

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
МЕХАНІЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ І ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Зварювання»

ТЕОРІЯ МАШИН

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 131 - Прикладна механіка
зі спеціалізації 131-11 «Зварювання та споріднені процеси і технології»
денної форми навчання

Затверджено
на засіданні
кафедри «Зварювання»,
протокол № 12
від 30 червня 2023 р.

Харків
НТУ «ХП»
2023

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ВСТУП.....	5
1. ДИНАМІКА МАШИН.....	7
1.1 Загальні відомості.....	7
1.2 Сили, що діють у машинах.....	7
1.3 Зведені сили та маси.....	8
1.4 Рівняння руху машини в енергетичній формі.....	11
1.5 Рівняння руху машини в диференціальній формі.....	13
2. РЕЖИМИ РУХУ МЕХАНІЗМУ.....	14
2.1 Загальні методи дослідження руху механізму.....	16
2.2 Регулювання руху машини.....	19
2.3 Визначення закону руху машини під дією сил, що залежать від положення ланки зведення.....	22
2.4 Маховик та його роль.....	23
2.5 Визначення моменту інерції маховика.....	25
2.6 Визначення моменту інерції маховика методом Гут'яра.....	25
2.7 Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера.....	27
3. КІНЕТОСТАТИЧНИЙ (СИЛОВИЙ) АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ.....	29
3.1 Статична визначеність кінематичного ланцюга.....	30
3.2 Реакції в кінематичних парах.....	30
3.3 Умова статичної визначеності кінематичного ланцюга.....	31
3.4 Аналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму.....	32
3.5 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму.....	34

3.6 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму третього класу.....	41
3.7 Визначення зрівноважуючої сили методом Жуковського. Теорема Жуковського.....	42
4. ЗРІВНОВАЖЕННЯ СИЛ ІНЕРЦІЇ.....	45
4.1 Основні відомості про зрівноваження.....	45
4.2 Визначення положення загального центра мас механізму.....	46
4.3 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в одній площині.....	46
4.4 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в паралельних площинах.....	47
4.5 Зрівноваження машин на фундаменті.....	49
4.6 Види нерівноваг (рівноваг).....	52
5. ХВИЛЬОВІ ЗУБЧАТІ ПЕРЕДАЧІ.....	53
5.1 Кінематика хвильової передачі.....	55
5.2 Особливості хвильового зачеплення.....	57
Література.....	59

ПЕРЕДМОВА

Теорія машин викладає наукові основи створення нових машин, методи їх побудови та методи теоретичного та експериментального дослідження. Через брак часу, що відводиться вивченню цього курсу нині, і необхідного обсягу матеріалу основну увагу даного конспекту зосереджено на необхідних поняттях механіки машин (інша назва дисципліни) і методах теоретичного дослідження машин. Основною метою конспекту лекцій є надання мінімально необхідного обсягу знань з механіки машин для того, щоб студент-машинобудівник розумів та успішно засвоював матеріал спеціальних предметів, які йому доведеться вивчати на наступних курсах університету. Нажаль, через вище вказані причини в даному конспекті мало зачіпаються розділи, присвячені проблемам синтезу машин, проте автори сподіваються, що студент, прочитавши і засвоївши зміст пропонованого матеріалу, зуміє у разі необхідності із залученням інших джерел впоратися з вирішенням завдань проектування, що перед ним виникають.

ВСТУП

Теорія машин вивчає загальні методи дослідження та проектування машин.

Проблеми, якими займається теорія машин – це проблеми аналізу та синтезу машин. Аналіз полягає у визначенні властивостей існуючих механізмів та машин. Це пряме завдання механіки машин. Зворотнє завдання – синтез машин, тобто створення нових машин, які повинні мати покращені властивості в порівнянні з існуючими з точки зору продуктивності, надійності, довговічності.

Загальне визначення машини. Функціональна класифікація машин. Машина є пристрій, створений людиною для використання законів природи з метою полегшення фізичної та розумової праці, збільшення її продуктивності шляхом часткової або повної заміни людини у її трудових та фізіологічних функціях.

Усі існуючі машини можна розділити на такі групи:

I. Енергетичні. В них відбувається перетворення енергії з одного виду в інший (наприклад, електрогенератори, електродвигуни, двигуни внутрішнього згоряння будь-якого типу, парові і газові турбіни і т. д.).

II. Технологічні. Вони призначені для зміни форми, розмірів та фізичних властивостей матеріалів (металорізальні верстати, деревообробні, дорожні, будівельні, поліграфічні машини, машини харчових виробництв, машини текстильної та легкої промисловості та ін.). Ці машини становлять найчисленнішу групу.

III. Транспортні. Ці машини служать для переміщення різноманітних виробів, матеріалів і людей (автомобілі, літаки, локомотиви, судна, крани, конвеєри, маніпулятори).

IV. Логічні (інформаційні). Машини, що становлять цю групу, служать для зберігання, переробки та передачі інформації (різні обчислювальні пристрої, ЕОМ, комп'ютери).

V. Кібернетичні. Для заміни людини в її трудових та фізіологічних функціях (апарати штучне серце, штучні нирки, робот-домогосподарка та ін.).

Теорія машин вивчає ті машини та механізми, які функціонують на основі законів механіки.

Вузьке визначення машини. Машина є пристрій, що діє на основі законів механіки та призначений для перетворення енергії, матеріалів та інформації та переміщення виробів.

Машина, зазвичай, складається з однієї чи кількох механізмів, основне призначення яких – перетворення руху (з одночасним перетворенням сил). Механізмом називається штучно створена система тіл, призначена для перетворення руху одного або декількох тіл на необхідні рухи інших тіл.

Тверді тіла у складі механізму – ланки. Нерухлива ланка механізму називається стійкою. Рухливе з'єднання двох ланок, що допускає їх відносний рух, називається кінематичною парою.

1. ДИНАМІКА МАШИН

1.1 Загальні відомості

Однією з основних задач динаміки машин є дослідження руху машинного агрегату з жорсткими ланками, які знаходяться під дією прикладених до них сил, з врахуванням їх мас.

Розрізняють дві основні задачі динаміки машин:

- заданий закон руху початкової ланки механізму – **треба визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух,**
- задані зовнішні сили, що діють на ланках механізму – **треба визначити закон руху початкової ланки.**

Перша задача носить назву **силового аналізу механізму**, а друга - **динаміки механізмів (машин)**. Крім цього, як і в інших розділах теорії машин, у динаміці можна виділити два класи задач - аналіз і синтез механізмів за даними динамічними умовами. З цієї причини у розділ динаміки включають ряд інших задач, які мають важливе технічне значення, а саме: розрахунок маховика, регуляторів швидкості, зрівноваження мас у механізмі, визначення його коефіцієнта корисної дії, дослідження коливань у машин, їх віброзахист.

Але перш за все треба ознайомитись з силами, що діють на ланках механізмів і машин.

1.2 Сили, що діють у машинах

Усі сили, що діють на механізм, можна поділити на дві групи: зовнішні і внутрішні. До зовнішніх сил відносяться сили ваги ланок, сили рушійні, сили опору, сили інерції, тощо. До внутрішніх сил відносяться сили взаємодії ланок між собою, тобто реакції у кінематичних парах.

Рушійні сили $F \rightarrow p$ завжди діють у бік руху тіла намагаючись прискорити цей рух. Ці сили намагаються привести механізм або машину в рух. Рушійними силами можуть бути тиск пару або газу, тиск води або повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини, сили тяжіння, тощо. Напрями рушійної сили та швидкості точки, до якої вона прикладена, або збігаються, або складають гострий кут. Тому

проекція вектора сили на напрям руху тіла завжди додатна, що і визначає **додатну роботу рушійних сил**.

Сили опору $F \rightarrow 0$ завжди діють проти руху тіла, намагаючись уповільнити рух. Сили опору у свою чергу поділяються на сили корисного опору та сили шкідливого (невиробничого) опору

До сил корисного опору відносяться технологічні опори руху, на подолання яких при виконанні технологічного процесу витрачається робота, тобто для здійснення якого і служить машина. Прикладом може служити опір матеріалу при деформуванні його у штампах або пресах. Сила корисного опору завжди діє проти руху тіла, або складає з ним тупий кут. Тому **робота сил корисного опору завжди від'ємна**.

До сил шкідливого опору відносяться сили тертя у кінематичних парах, а також опір середовища. Правда іноді сила тертя виступає як корисна сила, наприклад у гальмах, або між колесами автомобіля і шляхом, тощо.

Сили тяжіння $G \rightarrow$ є результат взаємодії ланок із Землею. Вона завжди напрямлена у один бік, а у машинах траєкторії точок, як правило замкнуті, то **робота сил тяжіння за період руху механізму дорівнює нулю**. У середині періоду руху ця робота відрізняється від нуля.

Сили інерції F^i з'являються при зміні швидкості за величиною або напрямком. При періодичному русі робота сил інерції за період руху також дорівнює нулю тому що швидкості та прискорення ланок за період руху також міняються періодично тобто набувають одних і тих же значень на замкнутих траєкторіях центрів ваги ланок.

До внутрішніх сил належать реакції у кінематичних парах, як результат взаємодії ланок між собою. Вони є внутрішніми дія усього механізму в цілому, але для кожної ланки окремо вони є силами зовнішніми. Робота сил реакцій у кінематичних парах для механізму в цілому дорівнює нулю, якщо не зважати на сили тертя, тобто у ідеальному стані.

1.3 Зведені сили та маси

В динаміці будь-який механізм замінюється однією ланкою, яка називається ланкою зведення і до якої прикладається сила (або момент сили), яка називається зведеною силою (зведеним моментом сили), і яка має масу або момент інерції, яка називається зведеною масою (зведеним моментом інерції)

Дамо визначення ланки зведення, зведеної маси (зведеного моменту інерції).

Ланка зведення це:

1 ланка, яка замінює собою увесь механізм і до якої зводять сили (момент сил), маси (момент інерції) і яка має простий рух;

2 ланка механізму, що утворює кінематичну пару із стояком і рухається так, що її узагальнена координата співпадає з узагальненою координатою механізму.

Зведена сила (момент сили) це сила (момент сили), прикладена до ланки зведення, робота або потужність якої дорівнює роботі або потужності усіх сил і пар сил, що діють на механізм.

Зведена маса (момент інерції) це маса поступально рухаючої, або момент інерції обертаючої ланки зведення, кінетична енергія якої дорівнює кінетичній енергії усіх ланок механізму.

У основі зведення сил і моментів пар сил лежить **принцип можливих переміщень**, який ґрунтується на рівності елементарних робіт або потужностей, які розвиваються силами та моментами сил, прикладеними до ланок механізму.

Принцип можливих переміщень, або принцип Лагранжа¹⁰, формулюється так: для рівноваги механічної системи, яка підкоряється ідеальним, стаціонарним та незвільненим в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил, прикладених до точок системи, дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи, якщо швидкості точок системи у розглядуваний момент часу рівні нулю.

Загальне рівняння динаміки (принцип Д'Аламбера¹¹-Лагранжа): при русі системи і ідеальними в'язями у кожний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і усіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні буде рівною нулю.

¹⁰Лагранж Жозеф Луї (1736-1813) – французький вчений, який разом з другим французьким вченим Даламбером Ж. (1717-1783), розробили і запропонували загальний аналітичний метод розв'язку задач динаміки на підставі принципу Даламбера і принципу можливих переміщень.

$$P_{36} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (1.1)$$

тут P_{36} - потужність, яку розвиває зведена сила F_{36} , або зведений момент M_{36} ; P_i - потужність, яку розвивають сили та моменти пар сил, які прикладені до ланки і мають бути зведені.

Якщо сила $F \rightarrow_{36}$ прикладена до точки ланки зведення, то

$$P_{36} = F_{36} \cdot V_1 = \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i \quad (1.2)$$

$$\text{або } M_{36} \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i. \quad (1.3)$$

З цих рівнянь маємо:

$$\begin{aligned} F_{36} &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{V_i}{V} \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \frac{\omega_i}{V} \\ &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{U_{i6}}{V} \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot V_{qi6} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} M_{36} &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{V_i}{V} \cdot \cos \alpha_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n M_i \cdot \frac{\omega_i}{\omega_1} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_{qi6} \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot U_{i1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

З рівнянь (1.4) і (1.5) видно, що при заданих силах і моментах пар сил визначити зведені силу або момент сили неважко, достатньо тільки визначити **передаточні функції** (дивись розділ кінематики). Треба зауважити також, що зведена сила (зведений момент сили) не залежить від узагальненої швидкості, а залежить тільки від передаточних функцій.

Для визначення зведеної маси (зведеного моменту інерції) запишемо рівняння для кінетичної енергії механізму:

$$T_{36} = \sum_{i=1}^n T_i \quad (1.6)$$

де T_{36} - кінетична енергія ланки зведення, T_i - кінетична енергія i -тої ланки.

