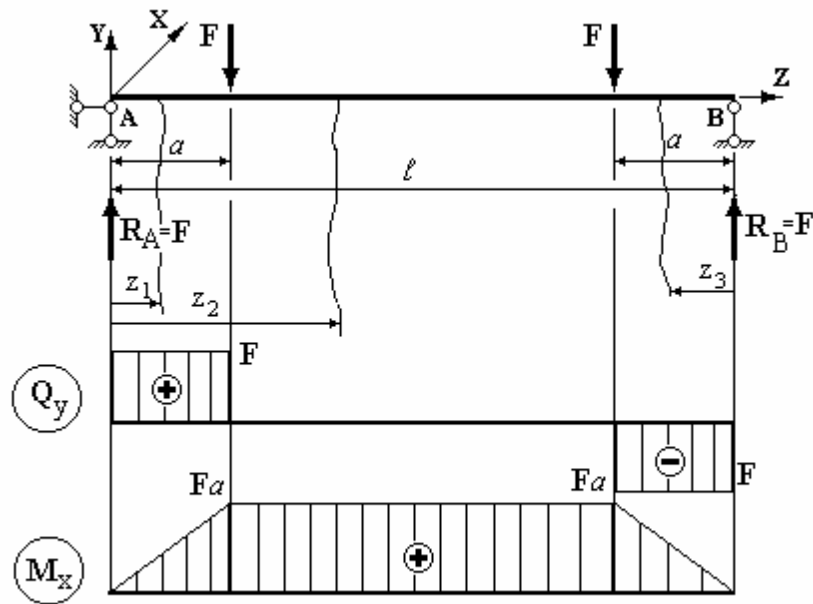


Рис. 1.9.

1. У зв'язку з симетрією задачі  $R_A = R_B = F$ .
2. Запишемо функції і визначимо характерні значення  $Q_y$  і  $M_x$  для ділянок.

**1-а ділянка:**  $0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow Q_y(z_1) = R_A = F; M_x(z_1) = R_A \cdot z_1;$   
 $z_1 = 0 \Rightarrow M_x = 0; z_1 = a \Rightarrow M_x = Fa$

**2-а ділянка:**  $a \leq z_2 \leq (l - a) \Rightarrow Q_y(z_2) = R_A - F = F - F = 0$   
 $M_x(z_2) = R_A z_2 - F(z_2 - a) = Fz_2 - Fz_2 + Fa = Fa.$

Поперечна сила на ділянці дорівнює нулю, отже  $M_x = \text{const}$ , ділянка зазнає чисте згинання.

**3-я ділянка:**  $0 \leq z_3 \leq a \Rightarrow Q_y(z_3) = -R_B = -F; M_x(z_3) = R_B \cdot z_3;$   
 $z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0; z_3 = a \Rightarrow M_x = Fa.$

### Приклад 4.

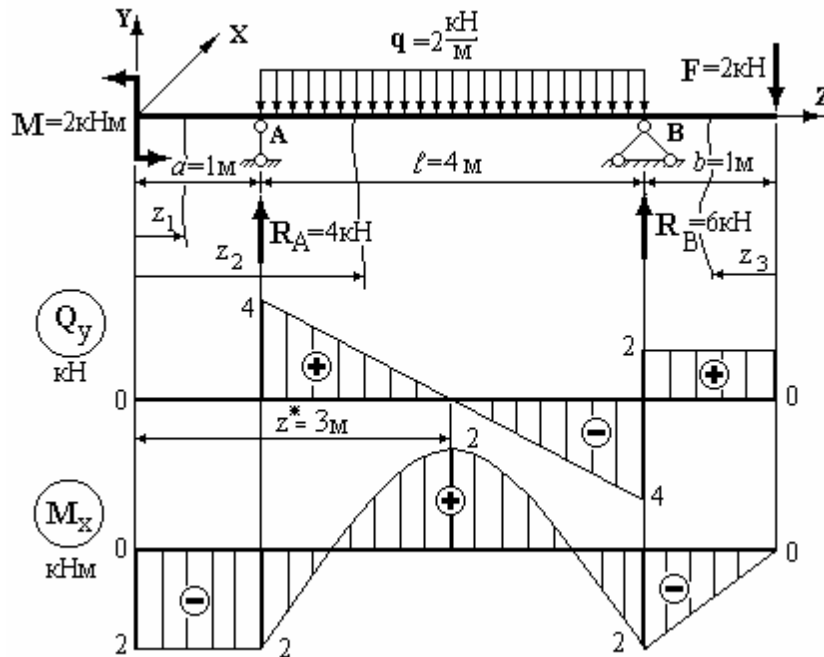


Рис. 1.10.

1. Опорні реакції.

$$\sum M_A = 0; \quad M - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 5 + R_B \cdot 4 = 0; \quad 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = 6 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad M + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0; \quad 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 - R_A \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = 4 \text{ кН.}$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 6 + 4 - 2 \cdot 4 - 2 \equiv 0.$$

3. Розбиваємо балку на ділянки, показуємо перерізи на кожній з них, вказуємо межі зміни  $z_i$ , визначаємо й обчислюємо функції  $Q_y$  і  $M_x$ .

$$\text{1-а ділянка: } 0 \leq z_1 \leq 1 \Rightarrow Q_y(z_1) = 0; \quad M_x(z_1) = -2 \text{ кНм.}$$

$$\text{2-а ділянка: } 1 \leq z_2 \leq 5 \Rightarrow Q_y(z_2) = R_A - q(z_2 - 1) = 4 - 2(z_2 - 1);$$

$$M_x(z_2) = -M + R_A(z_2 - 1) - q(z_2 - 1) \cdot \frac{(z_2 - 1)}{2} = -2 + 4 \cdot (z_2 - 1) - 2 \cdot \frac{(z_2 - 1)^2}{2};$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow Q_y = 4 \text{ кН}; \quad M_x = -2 \text{ кНм}. \quad z_2 = 5 \Rightarrow Q_y = -4 \text{ кН}; \quad M_x = -2 \text{ кНм}.$$

Поперечна сила  $Q_y$  змінює знак, згинальний момент  $M_x$  досягає екстремального – максимального значення при  $z^*$ , що визначиться з умови

$$Q_y(z^*) = 4 - 2(z^* - 1) = 0, \text{ відкіля } z^* = 3 \text{ м, а } M_{x \text{ max}} = -2 + 8 - 4 = 2 \text{ кНм}.$$

$$\text{3-я ділянка: } 0 \leq z_3 \leq 1 \Rightarrow Q_y(z_3) = F = 2 \text{ кН}; \quad M_x(z_3) = -Fz_3;$$

$$z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad z_3 = 1 \Rightarrow M_x = -2 \text{ кНм}.$$

## **2. НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНАННІ.**

При прямому поперечному згинанні в перерізі виникають поперечна сила  $Q_y$ , що викликає **деформацію зсуву**, та згинальний момент  $M_x$ , що викликає **деформацію згинання**.

### **2.1 Нормальні напруження при чистому згинанні.**

Розглянемо випадок чистого згинання, коли в перерізі виникає тільки згинальний момент.

Покажемо стержень до деформації (рис.2.1а) та після (рис.2.1б) навантаження згинальними моментами  $M_x$ .

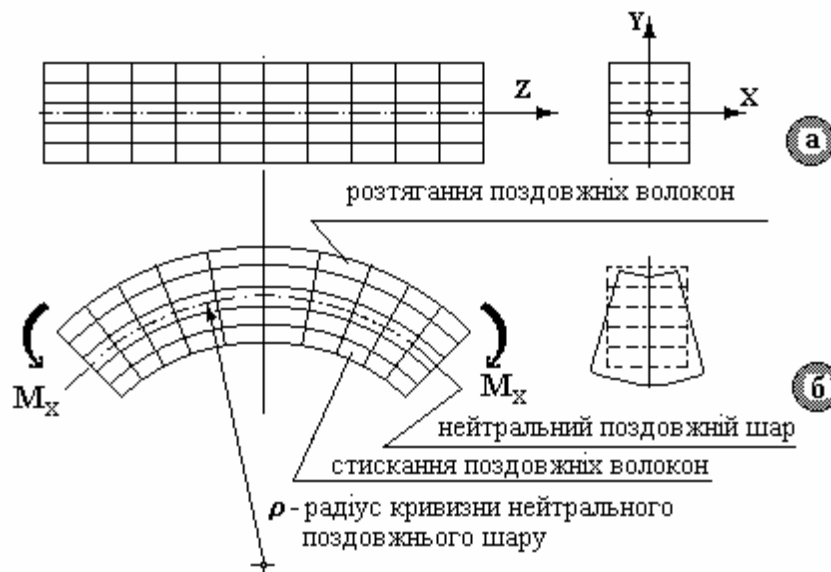


Рис 2.1.

Спостерігаючи за деформацією ортогональної сітки, попередньо нанесеної на бічну поверхню балки до навантаження (рис.2.1а) і після (рис 2.1б), відзначимо, що подовжні лінії при чистому згинанні викривляються по дузі кола, контури поперечних перерізів залишаються плоскими, сліди яких перетинають подовжні лінії під прямими кутами. У стиснутій області (у даному випадку внизу) волокна коротшають, у зоні розтягання (угорі) подовжуються.

Існує подовжній шар, довжина якого при чистому згинанні залишається незмінною. Цей шар називається **нейтральним**. Зона розтягання та зона стискання в балці розділяються нейтральним шаром з радіусом кривизни  $\rho$ .

Відзначені обставини дозволяють ввести наступні гіпотези. При чистому згинанні дотримується **гіпотеза плоских перерізів**. Усі поперечні перерізи стержня при чистому згинанні не викривляються, а лише повертаються один відносно одного навколо осі X. **Подовжні волокна не**



**тиснуть одне на одне. По ширині перерізу нормальні напруження не змінюються.**

Логічно припустити, що в точках поперечного перерізу при чистому згинанні виникають тільки нормальні напруження, що приводять до інтегрального внутрішнього силового фактора – згинального моменту  $M_x$ .

Через відсутність поперечних сил у напрямку осі  $Y$ , очевидно, що в точках перерізу **дотичні напруження відсутні.**

Розглянемо прямолінійний стержень довільного поперечного перерізу з віссю симетрії  $Y$  при чистому згинанні (рис.2.2а). В перерізі з координатою  $z$  застосуємо метод перерізів і одержимо:  $M_x = M$  (рис.2.2б).

В цьому перерізі момент  $M_x$  виникає як сума моментів від розподілених внутрішніх зусиль (нормальних напружень  $\sigma$ ). Виділимо елементарну площадку  $dA$  з координатами  $x, y$  (рис.2.2в). Нехай вісь  $Y$  – головна вісь, а вісь  $X$  збігається з нейтральним подовжнім шаром.

Задача про визначення внутрішніх зусиль відноситься до класу статично невизначених задач, тому далі застосовуємо схему рішення статично невизначених задач.

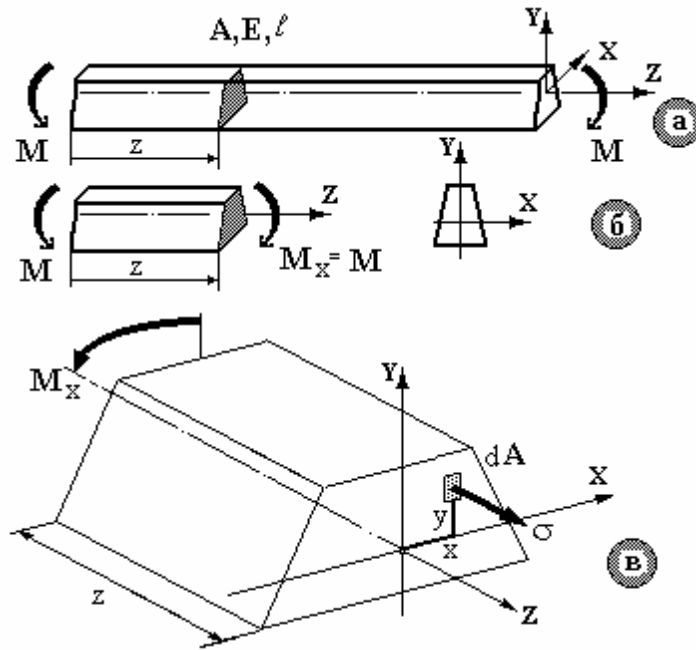


Рис.2.2.

**Статична сторона задачі.** Із шести рівнянь статичної рівноваги три рівняння  $\sum F_{ix} \equiv 0, \sum F_{iy} \equiv 0, \sum M_{iz} \equiv 0$  виконуються тотожно. Елементарна сила в осьовому напрямку, що діє на площадку  $dA$   $dN = \sigma dA$ , результуюча сила  $N = \int_A \sigma dA$ . Елементарний момент сили  $dN$  щодо осей  $X$  і  $Y$  запишеться як  $dM_x = dN \cdot y$  і  $dM_y = dN \cdot x$ . Відповідно згинаючі моменти:

$$M_x = \int_A dN y = \int_A \sigma y dA; \quad M_y = \int_A dN x = \int_A \sigma x dA.$$

Таким чином, умови статики приймуть вигляд:

$$\sum F_{iz} = 0; \quad \int_A \sigma dA = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad \int_A \sigma x dA = 0; \quad (2.2)$$

$$\sum M_{ix} = 0; \quad M_x - \int_A \sigma y dA = 0. \quad (2.3)$$

Відзначимо невідомі: **нормальне напруження  $\sigma$  – величина та закон розподілу; радіус кривизни  $\rho$  нейтрального шару; положення**

нейтрального шару.

**Геометрична сторона задачі.** Розглянемо деформацію елемента довжиною  $dz$ . Нехай волокно  $OO_1$  збігається з нейтральним шаром, виділимо на відстані  $y$  від нього волокно  $ab$  (рис.2.3).

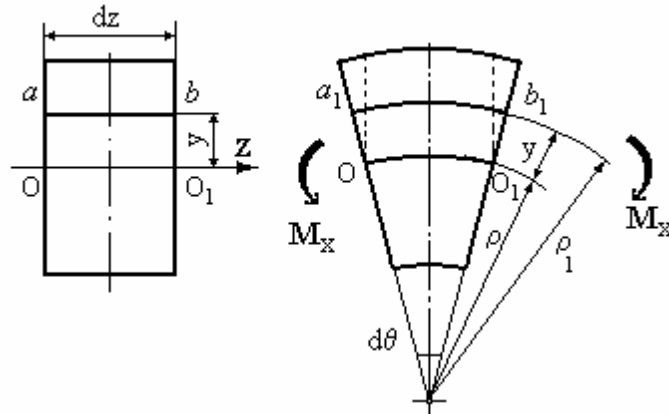


Рис.2.3.

Первісна довжина волокна  $l_0 = ab = OO_1 = \rho d\theta$ , тому що волокно  $OO_1$  не деформується. У процесі деформації довжина волокна  $a_1b_1$  складе довжину дуги:  $l_1 = \cup a_1b_1 = \rho_1 d\theta = (\rho + y)d\theta$ . Визначимо **відносну**

деформацію волокна  $ab$   $\varepsilon_{ab} = \frac{\Delta l_{ab}}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$ . Так як

**подовжні волокна не давлять одне на одне**, то, мабуть, така залежність справедлива для будь-якого волокна:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (2.4)$$

Це і є додаткова умова – **рівняння сумісності деформації при чистому згинанні**.

