

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
МЕХАНІЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ І ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Зварювання»

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 131 - Прикладна механіка
зі спеціалізації 131-11 «Зварювання та споріднені процеси і технології»
денної форми навчання

Затверджено
на засіданні
кафедри «Зварювання»,
протокол № 12
від 30 червня 2023 р.

Харків
НТУ «ХП»
2023

2
ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ВСТУП.....	4
1. БУДОВА МЕХАНІЗМІВ.....	5
1.1 Основні визначення.....	5
1.2 Кінематичні пари та їх класифікація. Кінематичні ланцюги.	6
1.2.1 Класифікація кінематичних пар.....	9
1.3 Структурні формули механізмів.....	13
1.4 Групи Ассура та їх класифікація. Утворення механізмів.	
Заміна вищих пар нижчими.....	15
1.4.1 Утворення механізмів за Ассуром.....	15
1.4.2 Заміна вищих пар нижчими.....	19
1.4.3 Надлишкові в'язі та зайві ланки.....	20
1.4.4 Локальні надлишкові в'язі в кінематичній парі.....	24
2. СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ.....	29
2.1 Синтез кінематичних схем механізмів з нижчими парами.	29
2.1.1 Умова існування кривошипу в плоских	
чотири ланкових механізмах.....	29
2.2 Синтез механізмів за середньою швидкістю ланки і за	
коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки.....	31
2.3 Синтез чотири ланкових механізмів за двома	
положеннями миланок.....	37
2.4 Синтез чотириланкових механізмів за трьома	
положеннями ланок.....	43
3. АНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ	49
3.1 Аналітична кінематика шарнірного чотириланковика.....	51
3.2 Аналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму	54
3.3 Аналітична кінематика кулісного механізму.....	55
4. ГРАФІЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ	
ФУНКЦІЙ.....	57
4.1 Механізм шарнірного чотириланковика.....	58
4.2 Кривошипно-повзунний механізм.....	58
4.3 Кулісний механізм.....	59
4.4 Формули переходу при визначенні передаточних функцій	
складних механізмів.....	60
4.5 Визначення швидкостей і прискорень точок та ланок	
механізмів.....	60
5. ГРАФОАНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА СТЕРЖНЕВИХ	
МЕХАНІЗМІВ.....	63
5.1 Графоаналітична кінематика механізмів другого класу.....	63

5.1.1 Графоаналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму.....	63
5.1.2 Графоаналітична кінематика механізму шарнірного чотириланковика.....	67
5.1.3 Графоаналітична кінематика кулісного механізму.....	69
5.2 Графоаналітична кінематика механізму III класу.....	72
ЛІТЕРАТУРА.....	82

ПЕРЕДМОВА

Теорія механізмів викладає наукові основи створення нових машин та механізмів, методи їх побудови та методи теоретичного та експериментального дослідження. Основну увагу даного конспекту зосереджено на необхідних поняттях механіки машин і методах теоретичного дослідження механізмів. Основною метою конспекту лекцій є надання мінімально необхідного обсягу знань з механіки машин для того, щоб студент розумів та успішно засвоював матеріал спеціальних предметів, які йому доведеться вивчати на наступних курсах університету. Студент, прочитавши і засвоївши зміст пропонованого матеріалу, зуміє у разі необхідності із залученням інших джерел впоратися з вирішенням завдань проектування, що перед ним виникають.

ВСТУП

Теорія механізмів вивчає загальні методи дослідження та проектування механізмів та машин.

Проблеми, якими займається теорія механізмів – це проблеми аналізу та синтезу механізмів та машин. Аналіз полягає у визначенні властивостей існуючих механізмів та машин. Це пряме завдання механіки машин. Зворотне завдання – синтез механізмів, тобто створення нових механізмів, які повинні мати покращені властивості в порівнянні з існуючими з точки зору продуктивності, надійності, довговічності та ін.

1. БУДОВА МЕХАНІЗМІВ

Механізм є системою твердих тіл. Тому механізми мають як вельми просту, так і достатньо складну й різноманітну побудову (структуру). Саме побудовою механізму визначаються такі його характеристики, як **види здійснюваних рухів**, засоби його перетворення, число **ступенів волі**. Формування механізму, тобто з'єднання окремих його частин у єдину систему, здійснюється накладанням **в'язів** на їх відносний рух. Правильне їх розподілення в побудові механізму у великій степені обумовлює його надійну експлуатацію. Тому при проектуванні необхідно з великої різноманітності механізмів вибрати найбільш оптимальний й правильно підібрати його основні структурні елементи. А для цього перш за все треба знати основні види сучасних механізмів, їх структурні характеристики, закономірності їх побудови.