Для ланки, яка має поступальний рух можна записати:

$$T_{36} = 0.5 \cdot m_{36} \cdot V^2 = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^n [(I_{Si} \cdot \omega^2) + (m_i \cdot V^2)] \quad Si \quad (1.7)$$

Для ланки, яка має обертальний рух можна записати:

$$T_{зв} = 0.5 \cdot I_{зв} \cdot \omega^2 = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^n [(I_{Si} \cdot \omega^2) + (m_i \cdot V^2)] \quad S_i \quad (1.8)$$

$$m_{зв} = \sum_{i=1}^n [(I_{Si} \cdot \dot{\omega}^2) + (m_i \cdot \dot{S}_i^2)] = \frac{V^2}{V_1^2} \\ = \sum_{i=1}^n [(I_{Si} \cdot V^2_{qSi1}) + (m_i \cdot U^2_{i1})] \quad (1.9)$$

$$I_{зв} = \sum_{i=1}^n [(I_{Si} \cdot \dot{\omega}^2) + (m_i \cdot \dot{S}_i^2)] = \frac{V^2}{\omega_1^2} \\ = \sum_{i=1}^n [(I_{Si} \cdot U^2_{i1}) + (m_i \cdot V^2_{qSi1})] \quad (1.10)$$

Як видно з цих формул зведена маса або зведений момент інерції теж залежать тільки від передаточних функцій і не залежать від швидкості ланки зведення.

1.4 Рівняння руху машини в енергетичній формі

Вивчаючи рух механізму, мизвичайно припускали, що початкова ланка (головний вал машини) обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = Const$. Цей закон руху можна одержати тільки в тих випадках, коли структура механізму проста, наприклад у механізмах, що складаються тільки з обертових ланок. Для здійснення такого руху потрібні цілком певні співвідношення між силами, що діють на механізм, і масами його ланок. Але закон зміни сил залежить від їх фізичної природи і до структури механізму відношення не має. Тому, взагалі кажучи, не можна встановити між силами, що діють на механізм, таке співвідношення, яке забезпечило б заданий закон його руху.

Закон руху будь-якої ланки механізму може бути визначений лише тоді, коли відомі усі сили або залежність цих сил від різних параметрів. Рушійні сили та сили виробничих опорів можуть одночасно або окремо залежати від положення ланки зведення, або від її кутової швидкості. Зведені моменти інерції механізму чи машини можуть бути або постійними, або залежати від положення ланки зведення.

Визначення закону руху механізму, що перебуває під дією прикладених до його ланок сил, і є задачею динамічного аналізу.

Для механізму, що має один **ступінь волі**, цю задачу можна вважати розв'язаною, коли буде встановлено закон руху однієї ланки.

За таку ланку, як ми вже знаємо, приймається початкова ланка, яка і є ланкою зведення. На цю ланку діє зведений момент пари сил і вона має зведений момент інерції.

Основою для складання рівняння руху механізму служить теорема про зміну кінетичної енергії, згідно з якою зміна кінетичної енергії механічної системи за будь-якому переміщенні дорівнює сумі робіт усіх прикладених сил, що діють на цю систему на тому ж переміщенні, тобто

$$\Delta T = T_i - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i \quad (1.11)$$

де $T_1 = I_{зві} \cdot \omega^2 / 2$, $T_0 = I_{зв0} \cdot \omega^2 / 2$ - кінетична енергія ланки зведення відповідно в кінці та на початку переміщення, який розглядаємо;

$\sum_{i=1}^n A_i$ - сума робіт усіх прикладених до ланки зведення сил.

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_{звр} - A_{звко} - A_{звшо} = A_P - A_{КО} - A_{ШО} \quad (1.12)$$

де $A_{звр} = A_P$ - робота зведеної рушійної сили, $A_{звко} = A_{КО}$ - робота зведених сил корисного опору, $A_{звшо} = A_{ШО}$ - робота зведених шкідливих сил опору.

Підставимо усі ці вирази у формулу (1.11).

$$\frac{I_{зві} \cdot \omega_{зві}^2}{2} - \frac{I_{зв0} \cdot \omega_{зв0}^2}{2} = A_P - A_{КО} - A_{ШО} \quad (1.13)$$

Враховуючи, що роботу зведених рушійних сил і сил опору можна виразити через зведений момент $M_{зв}$ рушійних сил і сил опору, який прикладемо до ланки зведення,

$$\Delta T_i = \sum_{i=1}^n A_i = \int M_{зві} \cdot d\alpha_1. \quad (1.14)$$

З рівняння (6.13), беручи до уваги рівняння (1.11), запишемо:

$$\omega_{зві} = \omega_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta T_i + I_{зв0} \cdot \omega_{зв0}^2}{I_{зві}}} = \omega_i(\alpha_1). \quad (1.15)$$

1.5 Рівняння руху машини у диференціальній формі

Запишемо рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = M_{36} \quad (1.16)$$

Враховуючи, що I_{36} залежить тільки від α_1 , запишемо

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\partial I_{36}}{\partial \alpha_1} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{36}}{d\alpha_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega} = I_{36} \cdot \omega; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right) = I_{36} \cdot \varepsilon + \omega^2 \cdot \frac{dI_{36}}{d\alpha_1}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (1.16), маємо

$$M_{36} = I_{36} \cdot \varepsilon + \omega^2 \cdot \frac{dI_{36}}{d\alpha_1} - \omega^2 \cdot \frac{dI_{36}}{2 \cdot d\alpha_1} = I_{36} \cdot \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{36}}{d\alpha_1} \quad (1.17)$$

Аналогічно можна записати і для поступального руху ланки зведення:

$$F_{36} = m_{36} \cdot a + \frac{V^2}{2} \cdot \frac{dm_{36}}{dS_1} \quad (1.18)$$

Рівняння (1.17) і (1.18) можна отримати зрівняння кінетичної енергії у диференціальній формі:

$$dT = dA \quad (1.19)$$

Для обертального руху ланки зведення маємо

$$dT = d(I_{36} \cdot \omega^2 / 2); \quad dA = M_{36} \cdot d\alpha_1$$

Підставимо ці вирази у рівняння (1.19).

$$M_{36} = \frac{d(I_{36} \cdot \omega)}{d\alpha_1} = I_{36} \cdot \frac{2\omega}{2} \cdot \frac{d\omega}{d\alpha_1 dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{36}}{d\alpha_1} = I_{36} \cdot \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{36}}{d\alpha_1} \quad (1.20)$$

де $\varepsilon = d\omega/dt$ – кутове прискорення ланки зведення, $\omega = d\alpha_1/dt$ – кутова швидкість ланки зведення.

Аналогічно можна записати і для поступального руху ланки зведення (див.(1.18)).

2. РЕЖИМИ РУХУ МЕХАНІЗМУ

У роботі механізму (або машини) розрізняють три характерні періоди (режими) руху: а) **розгін**; б) **усталений рух**; в) **вибіг** або **гальмування**.

У період розгону (пуску машини) швидкість руху початкової ланки (ланки зведення) зростає від нуля до деякої середньої (робочої) швидкості. Рівняння руху механізму (1.13) набуває вигляду

$$\frac{I_{звi} \cdot \omega_{звi}^2}{2} = A_p - A_{KO} - A_{шQ}$$

Враховуючи, що $I_{зв} \cdot \omega^2 > 0$, для періоду пуску механізму є справедливою така нерівність:

$$A_p > A_{KO} - A_{шO} \quad (1.21)$$

Таким чином, у період пуску робота рушійних сил повинна бути більша за суму робіт сил опору (корисних і шкідливих). Надлишок роботи A_p витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто на збільшення швидкостей рухомих мас. Для скорочення часу пуску машини часто знімають з неї корисне навантаження $A_{KO} = 0$.

Рух машини без корисного навантаження називається холостим ходом машини.

При усталеному русі машини швидкість початкової ланки механізму коливається навколо середнього значення, яка відповідає робочій швидкості цієї ланки.

Проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості та прискорення початкової ланки набувають початкового значення, називають періодом зміни кінетичної енергії механізму, або циклом t_n усталеного руху.

Циклом t_n усталеного руху або періодом зміни кінетичної енергії механізму називають проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості та прискорення початкової ланки набувають початкового значення.

Швидкості початкової ланки на початку та в кінці циклу усталеного руху рівні між собою ($\omega_0 = \omega = \omega_K$). Тоді рівняння руху набирає вигляду

$$A_p = A_{ko} + A_{шо} \quad (1.22)$$

При усталеному русі механізму робота рушійних сил за один цикл дорівнює сумі робіт сил корисного та шкідливого опору.

У середині циклу ця рівність може не зберігатись, тому маємо коливання швидкості ланки зведення.

При вибігу машини перш за все треба припинити подавання рушійної енергії машини, тобто $A_p = 0$ (вимкнути двигун). Кінцевим станом машини буде спокій, $\omega_K = 0$. Для цього випадку рівняння руху набирає вигляду

$$\frac{I_{зв0} \cdot \omega_{зв0}^2}{2} = A_{KO} - A_{ШО}. \quad (1.23)$$

З цього рівняння видно, що зупинка машини буде досягнута лише тоді, коли вся нагромаджена машиною кінетична енергія рухомих мас буде поглинута роботою сил корисного та шкідливого опору. Для скорочення часу зупинки машини часто штучно збільшують роботу сил шкідливого опору за допомогою установалення гальм.

На рис. 1.1 показано приклад залежності швидкості руху ланки зведення від часу t . Час усталеного руху залежить від часу одного циклу та від кількості циклів ($t_{yp} = t_{y \cdot k}$). Кількість циклів визначається технологічним процесом, який виконує машина.

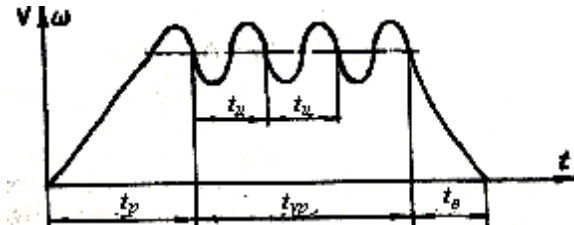


Рисунок 1.1

Слід зауважити, що є багато машин, які не працюють у режимі усталеного руху, їх рух, як правило, складається з розбігу і вибігу. Також є машини, в яких цикл роботи не завжди відповідає одному оберту ланки зведення, тобто цикл укладається у два і більше обертів її.

2.1 Загальні методи дослідження руху механізму

Для визначення закону руху ланки зведення, яка визначає рух усіх інших ланок, використовують рівняння руху (1.15), або (1.17). Розв'язуючи їх відносно швидкості руху ланки зведення, встановлюємо характер зміни її руху залежно від часу. Для цієї мети найчастіше використовують диференціальне рівняння (1.17), у яке входить зведений момент сил $M_{зв}$, що є сумою моментів рушійних сил і сил опору тобто $M_{зв} = M_p - M_o$. Як було показано, ці моменти є функціями узагальненої координати α_1 , або її першої похідної - ω , або, нарешті, часу t . Можна встановити також, що ці моменти є функціями однієї і тієї ж змінної

$$M_P(\alpha) - M_O(\alpha) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dl_{зв}}{d\alpha_1} \quad (1.24)$$

$$M_P(\omega) - M_O(\omega) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dl_{зв}}{d\alpha_1} \quad (1.25)$$

$$M_P(t) - M_O(t) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dl_{зв}}{d\alpha_1} \quad (1.26)$$

Але нерідко трапляється і таке, що зведені моменти є функціями різних змінних. Тоді одержуємо рівняння іншого роду:

$$M_P(\alpha) - M_O(t) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dl_{зв}}{d\alpha_1} \quad (1.27)$$

$$M_P(\omega) - M_O(\alpha) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dl_{зв}}{d\alpha_1} \quad (1.28)$$

$$M_P(t) - M_O(\omega) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dl_{зв}}{d\alpha_1} \quad (1.29)$$

Рівняння (1.24)-(1.29) у загальному випадку є нелінійними диференціальними, розв'язати які можна тільки наближеними методами. Наприклад, методом **Г.Г. Баранова**¹², який полягає у тому, що кут повороту α_1 ланки зведення розбивається на досить малі інтервали $\Delta\alpha_1$, що беруться за крок інтегрування. У кожному інтервалі $\Delta\alpha_1$ задані функції зведених моментів рушійних сил M_p і сил опору M_o вважаються сталими, а зведений момент інерції $I_{зв}$ змінюється лінійно. Якщо врахувати, що зведені моменти M_p і M_o можуть бути функціями і кута α_1 , і кутової швидкості ω , і часу t , то можна узагальнено позначити ці моменти $M(\alpha_1, \omega, t)$. Тоді ці рівняння записуються у вигляді:

$$M(\alpha_1, \omega, t) = I_{зв} \left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \right) \quad (1.30)$$

Поміняємо змінну у відношенні

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\alpha_1}$$

Рівняння (1.30) тепер має вигляд:

$$M(\alpha_1, \omega, t) = I_{зв} \cdot \omega \frac{d\omega}{d\alpha_1} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1}$$

або

$$\frac{2 \cdot M(\alpha_1, \omega, t) \cdot d\alpha_1}{\omega} = 2 \cdot I_{зв} \cdot d\omega + \omega \cdot dI_{зв} \quad (1.31)$$

Замінюємо у цьому рівнянні $d\alpha_1$ кроком інтегрування $\Delta\alpha_1$. Тоді величина $d\omega$ при росту швидкості може бути замінена різницею $(\omega_{i+1} - \omega_i)$, а величина $dI_{зв}$ при росту зведеного моменту інерції – різницею $(I_{зв(i+1)} -$

¹²Баранов Г.Г. (1899-1968) Видатний радянський вчений. Найбільш значущою з довоєнних робіт Г.Г. Баранова була його докторська дисертація "Кінематика просторових механізмів". До відомих робіт Г.Г. Баранова належать переважно наукові дослідження нового виду зачеплення (1954), названого ім'ям його автора - М.Л. Новікова, та оригінальних зубчастих передач з принципово новими робочими поверхнями зубів сполучених коліс.