**Фізична сторона задачі.** При чистому згинанні подовжні волокна піддаються розтягання-стисканню, тому справедливий закон Гука для одновісного напруженого стану  $\sigma = E\varepsilon$ .

Після підстановки значення  $\varepsilon$  з виразу (2.4) маємо:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (2.5)$$

Підставляючи (2.5) послідовно в рівняння (2.1), (2.2), (2.3), одержимо наступне.

$$1. \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_x = 0. \text{ Модуль подовжньої пружності } E$$

для матеріалу ненульова константа; радіус кривизни  $\rho$  нейтрального шару є кінцевою величиною. Таким чином, статичний момент площі  $S_x = 0$ . Отже, **нейтральний шар при чистому згинанні збігається з центральною віссю перерізу**, тобто координата  $y$  відраховується від **нейтральної лінії** перерізу – геометричного місця точок, у яких нормальні напруження при згинанні дорівнюють нулю.

$$2. \int_A \sigma x dA = \int_A E \frac{y}{\rho} x dA = \frac{E}{\rho} \int_A x y dA = \frac{E}{\rho} I_{xy} = 0. \text{ Якщо відцентровий момент}$$

інерції  $I_{xy}$  щодо центральних осей дорівнює нулю, то ці осі є головними осями інерції. Таким чином, **осі ХУ є головними осями інерції і нейтральна лінія є головною центральною віссю інерції, вона перпендикулярна площині дії навантаження.**

$$3. M_x - \int_A \sigma y dA = M_x - \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = M_x - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_x - \frac{E}{\rho} I_x = 0, \text{ відкіля}$$

кривизна нейтрального подовжнього шару визначається виразом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (2.6)$$

яке називається **рівнянням Нав'є**. Тут  $\int_A y^2 dA = I_x$  – осьовий момент

інерції перерізу, а  $EI_x$  – **жорсткість стержня при згинанні**.

Порівнюючи значення кривизни  $\frac{1}{\rho}$  з рівнянь (2.5) і (2.6) одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey} \\ \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma}{Ey} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

**Формула для визначення нормальних напружень** прийме вигляд:

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x}. \quad (2.7)$$

З отриманої формули випливає, що нормальні напруження  $\sigma$  по висоті перерізу змінюються лінійно, тому що згинальний момент  $M_x$  та момент інерції  $I_x$  перерізу величини постійні. На рис 2.4 показані розподіли нормальних напружень по висоті для різних за формою перерізів.

**Максимальні напруження  $\sigma_{\max}$  виникають у найбільш віддалених точках від нейтральної лінії при  $y = y_{\max}$ , тобто**

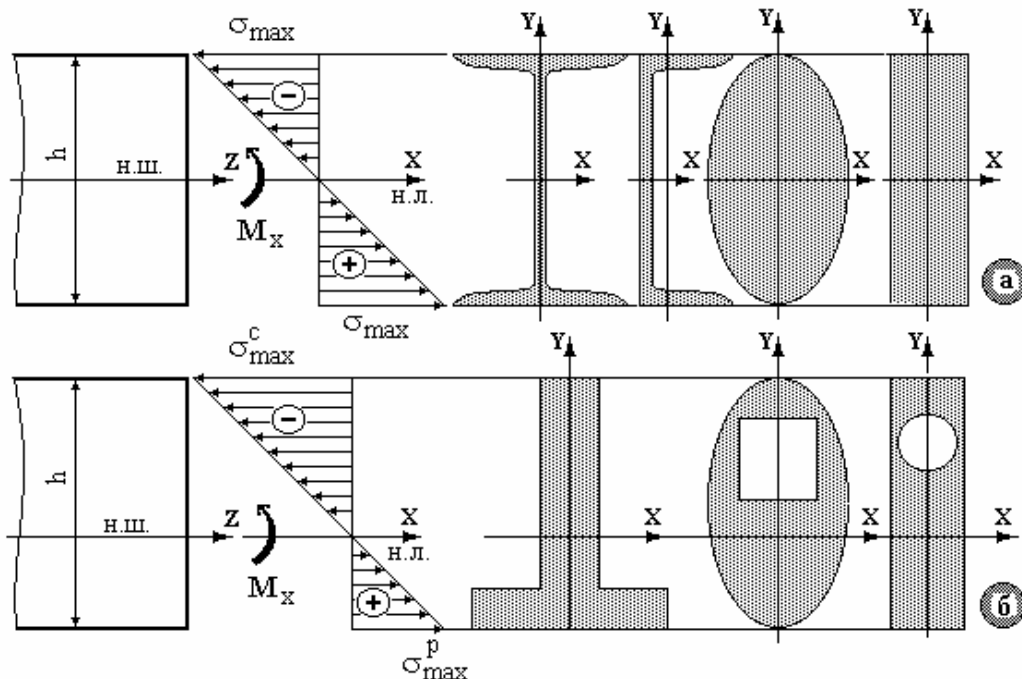


Рис.2.4.

$\sigma_{\max} = \frac{M_x \cdot y_{\max}}{I_x}$ , що повинні зіставлятися з допустимим напруженням  $[\sigma]$ .

Таким чином **умова міцності при згинанні** прийме вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max} \cdot y_{\max}}{I_x} \leq [\sigma]. \quad (2.8)$$

На практиці цей вигляд використовується для розрахунку перерізів, що мають одну вісь симетрії (рис. 2.4б). З обліком того, що  $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$  - **осьовий момент опору**, то для перерізів із двома осями симетрії (рис. 2.4а) зручніше використовувати **умову міцності при згинанні** у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (2.9)$$

У випадку поперечного згинання, коли поперечна сила  $Q_y$  не дорівнює нулю, відбувається скривлення поперечних перерізів, і гіпотеза плоских перерізів не дотримується. Як показують дослідження, при відношенні довжини  $\ell$  стержня до висоти  $h$  поперечного перерізу  $\frac{\ell}{h} \geq 8$  (для більшості балок) можна вважати, що поперечний переріз практично не скривляється, тоді формула (2.7) для визначення нормальних напружень справедлива і при поперечному згинанні.

**Приклад.** Визначити розміри різних форм поперечних перерізів, якщо згинальний момент в перерізі  $M_x = 80$  кНм, допустиме напруження при згинанні  $[\sigma] = 160$  МПа.

З умови міцності  $\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]$  осьовий момент опору перерізу

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3. \text{ Далі проектуємо переріз}$$

(рис.2.5).

1. **Прямокутний переріз** (рис.2.5а), для якого повинне задаватися відношення  $\frac{h}{b}$  (візьмемо  $\frac{h}{b} = 2$ ). Осьовий момент опору

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 = 500 \text{ см}^3, \text{ відкіля } b = \sqrt[3]{750} \approx 9 \text{ см. Висота перерізу}$$

$$h = 18 \text{ см, площа поперечного перерізу } A = bh = 2b^2 = 162 \text{ см}^2.$$

2. **Прямокутний переріз** з відношенням  $\frac{h}{b} = \frac{1}{2}$  (рис.2.5б). За аналогією:

$$\text{осьовий момент опору } W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3}{24} = 500 \text{ см}^3, \text{ відкіля}$$

$$b = \sqrt[3]{12000} = 22,8 \text{ см, } h = 11,4 \text{ см, } A = 22,8 \cdot 11,4 = 260 \text{ см}^2.$$

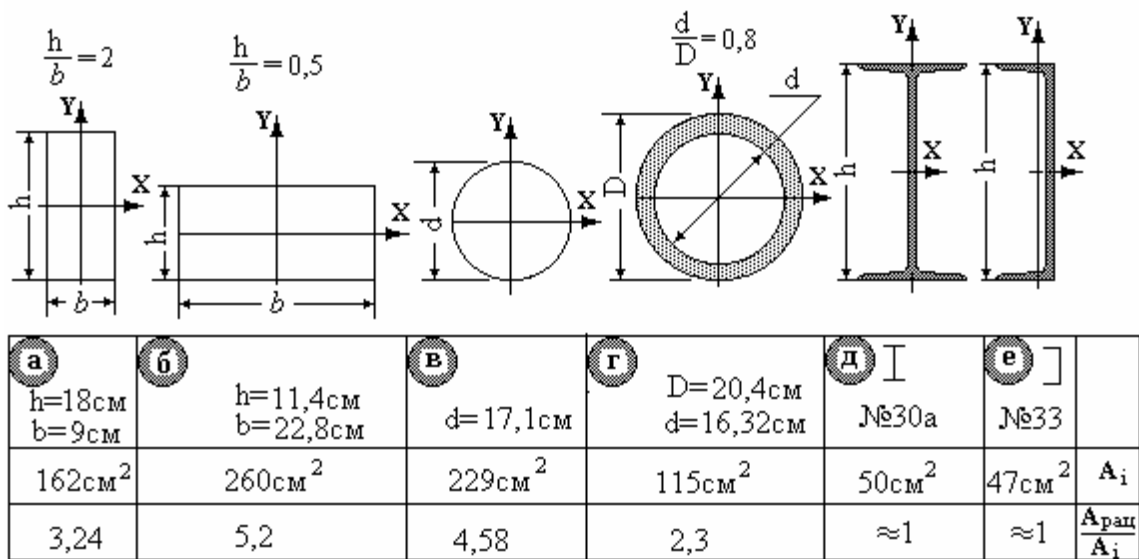


Рис.2.5.

3. **Круглий суцільний переріз** діаметром  $d$  (рис.2.5в). Осьовий момент

опору  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 = 500 \text{ см}^3$ , відкіля діаметр перерізу:

$$d = \sqrt[3]{5000} = 17,1 \text{ см}, \text{ площа } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 17,1^2}{4} = 229 \text{ см}^2.$$

4. **Кільцевий переріз** (рис.2.5г). Задаються відношенням діаметрів  $\alpha = \frac{d}{D}$ ,

осьовий момент опору:  $W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4) = 500 \text{ см}^3$ .

Нехай  $\alpha = 0,8$ , тоді  $D = \sqrt[3]{\frac{5000}{1 - 0,8^4}} = 20,4 \text{ см}$ ,  $d = 20,4 \cdot 0,8 = 16,32 \text{ см}$ .

Площа перерізу  $A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{\pi \cdot 20,4^2}{4} (1 - 0,8^2) = 115 \text{ см}^2$ .

5. **Двотавровий переріз** (рис.2.5д). За ДСТ 8239-72 підбираємо номер двотавра з найближчим більшим значенням осьового моменту опору до розрахункового. Так, для двотавра №30а:  $W_x = 518 \text{ см}^3$ ,  $A \approx 50 \text{ см}^2$ .



6. **Швелерний переріз** (рис.2.5е). За ДСТ 8240-72 підбираємо номер швелера з найближчим більшим значенням осьового моменту опору до розрахункового. Так, для швелера №33  $W_x = 484 \text{ см}^3$ ,  $A \approx 47 \text{ см}^2$ .

Узявши відношення окремих площ до площі **раціонального** поперечного перерізу (двотавр, швелер), одержимо **коефіцієнт перевитрати матеріалу**. Складемо таблицю (рис.2.5), з якої випливає, що **самими раціональними є двотавровий і швелерний перерізи, у яких найменша площа поперечного перерізу та найменша витрата матеріалу.**

## 2.2 Дотичні напруження при поперечному згинанні.

Дія в перерізі поперечної сили  $Q_y$  викликає дотичні напруження  $\tau$ , що збігаються по напрямку з нею, по ширині перерізу не змінюються та визначаються за **формулою Д.И.Журавського**:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{відс}}}{b_y \cdot I_x}, \quad (2.10)$$

де  $Q_y$  - поперечна сила, що діє в перерізі;  $I_x$  - осьовий момент інерції перерізу щодо центральної осі X (нейтральної лінії);  $b_y$  - ширина перерізу на тім рівні  $y$  від нейтральної лінії, де визначаються дотичні напруження;  $S_x^{\text{відс}} = A_{\text{відс}} \cdot y_c$  - абсолютне значення статичного моменту щодо центральної осі X частини перерізу, що лежить вище чи нижче того рівня, де визначаються дотичні напруження. Умова міцності по дотичним напруженням при поперечному згинанні записується у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max} S_x^{\text{відс}}}{b_y \cdot I_x} \leq [\tau] \quad (2.11)$$

Таким чином, при прямому поперечному згинанні маємо умови міцності по нормальним  $\sigma$  та дотичним  $\tau$  напруженням. Основним вважається умова міцності по нормальним напруженням, а умова (2.11) по дотичним напруженням, як правило, перевіряється. Використання формули Д.И.Журавського розберемо на прикладах.

### 2.3 Розподіл дотичних напружень для прямокутного перерізу.

В перерізі діють  $M_x$  момент і поперечна сила  $Q_y$ , спрямовані, як показано на рис.2.6. Поперечна сила  $Q_y$ , ширина перерізу  $b_y = b$  та осьовий момент інерції  $I_x = \frac{bh^3}{12}$  конкретні постійні величини (рис.2.6). Таким чином,

дотичні напруження змінюються за таким же законом, що і статичний

момент відсіченої частини площі  $S_x^{\text{відс}}$ .

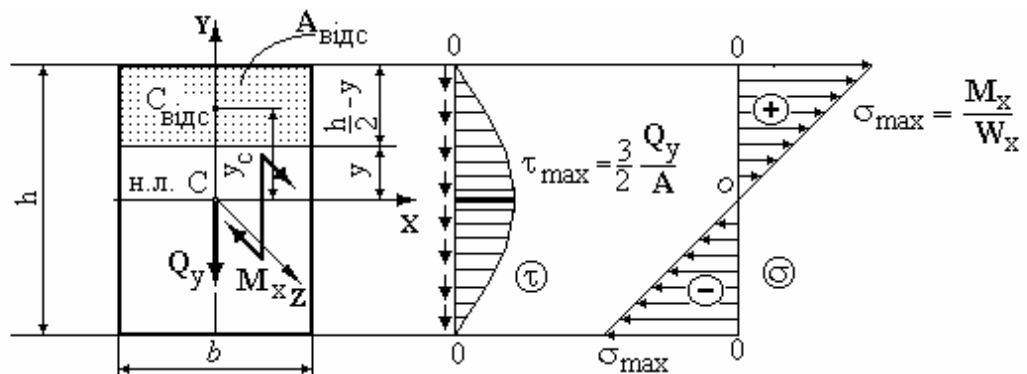


Рис.2.6.