Механізм це:

- система тіл призначена для перетворення руху одного або кількох тіл у потрібні рухи інших тіл;
- кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, призначений виконувати цілком визначені доцільні рухи;
- кінематичний ланцюг, до складу якого входить нерухома ланка (стояк, стійка) й число ступенів волі якого відносно стійки дорівнює числу узагальнених координат;
- пристрій для перетворення механічних рухів

1.1 Основні визначення

Тверді тіла, з яких утворюється механізм, називають **ланками**. При цьому маються на увазі як абсолютно тверді, так і такі що деформуються й гнучкі тіла. Рідина та газу в теорії механізмів ланками не вважаються. **Ланка це або одна деталь, або сукупність декількох деталей, з'єднаних в одну кінематичну нерухома систему.** Між собою ланки розрізняються за конструктивними ознаками (вал, шатун, повзун, поршень, зубчасте колесо, тощо) й за характером їх руху. Наприклад, ланка, яка обертається на повний оберт відносно нерухомої вісі, називається **кривошипом**, при неповному оберті—

коромислом; ланка, яка здійснює поступальний прямолінійний рух, - **повзуном (поршнем)**, тощо. Нерухома ланка механізму називається **стійкою (стояком, опорною, корпусом)**. Так, наприклад, на рис. 1.1, а зображена енергетична машина – двигун внутрішнього згоряння (ДВС), в якому поступальний рух **поршня 3** (за характером руху – повзун) під дією сили тиску газів в циліндрі 4 (нерухома ланка – стояк) перетворюється за допомогою **шатуна 2** в обертальний рух колінчастого вала (кривошипа) 1, до якого прикладене навантаження (момент сили опору); на рис.1.1,б і рис.1.1,в зображена структурна схема механізму ДВС.

Ланка це або одна деталь, або сукупність декількох деталей, з'єднаних в одну кінематичне нерухома систему.

Додаткові відомості:

Поршень, повзун – ланка, яка здійснює поступальний рух відносно іншої ланки.

Шатун – ланка, яка здійснює плоский (плоско-паралельний) рух.

Кривошип - ланка, яка здійснює обертальний рух (на повний оберт) відносно нерухомої точки.

Коромисло - ланка, яка здійснює обертальний рух (на неповний оберт – коливальний рух) відносно нерухомої точки.

Куліса – ланка, яка здійснює обертальний рух (на повний оберт чи на обмежений кут) і по якій рухається інше тіло (найчастіше - повзун).

1.2 Кінематичні пари та їх класифікація.

Кінематичні ланцюги

Кінематичною парою називають рухоме з'єднання двох ланок, або з'єднання двох ланок, що мають відносний рух. Сукупність поверхонь, ліній або точок ланок, що входять в контакт з іншою ланкою пари, називають **елементом** пари. Для того щоб елементи пари знаходились у постійному контакті, пара повинна бути замкнута геометрично (за рахунок конструктивної форми ланок) або силовим (силою ваги, пружиною, силою тиску рідини або газу, тощо) способом.