I_{3ei}), де i та $i+1$ – два положення ланки зведення, що відповідають початку і кінцю інтервалу $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$.

З врахуванням викладеного рівняння (1.31) набуває вигляду

$$\frac{2 \cdot M(\alpha_1, \omega, t)}{\omega} \Delta\alpha_1 = 2 \cdot I_{3e} \cdot (\omega_{i+1} - \omega) + \omega_i \cdot (I_{3e(i+1)} - I_{3ei}) \quad (1.32)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно кутової швидкості ω_{i+1} , одержуємо

$$\omega_{i+1} = \frac{M(\alpha_1, \omega, t)}{I_{3ei} \cdot \omega_i} + \frac{3 \cdot I_{3ei} - I_{3e(i+1)}}{2I_{3ei}} \quad (1.33)$$

Знаючи значення для $M(\alpha_1, \omega, t)$, I_{3ei} , $I_{3e(i+1)}$ і ω_i , з формули (1.33) при вибраному кроці інтегрування $\Delta\alpha_1$ можна визначити кутову швидкість ω_{i+1} . Виконуючи крок за кроком обчислення кутової швидкості одержимо функцію $\omega = \omega(\alpha_1)$.

Для визначення часу t руху ланки зведення можна використати умову $dt = d\alpha_1 / \omega$.

Замінивши в цьому рівнянні dt на різницю $t_{i+1} - t_i$, $d\alpha_1$ - на крок інтервалу $\Delta\alpha_1$ і кутову швидкість ω - на її середнє значення $(\omega_i + \omega_{i+1})/2$. У такому випадку можна записати

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2 \cdot \Delta\alpha_1}{\omega_i + \omega_{i+1}} \quad (1.34)$$

Звідки визначимо час у положенні $i+1$:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2 \cdot \Delta\alpha_1}{\omega_i + \omega_{i+1}} \quad (1.35)$$

Такий метод наближеного інтегрування можна використовувати як при аналітичному, так і при графічному зображенні всіх функцій.

2.2 Регулювання руху машини

Нерівномірність руху ланок механізму є істотно важливою умовою найвигіднішого його використання. Розрізняють два типи коливання швидкостей механізму - **періодичне і неперіодичне**, що зумовлено переважно зміною навантаження механізму. У електродвигунах робочий процес відбувається безперервно і при усталеному русі характеризується сталістю рушійного моменту; отже у них періодичних коливань швидкості не буде і головний вал при усталеному русі рухається рівномірно.

У поршневих машинах, наприклад преси, штампи, тощо, в основі яких лежить стержневий механізм, орган, що сприймає роботу сил опору, робить зворотно-поступальні рухи. Це ускладнює регулювання кутової швидкості обертання головного вала машини.

Робочий процес цих машин характеризується замкнутими **циклами**, які при усталеному русі безперервно йдуть один за одним. Корисний опір в основному залежить від технологічного процесу. Таким чином, корисний опір становить змінну величину. За цих умов усталений рух механізму супроводжується періодичною зміною швидкості головного вала машини - кривошипа. Така нерівномірність називається періодичною.

Великі періодичні коливання швидкості неприпустимі, бо вони спричиняють у кінематичних парах додаткові (динамічні) тиски, які знижують загальний **ККД** механізму та надійність його роботи.

ККД (коефіцієнт корисної дії) – відношення корисної роботи сили до її повної величини.

Крім того, великі коливання швидкостей можуть спричинити небажані явища в технологічному процесі (розрив матеріалу в пресах і штампах, вібрації, коливання на виконавчому органі машини спричиняє появу браку, тощо). Через те задача про сталість швидкості обертання в даному разі полягає в тому, щоб немінучі періодичні коливання швидкості усталеного руху довести до такого мінімуму, за яким зазначені явища були б мало відчутними.

Нерівномірність руху механізму характеризується відношенням абсолютної нерівномірності руху механізму, яка визначається різницею ($\omega_{min}()$), до його середньої швидкості ω_0 :

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

(1.36)

де ω_{max} , ω_{min} і ω_C – відповідно найбільша, найменша і середня швидкості обертання ланки зведення.

Величина δ називається **коефіцієнтом нерівномірності руху** машини і уявляє собою відношення різниці між найбільшою і найменшою швидкостями за **цикл** до середньої швидкості. Значення коефіцієнтів нерівномірності руху для різних машин наводяться у технічних довідниках. Звичайно при проектуванні механізму задаються наперед бажаним для механізму значенням коефіцієнта δ нерівномірності руху і середньої швидкості ω_C обертання головного вала. Середня швидкість береться рівною номінальній кутовій швидкості.

Задача регулювання руху машини у період її усталеного руху зводиться до підбору такого співвідношення між масами ланок механізму і діючими на них силами, за якого коефіцієнт нерівномірності руху δ не перевищував би наперед заданого значення. Крім періодичних коливань, при яких швидкості усіх ланок механізму в усіх його положеннях мають певні цикли, у механізмах можливі коливання швидкості, що не мають певного циклу, так звані **неперіодичні коливання швидкості**. Вони можуть виникати з різних причин, як-от: раптова зміна навантаження механізму, включення в механізм додаткових мас, поява нерівномірності у щільності матеріалу, що оброблюється на даному обладнанні, тощо. При раптовому збільшенні навантаження на механізм станеться раптове зменшення або збільшення швидкості ведучого вала механізму, і він вийде із сталого режиму. Задача полягає в тому, щоб автоматично привести потужність двигуна у відповідність з новим навантаженням і відновити усталений рух механізму при новому навантаженні з попередньою або близькою до неї швидкістю.

Ця задача відома під назвою задачі про **регулювання швидкості**. Спеціальні механізми, що їх застосовують для вирівнювання різниці між рушійними силами і силами опору за допомогою автоматичної дії на відповідні органи механізму, мають назву **регуляторів швидкості**. В таких механізмах, як преси, штампи, молоти, тощо, регулювання руху здійснюється за допомогою додаткової маси – **маховика**, який встановлюється на одному з валів механізму.

Маховик – тверде (круглої форми) тіло, яке додається до ланки зведення, або до інших ланок, механізму для збільшення його кінетичної енергії з метою забезпечення наперед заданого коефіцієнта нерівномірності ходу машини.

2.3 Визначення закону руху машини під дією сил, що залежать від положення ланки зведення

Розглядаючи існуючі технологічні машини, бачимо, що вони, в основному, мають два періоди в роботі - робочий та холостий хід. Під час робочого ходу відбувається технологічний процес де сили опору (корисного) залежать від положення ланки зведення, або постійні.

Зведені моменти рушійних сил і сил корисного опору визначаються формулою (1.3). Робота цих сил

$$A_{зр} = \int_0^{\alpha_1} M_{зр} \cdot d\alpha_1, \quad A_{зo} = \int_0^{\alpha_1} M_{зo} \cdot d\alpha_1. \quad (1.37)$$

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії запишемо:

$$\Delta T = T_1 - T_0 = A_{зр} - A_{зo} = \int_0^{\alpha_1} M_{зр} \cdot d\alpha_1 - \int_0^{\alpha_1} M_{зo} \cdot d\alpha_1. \quad (1.38)$$

$$\text{З іншого боку: } \Delta T = \frac{I_{звi} \cdot \omega_i^2}{2} - \frac{I_{звo} \cdot \omega_0^2}{2}.$$

Припускаючи, що $\omega_0 = \omega_i$, будемо мати

$$\Delta T = \frac{(I_{звi} - I_{звo}) \cdot \omega_1^2}{2} = f(\alpha_1) \quad (1.39)$$

Побудуємо фазову діаграму у осях ΔT і $I_{зв}$ (рис. 1.2).

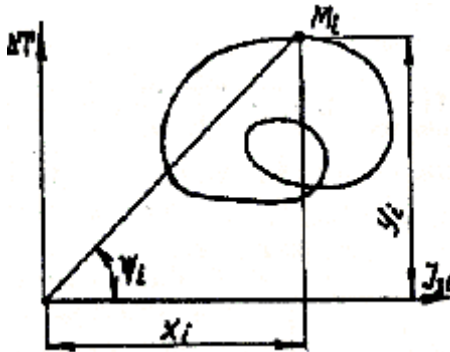


Рисунок 2.2

Ця діаграма має назву **діаграми Вітгенбауера**¹³ або **діаграми енергомас** для усталеного руху. Ця діаграма на фазі усталеного руху буде замкненою, тому що усі процеси повторюються. Візьмемо на цій діаграмі довільну точку M_i з координатами x_i , та y_i і з'єднаємо її з початком системи координат.

Кут нахилу лінії OM_i означимо ψ_i .

Зведений момент інерції і кінетична енергія машини у положенні i визначається формулами:

$$y_i \cdot \mu_T = T_i; \quad x_i \cdot \mu_I = I_{звi}.$$

Тоді, враховуючи, що: $T_i = I_{звi} \cdot \omega^2 / 2$, маємо:

$$tg \psi_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{T_i \cdot \mu_I}{I_{звi} \cdot \mu_T} = i \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\mu_I}{\mu_T} \quad (1.40)$$

$$\text{Звідси } \omega_i = \sqrt{\frac{2 \cdot tg \psi_i \cdot \mu_T}{\mu_I}} = f(\alpha) \quad (1.41)$$

$$\text{З іншого боку: } \omega_i = \frac{d\alpha_i}{dt}; \quad i \quad dt = d\alpha / \omega_i$$

Враховуючи значення ω_i за формулою (1.41), визначаємо значення $1/\omega_i$. Чисельно інтегруючи ці значення з параметром $\Delta\alpha_i$, отримаємо залежність $t = t(\alpha_i)$, звідки можемо отримати і залежність $\alpha_i = f(t)$ – тобто закон руху ланки зведення.

2.4 Маховик та його роль

Як було зазначено раніше, регулювання руху механізму можна здійснити за допомогою додаткової маси – **маховика**, який розташований на одному валу з ланкою зведення.

Для маховика полягає в тому, що при перевищенні роботи рушійних сил над силами опору маховик сприймає на себе надлишок кінетичної енергії механізму і, завдяки своєму великому моменту інерції, не дає швидкості надмірно зростати; коли ж робота сил опору перевищує роботу рушійних сил, маховик віддає нагромаджену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

¹³Вітгенбауер Ф. (1857-1922) – австрійський вчений, який заклав основи графічної динаміки.

В середині циклу усталеного руху кутова швидкість ланки зведення набуває максимального і мінімального значень.

З формули (140) можна записати

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \frac{I_{\text{сп}}}{\mu_T} (1 + \delta); \quad \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\omega^2}{2} \frac{I_{\text{сп}}}{\mu_T} (1 - \delta)^2 \mu \quad (1.42)$$

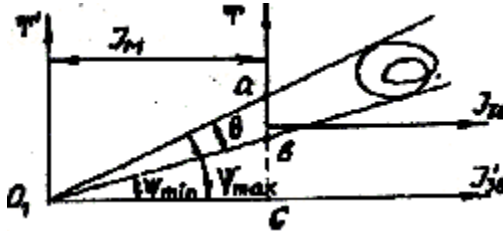


Рисунок 1.3

Повертаючись до діаграми Віттенбауера, неважко помітити, що, проводячи дотичні до неї під кутами ψ_{\max} і ψ_{\min} , отримуємо точку перетину їх десь за межами старої системи координат (див. рис. 1.3).

Таким чином, щоб забезпечити задані кути ψ_{\max} і ψ_{\min} (тобто задане δ) слід збільшити значення $I_{3\delta}$ на величину I_M (див. рис. 1.3), тобто збільшити масу ланки зведення.

З цього можна зробити деякі висновки:

- чим менше δ тим менше різниця між ψ_{\max} і ψ_{\min} , тобто менше кут θ і тим більше буде I_M ;

- Зі збільшенням середньої кутової швидкості ланки зведення I_M зменшується.

Таким чином, маховик в період, коли $A_{3BP} > A_{3\delta 0}$ накопичує кінетичну енергію, збільшує свою кутову швидкість, а в період, коли $A_{3BP} < A_{3\delta 0}$ віддає свою кінетичну енергію, зменшуючи при цьому свою кутову швидкість. Звідси видно, що **маховик є акумулятором кінетичної енергії.**

2.5 Визначення моменту інерції маховика

2.6 Визначення моменту інерції маховика методом Гут'яра¹⁴

Представимо кінетичну енергію машини у вигляді суми:

$$T = T_M + T_C, \quad (1.43)$$

де T – повна кінетична енергія машини, T_M – кінетична енергія маховика, T_C – кінетична енергія машини без маховика.