Визначаємо дотичні напруження на рівні  $y$ . Площа відсіченої частини

перерізу  $A^{\text{відс}} = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) = \frac{bh}{2} \left( 1 - \frac{2y}{h} \right)$ , положення її центра ваги

$y_c = \frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2} - y}{2} = \left( \frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{h}{4} \left( 1 + \frac{2y}{h} \right)$ . Статичний момент відсіченої

частини площі:

$$S_x^{\text{відс}} = A^{\text{відс}} \cdot y_c = \frac{bh}{2} \left( 1 - \frac{2y}{h} \right) \cdot \frac{h}{4} \left( 1 + \frac{2y}{h} \right) = \frac{bh^2}{8} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right].$$

Таким чином, дотичні напруження змінюються за законом **квадратної параболі**. **Максимальні дотичні напруження виникають на нейтральній лінії**, де нормальні напруження  $\sigma$  дорівнюють нулю. Для визначення  $\tau_{\text{max}}$  необхідно обчислити статичний момент половини площі

перерізу  $S_x^{\text{відс}}_{\text{max}}$ , і максимальні дотичні напруження визначаються

як:  $\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y S_x^{\text{відс}}_{\text{max}}}{b_y \cdot I_x}$ . Для прямокутного перерізу  $b = b_y$ ,

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad S_x^{\text{відс}}_{\text{max}} = \frac{bh^2}{8} \quad \text{маємо: } \tau_{\text{max}} = \frac{Q_y bh^2/8}{b \cdot bh^3/12} = \frac{3 Q_y}{2 bh} = \frac{3 Q_y}{2 A}.$$

#### 2.4 Розподіл дотичних напружень для двотаврового перерізу.

. В перерізі діють згинальний  $M_x$  момент та поперечна сила  $Q_y$ , спрямовані, як показано на рис.2.7.

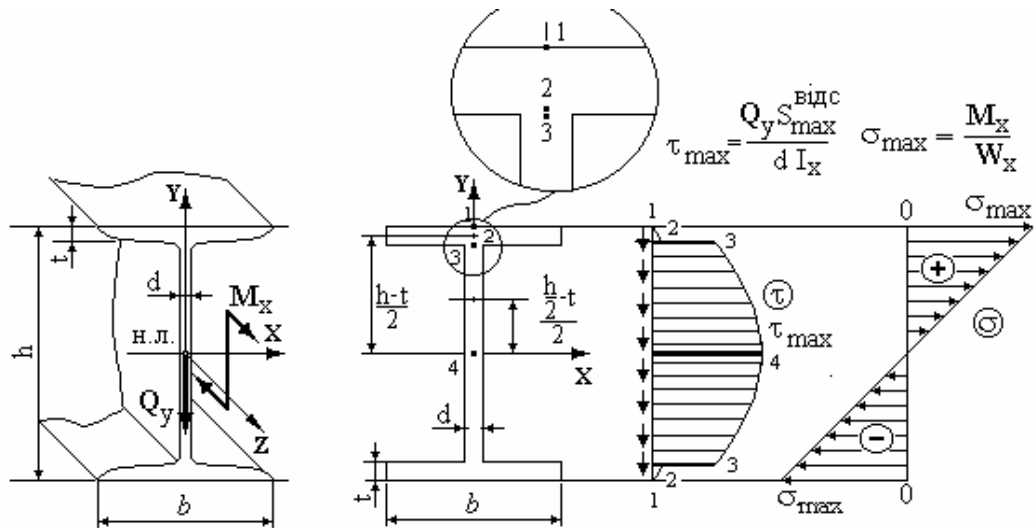


Рис.2.7.

Використовуючи вираз (2.10) для дотичних напружень, визначимо їхні значення в характерних точках.

**Точка 1:**  $\tau_1 = 0$ , тому що  $S_x^{\text{відс}} = 0$  (вище рівня 1 відсічена площа відсутня).

**Точки 2,3.** Ці точки мають однакову координату  $y$ , але належать полиці та стінці одночасно, тобто різній ширині  $b_2=b$ ;  $b_3=d$ . Тому в місці переходу полки в стінку виникає скачок дотичних напружень.

**Точка 2** (приналежна полиці):  $\tau_2 = \frac{Q_y}{b \cdot I_x} bt \left( \frac{h-t}{2} \right) = \frac{Q_y t}{I_x} \left( \frac{h-t}{2} \right)$ ;

**Точка 3** (приналежна стінці):  $\tau_3 = \frac{Q_y}{d \cdot I_x} bt \left( \frac{h-t}{2} \right)$ ;

**Точка 4:**  $\tau_4 = \frac{Q_y}{b I_x} \left[ bt \left( \frac{h-t}{2} \right) + d \left( \frac{h-t}{2} \right) \cdot \left( \frac{\frac{h-t}{2} - t}{2} \right) \right] = \frac{Q_y S_{x \max}^{\text{відс}}}{d I_x}$ .

$S_{x \max}^{\text{відс}}$  - статичний момент щодо центральної осі половини площі перерізу, для стандартних профілів приведений у таблицях сортаменту.

Зразковий графік розподілу дотичних напружень приведений на рис 2.7. Дійсний розподіл дотичних напружень трохи відрізняється від отриманого, тому що полиці мають ухили, а перехід від полиці до стінки здійснюється по радіусу кривини.

## 2.5 Порядок виконання проектувального розрахунку при згинанні.

1.3 умови міцності по нормальним напруженням визначаємо осьовий момент опору поперечного перерізу, тобто  $W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]}$ , та проектуємо переріз.

2.Перевіряємо переріз по дотичним напруженням. Якщо  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ , то розрахунок закінчений. Якщо  $\tau_{\max} > [\tau]$  (перевищення більш 5%), то розміри перерізу визначаються з умови міцності по дотичним напруженням. По нормальним напруженням перевіряти немає необхідності, тому що його розміри будуть більше первісного.

**Приклад 1.** Для даної схеми навантаження балки (рис.2.8) визначити розміри двотаврового поперечного перерізу, якщо допустиме нормальне напруження  $[\sigma] = 150$  Мпа, дотичне  $[\tau] = 100$  Мпа.

Визначаємо реакції:

$$\sum M_A = F\mathbf{a} + F(\ell + \mathbf{a}) - R_B \ell = 0, R_B = 45 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = F(\ell + \mathbf{a}) + F\mathbf{a} - R_A \ell = 0, R_A = 45 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_y = -F + F + R_A - R_B \equiv 0.$$

1.Розбиваємо балку на три ділянки, записуємо для поточного перерізу на кожній ділянці вирази (функції)  $Q_y$  і  $M_x$  :

$$0 \leq z_1 \leq a \quad Q_y = -F = 30 \text{ кН}; \quad M_x = -F \cdot z_1;$$

$$0 \leq z_2 \leq l \quad Q_y = -F + R_A = +15 \text{ кН}; \quad M_x = -F(z_2 + a) + R_A \cdot z_2;$$

$$0 \leq z_3 \leq a \quad Q_y = -F = -30 \text{ кН}; \quad M_x = -F \cdot z_3.$$

Обчислюємо  $Q_y$  і  $M_x$  в характерних перерізах та будуюмо епюри.

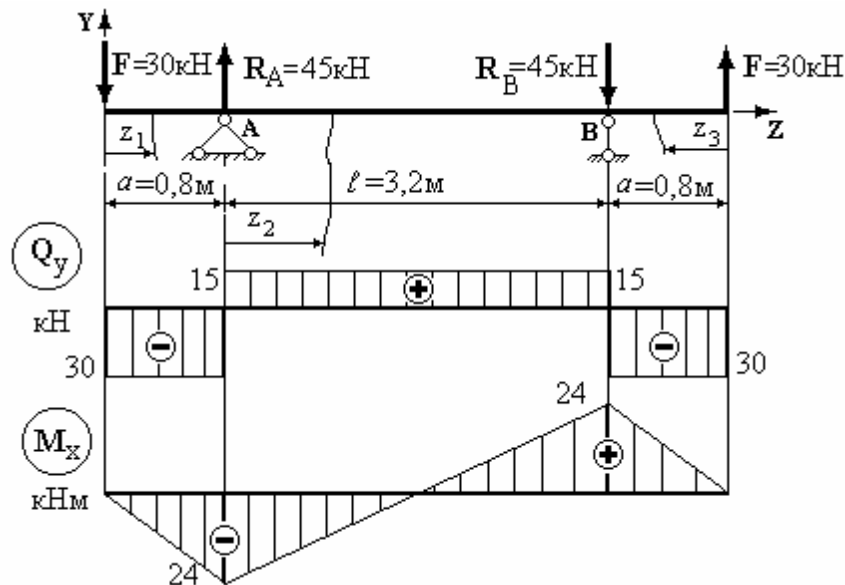


Рис.2.8.

2. З умови міцності по нормальним напруженням (де  $M_{x \max}$ ) - небезпечний переріз на опорах; з умови міцності по дотичним напруженням (де  $Q_{y \max}$ ) рівнонебезпечним є будь-який переріз на консолях. Таким чином,

$$M_{x \max} = 24 \text{ кНм}; \quad Q_{y \max} = 30 \text{ кН}.$$

3. З умови міцності по нормальним напруженням визначаємо момент опору:

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{24 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 160 \text{ см}^3.$$

По таблицях ДСТ вибираємо двотавр №18а  $W_x = 159 \text{ см}^3$ , що незначно менше розрахункового значення.

Інші необхідні для розрахунку параметри:  $A = 25,4 \text{ см}^2$ ,  $I_x = 1430 \text{ см}^4$   
 $= 1430 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ;  $d = 5,1 \text{ мм} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $S_{x \max}^{\text{відс}} = 89,8 = 89,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

Перевіряємо переріз по дотичним напруженням:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_{x \max}^{\text{відс}}}{d \cdot I_x} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 89,8 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 36,9 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 36,9 \text{ МПа} < [\tau],$$

умова міцності виконується і розрахунок закінчений.

**Приклад 2.** Для даної схеми навантаження дерев'яної балки перекриття (рис.2.9) визначити розміри прямокутного перерізу, якщо відношення

сторін  $\frac{h}{b} = 2$ , допустиме нормальне напруження  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ , дотичне

$[\tau] = 2,5 \text{ МПа}$ . Так як навантаження симетричне, опорні реакції однакові і дорівнюють половині зовнішнього навантаження, тобто  $R_A = R_B = 40 \text{ кН}$ .

1. Визначаємо поперечні сили та згинальні моменти по ділянкам.

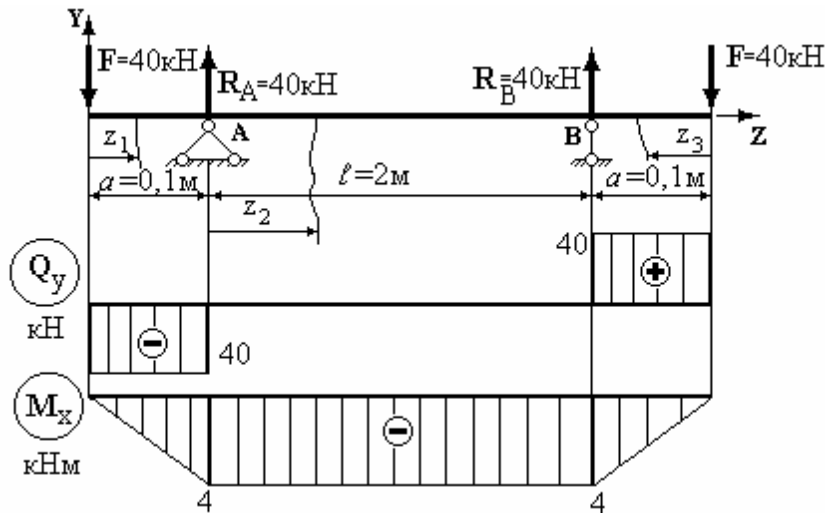
1-а ділянка:  $0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow Q_y = -F = -40 \text{ кН}$ ;  $M_x = -F \cdot z_1$ .

2-а ділянка:  $0 \leq z_2 \leq \ell \Rightarrow Q_y = -F + R = 0$  ;

$M_x = -F \cdot (z_2 + a) + R_A \cdot z_2 = -40z_2 - 40 \cdot a + 40z_2 = -40 \cdot a = -4 \text{ кНм}$ .

3-я ділянка:  $0 \leq z_3 \leq a \Rightarrow Q_y = F = 40 \text{ кН}$ ;  $M_x = -F \cdot z_3$ .

По отриманим функціям будуємо епюри  $Q_y$  і  $M_x$ . З умови міцності по дотичним напруженням рівнонебезпечним є будь-який переріз на консолях, а з умови міцності по нормальним напруженням рівнонебезпечним є будь-який переріз на прольоті балки.



2

Рис.2.9.

2. З умови міцності по нормальним напруженням осьовий момент опору:

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 400 \text{ см}^3; \quad W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 = 400 \text{ см}^3,$$

відкіля:  $b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 400} = 8,4 \text{ см}, \quad h = 2b = 16,8 \text{ см},$

$$A = bh = 2b^2 = 2 \cdot 8,4^2 = 142 \text{ см}^2$$

3. Максимальне дотичне напруження для прямокутного перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{y \max}}{2 A} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 142 \cdot 10^{-4}} = 4,22 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 4,22 \text{ МПа} > [\tau] = 2,5 \text{ МПа},$$

умова міцності не виконується.

Визначаємо розміри поперечного перерізу з умови міцності по дотичним

напруженням:  $\tau_{\max} = \frac{3 Q_{y \max}}{2 A} \leq [\tau],$  відкіля знаходимо площу поперечного

перерізу:  $A = \frac{3 Q_{y \max}}{2 [\tau]} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^6} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 240 \text{ см}^2$

Площа  $A = bh = 2b^2 = 240 \text{ см}^2,$  відкіля ширина перерізу:  $b = \sqrt{120} \approx 11 \text{ см},$  а висота  $h = 22 \text{ см}.$



З умови міцності по дотичним напруженням розміри поперечного перерізу більше, ніж з умови міцності по нормальним напруженням.

## 2.6 Потенційна енергія деформації при згинанні.

**Чисте згинання** ( $Q_y = 0, M_x \neq 0$ ). *Потенційна енергія деформації при чистому згинанні визначається роботою внутрішніх згинальних моментів на кутовому переміщенні перерізу.*

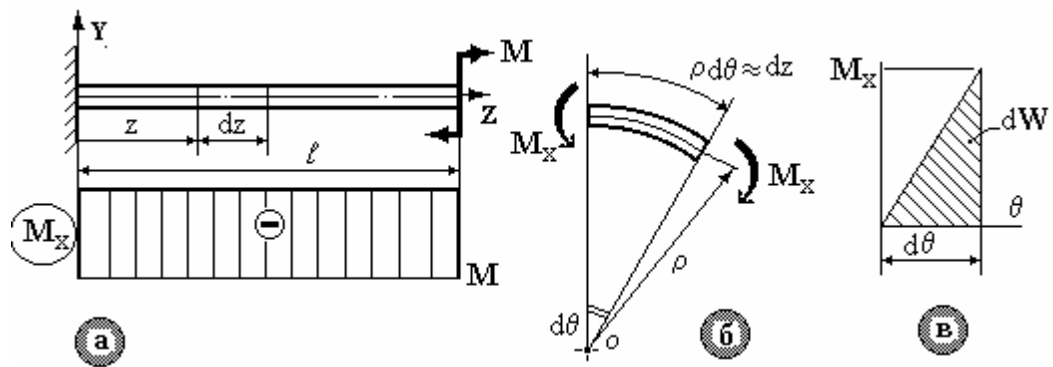


Рис. 2.10.