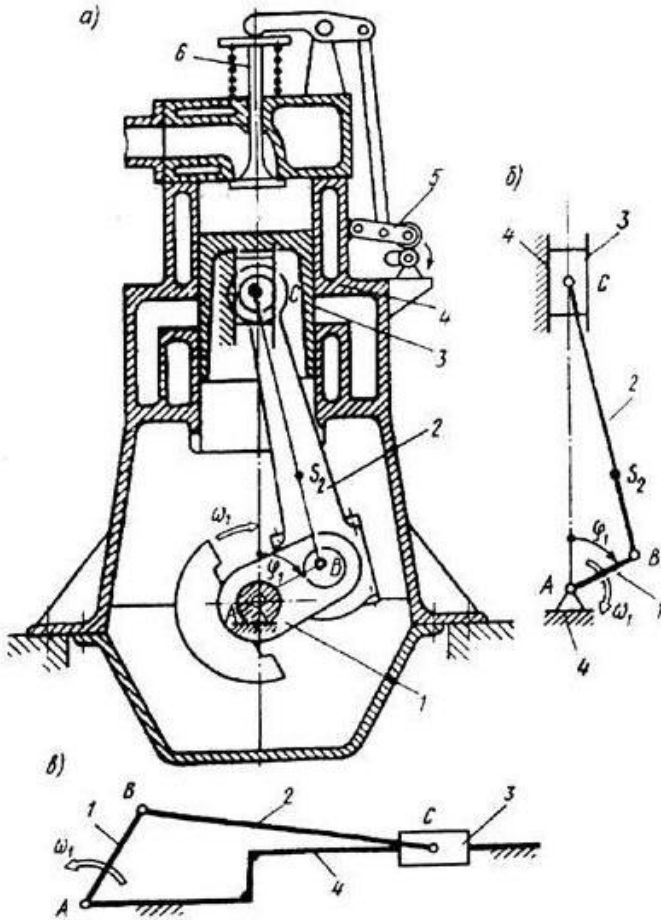


Рисунок 1.1

Кінематичні пари у значній мірі визначають працездатність й надійність машини, тому що через них передаються зусилля від однієї ланки до другої; в кінематичних парах, внаслідок відносного руху, виникає тертя, елементи пари знаходяться у напруженому стані і у стані зносу. Наприклад, при роботі механізму ДВС, зображеного на рис. 1.1, а, зношуються гільза циліндру й поршневі кільця, корінна А й шатунна В шийки колінчатого валу 1 і т. і. Тому правильний вибір кінематичної

пари, її геометричної форми, розмірів, конструкційних та мастильних матеріалів має велике значення при проектуванні машини.

Систему ланок, які утворюють між собою кінематичні пари, називають **кінематичним ланцюгом**. Розрізняють ланцюги **просторові** та **плоскі, замкнуті та розімкнуті, прості та складні**. Якщо в кінематичному ланцюзі є хоча б одна кінематична пара просторова (тобто така в якій будь-яка точка однієї ланки, що рухається відносно іншої, може виходити за межі однієї площини), то і кінематичний ланцюг вважається просторовим. В замкнутому ланцюзі кожна ланка входить не менш ніж у дві кінематичні пари, в розімкнутому ланцюзі є ланки, що входять тільки в одну кінематичну пару. Якщо в кінематичному ланцюзі усі ланки входять не більш ніж у дві кінематичні пари, то такий ланцюг є простим. Якщо в кінематичному ланцюзі є хоча б одна ланка, яка входить біль ніж у дві кінематичні пари, тобто припускає розділення ланцюга на паралельні гілки, то такий ланцюг вважається складним.

Використовуючи термін «кінематичний ланцюг», можна дати таке визначення механізму: **механізм** – кінематичний ланцюг, до складу якого входить нерухома ланка (стояк, стійка) й число ступенів волі якого відносно стійки дорівнює числу узагальнених координат, які характеризують положення ланцюга відносно цієї ж стійки (інші визначення механізму див.[4]). Наприклад, на схемі кривошипно – повзунного механізму ДВС з однією ступінню волі ($W=1$) (Рис.1.1,б) показана одна узагальнена координата механізму у вигляді кутової координати φ_1 ланки 1, похідною $\dot{\varphi}_1$ є ω_1 - кутова швидкість (узагальнена швидкість) ланки 1.

Нерухомість ланки показують на схемі штриховою. Розрізняють вхідні та вихідні ланки механізму. **Вихідною** називають ланку, яка здійснює рух, для якого й призначено механізм. **Вхідною** називають ланку, якій надається рух, що перетворюється механізмом у необхідний рух вихідної ланки. Число вхідних ланок звичайно ж дорівнює числу ступенів волі механізму, тобто числу його узагальнених координат,але може й не збігатись з ним.

При зображенні механізму на кресленні розрізняють його **структурну** (принципову) схему з використанням умовних позначень ланок і пар (без вказування розмірів ланок) й **кінематичну** схему з розмірами, необхідними для кінематичного розрахунку. На схемах ланки позначають цифрами, а пари й різні точки ланок - буквами.

1.2.1 Класифікація кінематичних пар

Кінематичні пари розрізняють (по Рело¹) за характером дотику ланок: пару називають **вищою**, якщо елементом дотику ланок є точка або лінія, і **нижчою**, якщо елементом дотику ланок є поверхня.