Звідси кінетична енергія маховика

$$T_M = T - T_C. \quad (1.44)$$

Якщо зважити на те, що кутова швидкість ланки зведення умовно може бути тільки ω_{max} або ω_{min} , то можливим буде запис:

$$T'_C = I_{звi} \cdot \omega_{max}^2 \quad \text{та} \quad T''_C = I_{звi} \cdot \omega_{min}^2$$

Тоді рівняння (1.44) набувають вигляду:

$$T'_M = T - T'_C \quad \text{і} \quad T''_M = T - T''_C. \quad (1.45)$$

Порівнюючи праві частини цього рівняння, зауважимо що, коли $\omega = \omega_{max}$, то і $T = T'$ а при $\omega = \omega_{min}$, $T = T''$. Приріст кінетичної енергії $\Delta T = T' - T''$. Приріст кінетичної енергії машини без маховика $\Delta T'_C = T'_C - T''_C$ і $\Delta T'_C = T'_C - T''_C$, або

$$\Delta T'_C = T'_C - T''_C = (I_{звi} - I_{звo}) \cdot \omega^2$$

$$\Delta T'_C = T'_C - T''_C = (I_{звi} - I_{звo}) \cdot \omega^2$$

Приріст кінетичної енергії маховика:

$$\Delta T'_M = \Delta T - \Delta T'_C \quad \text{і} \quad \Delta T''_M = \Delta T - \Delta T''_C. \quad (1.46)$$

¹⁴Є.М. Гут'яр (1895-1968) – один із зачинателів наукового машинобудування.

Для кращого розуміння цих формул викреслимо графіки (рис. 1.4):

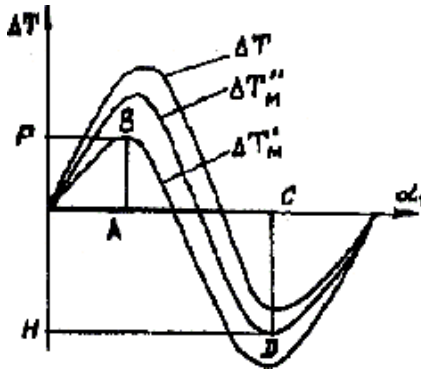


Рисунок 1.4

Знаючи діаграму зовнішнього навантаження, визначимо приріст кінетичної енергії машини і побудуємо діаграму $[\Delta T, \alpha_1]$, (див. рис. 1.4).

Розраховуючи за вище наведеними формулами приріст кінетичної енергії машини без маховика, будемо діаграми $[\Delta T', \alpha_1]$ і

$$M [\Delta T'', \alpha_1].$$

Визначимо максимальне і мінімальне значення на діаграмах $[\Delta T', \alpha_1]$ і $[\Delta T'', \alpha_1]$.

$$\Delta T'_{M_{MAX}} = AB \cdot \mu_T, \quad \Delta T''_{M_{MIN}} = CD \cdot \mu_T.$$

$$\text{Звідси } \Delta T'_{M_{MAX}} - \Delta T''_{M_{MIN}} = FH \cdot \mu_T.$$

$$\text{Інакше: } \Delta T'_{M_{MAX}} = T'_{M_{MAX}} - T'_{MO}; \quad \Delta T''_{M_{MIN}} = T''_{M_{MIN}} - T''_{MO}$$

$$T'_{M_{MAX}} - T''_{M_{MIN}} = I_M \left(\frac{m \omega_{\min}^2}{2} \right); \quad T'_{MO} - T''_{MO} = I_{MO} \left(\frac{\omega_{\max}^2}{2} \right)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta T'_{M_{MAX}} - \Delta T''_{M_{MIN}} &= (T'_{M_{MAX}} - T''_{M_{MIN_2}}) + (T'_{M_0} - T''_{M_0}) \\ &= (I_M + I_{M_0}) \cdot \left(\frac{\max \omega^2 - \min \omega^2}{2} = FH \cdot \mu_T \right) \end{aligned}$$

$$I_M = \frac{FH \cdot \mu_T}{\delta \cdot \omega_{сер}^2} - I_{M_0}, \quad \text{де} \quad \delta \cdot \omega_{сер}^2 = \frac{\omega}{\max_{min}^2}$$

2.7 Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера

Будуємо діаграму Віттенбауера, тобто діаграму енергомас (рис.1.5).

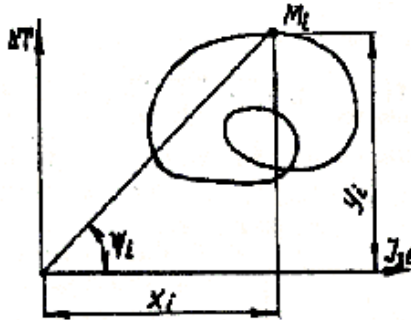


Рисунок 1.5

За формулами (1.42) розраховуємо кути ψ_{max} і ψ_{min} . Проводимо дотичні до діаграми енергомас під кутами ψ_{max} і ψ_{min} до їх перетину і визначити I_m . Але знайти на кресленні точку O_I перетину дотичних, тобто нової системи координат, важко, тому, що різниця між кутами ψ_{max} і ψ_{min} невелика. Тому визначимо I_m через відрізок ab , який утворюється перетином дотичних з віссю ΔT .

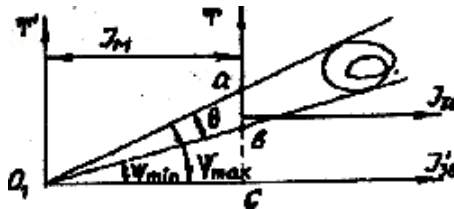


Рисунок 1.6

Запишемо $I_M = O_1 C \cdot \mu_i$,

$$O_1 C = \frac{ac}{tg\psi_{max} tg\psi_{min}}$$

Тоді: $ab = ac - bc = O_1 C \cdot (tg\psi_{min_{max}})_{ab}$
 Звідси: $O_1 C = \frac{I_M}{\mu_i tg\psi_{min_{max}}}$ (1.47)

Визначимо різницю тангенсів

$$tg\psi \frac{\omega_{сер}^2 \mu_T}{2 \mu_i} (1 + \delta - 1 + \delta) = \frac{\omega_{сер}^2 \cdot \mu_T \cdot \delta}{\mu_i} min_{max}$$

Підставимо це значення у формулу (1.47). Маємо

$$I_M = \frac{ab \cdot \mu_T}{\omega_{сер}^2 \cdot \delta} \quad (1.48)$$

За такою формулою визначається момент інерції маховика, якщо він розташований на ланці зведення. Взагалі ж його можна розташовувати і на інших ланках (валах), які обертаються з іншою кутовою швидкістю ω_i . При цьому треба дотримуватись рівності кінетичних енергій.

$$\frac{I_M \cdot \omega_1^2}{2} = \frac{M I' \cdot \omega_i^2}{2}, \quad \text{Звідки} \quad I' = I \cdot \left(\frac{1}{M}\right) = \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{I_M}{U_{i1}^2} \quad (1.49)$$

З цієї формули видно, що із збільшенням кутової швидкості вала розташування маховика відносно ланки зведення, момент інерції зменшується на величину квадрата передаточної функції.

3. КІНЕТОСТАТИЧНИЙ (СИЛОВИЙ) АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Визначення сил, що діють на ланки механізму, має велике практичне значення для розрахунків ланок на міцність, жорсткість, вібробезпечність, зносостійкість, для визначення втрат енергії на тертя, а також для підрахунку енергетичного балансу машини на виконання інших подібних розрахунків.

Основними задачами силового розрахунку механізмів є:

- визначення зовнішніх невідомих сил, що діють на ланках механізмів;
- визначення сил взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто реакції у кінематичних парах;
- визначення зрівноважуючої сили або зрівноважуючого моменту сил.

Розв'язуючи задачі силового розрахунку механізмів, припускають, що закон руху початкової ланки задано, а також, що маси і моменти інерції ланок відомі. Отже завжди можна визначити ті сили інерції, які необхідні для розв'язання задач силового розрахунку. В першому наближенні силовий розрахунок проводять без врахування сил тертя у кінематичних парах.

Найпростішим випадком силового розрахунку механізмів є рівновага, тобто коли ланки механізму знаходяться у стані спокою або поступального рівномірного руху. У цих випадках не виникають динамічні сили (сили інерції). Тому для розв'язання такої задачі досить рівнянь статички. У загальному випадку, якщо є прискорення, виникають сили і моменти сил інерції і рівнянь статички тут замало. Щоб розв'язати таку задачу про знаходження сил, використовують принцип Д'Аламбера, згідно з яким рухома система тіл перебуває у кожний момент часу в рівновазі під дією зовнішніх сил, включаючи і сили і моменти сил інерції.

Таким чином, користуючись принципом Д'Аламбера, можна задачу динаміки розв'язати методами статички, якщо умовно віднести до зовнішніх сил і сили (моменти сил) інерції, які виникають при русі ланок з прискоренням і діють на елементи кінетичних пар як додаткові сили. Проте треба пам'ятати, що сили і моменти сил інерції, які прикладаємо до ланки, умовні. Вони діють на іншу ланку, яка спричиняє прискорений рух даної ланки. У такому контексті і розуміють характер сил і моментів сил інерції.

Розв'язання задачі динаміки методами статички називають кінетостатичним розрахунком.

3.1 Статична визначеність кінематичного ланцюга

Як відомо з курсів теоретичної механіки та опору матеріалів, задача про визначення сил легко розв'язується для статично визначених систем. Нагадаємо, що статично визначеною системою називають таку систему, в якій кількість невідомих сил дорівнює числу рівнянь рівноваги, які можна скласти для їх визначення.

Сили, що діють у механізмах, можна умовно поділити на ті, які ми можемо визначити до силового розрахунку, і сили невідомі, до яких ми можемо віднести реакції в кінематичних парах. Відомими силами є зовнішні сили (сили корисного опору, сили ваги, сили і моменти сил інерції, які ми можемо визначити після кінематичного аналізу, тощо). Невідомими силами є тільки сили реакції у кінематичних парах. Саме їх кількість і визначає, яка є система - статично визначеною чи ні. Тому розглянемо визначеність кінематичних пар плоских механізмів.

3.2 Реакції в кінематичних парах

Кінематичні пари плоских механізмів бувають 4 та 5 класів. У вищій парі 4-го класу (рис. 2.1,а) реакція R_{21} напрямлена вздовж спільної нормалі $n-n$ (без врахування тертя) і прикладена у точці дотику C . Тому в такій кінематичній парі відомими є точка прикладення та напрям сили реакції. Невідомим є її величина. Таким чином кінематична пара 4-го класу є статично невизначеною один раз.

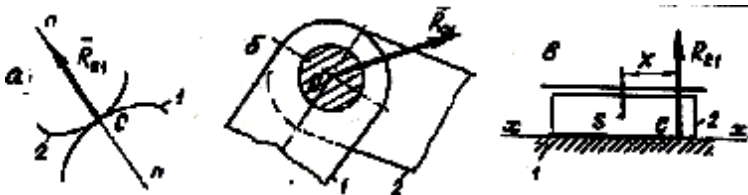


Рисунок 2.1

Кінематичні пари 5-го класу бувають обертальні (рис. 2.1, б) і поступальні (рис. 2.1, в).

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені вздовж спільної нормалі до поверхонь дотику. В обертальній кінематичній парі поверхня дотична із замкнутою циліндричною поверхнею. Тому реакція R_{21} , яка прикладена до ланки 2 з боку 1, буде завжди проходити через центр шарніра О. Величина і напрям дії цієї сили невідомі. У поступальній кінематичній парі результуюча реакція R_{21} буде напрямлена перпендикулярно до осі руху $x-x$ ланок цієї пари, при цьому невідомими лишаються її величина та точка прикладення С.

Таким чином **кінематичні пари 5-го класу є статично невизначеними двічі.**

Висновок: кожна кінематична пара 4-го класу дає одну невідому величину, а кожна кінематична пара 5-го класу дає дві невідомі величини.

Якщо в кінематичному ланцюзі буде p_4 кінематичних пар 4-го класу, то загальна кількість невідомих величин буде p_4 , а якщо в кінематичному ланцюзі буде p_5 кінематичних пар 5-го класу, то вони дадуть $2p_5$ невідомих величин. Всього ж кінематичні пари плоских механізмів дають $S = (p_4 + 2p_5)$ невідомих.

3.3 Умова статичної визначеності кінематичного ланцюга

Якщо кінематичний ланцюг складається з n - ланок і для кожної з них ми можемо скласти 3 рівняння рівноваги, то для усього кінематичного ланцюга можна скласти $3n$ рівнянь рівноваги. Умовою статичної визначеності є рівність

$$3n = S = p_4 + 2p_5.$$

Якщо перенести праву частину у лівий бік рівняння, отримаємо

$$3n - p_4 - 2p_5 = 0. \quad (3.1)$$

Вираз, який знаходиться ліворуч у рівності (3.1), показує, що такий кінематичний ланцюг, як механізм, є статично визначеним, тому що для механізму ця різниця є більшою нуля, тому що ступінь волі механізму завжди більше нуля ($W > 0$).

Таким чином, **механізм є статично визначеною системою.** Однак, розглядаючи групу Ассура і враховуючи, що в групі Ассура є тільки

кінематичні пари 5-го класу, тобто $p_4=0$, маємо

$$3n - 2p_5 = 0.$$

Для групи Ассура ця різниця теж дорівнює нулю. Таким чином, **група Ассура є статично визначеною системою**

Від того, як проводити кінетостатичний розрахунок, для механізму в цілому або по групах Ассура, і методи кінетостатичного розрахунку поділяються на аналітичний і графоаналітичний.