Розглянемо стержень при чистому згинанні (рис.2.10а). Виділимо елемент стержня довжиною  $dz$  (рис.2.10б). При статичному навантаженні нейтральна вісь викривляється по радіусу  $\rho$  кола, крайні перерізи повертаються на кут  $d\theta$ . У межах виконання закону Гука залежність між моментом  $M_x$  та кутом повороту  $d\theta$  при статичному навантаженні лінійна (рис.2.10в). Елементарна робота внутрішніх зусиль визначається площею трикутника,

тобто  $dW = \frac{1}{2} M_x d\theta$ . Але робота чисельно дорівнює

потенційної енергії деформації  $dU$ , тобто  $dU = \frac{1}{2} M \cdot d\theta$ . З рис.2.10б

впливає, що  $d\theta = \frac{dz}{\rho}$ , таким чином,  $dU = \frac{1}{2} M_x \frac{dz}{\rho}$ . Кривизна нейтральної

осі  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$ , тоді  $dU = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}$ . Повна потенційна енергія стержня є інтеграл

по довжині стержня:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x} \quad (2.12)$$

**Поперечне згинання** ( $Q_y \neq 0, M_x \neq 0$ ). Як показують розрахунки для стержнів, у яких відношення довжини  $\ell$  до висоти  $h$  перерізу більше  $8 \div 10$  ( $\frac{h}{\ell} > 8 \div 10$ ), потенційна енергія деформації від поперечної сили  $U_{Q_y}$  складає  $0,4 \div 0,5\%$  від потенційної енергії деформації згинаючого моменту  $U_{M_x}$ . Тому при визначенні потенційної енергії деформації при згинанні враховується тільки потенційна енергія деформації від згинального моменту  $M_x$ , що визначається виразом (2.12).

### 3. ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ПРЯМОМУ ЗГИНАННІ. РОЗРАХУНКИ НА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ.

#### 3.1 Диференціальне рівняння вигнутої осі.

Одержимо диференціальне рівняння вигнутої осі при прямому згинанні (площина дії навантажень збігається з однією з головних осей інерції). **Прямолінійна вісь балки під дією зовнішніх навантажень (рис.3.1) перетворюється в плоску гладку криву і називається пружною лінією (вигнутою віссю балки).**

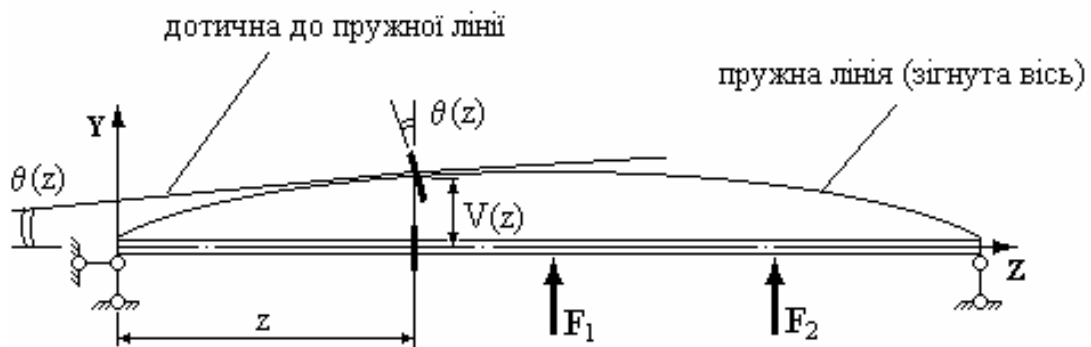


Рис.3.1.

**Прогин балки  $V(z)$  - це переміщення центра ваги перерізу по нормалі до первісної осі. Максимальний прогин називається стрілою прогину і позначається  $f$ . Кут повороту  $\theta(z)$  перерізу - це поворот перерізу щодо первісного положення.**

Тангенс кута нахилу дотичної до вигнутої осі є перша похідна від функції  $V(z)$ :  $\text{tg}\theta(z) = \frac{dV(z)}{dz} = V'(z)$ . Для малих кутів ( $\text{tg}\theta(z) \approx \theta(z)$ )

рівняння кутів повороту можна записати у вигляді:  $\theta(z) = V'(z)$ .

Диференціальне рівняння вигнутої осі балки одержимо за допомогою рівняння Нав'є, у якому кривизна нейтральної осі при згинанні визначається, як:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$ . З іншого боку, з курсу аналітичної геометрії

відомо, що кривизна плоскої кривої визначається як:  $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{V''(z)}{\{1 + [V'(z)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$ .

Дорівнявши праві частини цих двох залежностей, одержимо **нелінійне диференціальне рівняння відносно прогину  $V(z)$** :

$$\frac{M_x(z)}{EI_x} = \pm \frac{V''(z)}{\{1 + [V'(z)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

Для малих переміщень (у межах пружних деформацій), коли, наприклад,  $\text{tg}\theta(z) = V'(z) \leq 0,01$ , квадратом першої похідної в порівнянні з одиницею можна зневажити. З обліком того, що **знаки другої похідної  $V''(z)$  і згинаючого моменту  $M_x$  збігаються**, одержимо диференціальне рівняння другого порядку, що і називається **диференціальним рівнянням вигнутої осі балки для малих переміщень**:

$$EI_x V''(z) = M_x(z). \quad (3.1a)$$

Послідовно інтегруємо двічі й одержуємо **рівняння для кутів повороту та прогинів**:

$$EI_x V'(z) = EI_x \theta(z) = \int M_x(z) dz + C_1, \quad (3.2)$$

$$EI_x V(z) = \int dz \int M_x(z) dz + C_1 z + C_2, \quad (3.3)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  - довільні постійні інтегрування, що визначаються з граничних умов.

**Приклад 1.** Розглянемо консольну балку, навантажену на вільному торці зосередженою силою  $F$  (рис.3.2).

Згинальний момент у перерізі  $z$ :  $M_x(z) = -Fz$ . Запишемо диференціальне рівняння пружної лінії балки:  $EI_x V''(z) = -F \cdot z$ . Інтегруючи двічі це рівняння, одержимо відповідно до (3.2), (3.3):

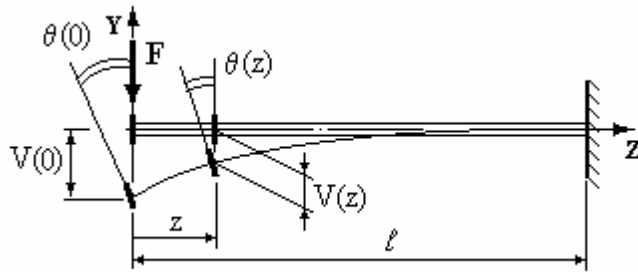


Рис. 3.2.

$$EI_x V'(z) = \frac{-F \cdot z^2}{2} + C_1;$$

$$EI_x V(z) = \frac{-F \cdot z^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Запишемо та виконаємо граничні умови. При  $z = \ell$  кут повороту  $V'(\ell) = \theta(\ell) = 0$ , тобто  $-\frac{F \cdot \ell^2}{2} + C_1 = 0$ , відкіля:  $C_1 = \frac{F \ell^2}{2}$ . При

$z = \ell$  прогин  $V(\ell) = 0$ , тобто:  $-\frac{F \cdot \ell^3}{6} + \frac{F \cdot \ell^2}{2} \ell + C_2 = 0$ , відкіля:

$$C_2 = \frac{F \cdot \ell^3}{6} - \frac{F \cdot \ell^3}{2} = -\frac{F \ell^3}{3}.$$

З урахуванням значень  $C_1$  і  $C_2$  рівняння пружної лінії та кутів повороту запишуться як:

$$EI_x V(z) = -\frac{Fz^3}{6} + \frac{F\ell^2}{2}z - \frac{F\ell^3}{3}; \quad EI_x \theta(z) = -\frac{Fz^2}{2} + \frac{F\ell^2}{2}.$$

Найбільші прогин та кут повороту виникають на початку координат при  $z = 0$ :

$$EI_x V(0) = -\frac{F\ell^3}{3}, \text{ відкіля: } |V(0)| = V_{\max} = f = \frac{F\ell^3}{3EI_x};$$

$$EI_x \theta(0) = \frac{F\ell^2}{2}, \text{ відкіля: } \theta(0) = \theta_{\max} = \frac{F\ell^2}{2EI_x}.$$

При розрахунках на жорсткість максимальні прогини  $V_{\max}$  балок повинні зіставлятися з прогином  $[V]$ , що допускається. Тоді умова жорсткості при згинанні консольної балки прийме вигляд:

$$V_{\max} = f = \frac{F\ell^3}{3EI_x} \leq [V]. \quad (3.4)$$

Звідси визначається осьовий момент інерції  $I_x \geq \frac{F\ell^3}{3E[V]}$ , на підставі чого проектуємо переріз. Прогин, що допускається, вибирається в залежності від відповідальності конструкції з діапазону  $[V] = \left(\frac{1}{100} \div \frac{1}{1000}\right)\ell$ , де  $\ell$  - проліт балки.

Безпосереднє інтегрування диференціального рівняння пружної лінії виявляється громіздким навіть у простих випадках. Тому для визначення переміщень у балках більш прийнятні енергетичні методи, що приводять до простих залежностей.

### 3.2 Енергетичні методи визначення переміщень.

Введемо позначення й основні поняття.

**Згинальний момент від зовнішнього навантаження**  $M_{xF}(z) = M_{xF}$  позначим як  $M_F$ . **Згинальний момент від одиничної сили (моменту)** -  $\bar{M}_x$  чи  $\bar{M}$ . **Переміщення (прогин, кут повороту) від зовнішнього навантаження** позначається  $\Delta_{ij}$ , де перший індекс  $i$  зв'язаний з точкою чи напрямком переміщення; другий індекс  $j$  зв'язаний з причиною, що викликала переміщення. **Лінійне переміщення (прогин) від одиничної сили та кутове переміщення від одиничного моменту** позначаємо  $\delta_{ij}$ , де індекс  $i$  – точка балки і напрямок переміщення; індекс  $j$  - причина, що викликала одиничне переміщення.

### 3.2.1 Інтеграл Максвелла-Мора.

Розглянемо балку довжиною  $\ell$ , навантажену в точці 1 силою  $F$  (рис. 3.3). Визначимо переміщення  $\Delta_{21}$  (у точці 2 від сили, прикладеної в точці 1).

**1. Перший стан.** У точці 1 прикладемо зосереджену силу  $F$ . Прогин у точці 1 дорівнює  $\Delta_{11}$ , у точці 2 -  $\Delta_{21}$ . У перерізах балки виникає згинальний момент від зовнішнього навантаження  $M_{xF}$ . Сила  $F$  прикладається

статично і виконує роботу  $W_1 = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta_{11}$  на шляху  $\Delta_{11}$  (див. графік на рис.3.3.1). Визначаємо потенційну енергію деформації, виражену через

згинальний момент  $M_{xF}$ , за формулою (3.12):  $U_1 = \int_{\ell} \frac{M_{xF}^2 dz}{2EI_x}$ . Але

потенційна енергія деформації  $U_1$  чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил  $W_1$ , тобто:  $W_1 = U_1$ .

**2. Другий стан.** У точці 2 статично прикладемо одиничну силу, що, згинаючи балку, виконує роботу (див. графік на рис.3.3.2) на переміщенні

$\delta_{22}$ . У перерізах балки виникає згинальний момент  $\bar{M}_x$  від одиничної сили.

Робота одиничної сили  $W_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{22}$ . Потенційна енергія деформації

$$U_2 = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_x^2 dz}{2EI_x}. \text{ Як і в попередньому випадку } W_2 = U_2.$$

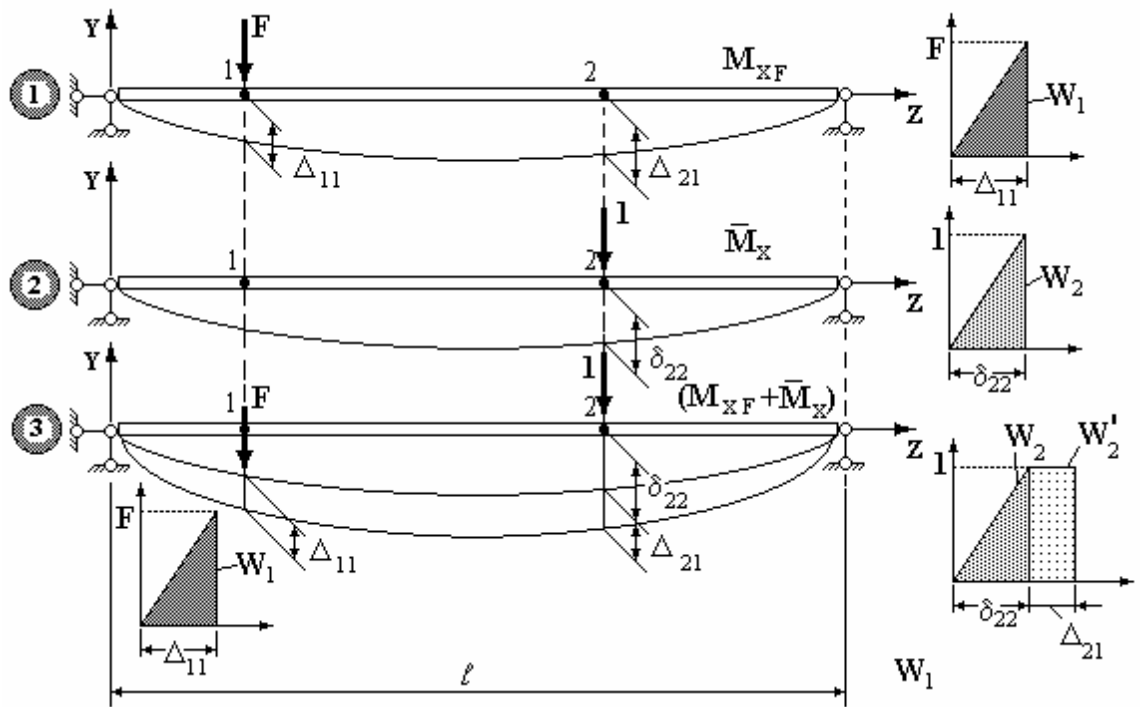


Рис.3.3.