При цьому точковий або лінійний контакт розуміється як такий при дотику ланок без зусилля, а під навантаженням ланки, які утворюють вищу пару, будуть контактувати по деякій фактичній поверхні, яка зветься **плямою контакту**.

Вища кінематична пара це така, елементами якої є точки або лінії.

Нижча кінематична пара це така, елементами якої є поверхні або площини.

Просторовий кінематичний ланцюг це такий, в якому є хоча б одна кінематична пара просторова ($W \geq 3$), тобто така, в якій будь-яка точка однієї ланки, що рухається відносно іншої, може виходити за межі однієї (базової) площини.

Плоский кінематичний ланцюг це такий, в якому усі ланки, а також усі їх точки, рухаються в одній базовій або паралельній їй площині.

Замкнутий кінематичний ланцюг це такий, в якому усі ланки входять не менш, як у дві кінематичні пари.

Розімкнутий кінематичний ланцюг це такий, в якому є хоча б одна ланка, яка входить тільки в одну кінематичну пару.

Простий кінематичний ланцюг це такий, в якому усі ланки входять не більш, як у дві кінематичні пари.

Складний кінематичний ланцюг це такий, в якому є хоча б одна ланка, яка входить більше ніж у дві кінематичні пари.

В просторі кожна ланка має шість вільних незалежних рухів – три поступальних та три обертальних відносно трьох прямокутних (Декартових) осей координат. Будь який контакт з іншою ланкою (за умовою постійності його) накладає обмеження у відносному русі ланок, тобто віднімає певну кількість незалежних рухів.

В теоретичній механіці, при розгляді теми в'язів та реакцій в'язів, було показано, що реакцій в'язів стільки, скільки обмежень у

¹ Ф. Рело (1829-1905) – німецький вчений, який розробив графічний метод синтезу спряжених поверхонь, відомий тепер як „метод нормалей”. Рело також є автором праць із структури та кінематики механізмів.

відносному русі така в'язь накладає. Таким чином при класифікації кінематичних пар (за **І.І. Артоблевським**²) клас кінематичної пари визначається кількістю в'язів накладених на відносний рух ланок, або, інакше, кількістю незалежних рухів відібраних у ланки в її відносному русі.

При цьому вважається, що усі в'язі – геометричні, які накладають обмеження тільки на координати точок ланки, що входить у кінематичну пару, в його відносному русі.

На рис.1.2 показані кінематичні пари різних класів: *a)* - однорухома пара 5-го класу, яка припускає лише відносний обертальний рух ланок навколо вісі; *б)* - однорухома пара 5-го класу, яка припускає лише відносний поступальний рух; *в)* – дворухома пара 4-го класу (циліндрична), яка припускає незалежні обертальний та поступальний відносні рухи ланок; *г)* – трирухома сферична пара 3-го класу, яка припускає три незалежні обертальні відносні рухи навколо осей x, y, z ; пара нижча з геометричним замиканням; *д)* – чотирирухома пара 2-го класу, що припускає три обертальні та один поступальний незалежні рухи; *е)* – п'ятирухома пара 1-го класу, яка припускає п'ять незалежних рухів.

Види здійснюваних рухів – поступальний, обертальний, плоский або складний рухи твердого тіла. Поступальний рух це такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в цьому тілі, рухається, залишаючись паралельною сама собі. Обертальний рух це такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки, що належать тілу (або незмінно з ним зв'язані), залишаються за увесь час руху нерухомими. Пряма, яка проходить через ці дві нерухомі точки, зветься віссю обертання. Абсолютний рух це рух твердого тіла відносно нерухомої системи координат.

² І.І. Артоблевський (1905-1977) – організатор радянської школи теорії механізмів і машин. Він написав численні праці зі структури, кінематики й синтезу механізмів, динаміки машин і теорії машин-автоматів, а також підручники [1], які отримали загальне визнання. Перший президент Міжнародної федерації з теорії механізмів і машин (ІФТОММ).