3.4 Аналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму

Як ми вже зазначали, на механізм діють зовнішні і внутрішні сили. До зовнішніх сил можна віднести і сили та моменти сил інерції, тому що вони залежать від зовнішніх умов руху ланок механізму. В аналітичному методі ці сили визначаються за допомогою матриці прискорення та масової матриці.

В аналітичному методі (рис. 2.2) сили інерції прикладаються вздовж осей координат тільки у зворотному напрямку, припускаючи, що прискорення центрів ваги будуть додатними.

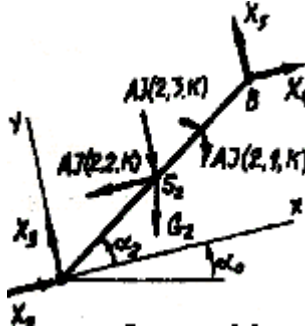


Рисунок 2.2

Якщо прискорення за кінематичними розрахунками будуть мати від'ємні значення, то ці знаки увійдуть у відповідні рівняння до сил інерції міняючи їх значення. Реакції в кінематичних парах також показуємо у додатному напрямку осей координат, якщо ця реакція проставляється вперше. І сили інерції, і реакції в кінематичних парах проставляються у вигляді проєкцій на осі координат. При переході до другої ланки реакції в одній і тій же кінематичній парі показуються у зворотному напрямку. Величини сил інерції визначаються за допомогою ЕОМ у матричному вигляді. Для цього складається матриця моментів інерцій і мас ланок:

Покажемо цей метод на прикладі механізму преса (рис.2.3)

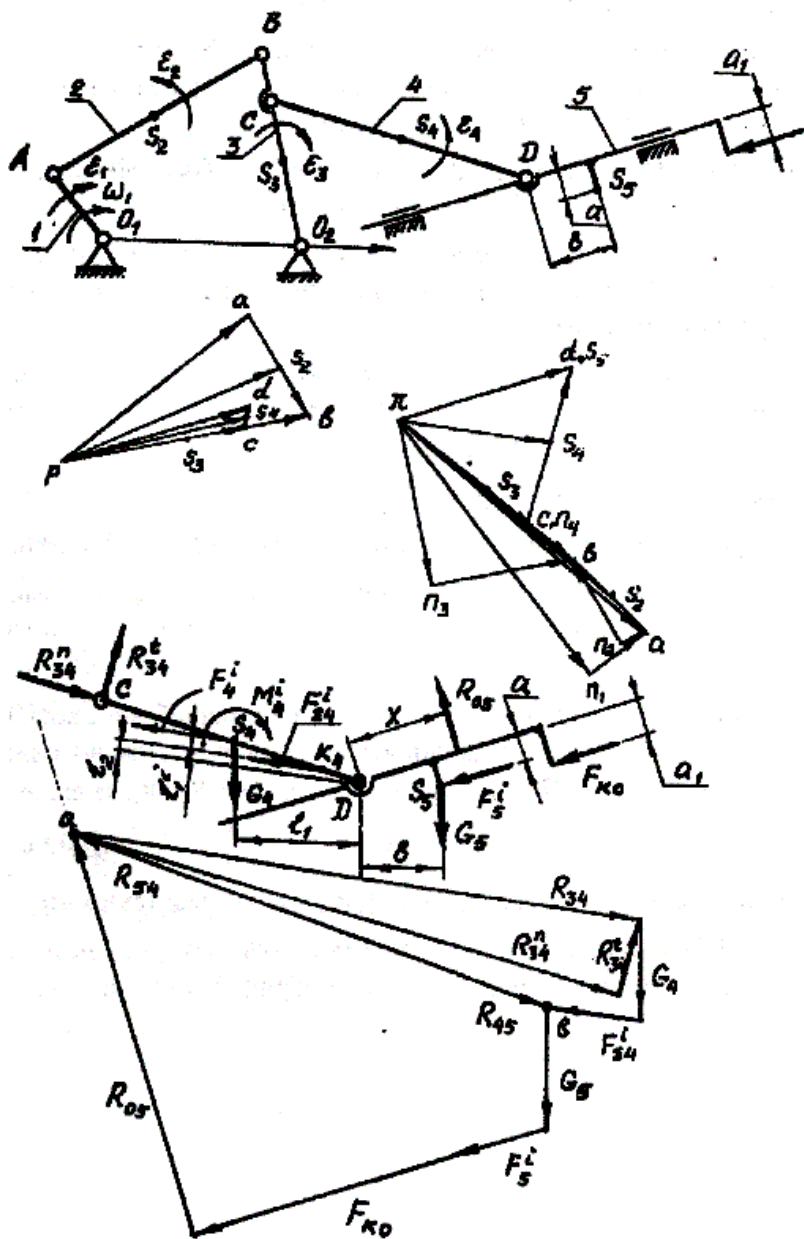


Рисунок 2.3

Порядок розрахунків такий:

1. Креслимо механізм у заданому положенні ведучої ланки.
 2. Будуємо для нього плани швидкостей та прискорень, з яких визначаємо повні прискорення центрів ваги ланок і кутові прискорення ланок.

3. Визначаємо сили інерції і моменти сил інерції, які діють на кожен ланку окремо. Для більшої зручності силу інерції і момент сили інерції заміняємо рівнодіючою F_i^n , яка прикладається в точці K_i , за величиною дорівнює силі інерції розташована на відстані $l_i^n = M_i^n / F_i^n$

від центра ваги ланки (див. рис. 2.3 і рис. 2.4). Плече l_i^n відкладається таким чином, щоб дія рівнодіючої відносно центра ваги співпадала з напрямком дії моменту сили інерції (див. розділ зведення сили до обраного центра з курсу теоретичної механіки).

4. Креслимо останню з приєднаних до ведучої ланки групи Ассура і прикладаємо до неї усі зовнішні сили, що діють на цю групу.

5. В елементах кінематичних пар, в яких ми звільнились від в'язів, прикладаємо реакції в'язів. Реакції в обертальних парах замінюємо двома її складовими напрямленими вздовж ланок і перпендикулярно до них. Реакції в поступальній парі напрямляємо перпендикулярно до напрямку руху повзуна.

6. Складаємо рівняння рівноваги.

Для плоскої системи довільно розташованих сил умовою рівноваги є рівність нулю головного вектора і головного моменту сил: $\vec{R}_0 = 0; \vec{M}_0 = 0$. Рівність нулю головного моменту $\vec{M}_0 = 0$ означає, що головні моменти сил, складені окремо для кожної ланки групи Ассура, теж повинні бути рівними нулю, тобто

$$\vec{M}_{04} = 0; \vec{M}_{05} = 0,$$

$$\text{або } M_{04} = \sum m_D(F_4) = 0; M_{05} = \sum m_D(F_5) = 0. \quad (2.2)$$

За точку, відносно якої беруться моменти сил, приймається точка, яка є кінематичною парою, що з'єднує ланки між собою у групі Ассура.

Для групи Ассура, складеної з ланок 4 і 5, рівняння (2.2) мають вигляд:

$$M_{04} = \sum m_D(F_4) = -R^t \cdot CD + F_i \cdot l_2 + G_4 \cdot l_1 = 0; \quad (2.3)$$

$$M_{05} = \sum m_D(F_5) = R_{05} \cdot x - F^i \cdot a - G_5 \cdot b - F_{k0} \cdot a_1 = 0; \quad (2.4)$$

З рівняння (2.3) визначаємо реакцію R_4^t . Рівняння (2.4) використовується для визначення координати x положення реакції R_{05} після визначення самої реакції.

Головний вектор розписуємо як векторну суму сил, що діють на групу Ассура в цілому:

$$\vec{R}^n_0 = \underbrace{\sum F \rightarrow_i = \vec{R}^n_{05} + G \rightarrow_5 + F^i_5 + F \rightarrow_{k0} + \vec{R}^n_{45} + \vec{R}^n_{54}}_{**} + \underbrace{G \rightarrow_4 + F^i_4 + \vec{R}^n_t + \vec{R}^n_{34}}_{***} = 0. \quad (2.5)$$

В цьому рівнянні позначено:

*- реакції дії і протидії ланок 4 і 5 між собою, які при розгляданні сил, діючих на кожен ланку окремо, виступають як зовнішні сили;

** - векторна сума сил, що діє на ланку 5 окремо;

$$\vec{R}^n_5 = \sum F \rightarrow_5 = \vec{R}^n_{05} + G \rightarrow_5 + F^i_5 + F \rightarrow_{k0} + \vec{R}^n_{45} = 0 \quad (2.6)$$

*** - векторна сума сил, що діє на ланку 4 окремо

$$\vec{R}^n_4 = \sum F \rightarrow_4 = \vec{R}^n_{54} + G \rightarrow_4 + F^i_4 + \vec{R}^n_t + \vec{R}^n_{34} = 0 \quad (2.7)$$

В рівнянні (2.5) невідомими є величини реакцій \vec{R}^n_{05} і \vec{R}^n_{34} , якими визначаємо з векторного силового багатокутника (див. рис. 2.3). В цьому багатокутнику початок побудови сил для ланки 5 позначено літерою a , а кінець їх - літерою b . З'єднавши ці літери на плані сил, визначимо реакції \vec{R}^n_{45} і \vec{R}^n_{54} за величинами (з урахуванням масштабного коефіцієнта) і за напрямками.

Переходимо до групи Ассура, складеної з ланок 2 і 3 (див. рис. 2.4). Для цієї групи складаємо рівняння рівноваги окремо для ланок 2 і 3.

$$M_{02} = \sum m_B(F \rightarrow_2) = R^t \cdot AB - F^i \cdot l_{10} + G_2 \cdot l_8 = 0; \quad (2.8)$$

$$M_{03} = \sum m_B(F_3) = R^t \cdot BO_2 - G_3 \cdot l_5 - F^i \cdot l_6 - R_{43} \cdot l_7 = 0 \quad (2.9)$$

З цих рівнянь визначаємо тангенціальні складові реакцій, $R^t i_{12}$
 R^t_{03}

Складаємо векторне рівняння суми сил, що діють на групу
 Ассура в цілому:

$$\begin{aligned} \vec{R}^i_0 &= \sum \vec{F}^i = \vec{R}^n_{12} + \vec{R}^t_{12} + \vec{G}^i_2 + \vec{F}^i_2 + \vec{R}^n_{32} + \vec{R}^t_{23} + \\ &= \vec{R}^n_{45} + \vec{F}^i_3 + \vec{G}^i_3 + \vec{R}^t_{03} + \vec{R}^n_{03} = 0 \end{aligned}$$

Відповідно до цього рівняння будуюмо силовий многокутник, з
 якого визначаємо реакції $\vec{R}^n_{12}, \vec{R}^t_{12}, \vec{R}^n_{03}, \vec{R}^t_{03}, \vec{R}^n_{32}$ або \vec{R}^t_{23} за величинами
 i

напрямами.

Переходимо до силового розрахунку ведучої ланки-кривошипа
 ОА. Ця ланка жорстко з'єднана з зубчатим колесом Z_2 якому рух
 передається від зубчатого колеса Z_1 . Рушійна сила передається від
 колеса 1 до колеса 2 і відповідно до кривошипа ОА. Ця сила діє по
 лінії зачеплення, яка напрямлена під кутом зачеплення α_w до дотичній
 до початкових кіл зубчатих коліс.

Знаючи лінії дії сил R_{21} і F_P показуємо лінію дії реакції R_{01} . За
 теоремою про рівновагу трьох сил лінії їх дії перетинаються в одній
 точці. Треба зважити на те, що напрямок сили F_P приймається по лінії
 зачеплення, але так щоб сила F_P діяла від колеса 1 на колесо 2 і
 одночасно створювала момент відносно точки О у протилежному
 напрямку дії моменту від сили R_{21} відносно того ж центра О.

Запишемо рівняння рівноваги кривошипа ОА:

$$\vec{R}^i_{21} + \vec{F}^i_P + \vec{R}^i_{01} = 0 \quad (2.10)$$

Будуємо векторний многокутник за рівнянням (2.10), з якого
 визначаємо сили F_P і R_{01} за величинами і напрямками (див. рис. 2.4).