**3. Третій стан.** У точці 2 статично прикладемо одиничну силу, що, деформуючи балку, виконує роботу  $W_2$  на переміщенні  $\delta_{22}$  (див. графік на рис. 3.3.3). До деформованої балки статично у точці 1 прикладемо зосереджену силу  $F$ , що, деформуючи балку з уже прикладеною одиничною силою, виконує роботу  $W_1$  (див. графік) на переміщенні  $\Delta_{11}$ . Точка 2 одержить ще переміщення  $\Delta_{21}$ , а одинична сила виконає роботу  $W_2^* = 1 \cdot \Delta_{21}$  (див. графік) на переміщенні  $\Delta_{21}$ . Від дії сили  $F$  й одиничного



навантаження в перерізах балки виникає сумарний згинальний момент  $(M_{xF} + \bar{M}_x)$ . Робота двох сил визначиться як:

$$W_3 = W_1 + W_2 + W_2^* = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{22} + 1 \cdot \Delta_{21},$$

а потенційна енергія пружної деформації виразиться через сумарний згинальний момент як:

$$U_3 = \int_{\ell} \frac{(M_{xF} + \bar{M}_x)^2 dz}{2EI_x} = \int_{\ell} \frac{M_{xF}^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} \frac{\bar{M}_x^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} \frac{M_{xF} \bar{M}_x}{EI_x} dz.$$

Порівнюючи вирази для  $W_3, U_3$ , після нескладних перетворень одержимо:

$$\Delta_{21} = \int_{\ell} \frac{M_{xF} \bar{M}_x}{EI_x} dz. \quad (3.5)$$

### **Порядок визначення переміщень за допомогою інтеграла Максвелла-Мора.**

1. Прикладаємо зовнішнє навантаження, визначаємо опорні реакції, розбиваємо балку на ділянки, записуємо вирази (функції) згинаючого моменту  $M_{xF}$  для кожної ділянки.
2. У точці, переміщення якої визначаємо, прикладаємо:
  - а) **Одиничну силу** при визначенні прогину (лінійного переміщення);
  - б) **Одиничний момент** при визначенні кутового переміщення.

Визначаємо опорні реакції й у такому ж порядку, як і для зовнішнього навантаження, на кожній ділянці записуємо вирази (функції) згинаючого моменту  $\bar{M}_x$ .

3. Підставляємо функції (вирази)  $M_{xF}$  і  $\bar{M}_x$  в інтеграл Максвелла-Мора та робимо відповідні обчислення.

4. Результат обчислень позитивний, якщо напрямок одиничного навантаження, що прикладається, збігається з напрямком дійсного переміщення, і негативний, якщо напрямок одиничного навантаження, що прикладається, не збігається з напрямком дійсного переміщення.

**Приклад 2.** Консольна балка постійного поперечного перерізу ( $EI_x = \text{const}$ ) довжиною  $\ell$  навантажена на кінці зосередженою силою  $F$  (рис.3.4а). Визначити прогин  $V_A$  та кут  $\theta_A$  повороту на кінці консолі.

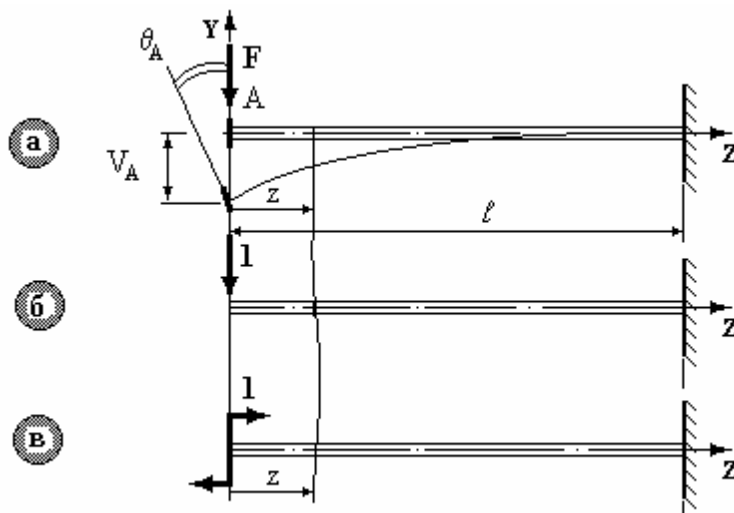


Рис. 3.4.

1. Запишемо функцію  $M_{xF} = -Fz$  (рис.3.4а).
2. У точці А прикладаємо одиничну силу (рис.3.4б) та записуємо функцію  $\bar{M}_x = -1 \cdot z$ .
3. Підставляючи  $M_{xF}$  й  $\bar{M}_x$  в інтеграл, одержимо:

$$V_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\ell} F \cdot z \cdot z \cdot dz = \frac{F\ell^3}{3EI_x} \quad (\text{див. приклад 1 на рис. 3.2}).$$

4. Для визначення кутового переміщення у точці А прикладаємо одиничний момент (рис.3.4в) та записуємо функцію  $\bar{M}_x = 1$ .

5. Підставляючи  $M_{xF}$  й  $\bar{M}_x$  в інтеграл, одержимо:  $\theta_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\ell} (-F \cdot z) \cdot 1 \cdot dz = -\frac{F\ell^2}{2EI_x}$ .

Результат обчислення прогину  $V_A$  позитивний, тому що прикладена одинична сила збігається з напрямком дійсного переміщення. Результат обчислення кута повороту  $\theta_A$  негативний, тому що прикладений одиничний момент по напрямку не збігається з дійсним напрямком кута повороту перерізу в точці А.

### 3.2.2 Геометричний спосіб обчислення інтеграла Максвела-Мора. Спосіб перемножування епюр.

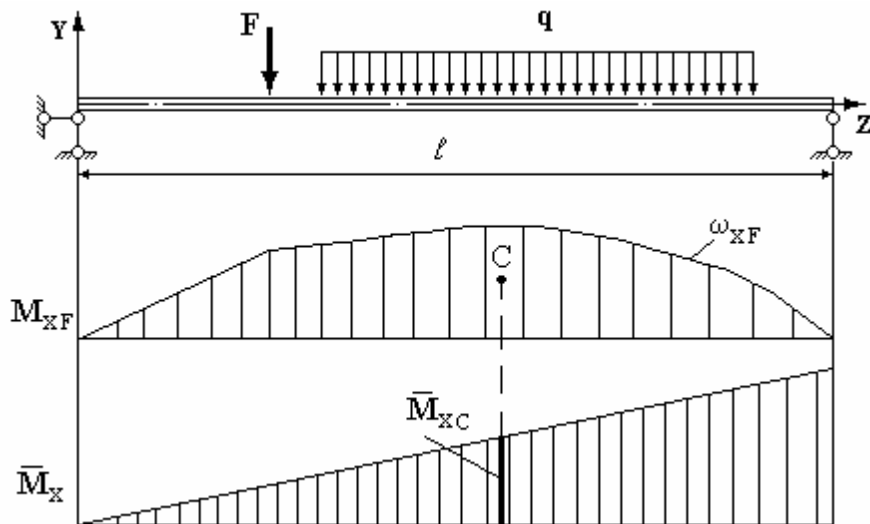


Рис. 3.5.

**Правило Верещагіна.** Використовуючи геометричну інтерпретацію визначення інтегралу як значення площі, інтеграл Мора для визначення переміщень у балках постійного перерізу можна обчислити за допомогою спеціальної операції над епюрами відповідних згинальних моментів.

В результаті одержимо:

$$\Delta_{ij} = \int_{\ell} \frac{M_{xF} \bar{M}_x}{EI_x} dz = \frac{\omega_{xF} \cdot \bar{M}_{xC}}{EI_x}, \quad (3.6)$$

де  $\omega_{xF}$  - **площа вантажної** (від зовнішнього навантаження) **епюри**  $M_{xF}$ ;  $\bar{M}_{xC}$  - **ордината, узята з одиничної епюри**  $\bar{M}_x$  **під центром ваги**  $C$  **вантажної епюри.**

**Правило знаків.** Якщо епюри, що перемножуються, лежать по одну сторону (обидві нагорі або внизу), добуток позитивний; якщо епюри, що перемножуються, лежать по різні сторони - добуток негативний.

Якщо епюра від зовнішнього навантаження кусочно-лінійна на ділянках, а одинична епюра завжди кусочно-лінійна, результат перемножування не залежить від порядку використання співмножників, тобто:

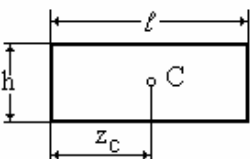
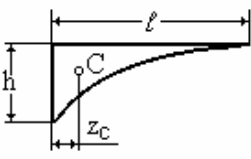
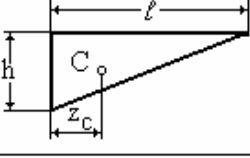
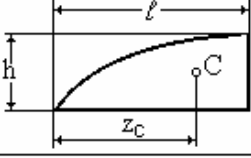
$$\frac{\omega_{xF} \cdot \bar{M}_{xC}}{EI_x} = \frac{\bar{\omega}_x \cdot M_{FC}}{EI_x}, \quad (3.7)$$

де  $\omega_{xF}$  - **площа епюри від зовнішнього навантаження**;  $\bar{\omega}_x$  - **площа епюри від одиничного навантаження**;  $M_{FC}$  - **ордината під центром ваги** **одиничної**  $\bar{M}_x$  **епюри, узята з епюри**  $M_{xF}$  **від зовнішнього навантаження.**

Якщо епюри  $M_{xF}$  і  $\bar{M}_x$  складаються з декількох ділянок, то перемножування здійснюється по ділянках, а результат підсумовується, тобто:

$$\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{ixF} \cdot \bar{M}_{ixC}}{EI_x}. \quad (3.8)$$

Відзначимо, що в розглянутих задачах епюри вантажних та одиничних згинальних моментів складаються з досить простих площ: прямокутник, трикутник, параболічний трикутник і т.д. У таблиці приведені площі  $\omega$  та координати центрів ваги  $z_c$  плоских фігур, що зустрічаються в епюрах.

	$\omega$	$z_c$		$\omega$	$z_c$
	$h\ell$	$\frac{1}{2}\ell$		$\frac{1}{3}h\ell$	$\frac{1}{4}\ell$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{1}{3}\ell$		$\frac{2}{3}h\ell$	$\frac{5}{8}\ell$

При рішенні конкретних задач доцільно використовувати правило трапеції для перемножування лінійних епюр і правило Симпсона-Карнаухова для перемножування будь-яких епюр (у більшості випадків нелінійних).

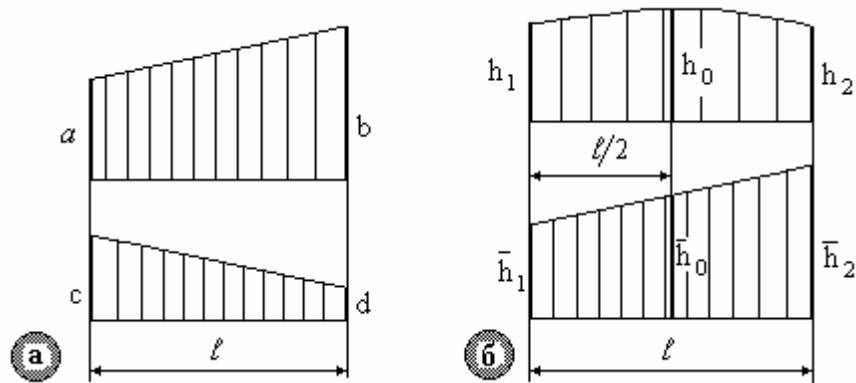


Рис.3.6.

**Правило трапеції** (тільки для лінійних епюр – рис.3.6а). У тому випадку, коли на ділянці епюра  $M_{xF}$  від зовнішнього навантаження лінійна, перемножування епюр можна виконати за правилом трапеції. Результат перемножування лінійних епюр на ділянці довжиною  $\ell$  дорівнює:

$$\Delta = \frac{\ell}{6EI_x} (a \cdot d + b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d).$$

**Правило знаків:** якщо ординати, що перемножуються, одного знака (лежать по одну сторону), одержуваний добуток позитивний, якщо знаки ординат різні - добуток негативний.

**Правило Симпсона - Карнаухова** (для лінійних епюр і епюр, описуваних квадратною параболою-рис.3.6б). Результат добутку наступний:

$$\Delta = \frac{\ell}{6EI_x} (h_1 \bar{h}_1 + h_2 \bar{h}_2 + 4h_0 \bar{h}_0).$$

Тут  $h_1, h_2$  - крайні ординати вантажної епюри (нелінійної) на ділянці;  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  - крайні ординати одиничної епюри (лінійної) на ділянці;  $h_0$  і  $\bar{h}_0$  - середні ординати епюр на ділянці. Правило знаків при перемножуванні ординат аналогічно правилу трапеції.

**Приклад 3.** Для консольної балки, навантаженої зовнішніми силами, як показано на рис.3.7, визначити прогин та кут повороту на кінці консолі в перерізі А.

1.Визначаємо опорні реакції.

$$\sum F_{yi} = 0; F - q \cdot 3a + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 2qa.$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -F \cdot 6a + q \cdot 3a \cdot 3,5a - M_B = 0 \Rightarrow M_B = 1,5qa^2.$$

Перевірка:

$$\sum M_{Ai} = -q \cdot 3a \cdot 2,5a - M + R_B \cdot 6a - M_B = qa^2(-7,5 - 3 + 12 - 1,5) \equiv 0.$$

2.Записуємо вирази  $Q_y$  і  $M_x$ , будуємо відповідні епюри.

$$0 \leq z_1 \leq a : Q_y = F = qa; M_x = F \cdot z_1 = qa \cdot z_1.$$

$0 \leq z_2 \leq 3a : Q_y = F - q \cdot z_2 = qa - q \cdot z_2$ . Поперечна сила змінює знак при  $z = a$ .

$$M_x = F(z_2 + a) - q \frac{z_2^2}{2} = qa(z + a) - q \frac{z_2^2}{2}.$$

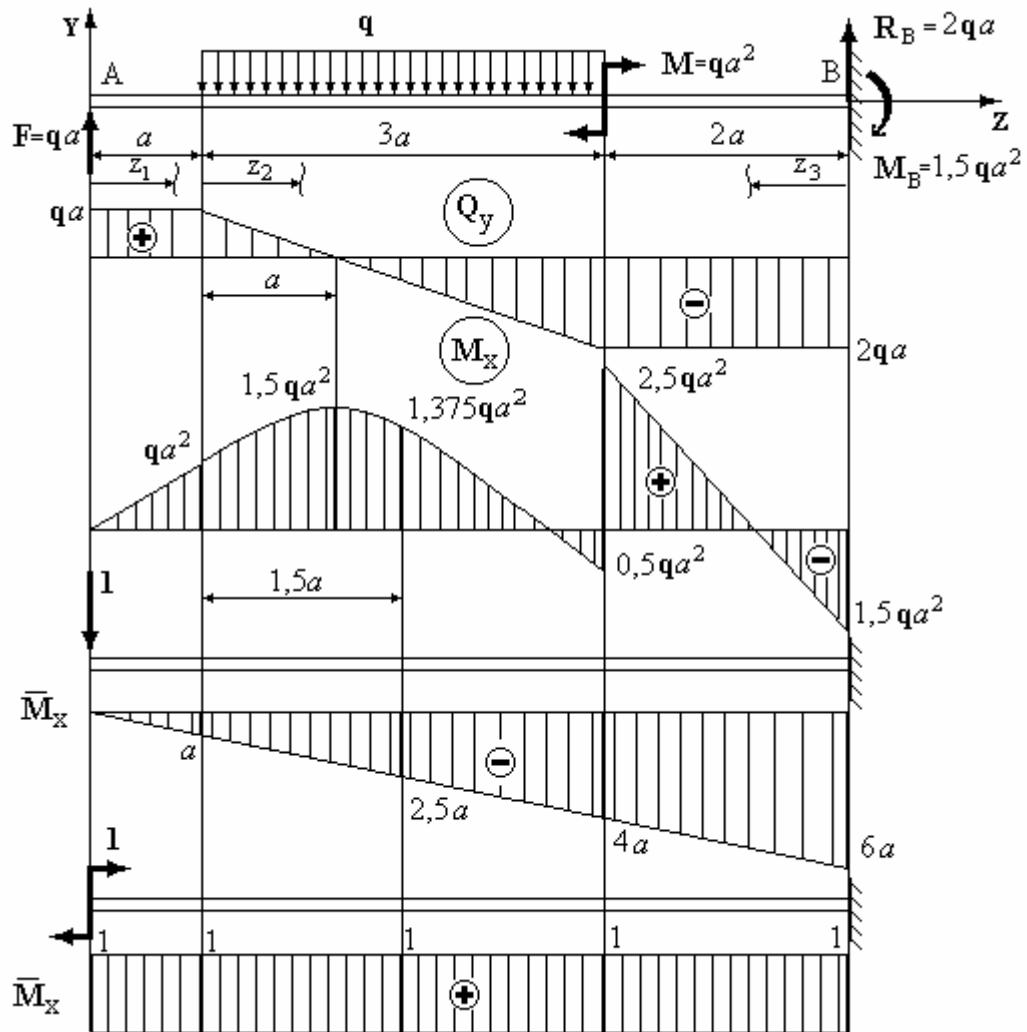


Рис.3.7.