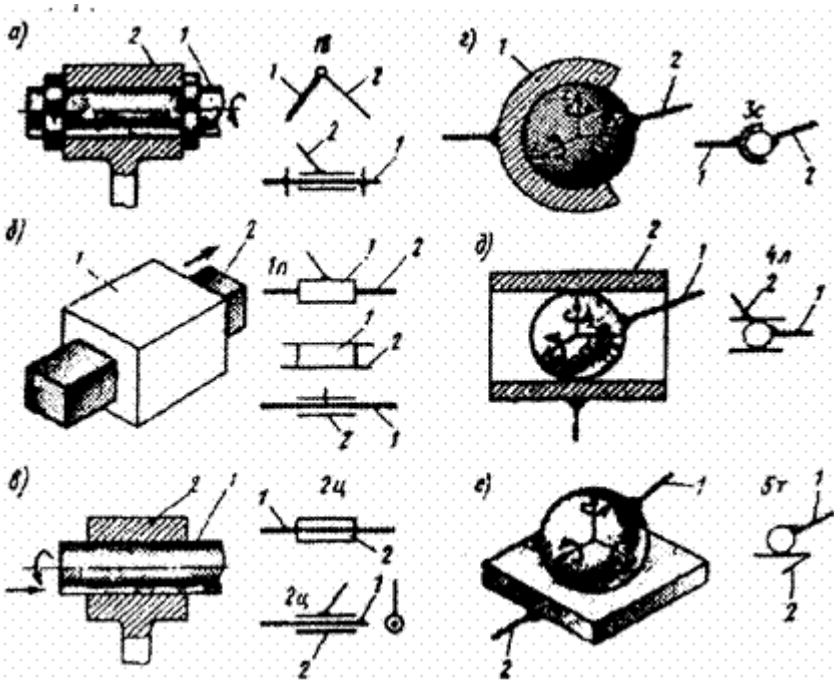


Рисунок 1.2

На рис.1.2 показані також приклади умовних позначень кінематичних пар на схемах.

Нагадаємо, що кінематичні пари поділяються на вищі (Рис.1.2,д,е) та нижчі (Рис.1.2,а,б,в,з). Одна з переваг нижчих пар по відношенню до вищих – можливість передавати більші сили, оскільки контакт здійснюється по поверхні і тому контактна міцність їх значно більша.

На рис.1.3,а показана схема складного відкритого (розімкнутого) кінематичного ланцюга; на рис.1.3,б – схема простого замкнутого ланцюга; на рис. 1.3,в – схема складного замкнутого ланцюга з шести ланок. Усі ці схеми плоскі.

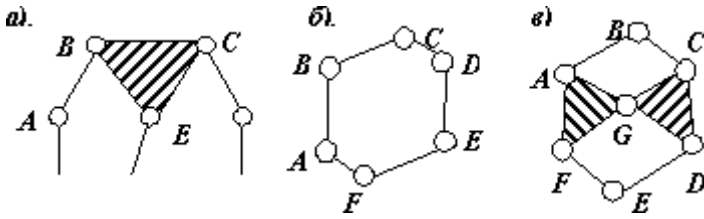


Рисунок 1.3

На рис. 1.4 показані макети та схеми просторових кінематичних ланцюгів: *а), б), в), г), д), е)* – замкнутих, *жс)* – розімкнутого, складеного з плоских кінематичних пар.

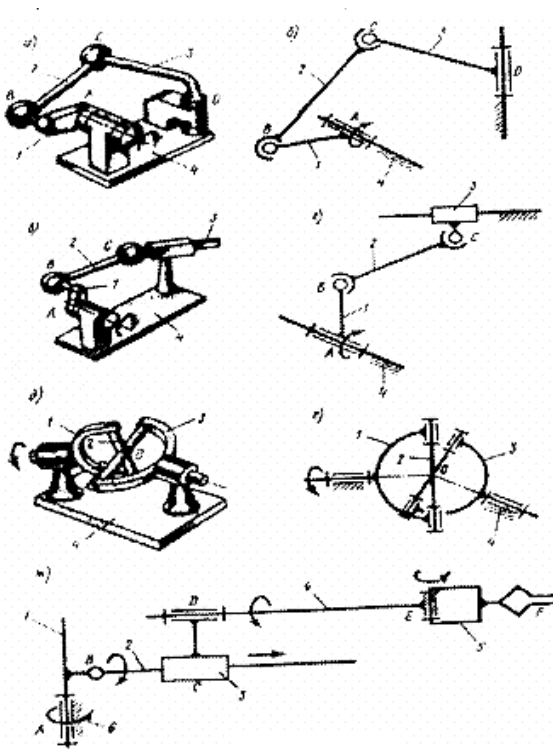


Рисунок 1.4

1.3 Структурні формули механізмів

Існують загальні закономірності в структурі (побудові) різних механізмів, які залежність враховують число ступенів волі W механізму з числом ланок й числом та видом його кінематичних пар. Ці закономірності носять назву **структурних формул** механізмів.