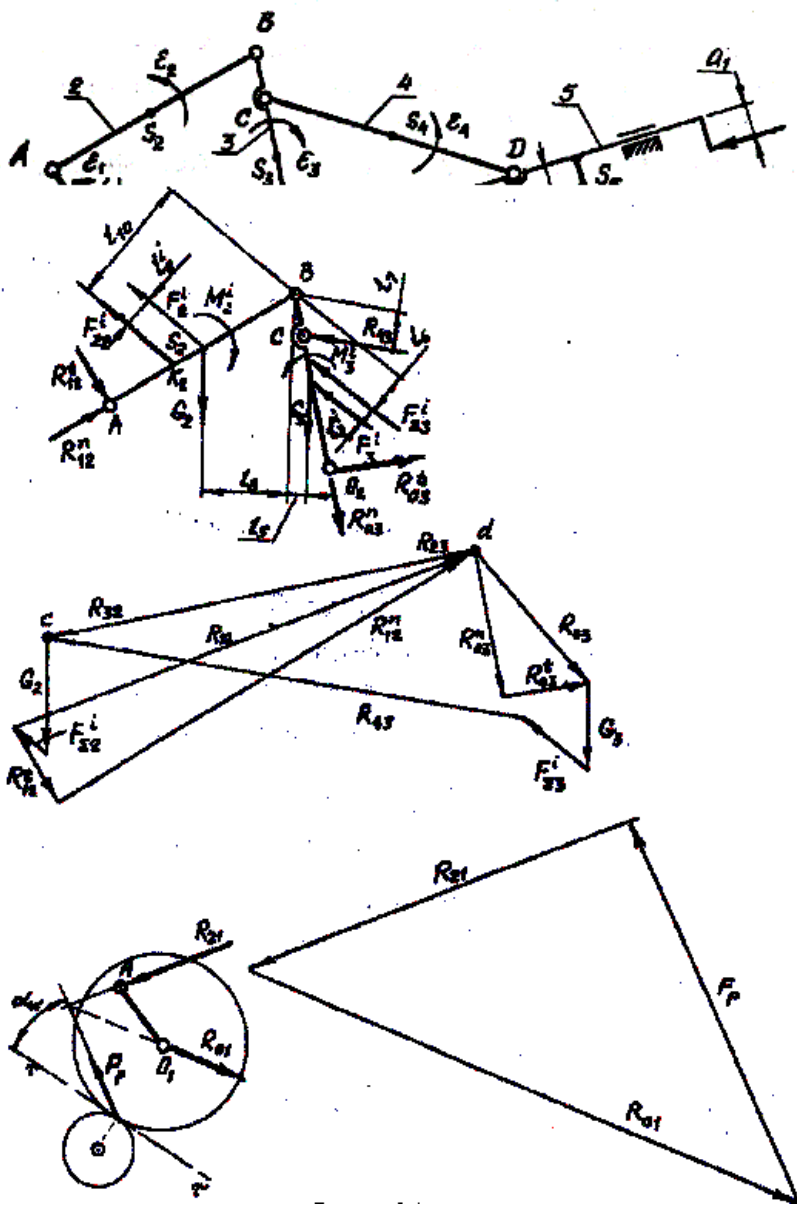


Рисунок 2.4

3.6 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму третього класу

Для прикладу візьмемо механізм, який складається з ведучої ланки і однієї групи Ассура третього класу (рис. 2.5).

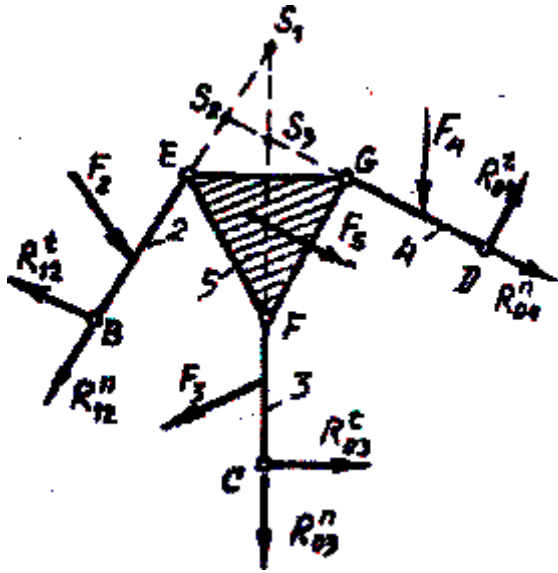


Рисунок 2.5

Відокремимо групу Ассура і прикладемо до неї всі зовнішні сили. Для спрощення задачі всі зовнішні сили (тобто сили ваги, сили інерції, момент сил інерції, тощо), які діють на кожну ланку окремо, замінюємо рівнодіючими силами, прикладеними до відповідних ланок у центрах зведення. Такими силами є $F \rightarrow_2$, $F \rightarrow_3$, $F \rightarrow_4$ і $F \rightarrow_5$. Як і в кінематичному аналізі покажемо особливі точки Ассура – точки S_1 , S_2 і S_3 . Складаємо рівняння рівноваги з умови рівності нулю головного моменту усіх сил, що діють на кожну ланку окремо:

$$\sum m_E(F_2) = 0, \sum m_F(F_3) = 0,$$

$$\sum m_G(F_4) = 0.$$

З цих рівнянь визначаємо тангенціальні складові реакцій R^t, R^t

12 03

04 і R^t . Тепер складаємо рівняння моментів сил, що діють на всю групу Ассура, відносно будь-якої точки Ассура, наприклад точки S_1 . Як видно з малюнка лінії дії сил R^n і R^n пересічуться в цій точці. Таким

12 03

чином з невідомих сил момент відносно точки S_1 складає тільки сила

04 R^n . Саме її ми і визначимо з такого рівняння. Тепер у нас залишаються дві невизначені за величинами сили R^n і R^n . Для їх визначення можна

12 03

скласти або рівняння моментів усіх сил, що діють на групу в цілому, відносно точок S_2 та S_3 або скласти векторне рівняння сил, діючих на групу Ассура, і побудувати векторний багатокутник сил. Ці варіанти рівнозначні.

3.7 Визначення зрівноважуючої сили методом Жуковського. Теорема Жуковського

Дуже часто є необхідність визначення зрівноважуючої сили, а метод наведений вище є досить громіздкий. Крім того чим більше шлях до результату тим більше й можлива помилка у розрахунках. Незавжди є необхідність у визначенні реакцій в кінематичних парах. Саме цим вимогам і відповідає метод Жуковського.

Теорема Жуковського:

Якщо механізм під дією системи сил, прикладених до нього, знаходиться у стані рівноваги, то і план швидкостей, повернутий на 90° у будь-який бік і який розглядається як тверде тіло (незмінна система), що обертається навколо полюса плану, навантажений тими ж силами у відповідних точках, теж знаходиться в рівновазі.

Для доказу теореми Жуковського використаємо загальне рівняння динаміки (дивись теоретичну механіку, розділ динаміки). Якщо до матеріальної системи прикласти усі зовнішні сили і сили інерції, то сума робіт цих сил на можливих переміщеннях точок їх прикладення дорівнює нулю.

$$\sum F_{\rightarrow i} \cdot \delta r_{\rightarrow i} + \sum F^i \cdot \delta r_{\rightarrow} = 0, \quad (2.11)$$

$$\text{або } \sum F_i \cdot \delta r_i \cdot \text{Cos}(F_{\rightarrow i} \cdot \delta r_{\rightarrow i}) + \sum F^i \cdot \delta r_i \cdot \text{Cos}(F^i \cdot \delta r_{\rightarrow}) = 0 \quad (2.12)$$

Для системи, що має стаціонарні в'язі (в'язі, що не залежать від часу), можливі переміщення співпадають з дійсними. Вважаємо також сили інерції звичайними зовнішніми силами, що прикладені до рухомої системи. Тоді:

$$\sum F_i \cdot dr_i \cdot \text{Cos}(F_{\rightarrow i} \cdot dr_{\rightarrow i}) = 0 \quad (2.13)$$

Для механізму з ідеальними в'язями усі переміщення відбуваються за один і той же інтервал часу dt . Поділивши рівняння (2.13) на dt , маємо:

$$\sum_i F_i \cdot \frac{dr_i}{dt} \cdot \text{Cos}(F_{\rightarrow i} \cdot \frac{dr_{\rightarrow i}}{dt}) = \sum_i F_i \cdot V_i \cdot \text{Cos}(F_{\rightarrow i} \cdot \vec{V}_{\rightarrow i}) = 0 \quad (2.14)$$

Рівняння (2.14) є рівнянням потужностей:

Якщо механізм знаходиться в стані рівноваги, то сума миттєвих потужностей усіх зовнішніх сил і моментів, прикладених до ланок механізму, дорівнює нулю.

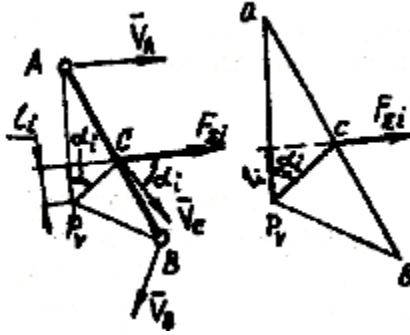


Рисунок 2.6

Візьмемо ланку AB (рис. 2.6) для якої відомі швидкості точок і на яку діє результуюча усіх сил – сила $F_{\Sigma i}$. Швидкість точки C прикладення сили $F_{\Sigma i}$, визначимо через миттєвий центр швидкостей. Покажемо план швидкостей, побудований для цієї ланки, повернутий на 90° .

Прикладемо до повернутого плану швидкостей у точці c силу $F_{\Sigma i}$. Плече сили $F_{\Sigma i}$ полюса плану швидкостей l_i створює з швидкістю V_C кут α_i . Кут між силою $F_{\Sigma i}$ і вектором швидкості V_C на ланці теж дорівнює α_i .

Рівняння можливих потужностей для цього випадку має вигляд:

$$\sum F_{\Sigma i} \cdot V_C \cdot \cos \alpha_i = 0.$$

З повернутого плану швидкостей бачимо, що

$$l_i = p_c \cdot \mu_v \cdot \cos \alpha_i = V_C \cdot \cos \alpha_i$$

Таким чином рівняння можливих потужностей перетворюється на рівняння

$$\sum F_{\Sigma i} \cdot l_i = 0.$$

Це рівняння є рівнянням суми моментів усіх сил, прикладених у відповідних точках повернутого на 90° плану швидкостей, відносно його полюса, що і треба було доказати.

4. ЗРІВНОВАЖЕННЯ СИЛ ІНЕРЦІЇ

4.1 Основні відомості про зрівноваження.

В процесі руху ланок механізму або машини в кінематичних парах виникають динамічні сили, які є результатом руху ланок з прискоренням, тобто результатом дії сил та моментів сил інерції. Ці сили і спричиняють додаткові зусилля в кінематичних парах, які передаються також і на фундамент.

Сили інерції змінні і їх проекції на осі координат теж є функціями складними, періодичними, період яких пропорційний періоду обертання кривошипа. Ці сили викликають коливання окремих ланок і механізму в цілому, а також передаються через фундамент іншому обладнанню.

Особлива небезпека виникає тоді коли частота коливань наближається до власної частоти обладнання або споруд (явище резонансу).

Для уникнення цього явища треба зрівноважувати рухаючі маси, або застосовувати інші застережливі засоби ізоляції фундаментів або машин від фундаментів.

Розрахунки, в результаті яких визначається розподіл мас ланок, при якому не виникають динамічні зусилля на опорах, має назву динамічного зрівноваження.

Сили інерції ланок, які здійснюють плоский або поступальний рух, зрівноважити тільки розподілом мас рухаючих ланок неможливо.

Сили інерції ланок, що здійснюють обертальний рух навколо нерухомої осі, можна зрівноважити штучно зміщуючи центр ваги постановкою противаг.

Всі сили інерції ланок механізму можуть бути замінені однією рівнодіючою силою інерції, яка повністю сприймається фундаментом. Ця рівнодіюча може бути повністю, або частково, зрівноважена таким чином, що на фундамент не буде діяти динамічна сила, або вона буде мінімальна.

Звідси дві задачі зрівноваження:

- зрівноваження обертаючих мас;
- зрівноваження механізмів (повне або часткове).

4.2 Визначення положення загального центра мас механізму

Покажемо систему довільно розташованих мас відносно системи координат OXY . Положення їх визначається радіусами-векторами $r \rightarrow_i$ і кутами α_i .

З теоретичної механіки відомо: $M \cdot r \rightarrow_s = \sum m_i \cdot r \rightarrow_i$, де $M = \sum m_i$ загальна маса механізму. Звідси можна записати:

$$r \rightarrow_s = \frac{\sum m_i \cdot r \rightarrow_i}{M}; \quad X_s = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M}; \quad Y_s = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M}. \quad (4.1)$$

Графічне вирішення задачі показано на рис. 4.1, у вигляді векторного багатокутника.

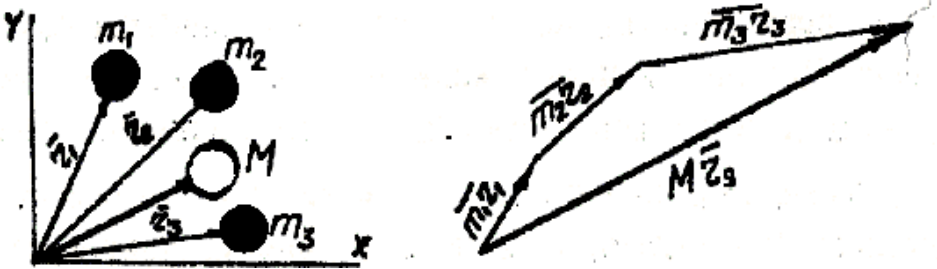


Рисунок 4.1

4.3 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в одній площині

Для повного зрівноваження сил інерції обертаючої ланки необхідно і достатньо дотримання двох умов:

- центр ваги ланки повинен співпадати геометричне з центром (віссю) обертання;
- вісь обертання повинна бути однією з головних осей інерції, тобто відцентрові моменти інерції I_{zx} і I_{xy} повинні поодиноці дорівнювати нулю.