$$M_{x \max} = M_x|_{z=a} = 2qa^2 - 0,5qa^2 = 1,5qa^2;$$

$$M_x|_{z=1,5a} = qa^2 \left( 2,5 - \frac{1,5^2}{2} \right) = 1,375qa^2.$$

$$0 \leq z_3 \leq 2a: Q_y = -2qa; M_x = -M_B + R_B \cdot z = -1,5qa^2 + 2qa \cdot z.$$

3. У точці А прикладаємо одиничну силу, будемо епюру  $\bar{M}_x = -1 \cdot z$ , визначаючи ординати на границях кожної ділянки.

4. Перемножуючи епюри  $M_x$  і  $\bar{M}_x$ , визначаємо шуканий прогин:



$$V_A = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{3}{6} (-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1,375 \cdot 2,5) + \frac{2}{6} (-2,5 \cdot 6 + 4 \cdot 1,5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 4 + 2 \cdot 1,5 \cdot 6) \right] = \frac{qa^4}{6EI_x} [-2 - 38,25 - 22] = -\frac{10,375qa^4}{EI_x}.$$

Тут на першій ділянці перемножування епюр виконано за правилом Верещагіна; на другій - Симпсона, на третій - трапеції. Знак мінус указує на те, що під дією зовнішнього навантаження переріз переміщується угору.

5. У точці А прикладаємо одиничний момент, будуємо епюру  $\bar{M}_x = 1$ . Перемножуючи її по ділянках з вантажною епюрою, визначаємо кут повороту перерізу А.

$$\theta_A = \frac{qa^3}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{6} (1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1 + 4 \cdot 1,375 \cdot 1) + \frac{2}{6} (2,5 \cdot 1 - 1,5 \cdot 1 + 2 \cdot 2,5 \cdot 1 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1) \right] = \frac{qa^3}{EI_x} [0,5 + 3 + 1] = \frac{4,5qa^3}{EI_x}.$$

Тут на першій ділянці перемножування виконане за правилом Верещагіна, на другій - Симпсона, на третій - трапеції. Результат обчислень позитивний, отже, напрямок кута повороту перерізу А збігається з напрямком одиничного моменту.

### **3 4. ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ ПО ВИКОНАННЮ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ РОБІТ**

#### **І ВИМОГИ ДО ЇХНЬОГО ОФОРМЛЕННЯ**

Опір матеріалів займає найважливіше місце серед фундаментальних дисциплін у циклі загальноінженерної підготовки студентів.

Задача курсу – придбання майбутніми інженерами практичних навичок розрахунків на міцність.

Приступаючи до виконання роботи, студент повинний:

вивчити за конспектом і додатковою навчальною літературою теоретичний матеріал відповідного розділу курсу;

проробити приклади і задачі, які були розв'язані на лекціях і практичних заняттях;

проаналізувати вихідні дані і постановку задачі і намітити план її виконання;

зробити вихідні викладення: намалювати схему балки, записати необхідні для рішення задачі формули і рівняння (рівняння статичної рівноваги і т.д.).

оформити задачу в чернетці і, у разі потреби, проконсультуватися у викладача.

Розрахунки необхідно робити в загальному виді з проміжними викладеннями в звичайних чи десяткових дробах, зберігаючи усюди три значущі цифри.

Для побудови епюр внутрішніх силових факторів, напружень і переміщень необхідно правильно вибрати масштаб по координатних осях, проставити позначення відповідного параметра і його розмірність, а потім по необхідному числу крапок побудувати графік.

Завдання підлягає заліку при виконанні наступних умов:

здано чистовий варіант розрахунково-проектувального завдання і дані правильні відповіді на контрольні питання;

вирішено контрольні задачі на консультаціях.

Завдання в чистовому варіанті оформляється на аркушах папера формату А4.

### **Вихідні дані:**

- схеми навантаження чотирьох балок /табл.1/;
- величини зовнішніх сил та геометричні розміри балок, межа текучості матеріалу балки  $\sigma_T$  для сталі та чавуну, коефіцієнт запасу міцності  $n_T$  /табл.2/;
- конфігурація складного поперечного перерізу балки /табл.3/

### **Порядок виконання завдання.**

1. Побудувати епюри внутрішніх поперечних сил і згинальних моментів до усіх балок.
2. Підібрати згідно з умовою міцності за нормальними напруженнями ряд простих перерізів балки, що позначена викладачем, та зробити порівняльний аналіз ступеня їх раціональності.
3. Визначити запас міцності  $n_T^0$  тієї ж балки, якщо її переріз має складну конфігурацію /табл.3/.
4. Визначити допустиме значення зовнішніх сил для одного прикладу балки з табл. 1.

### **3.1 План розв'язання**

- 1) Відповідно до заданого варіанта накреслити розрахункові схеми балок разом з їх навантаженням, додержуючись певного масштабу.
- 2) Для кожної балки визначити опорні реакції (чисельно або в загальному вигляді), скласти вирази і підрахувати внутрішні зусилля  $Q_Y$  і  $M_X$  на усіх

ділянках, накреслити їх епюри та перевірити відповідність епюр до диференціальних співвідношень між силовими факторами при згині.

- 3) Для кожної балки знайти небезпечний переріз з погляду міцності за нормальними напруженнями і визначити максимальний за модулем згинаючий момент  $M_{Xmax}$ .
- 4) Обчислити допустиме напруження.
- 5) Визначити необхідний осьовий момент опору  $W_X$  з розв'язку умови міцності.
- 6) Підібрати прості перерізи у вигляді:
  - прямокутника із співвідношенням сторін  $h / b = 2$ ;
  - прямокутника із зворотним співвідношенням сторін  $b / h = 2$ ;
  - кола;
  - кільця, у якому  $\alpha = d / D = 0.8$ ;
  - двотавра;
  - швелера.

Обчислити площу перерізів. Одержані результати подати у вигляді таблиці (див. додаток).

- 7) Для небезпечних перерізів двотаврової балки побудувати епюри розподілу нормальних і дотичних напружень з обчисленням їх значень у характерних точках перерізу.
- 8) У зазначеному викладачем перерізі двотаврової балки знайти її прогин.
- 9) Для балки складного перерізу підрахувати запас міцності  $n_T^0$  відносно межі текучості. Для цього необхідно:
  - визначити координати  $X_C, Y_C$  центру ваги площі перерізу, а також положення головних центральних осей;
  - знайти нейтральну вісь і відстань від неї до найбільш віддаленої точки перерізу  $Y_{max}$ ;

Таблиця 1

<b>1</b>						
<b>2</b>						
<b>3</b>						
<b>4</b>						
<b>5</b>						
<b>6</b>						

- обчислити осьовий момент інерції  $I_x$  відносно нейтральної осі X;
- знайти найбільші напруження  $\sigma_{max}$  та побудувати епюру  $\sigma$  у перерізі балки;

Продовження табл. 1

<b>7</b>				
<b>8</b>				
<b>9</b>				
<b>10</b>				
<b>11</b>				
<b>12</b>				

Продовження табл. 1

<b>13</b>						$F_0 = 1.8qb$ $q$
<b>14</b>						$F_0 = 1.5qc$
<b>15</b>						$F_0 = 0.9qa$
<b>16</b>						$F_0 = 0.7qb$
<b>17</b>						$M_0 = 1.8qc^2$
<b>18</b>						$M_0 = 2qa^2$

Продовження табл. 1

<b>19</b>					$M_0 = 1.7qc^2$ 
<b>20</b>					$F_0 = 1.4qb$ 
<b>21</b>					$M_0 = 1.6qa^2$ 
<b>22</b>					$F_0 = 1.3qc$ 
<b>23</b>					$F_0 = 0.7qa$ 
<b>24</b>					$F_0 = 1.6qc$ 



Таблица 2

Вариант	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	n <sub>T</sub>	a	b	c	L
	кН			кНм			кН/м	кН/м					
1	10	20	30	40	20	10	30	10	1,7	1,5	1,0	2,0	12
2	30	10	20	30	30	20	50	30	1,4	2,0	2,5	1,0	14
3	20	20	10	20	40	20	40	10	1,5	1,0	1,5	2,0	16
4	10	30	20	20	10	20	20	40	1,6	2,5	2,0	1,0	18
5	20	30	10	30	40	20	20	30	1,8	1,5	2,0	1,0	20
6	30	10	20	10	30	40	10	20	2,0	1,0	2,0	1,5	22
7	30	20	10	30	40	10	20	10	1,8	2,5	1,0	2,0	20
8	50	10	20	20	20	30	30	20	1,6	2,0	2,0	1,5	18
9	30	20	10	20	10	30	10	40	1,5	1,5	1,0	3,0	16
10	10	40	30	10	40	20	20	30	1,4	1,5	3,0	1,0	14
11	20	20	20	30	10	10	30	10	1,6	3,0	1,0	2,5	12
12	20	30	40	20	30	40	40	30	1,4	2,5	2,0	3,0	10
13	40	10	20	10	20	40	50	20	1,5	3,0	2,5	2,0	14
14	50	20	10	20	10	20	10	30	1,6	1,0	2,5	3,0	16
15	30	10	30	30	30	10	10	40	1,8	2,5	3,0	1,0	18

Сталь –  $\sigma_T = 300$  МПа; Чавун КЧ30 – 6 –  $\sigma_T^+ = 190$  МПа,

$\sigma_T^- = 210$  МПа.

Таблица 3

<p><b>1</b></p> <p><math>d = 0.5l</math></p>	<p><b>4</b></p> <p><math>d = l/2</math></p>	<p><b>7</b></p> <p><math>D = l</math></p>	<p><b>10</b></p>
<p><b>2</b></p> <p><math>0.5l</math></p>	<p><b>5</b></p> <p><math>l/2</math></p>	<p><b>8</b></p> <p><math>l/4</math></p>	<p><b>11</b></p>
<p><b>3</b></p> <p><math>d = 0.5l</math></p>	<p><b>6</b></p> <p><math>d = l/2</math></p> <p><math>D = l</math></p>	<p><b>9</b></p> <p><math>l/4</math></p>	<p><b>12</b></p>

<p><b>13</b></p> <p><math>d = 3l/4</math></p>	<p><b>16</b></p> <p><math>d = l/2</math></p>	<p><b>19</b></p> <p><math>d = l/2</math></p>	<p><b>22</b></p> <p><math>D = l</math></p> <p><math>d = l/2</math></p>
<p><b>14</b></p> <p><math>l/2</math></p>	<p><b>17</b></p> <p><math>l/4</math></p> <p><math>l/4</math></p> <p><math>l/4</math></p>	<p><b>20</b></p> <p><math>l/2</math></p> <p><math>l/2</math></p>	<p><b>23</b></p> <p><math>l/4</math></p> <p><math>l/2</math></p> <p><math>l/4</math></p>
<p><b>15</b></p> <p><math>d = 3l/4</math></p>	<p><b>18</b></p> <p><math>l/4</math></p> <p><math>l/4</math></p>	<p><b>21</b></p> <p><math>D = l</math></p> <p><math>l/2</math></p> <p><math>l/2</math></p>	<p><b>24</b></p> <p><math>l/4</math></p> <p><math>l/2</math></p> <p><math>l/4</math></p>

- підрахувати запас міцності  $n_T^0$ .

10) Підібрати для заданої у загальному вигляді схеми балки допустиме значення зовнішніх сил згідно з умовою міцності за нормальними напруженнями. Прийняти матеріал балки – чавун КЧ 30-6 з різними значеннями межі текучості при розтязі-стисканні та складний переріз свого варіанта /табл.3/.

### 3.1.1 Послідовність виконання завдання

По-перше, треба побудувати епюри внутрішніх силових факторів при згинанні для усіх балок свого варіанту завдання.

Умова міцності за нормальними напруженнями повинна виконуватись у найбільш небезпечній точці небезпечного перерізу

$$\sigma = \frac{M_{X \max}}{I_X} Y_{\max} \leq [\sigma] \quad (4.1)$$

або для перерізів, симетричних відносно нейтральної лінії

$$\sigma = \frac{M_{X \max}}{W_X} \leq [\sigma] \quad (4.2)$$

Небезпечним вважається переріз, де на епюрі  $M_X$  діє максимальний за модулем внутрішній момент згину  $M_{X \max}$ .

Небезпечна точка у перерізі має координату  $Y_{\max}$  і розташовується на найбільшій відстані від нейтральної лінії – осі X.

Допустиме напруження визначається за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad (4.3)$$

Необхідний момент опору знаходиться з умови міцності

$$W_X \geq \frac{M_{X \max}}{[\sigma]} \quad (4.4)$$

Підбір необхідних розмірів перерізів балки виконується таким чином:

- для двотавра та швелера номер профілю визначається з порівняння знайденого моменту опору із даними сортаменту /ДСТ 8239-72, СТ СЕВ 2209-80, ДСТ 8240-72/.
- для прямокутника осьовий момент опору визначається за розмірами сторін  $h$  та  $b$  як:

$$W_X = \frac{bh^2}{6},$$

де  $h$  – бік прямокутника, перпендикулярний осі  $X$ .

Оскільки

$$\frac{h}{b} = k, \quad / k=2; 0,5 /,$$

то  $b = h/k$  і  $W_X = h^3/6k$  звідки  $h = \sqrt[3]{6kW_X}$ . Площа перерізу  $A = b \times h$ ;

- для кола  $W_X = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3$ , тоді  $d = \sqrt[3]{10W_X}$ , а площа перерізу

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

- для кільця  $W_X = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1D^3 (1 - \alpha^4)$ , де  $\alpha = d/D$ ;  $d$ ,  $D$  – внутрішній і зовнішній діаметри кільця відповідно. Площа кільця

$$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^4).$$

Визначення запасу міцності складного перерізу:

1. По параметру  $L$  /табл.2/ та сортаменту стандартних профілів встановити характерні розміри перерізу і зобразити його, додержуючись масштабу.
2. Розбити переріз на такі прості складові частини, центр ваги яких і осьові моменти інерції відомі чи легко знаходяться.
3. Для кожної складової частини перерізу визначити і накреслити власні головні центральні вісі  $X_i, Y_i$ .
4. Обчислити координати центру ваги складного перерізу:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^N S_{Y_i}}{\sum_{i=1}^N A_i} = \frac{\sum_{i=1}^N A_i X_{C_i}}{\sum_{i=1}^N A_i}, \quad Y_i = \frac{\sum_{i=1}^N S_{X_i}}{\sum_{i=1}^N A_i} = \frac{\sum_{i=1}^N A_i Y_{C_i}}{\sum_{i=1}^N A_i}, \quad (4.5)$$

де  $S_{Y_i}, S_{X_i}$  - статичні моменти  $i$ -ої складової частини перерізу відносно будь-якої фіксованої системи осей  $X_0, Y_0$ ;  $X_{C_i}, Y_{C_i}$  - координати центрів ваги  $i$ -ої складової частини перерізу у вибраній системі координат  $X_0, Y_0$ ;  $A_i$  - площа  $i$ -ої складової частини перерізу.

Підсумування у (4.5) проводиться за кількістю  $N$  складових частин перерізу.

5. Накреслити головні центральні осі  $X, Y$  складного перерізу.
6. Визначити осьовий момент інерції  $I_X$  поданого перерізу, враховуючи наступне:

якщо головні центральні осі  $X_i, Y_i$  складової частини перерізу паралельні головним центральним осям  $X, Y$ , то

$$(I_X)_i = I_{X_i} + a_i^2 A_i, \quad (4.6)$$

де  $a_i$  - відстань між осями  $X$  та  $X_i$ ;

$I_{Xi}$ - момент інерції складової частини перерізу відносно власної осі  $X_i$ ; момент інерції складної фігури відносно головної центральної осі дорівнює сумі моментів інерції її складових частин відносно тієї самої осі:

$$I_X = \sum_{i=1}^N I_{Xi} \quad (4.7)$$

Таким чином,

$$I_X = \sum_{i=1}^N (I_{Xi} + a_i^2 A_i) \quad (4.8)$$

7. Максимальні напруження знайти за формулою (4.1).
8. Запас міцності складного перерізу підрахувати згідно (4.9).

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} \quad (4.9)$$

Графіки розподілу нормальних і дотичних напружень достатньо збудувати тільки для балки двотаврового перерізу. Епюри нормальних напружень  $\sigma$  визначити у перерізі, де діє  $M_{X_{\max}}$ , а розподіл дотичних напружень  $\tau$  знайти для перерізу з максимальною за модулем поперечною силою  $Q_{Y_{\max}}$ . На епюрі  $\sigma$  зазначити зони розтягу та стиску, а на епюрі  $\tau$  - напрям вектора дотичних напружень. Підрахунок дотичних напружень провести за формулою Д.І.Журавського (4.10) для характерних точок перерізу:

- найбільш віддалених від нейтральної осі;
- що лежать на стику полки двотавра зі стінкою;
- що лежать на нейтральній осі перерізу.

$$\tau = \frac{Q_{Y \max} \cdot S_X^{\text{відс}}}{b \cdot I_X}, \quad (4.10)$$

тут  $Q_{Y \max}$  - максимальне за модулем внутрішнє зусилля у балці;  
 $S_X^{\text{відс}}$  - статичний момент відсіченої частини площі перерізу на тому рівні, де визначається дотичне напруження відносно нейтральної осі X;  
 $I_X$  - осьовий момент інерції перерізу;  
 $b$  - ширина площі перерізу на рівні, де визначається дотичне напруження.

9. Переміщення (прогин) в балках знаходяться згідно з енергетичним методом за допомогою інтеграла Мора:

$$V = \int_1 \frac{M_X \times \bar{M}_i}{EI_X} dz, \quad (4.11)$$

який можна обчислити за правилом Верещагіна.

$$V = \frac{\left[ M_X \times \bar{M}_i \right]}{EI_i} \quad (4.12)$$

У співвідношенні (4.12)

$M_X$ - епюра згинального моменту від зовнішніх сил;

$\bar{M}_i$ - епюра “фіктивного” згинального моменту від одиничної сили, прикладеної в перерізі, де знаходиться прогин.

Слід прийняти до уваги, що вираз (4.12) можна підрахувати графоаналітичним способом згідно з формулами, наведеними на рис.4.1 , при цьому загальні епюри згинальних моментів  $M_X, \bar{M}_i$  треба розбити на



такі частини, в межах яких зазначені функції залишаються незмінними.

10. Вибір припустимого значення зовнішньої сили виконати згідно з умовами міцності для складного перерізу з урахуванням різних властивостей чавуну на розтяг та стискання.

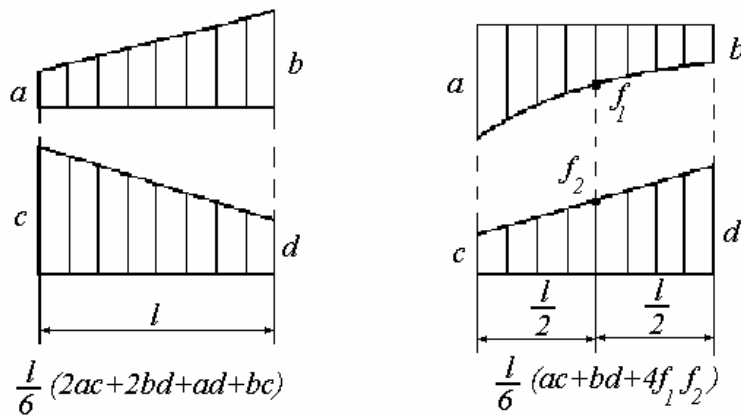
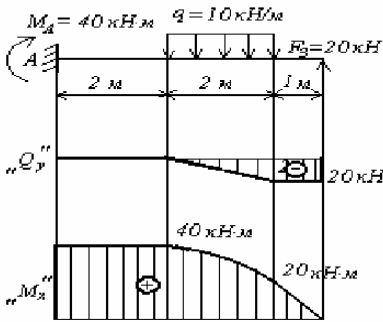
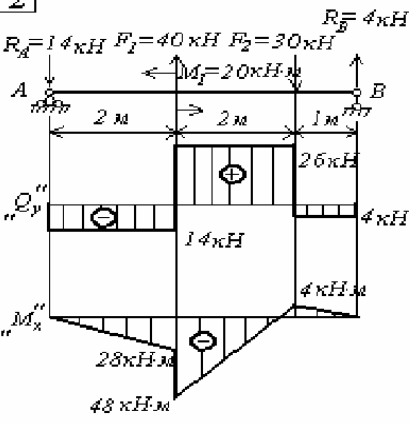
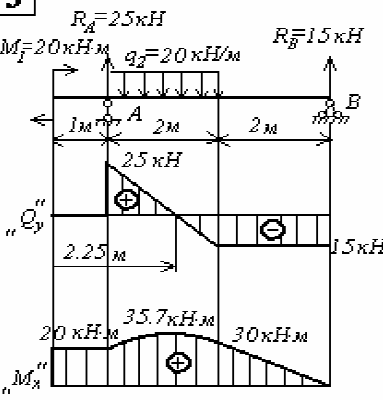
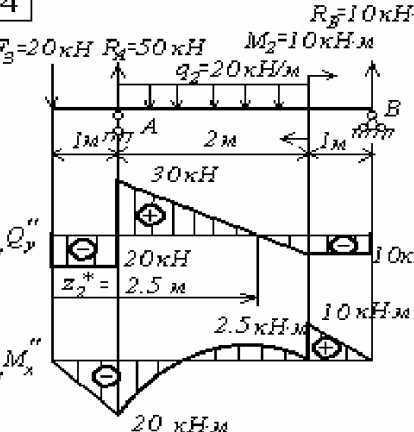
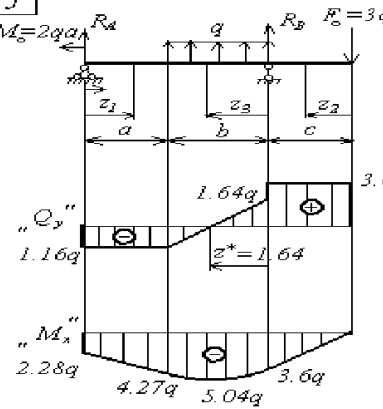


Рис. 4.1

<p><b>Зразок виконання завдання</b></p> <p>Вихідні дані: <math>n_T = 1.5</math>, <math>L = 10</math> см</p> <p>Матеріал балок №1-4– сталь</p> <p><math>\sigma_T = 300</math> МПа</p> <p><math>E = 2 \cdot 10^5</math> МПа</p> <p>Матеріал балки №5- чавун КЧ 30 – 6</p> <p><math>\sigma_T^+ = 190</math> МПа</p> <p><math>\sigma_T^- = 210</math> МПа</p> <p><math>E = 1.55 \cdot 10^5</math> МПа</p>	<p><b>1</b></p> 
<p><b>2</b></p> 	<p><b>3</b></p> 
<p><b>4</b></p> 	<p><b>5</b></p> 

## Розрахунок на міцність балки 4:

### 1. Визначення реакцій опор

$$\sum M_A = 0; F_3 \cdot 1 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 - M_2 + R_B \cdot 3 = 0; R_B = (-20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + 10) / 3 = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; F_3 \cdot 4 - R_A \cdot 3 + q_2 \cdot 2 \cdot 2 - M_2 = 0; R_A = (20 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 2 - 10) / 3 = 50 \text{ кН};$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_{iy} = 0; R_A + R_B - F_3 - q_2 \cdot 2 = 0; 50 + 10 - 20 - 20 \cdot 2 = 0.$$

### 2. Визначення поперечних зусиль $Q_Y$ та моментів згину $M_X$

$$0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м} \quad Q_y(z_1) = -F_3 = -20 \text{ кН}; \quad M_x(z_1) = -F_3 z_1;$$

$$M_x|_{z_1=0} = 0; \quad M_x|_{z_1=1 \text{ м}} = -20 \text{ кНм};$$

$$1 \text{ м} \leq z_2 \leq 3 \text{ м} \quad Q_y(z_2) = -F_3 + R_A - q_2(z_2 - 1);$$

$$Q_y|_{z_2=1 \text{ м}} = -20 + 50 = 30 \text{ кН}; \quad Q_y|_{z_2=3 \text{ м}} = -20 + 50 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_x(z_2) = -F_3 z_2 + R_A(z_2 - 1) - \frac{q_2(z_2 - 1)^2}{2};$$

$$M_x|_{z_2=1 \text{ м}} = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм}; \quad M_x|_{z_2=3 \text{ м}} = -20 \cdot 3 + 50 \cdot 2 - 20 \frac{2^2}{2} = 0;$$

$$M_x'(z_2) = Q_y(z_2) = -F_3 + R_A - q_2(z_2^* - 1) = 0;$$

$$z_2^* = (-F_3 + R_A + q_2 \cdot 1) / q_2 = 2.5 \text{ м};$$

$$M_x|_{z_2=2.5 \text{ м}} = -20 \cdot 2.5 + 50 \cdot 1.5 - 20 \frac{1.5^2}{2} = 2.5 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м} \quad Q_y(z_3) = -R_B = -10 \text{ кН}; \quad M_x(z_3) = R_B \cdot z_3;$$

$$M_x|_{z_3=0} = 0; \quad M_x|_{z_3=1 \text{ м}} = 10 \text{ кНм}$$

### 3. Підбір перерізів з умови міцності

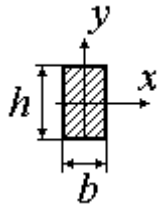
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X\max}}{W_X} \leq [\sigma]; \quad W_X \geq \frac{M_{X\max}}{[\sigma]}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{300}{1.5} = 200 \text{ МПа};$$

$$W_X \geq \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6} = 100 \text{ см}^3.$$

$$\text{Приймаємо} \quad \text{І №16: } I_X = 873 \text{ см}^4, \quad W_X = 109 \text{ см}^3, \quad A = 20.2 \text{ см}^2,$$

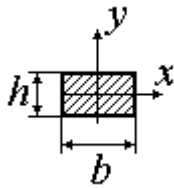
$$S_{X\max} = 623 \text{ см}^3, \quad h = 16 \text{ см}, \quad d = 5 \text{ мм}, \quad t = 7.8 \text{ мм}, \quad b = 81 \text{ мм}.$$

$$[\text{№16а: } W_X = 103 \text{ см}^3, \quad A = 19.5 \text{ см}^2.]$$



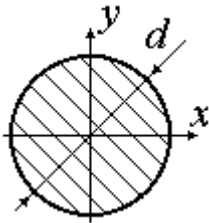
$$\frac{h}{b} = 2, \quad W_x = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = 100 \text{ cm}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 100} = 10.6 \text{ cm}, \quad b = 5.3 \text{ cm}.$$



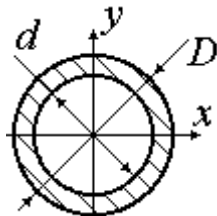
$$\frac{h}{b} = \frac{1}{2}, \quad W_x = \frac{2h \cdot h^2}{6} = 100 \text{ cm}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{3 \cdot 100} = 6.7 \text{ cm}, \quad b = 13.4 \text{ cm}.$$



$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3 = 100 \text{ cm}^3,$$

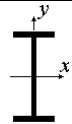
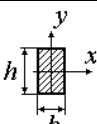
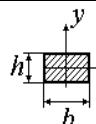
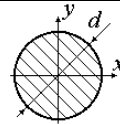
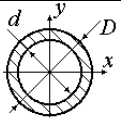
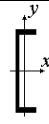
$$d = \sqrt[3]{10 \cdot 1000} = 10 \text{ cm}.$$



$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1D^3 (1 - \alpha^4) = 100 \text{ cm}^3,$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 100}{(1 - 0.8^4)}} = 12 \text{ cm},$$

$$d = \alpha D = 0.8 \cdot 12 = 9.6 \text{ cm}.$$

						
A, c M <sup>2</sup>	20.2	56	90	78	40	19.5
A <sub>i</sub> / A <sub>I</sub>	1	2.8	4.5	3.9	2	0.9

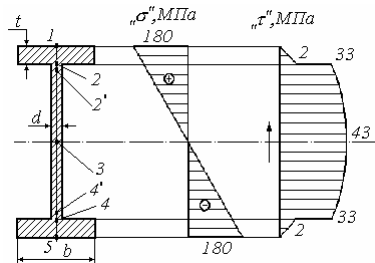
4. Напруження у двотавру

$$\sigma_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 180 \text{ МПа};$$

$$\tau_{1,5} = 0;$$

$$\tau_{2,4} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7.8 \cdot 10^{-3} \cdot 7.51 \cdot 10^{-2}}{81 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 2 \text{ МПа};$$