Силу інерції визначаємо за формулою

$$F^i = -m \cdot a \rightarrow_n = -m \cdot \omega^2 \cdot r \rightarrow.$$

Для зрівноваження маси m на від'ємному подовженні радіуса-вектора (рис. 4.2) $r \rightarrow$ встановлюємо протизагу масою m_{np} на відстані r_{np} , причому

$$m_{np} \cdot \omega^2 \cdot r_{np} = m \cdot \omega^2 \cdot r, \quad \text{або} \quad m_{np} \cdot r_{np} = m \cdot r \quad (4.2)$$

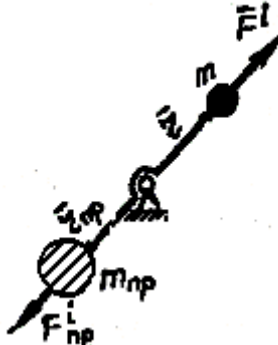


Рисунок 4.2

$$\sum m_i \cdot r \rightarrow_i + m_{np} \cdot r \rightarrow_{np} = 0, \quad \text{або} \quad M r \rightarrow_S + m_{np} r \rightarrow_{np} = 0 \quad (4.3)$$

4.4 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в паралельних площинах

Хай нам задані маси m_1, m_2, \dots, m_n , які розташовані у паралельних площинах і обертаються навколо однієї осі з кутовою швидкістю ω . В загальному вигляді центр мас не співпадає з віссю обертання.

При такому розташуванні мас для їх зрівноваження треба задовольнити двом умовам – рівності нулю головного вектора $\vec{P} \rightarrow^i$ 0 і головного моменту сил інерції $\vec{M} \rightarrow^i; \vec{P} \rightarrow^i = 0; \vec{M} \rightarrow^i = 0$. Найменша кількість протизаг теж повинна бути рівною двом.

$$\vec{P} \rightarrow^i_0 = \sum \vec{P}^i_i = -\sum m_i \omega^2 \cdot r \rightarrow_i; \quad \vec{M} \rightarrow^i_0 = \omega^2 \sum (Z \rightarrow_i \times M_i r \rightarrow_i) \quad (4.4)$$

Зрівноваження будемо проводити у площинах I і II, розташування яких ми обираємо самі, тому всі відстані Z_i вважаються відомими.

Зведемо всі сили у площину I - I. Тоді

$$\omega^2 \cdot m_1 \cdot r_{\rightarrow 1} + \omega^2 \cdot m_2 \cdot r_{\rightarrow 2} + \omega^2 \cdot m_3 \cdot r_{\rightarrow 3} + \dots + \omega^2 \cdot m_n \cdot r_{\rightarrow n} + \omega^2 \cdot m_{II} \cdot r_{\rightarrow I} + \omega^2 \cdot m_{II} \cdot r_{\rightarrow II} = 0.$$

$$\omega^2 [(Z_{\rightarrow 1} \times m_1 r_{\rightarrow 1}) + (Z_{\rightarrow 2} \times m_2 r_{\rightarrow 2}) + (Z_{\rightarrow 3} \times m_3 r_{\rightarrow 3}) + \dots + (Z_{\rightarrow n} \times m_n r_{\rightarrow n}) + (Z_{\rightarrow} \times m_{II} r_{\rightarrow II})] = 0$$

або, скоротивши на ω^2

$$m_1 r_{\rightarrow 1} + m_2 r_{\rightarrow 2} + m_3 r_{\rightarrow 3} + \dots + m_n r_{\rightarrow n} + m_I r_{\rightarrow I} + m_{II} r_{\rightarrow II} = 0. \quad (4.5)$$

$$(Z_{\rightarrow 1} \times m_1 r_{\rightarrow 1}) + (Z_{\rightarrow 2} \times m_2 r_{\rightarrow 2}) + (Z_{\rightarrow 3} \times m_3 r_{\rightarrow 3}) + \dots + (Z_{\rightarrow n} \times m_n r_{\rightarrow n}) + (Z_{\rightarrow} \times m_{II} r_{\rightarrow II}) = 0. \quad (4.6)$$

Кожен з векторів моментів відцентрових сил інерції перпендикулярний площині, яка проходить через вісь обертання і відповідний центр мас (ваги), тобто перпендикулярний силі інерції. Напрямок моменту інерції відповідає правилу правого гвинта. Для зручності визначення r_I і r_{II} повертаємо вектори моментів інерційних сил на 90° у той бік, щоб напрямки більшості моментів співпало з напрямками їх радіусів - векторів.

Рівняння (4.6) має вигляд

$$\sum Z_i \times m_i \cdot r_i = \sum Z_i \cdot m_i \cdot r_i \cdot \sin(Z_i, r_i) = \sum Z_i \cdot m_i \cdot r_i \text{ тому що } \angle(Z_i, r_i) = 90^\circ.$$

Таким чином рівняння (4.6) можна переписати у вигляді:

$$m_1 \cdot r_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot Z_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot Z_3 + \dots + m_n \cdot r_n \cdot Z_n + m_{II} \cdot r_{II} \cdot Z = 0. \quad (4.7)$$

За цим рівнянням будемо векторний багатокутник (див. рис. 4.3).

Для аналітичного розвозку проектуємо рівняння (4.7) на осі координат X і Y .

$$\begin{aligned} & m_1 \cdot r_1 \cdot Z_1 \cdot \cos \alpha_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot Z_2 \cdot \cos \alpha_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot Z_3 \cdot \cos \alpha_3 + \dots \\ & + m_n \cdot r_n \cdot Z_n \cdot \cos \alpha_n + m_{II} \cdot r_{II} \cdot Z \cdot \cos \alpha_{II} = 0 \\ & m_1 \cdot r_1 \cdot Z_1 \cdot \sin \alpha_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot Z_2 \cdot \sin \alpha_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot Z_3 \cdot \sin \alpha_3 + \dots \end{aligned}$$

$$+m_n \cdot r_n \cdot Z_n \cdot \text{Sin} \alpha_n + m_{II} \cdot r_{II} \cdot Z \cdot \text{Sin} \alpha_{II} = 0.$$

Повертаючись до рівняння (4.6), будемо векторний багатокутник, з якого визначаємо $m_I \cdot r_I$ і $m_{II} \cdot r_{II}$, а також кути α_I і α_{II} за якими ми визначаємо напрямки розташування противаг.

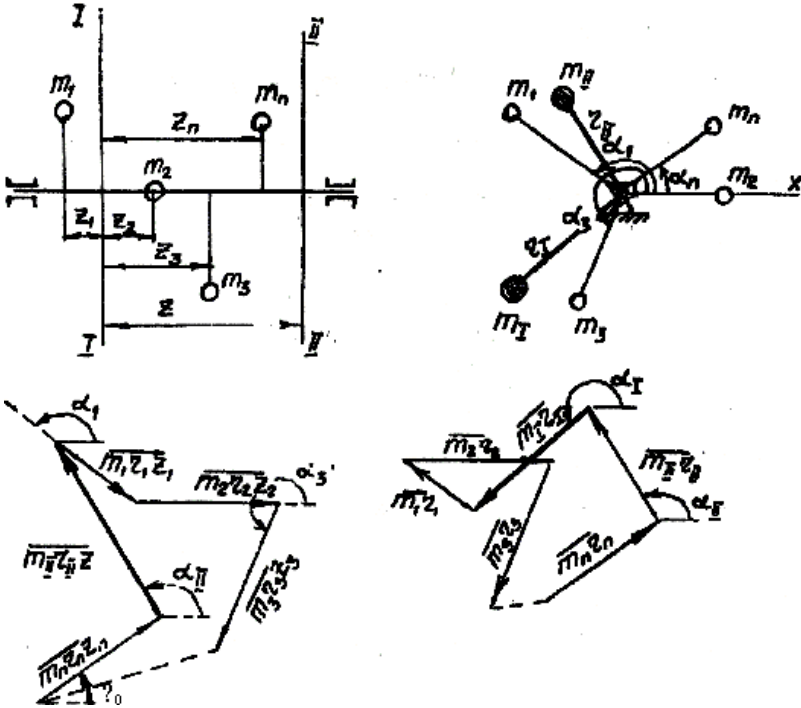


Рисунок 4.3

4.5 Зрівноваження машин на фундаменті

Задача повного зрівноваження сил інерції механізму добром величини і розташування мас для багатьох механізмів є теоретично розв'язуваною, але в деяких випадках такий добір мас практично неможливо досягнути внаслідок особливостей конструкції або ж внаслідок необхідності встановлення досить великої маси противаг. В цьому випадку проводиться наближене зрівноваження сил інерції.

При зрівноваженні масу кожної ланки умовно розносять по точках, якими ланка з'єднується з іншими - тобто по кінематичних парах, таким чином, щоб загальний центр мас усієї ланки співпадав би з його реальним положенням і сума усіх мас повинна дорівнювати загальній масі ланки. Наприклад, масу ланки AB з центром мас у точці S (рис. 4.4) розносимо по точках A і B таким чином, щоб були вірними рівності

$$m_A + m_B = m; \quad (4.8)$$

$$m_A \cdot AS = m_B \cdot BS. \quad (4.9)$$

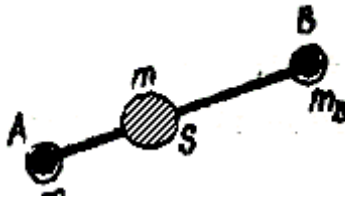


Рисунок 4.4

З цих рівнянь можна визначити кожну з мас:

$$m_B = m \cdot \frac{AS}{AB}; \quad m_A = m \cdot \frac{BS}{AB} \quad (4.10)$$

Приклад 1. Шарнірний чотири ланковий механізм (рис. 4.5).

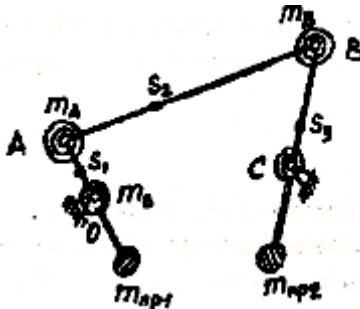


Рисунок 4.5

Розносимо маси ланок по точках: для ланки OA - у точки O і A , для ланки AB - у точки A і B , для ланки BC - у точки B і C .

$$m_{O1} = m_1 \cdot \frac{AS_1}{AO}, \quad m_{A1} = m_1 \cdot S_1O/AO;$$

$$m_{A2} = m_2 \cdot \frac{BS_2}{AB}, \quad m_{B2} = m_2 \cdot S_2A/AB;$$

$$m_{B3} = m_3 \cdot \frac{CS_3}{BC}, \quad m_{C3} = m_3 \cdot S_3B/BC;$$

$$\text{Тоді } m_A = m_{A1} + m_{A2}; \quad m_B = m_{B2} + m_{B3}.$$

Тепер бачимо, що зрівноваженню підлягають маси m_A і m_B , які обертаються навколо нерухомих осей O і C .

$$m_{нрI} = m_A \cdot \frac{AO}{r_I}; \quad m_{нрII} = m_B \cdot CB/r_{II}.$$

Приклад 2. Кривошипно-повзунний механізм

а) Повне зрівноваження.

Варіант 1. Як і в прикладі 1 розподіляємо маси ланок по точках O , A і B .

Формули для визначення мас такі ж як і в прикладі 1. Масу зосереджену в точці B зрівноважуємо так, щоб загальний центр мас m_B , m_A і маси противаги $m_{нрI}$ був-би в точці A . Звідси $m_{нрI} = m_B \cdot AB/r_I$.

Тепер вважаємо, що маси $m_{нрI}$, m_B , m_A , зосереджені в точці A .

Маса $m_{A1} = m_{нрI} + m_B + m_A$. Цю масу можна зрівноважити відносно точки O . При цьому маса другої противаги буде дорівнювати $m_{нр2} = m_{A1} \cdot AO/r_2$.

Варіант 2. Цей варіант оснований на побудові симетричного дзеркально обернутого механізму (рис. 4.6,б).

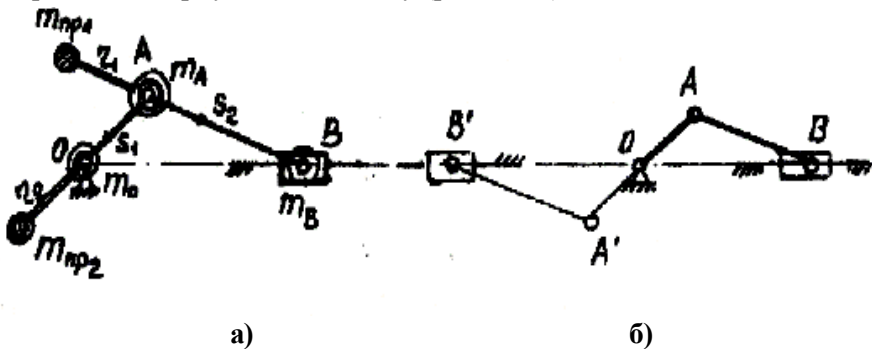


Рисунок 4.6

б) Часткове зрівноваження.

При частковому зрівноваженні зрівноваженню підлягає тільки маса m_A , яка зосереджена в точці A без противаги m_{np1} (див. рис. 4.6 б, а) при першому розподіленні мас.

4.6 Види нерівноваг (рівноваг)

Рівновага може бути статичною і динамічною. Під статичною рівновагою, або рівновагою спокою, розуміють такий стан тіла, коли, якщо воно розташовано по горизонтальній осі, весь час буде у стані спокою в будь-якому своєму положенні на цій осі.

Динамічна рівновага, або рівновага руху, представляє собою такий стан тіла, коли при обертанні навколо осі відсутні будь-які зовнішні вібрації його, тобто центр ваги його розташований на осі обертання і відсутні будь-які відцентрові сили у площині співпадаючій з віссю обертання.

Всяке тіло, що знаходиться в стані динамічної рівноваги одночасно буде і в стані статичної рівноваги. Але якщо воно знаходиться тільки в стані статичної рівноваги, то це не означає, що воно буде і в стані динамічної рівноваги.

Статична рівновага може бути досягнута на призмах або балансирних паралелях. Динамічна рівновага досягається на спеціальному балансирному обладнанні.

5. ХВИЛЬОВІ ЗУБЧАТІ ПЕРЕДАЧІ

Хвильова зубчата передача (рис. 5.1) відрізняється від інших зубчатих механізмів тим, що один з її елементів - гнучке колесо - потерпає хвильову деформацію, зарахунок якої відбувається передача обертального руху.

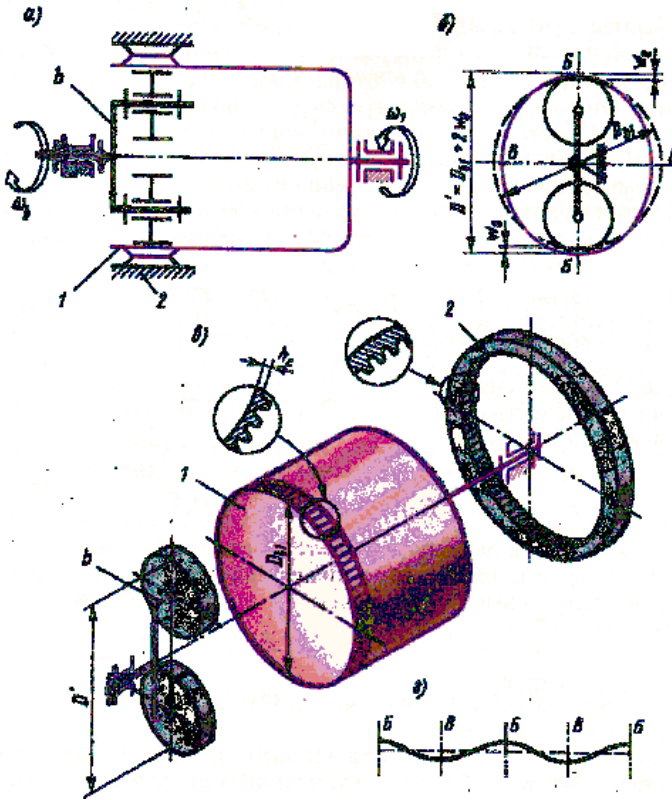


Рисунок 5.1

Хвильова зубчата передача складається з трьох основних елементів: гнучкого зубчатого колеса 1 (рис. 5.1, а, в, рис. 5.2, а, б), жорсткого колеса 2 і генератора хвиль b (б).

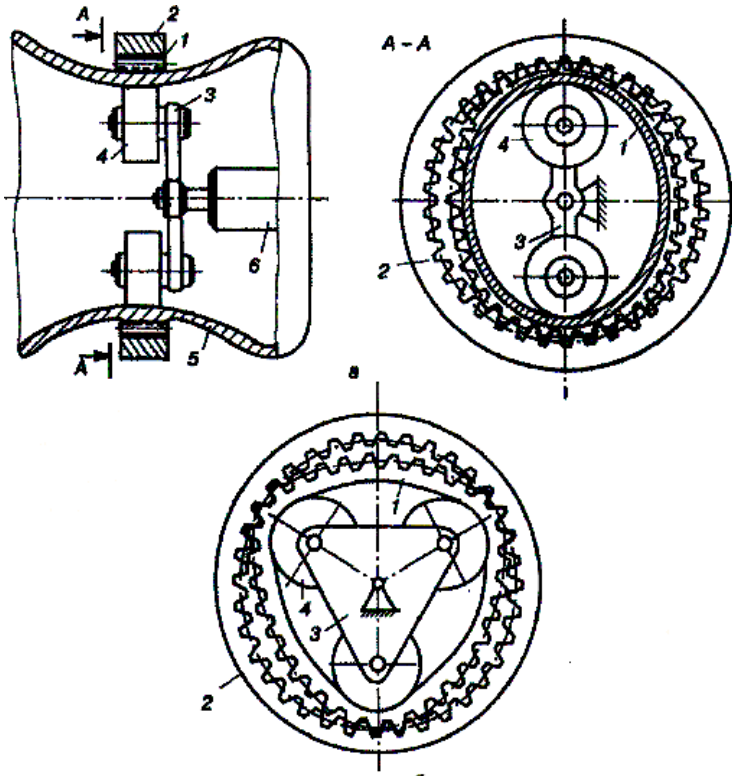


Рисунок 5.2

Гнучке зубчате колесо представляє з себе тонкостінну оболонку. Один кінець її з'єднаний з валом й зберігає циліндричну форму, на другому кінці її торця нарізано зубчате колесо з числом зубців Z_1 . Цей кінець оболонки деформується на величину $2w_0$ генератором хвиль, який введений у її середину.

У торцевому перерізі гнучке колесо відносно початкової круглої отримувє криволінійну форму під дією генератора хвиль (рис. 5.1, б). Контур деформованого гнучкого колеса утворює відносно недеформованого дві хвилі деформації (рис. 5.1, з), або три хвилі деформації (рис. 5.2, б). Вісь *ББ* зветься великою оссю, а вісь *ВВ* - малою оссю кривої деформації. На осі *ББ* розташовані вершини хвилі деформації, а на осі *ВВ* - западини. Число хвиль деформації може бути

рівним 1, 2, 3 і т.д. Найчастіше використовують двоххвильові передачі, у яких числа зубців гнучкого й жорсткого коліс мають різницю у два зуба:

$$z_2 - z_1 = 2.$$

Гнучкі колеса для хвильових передач, які призначені для передачі руху через герметичну стінку, представляють з себе закриту з одного боку оболонку.

Генератор хвиль призначений для утворення й руху хвилі деформації на гнучкому зубчатому колесі. Генератори хвиль бувають механічними, електромагнітними, пневматичними й гідравлічними. Використовуються декілька видів механічних генераторів: двохроликівий, чотирироликівий, дисковий, кільцевий й кулачковий. Генератор хвиль може розташовуватись усередині гнучкого колеса і ззовні.

5.1 Кінематика хвильової передачі

При обертанні генератора кожна хвиля деформації переміщується по периметру гнучкого колеса, в результаті чого кожен зуб гнучкого колеса за один оберт генератора хвиль двічі входить у зачеплення з жорстким колесом. При нерухомому жорсткому колесі після повного оберт генератора хвиль ($\phi_b = 2\pi$) вал гнучкого колеса повернеться у протилежному генераторові напрямку на кут, рівний $\phi_1 = 2\pi \cdot (z_1 - z_2) / z_1$, де $2\pi / z_1$ - кутовий крок гнучкого колеса.

Від кутів повороту можна перейти до кутових швидкостей, тоді передаточне відношення від генератора хвиль до гнучкого колеса при нерухомому жорсткому

$$U_{b1}^{(2)} = \frac{\omega_b}{\omega_1} = - \frac{z_1}{z_1(z_1 - z_2)} = - \frac{z_1}{z_2 - z_1}. \quad (5.1)$$

Якщо зупинити гнучке колесо, то після повороту генератора хвиль на кут $\phi_b = 2\pi$ жорстке колесо повернеться у тому ж напрямку, що і генератор хвиль, на кут $\phi_2 = 2\pi \cdot (z_2 - z_1) / z_2$, де $2\pi / z_2$ - кутовий крок жорсткого колеса.

У цьому випадку передаточне відношення від генератора хвиль до жорсткого колеса:

$$U_{b2}^{(1)} = \frac{\omega_b}{\omega} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} \rightarrow = \left(z \frac{z_2}{z_1} \right) \quad (5.2)$$

З формул (5.1) і (5.2) видно, що передаточне відношення хвильової передачі залежить тільки від чисел зубців коліс. Хвильова передача може бути двоступеневою (рис. 5.3).

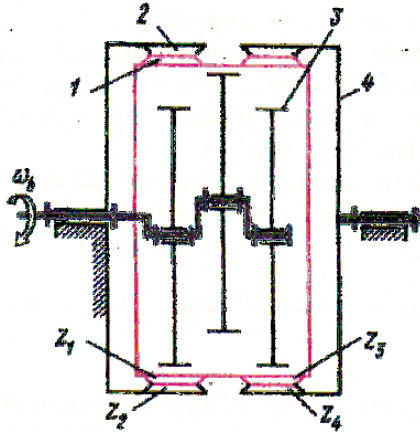


Рисунок 5.3

У цьому випадку гнучке колесо 1 виконується у вигляді кільця з двома зубчастими вінцями Z_1 і Z_3 , які входять у зачеплення з жорсткими колесами 2 і 4 (з числами зубців Z_2 і Z_4 відповідно). Жорстке колесо 2 нерухоме; рух передається за допомогою двох хвильових зачеплень від генератора хвиль 3 жорсткому колесу 4. Передаточне відношення багатоступеневої хвильової передачі (рис. 5.3) визначається за формулою

$$U_{b4} = \frac{z_1 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3} \quad (5.3)$$

В передачі з хвильовою зубчатою муфтою, якщо $z_3 = z_1$ і $z_4 = z_1$, то вихідний вал зв'язаний з колесом 4 муфти, і передаточне відношення

$$U_{b4} = \frac{z_1}{z_2 - z_1}. \quad (5.4)$$

Якщо $z_3 = z_1$ і $z_2 = z_1$ то вихідний вал зв'язаний з колесом 4 передачі, і передаточне відношення

$$U_{b4} = \frac{z_4}{z_4 - z_1}. \quad (5.5)$$

5.2 Особливості хвильового зачеплення

При обертанні генератора хвиль через кожну точку обода гнучкого колеса за один оберт генератора проходять дві хвилі деформації. Напруги в матеріалі гнучкого колеса не повинні перевищувати допустимих при знакозмінному навантаженні і у всякому разі не виходять за межі лінійної ділянки кривої закону Гука. Тому для сталевих коліс величина деформації w_0 і товщина обода гнучкого колеса під зубом h_c відносно невеликі:

$$w_0 = (0.003 \dots 0.015) \cdot d_1; \quad w_c = (0.005 \dots 0.03) \cdot d_1.$$

Мала величина деформації w_0 визначає малу різницю ділільних радіусів жорсткого і гнучкого коліс до деформації й малу різницю чисел коліс, а співвідношення величин w_0 і d_1 відповідають великій кількості зубців. При таких співвідношеннях величин w_0 , Z_1 , Z_2 зазори між зубцями в зоні вершини хвилі деформації малі і у значній степені зникають при навантаженні й навіть при складанні передачі. Завдяки цьому у хвильовій передачі дуже велике число пар зубців (до 40 %) одночасно знаходиться у зачепленні.

З усього цього можна відмітити такі особливості хвильової зубчатої передачі:

- велике передаточне відношення U , яке отримується в одній ступені. Для передач зі сталевими гнучкими колесами (рис. 5.1) $U = 50 \dots 300$, для двоступеневої передачі (рис. 5.3) $U = 2000 \dots 10^4$ й більше;
- при одночасному зачепленні великої кількості числа пар зубців коліс передача сприймає значні навантаження при відносно малих габаритах;

- многопарність зачеплення і декілька однакових зон зачеплення викликають значне усереднення помилок виготовлення й монтажу коліс і забезпечують високу кінематичну точність хвильових передач;
- з цієї ж причини рівень шуму хвильової передачі менше, ніж в звичайних многоланкових зубчатих або планетарних передачах;
- відносно невелика величина деформації гнучкого колеса дає можливість виконати його у вигляді глухої оболонки й виготовити герметичні хвильові механізми, які передають обертальний рух з одного середовища у інший без рухомих ущільнень;
- коефіцієнт корисної дії для передаточних відношень $U=50...200$ достатньо високий і лежить у межах 70 ...85 %.

ЛІТЕРАТУРА

1. Теорія механізмів і машин. Методичні вказівки до виконання розділу курсового проекту „Синтез кулачкових механізмів” для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад. М. А. Ткачук, О. І. Зінченко, Г. А. Кротенко та інш. – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – 24 с.
2. Грунауер О.А., Долгіх І.Д. Теорія механізмів і машин (системний підхід), НМК ВО, Київ, 1992. - 376 с.
3. Курсове проектування з теорії механізмів і машин: учбовий посібник. Є.І. Крижанівський, Б.Д. Малько, В.М. Сенчішак та ін. - Івано-Франківськ: 1996. - 357 с.
4. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу “Теорія механізмів і машин” для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі М.А. Ткачук, В.Б. Зеленський, З.С. Сафонова, А.О. Зарубіна, Г.А. Кротенко, О.І. Зінченко, Г.Д. Гриценко. - НТУ “ХПІ”, 2007. – 64 с.
5. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К.: Наукова думка, 2002. – 660 с.
6. Кореняко О.С. Теорія механізмів і машин. – К.: Вища школа, 1987. – 206 с.
7. Кіницький Я.Т. Практикум з теорії механізмів і машин. Навчальний посібник. – Львів: Афіша, 2002. – 452 с.