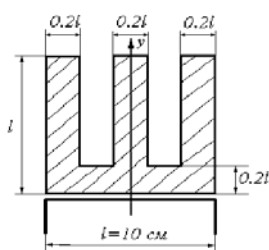
$$\tau_{2',4'} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7.8 \cdot 10^{-3} \cdot 7.51 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 33 \text{ МПа};$$



$$\tau_3 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 62.3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 43 \text{ МПа}.$$

5. Визначення коефіцієнта запасу міцності  $n_T^0$  складного перерізу

Витяг з сортаменту для швелера №10 дає:

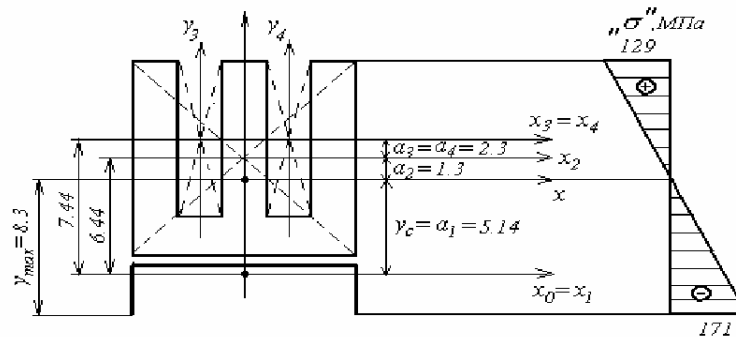


$$I_x = 174 \text{ см}^2, \quad I_y = 20.4 \text{ см}^4, \quad A = 10.9 \text{ см}^2,$$

$$b = 46 \text{ мм}, \quad z_0 = 1.44 \text{ см}, \quad h = 10 \text{ см}.$$

Тоді для складного перерізу маємо:

$$x_c = 0; \quad y_c = \frac{10^2 \cdot 6.44 - 2(2 \cdot 8 \cdot 7.44)}{10.9 + 10^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8} = 5.14 \text{ см};$$



Продовження додатку 1

$$I_x = (20.4 + 5.14^2 \cdot 10.9) + \left(\frac{10^4}{12} + 1.3^2 \cdot 10^2\right) - 2\left(\frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2.3^2 \cdot 16\right) = 971 \text{ см}^4;$$

$$y_{н.в.} = 8.3 \text{ см} \quad \sigma_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 8.3 \cdot 10^{-2}}{971 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 171 \text{ МПа}$$

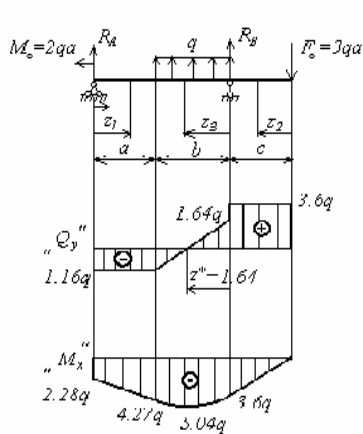
$$y_{в.в.} = 6.3 \text{ см} \Rightarrow \sigma_{в.в.} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6.3 \cdot 10^{-2}}{971 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 129 \text{ МПа} \quad n_T^0 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{300}{171} = 1.75;$$

6. Розрахунок допустимої зовнішньої сили для балки складного перерізу (див. п. 5)

Матеріал – чавун КЧ 30 – 6,

$$\sigma_T^+ = 190 \text{ МПа}, \sigma_T^- = 210 \text{ МПа}, n_T = 1.5, \quad a = 1.2 \text{ м}, b = 2.8 \text{ м}, c = 1 \text{ м}.$$

Визначення реакції опор



$$\sum M_A = 0; \quad M_0 + qb\left(a + \frac{b}{2}\right) + R_B(a+b) - F_0(a+b+c) = 0;$$

$$R_B = \frac{F_0(a+b+c) - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) - M_0}{a+b} = \frac{3qa(a+b+c) - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) - 2qa^2}{a+b} = 1.96q;$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_0 - R_A(a+b) - q\frac{b^2}{2} - F_0c = 0;$$

Перевірка  $\sum F_y = 0: \quad R_A + R_B - qb - F = q(-1.16 + 2.8 + 1.96 - 3 \cdot 1.2) \equiv 0.$

Визначення  $Q_Y$  та  $M_X$ 

1)  $0 \leq z_1 \leq a$

$$Q_y = R_A = -1.16q;$$

$$M_X = R_A z_1 - M_0 = \begin{cases} z_1 = 0; & -2.28q \\ z_1 = a; & -4.27q \end{cases}$$

2)  $0 \leq z_2 \leq c$

$$Q_y = F_0 = 3.6q;$$

$$M_X = -F_0 z_2 = \begin{cases} z_2 = 0; & 0 \\ z_2 = c; & -3.6q \end{cases}$$

3)  $0 \leq z_3 \leq b$

$$Q_y = F_0 - R_B - qz_3 = \begin{cases} z_3 = 0 & (3.6 - 1.96)q = 1.64q \\ z_3 = b & 1.64q - 2.8q = -1.16q \end{cases} \quad z^* = \frac{F_0 - R_B}{q} = 1.64m$$

$$M_X = -F_0(z_3 + c) + R_B z_3 + q \frac{z_3^2}{2} = \begin{cases} z_3 = 0; & -3.6q \\ z_3 = b; & -4.27q \end{cases} \quad M_X^*(z^*) = -5.04q.$$

Для складного перерізу (дивись п.5) верхні волокна працюють на розтяг, а нижні на стиск. З умови міцності, беручи до уваги те, що  $M_{Xmax} = -5.04q$ ,

$$\begin{cases} |\sigma_{в.в.}| \leq [\sigma]^+; \\ |\sigma_{н.в.}| \leq [\sigma]^-, \text{ де } [\sigma]^+ = \frac{\sigma_T^+}{n_T} = \frac{190}{1.5} = 126.7 \text{ МПа}, \quad [\sigma]^- = \frac{\sigma_T^-}{n_T} = \frac{210}{1.5} = 140 \text{ МПа}; \end{cases}$$

$$y_{в.в.} = 10 + 4.6 - 8.3 = 6.3 \text{ см}; \quad y_{н.в.} = y_{max} = 8.3 \text{ см};$$

$$\text{а) } |\sigma_{в.в.}| = \frac{|M_{Xmax}| \cdot y_{в.в.}}{I_X} \leq [\sigma]^+ \Rightarrow q^+ \leq \frac{[\sigma]^+ \cdot I_X}{5.04 \cdot y_{в.в.}} = \frac{126.7 \cdot 10^6 \cdot 971 \cdot 10^{-8}}{5.04 \cdot 6.3 \cdot 10^{-2}} = 3874.6 \text{ Н/м};$$

б)

$$|\sigma_{н.в.}| = \frac{|M_{Xmax}| \cdot y_{н.в.}}{I_X} \leq [\sigma]^- \Rightarrow q^- \leq \frac{[\sigma]^- \cdot I_X}{5.04 \cdot y_{н.в.}} = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 971 \cdot 10^{-8}}{5.04 \cdot 8.3 \cdot 10^{-2}} = 3249.6 \text{ Н/м};$$

беремо менше значення:  $[q] = 3249.6 \text{ Н/м} \approx 3.25 \text{ кН/м}$ , тоді

$$F_0 = 3qa = 11.70 \text{ кН};$$

$$M_0 = 2qa^2 = 9.36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Треба зазначити, що цей переріз розташовано раціонально, бо у верхніх волокнах, працюючих на розтягування, абсолютні значення напружень менші, ніж у нижніх, тоді як  $[\sigma]^+ < [\sigma]^-$ .

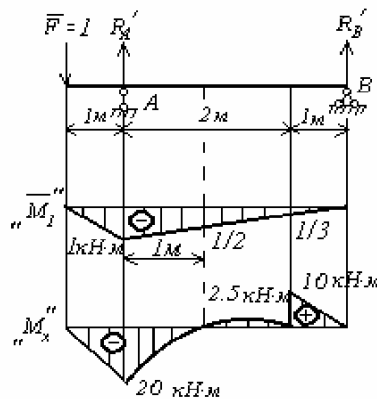
Продовження додатку 1

7. Визначимо переміщення балки №4 в місці прикладання сили  $F_3$ . Для цього у цій точці прикладемо силу  $\bar{F}=1$  і побудуємо епюру  $\bar{M}_1$ .

Реакції опор:

$$R_A' = \frac{4}{3}\bar{F} = \frac{4}{3};$$

$$R_B' = -\frac{1}{3}\bar{F} = -\frac{1}{3};$$



Епюра  $\bar{M}_1$  будується за такими ж правилами, що і  $M_x$ . Епюру  $M_x$  накреслимо ще раз з урахуванням значення у центрі другій ділянці  $M_x(z_2=2)=0$ .

Визначаємо переміщення графічним обчисленням інтеграла Мора:

$$V = \frac{1}{EI_X} [M_x \times \bar{M}_1] = \frac{1}{EI_X} \left[ \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20 + \frac{2}{6} \left( 1 \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 \right) - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 \right] = \frac{12.2}{EI_X};$$

Для сталевий балки двотаврового перерізу ( $I_X = 873 \text{ см}^4$ )

$$V = \frac{12.2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 6.99 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Задача на визначення кута повороту будь-якого перерізу розв'язується аналогічно, шляхом прикладання одиничного моменту  $\bar{M}=1$ .



Додаток 2– Балки двотаврові										
Номер	h	b	d	t	Площа	J <sub>x</sub>	W <sub>x</sub>	S <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23,0	17,9	6,49
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	89,8	114	22,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	114	155	28,2
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	143	206	34,3
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	178	260	41,6

Продовження додатку 2 – Балки двогаврові										
Номер	h	b	d	t	Площа	$J_x$	$W_x$	$S_x$	$J_y$	$W_y$
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	178	260	41,6
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	229	337	50,0
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	292	436	60,1
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	360	145	7,5	12,3	61,9	1338	743	423	516	71,1
40	400	155	8,3	13,0	72,6	1906	953	545	667	86,1
45	450	160	9	14,2	84,7	2769	123	708	808	101
50	500	170	10	15,2	100	3972	158	919	104	123
55	550	180	11	16,5	118	5595	203	118	135	151
60	600	190	12	17,8	138	7680	256	149	172	182

Продовження додатку 2 – Швелери												
Номер профіля	h	b	d	t	Площа, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	Z <sub>0</sub> см	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16	
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,0	8,7	3,68	1,24	
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	13,3	12,8	4,75	1,31	
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	20,4	20,4	6,46	1,44	
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	29,6	31,2	8,52	1,54	
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	40,8	45,4	11,0	1,67	
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	45,1	57,5	13,3	1,87	
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	54,1	63,6	13,8	1,80	
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	59,4	78,8	16,4	2,00	
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	69,8	86	17,0	1,94	
18a	184	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	76,1	105	20,0	2,13	

Продовження додатку 2 – Швелери											
Номер профіля	h	b	d	t	Площа $A, \text{см}^2$	$J_{x_1}$ $\text{см}^4$	$W_{x_1}$ $\text{см}^3$	$S_{x_1}$ $\text{см}^2$	$J_{y_1}$ $\text{см}^4$	$W_{y_1}$ $\text{см}^3$	$Z_0$ $\text{см}^2$
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	87,8	11	20,5	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	95,9	13	24,2	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	110	15	25,1	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	121	18	30,0	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	139	20	31,6	2,42
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	151	25	37,2	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	178	26	37,3	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	224	32	43,6	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	41	51,8	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	51	61,7	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	64	73,4	2,75

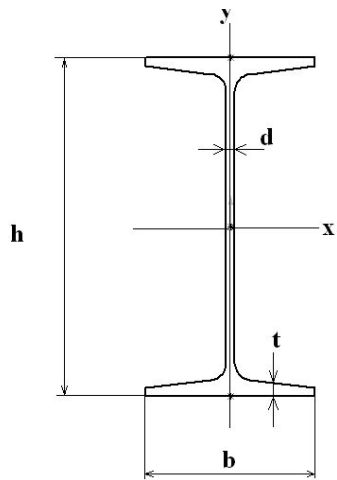


Рис. 4.2 – Балка двотаврова

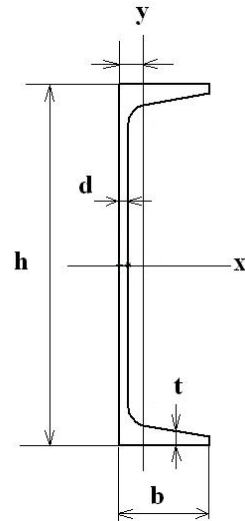


Рис. 4.3 - Швелер

### ЛІТЕРАТУРА

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів: Підручник. – К.: Вища школа, 1993.-655с.: іл.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.-512с.

## **Зміст**

### **1. Згинання прямолінійних стержнів**

1.1 Класифікація згинання та типи опор

1.2 Поперечна сила  $Q_x$  та згинальний момент  $M_x$ , як внутрішні силові фактори при згинанні

1.3 Диференціальні залежності при згинанні

### **2. Напруження при поперечному згинанні**

3.1.1.1 2.1 Нормальні напруження при чистому згинанні

2.2 Дотичні напруження при поперечному згинанні

2.3 Розподіл дотичних напружень для прямокутного перерізу

2.4 Розподіл дотичних напружень для двотаврового перерізу

2.5 Порядок виконання проектувального розрахунку при згинанні

2.6 Потенційна енергія деформації при згинанні

### **3. Переміщення при прямому згинанні. Розрахунки на жорсткість при згинанні**

3.1 Диференціальне рівняння вигнутої осі

3.2 Енергетичні методи визначення переміщень

3.2.1 Інтеграл Максвелла-Мора

3.2.2 Геометричний спосіб обчислення інтеграла Максвелла- Мора

### **4. Загальні вказівки по виконанню розрахунково-проектувальних робіт і вимоги до їхнього оформлення**

Додаток 1 – зразок виконання завдання

Додаток 2 – сортамент стандартних профілів

**Література**

### 3.1.1.2 Навчальне видання

КОНКІН Валерій Миколайович

КИРКАЧ Борис Миколайович

ПОГОРІЛОВ Сергій Юрійович

КРАВЦОВА Наталія Вікторівна

#### РОЗРАХУНКИ НА ЗГІН.

Навчально-методичний посібник з розділу курсу „Опір матеріалів”  
для студентів машинобудівних спеціальностей.

Роботу до друку рекомендував С.К.Шелковий

Відповідальний за випуск В.В.Бортовой

В авторській редакції

План 2003, поз. ...

Підп. до друку . .2003 р. Формат 60x84 1/16. Папір Могра.

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 4,0.

Облік.-вид. арк. 4,2. Наклад прим. Зам. № . Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ „ХПІ”. Свідоцтво ДК №116 від 10.07.2000 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

---

Друкарня НТУ „ХП”