Структурна формула механізму це закономірність в структурі механізмів, яка враховує залежність числа ступенів волі W механізму від числа ланок й числа та виду його кінематичних пар.

Для просторових механізмів найбільш розповсюджена формула **Сомова – Малишева**³, вивід якої проводиться так, як показано нижче.

Нехай в механізмі, що має m ланок (включно зі стійкою), p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – число п'яти-, чотири-, три-, дво-, однорухомих пар (тобто 1-го, 2-го, 3-го, 4-го та 5-го класів). Число рухомих ланок позначимо $n = m - 1$. Якби усі рухомі ланки були б вільними тілами, то загальна кількість ступенів волі була б рівною $6n$. Однак кожна пара 1-го класу накладає на відносний рух ланок, що її утворюють, п'ять в'язів, кожна пара 2-го класу накладає на відносний рух ланок, що її утворюють, чотири в'язі і т.д. Таким чином, загальне число ступенів волі буде дорівнювати

$$W = 6n - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5), \quad (1.1)$$

де q – кількість зайвих (надлишкових) в'язів, які дублюють інші в'язі, не зменшуючи рухомості механізму, а тільки перетворюючи його у статично невизначену систему. Тому від загальної кількості ступенів волі треба відняти цю кількість зайвих в'язів q . В загальному вигляді розв'язок рівняння (1.1) – важка задача, тому що невідомими є W і q ; існуючі способи розв'язку є складними. Однак в окремих випадках, якщо W , яке дорівнює числу узагальнених координат механізму, яке відомо з геометричних міркувань, з формули (1.1) можна визначити число надлишкових в'язів.

$$q = W - 6n + (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5) \quad (1.2)$$

³П.І.Сомов в 1887 році вперше вивів формулу визначення ступеня волі просторового механізму, яка розвинута А.П.Малишевим у 1923 році. Тепер ця формула носить назву формули Сомова – Малишева.

Треба зауважити, що в структурні формули не входять розміри ланок, тому при структурному аналізі механізмів їх можна припустити будь-якими. Якщо надлишкових в'язів нема ($q = 0$), складання механізму відбувається без деформування ланок; такі механізми називаються **самоустановлюючими**. Якщо ($q > 0$), то складання механізму і рух його ланок будуть можливими тільки при деформуванні останніх.

Для плоских механізмів без надлишкових в'язів структурна формула носить ім'я **П.Л.Чебишева**⁴, який вперше запропонував її у 1869 році для важільних механізмів з обертальними парами й одною ступінню волі. В наш час формула Чебишева розповсюджується на будь-які плоскі механізми.

Нехай в плоскому механізмі, що має $n = m-1$ – кількість рухомих ланок, p_n – число нижчих пар і p_v – число вищих пар. Якби усі рухомі ланки були б вільними тілами, що здійснюють плоский рух, то загальне число ступенів волі було б рівним $3n$. Однак кожна нижча пара накладає на відносний рух ланок, що утворюють пару, дві в'язі, лишаючи одну ступінь волі, а кожна вища пара накладає одну в'язь, залишаючи дві ступені волі.

Ступінь волі (вільності) – кількість незалежних рухів (дивись “види здійснюваних рухів”), які може здійснювати тверде тіло або механізм.

В'язь – геометричне або кінематичне обмеження, або неможливість виконання, деяких рухів твердого тіла.

В загальну кількість в'язів можуть увійти q надлишкових в'язів, вилучення яких не збільшує рухомості механізму. Таким чином, число ступенів волі рухомого плоского кінематичного ланцюга (механізму) визначається формулою Чебишева:

$$W = 3n - (2p_n + p_v - q). \quad (1.3)$$

⁴ П.Л.Чебишев, академік, видатний математик і механік (1821-1894), опублікував 15 робіт зі структури та синтезу важільних механізмів, при цьому на підставі розроблених методів винайшов і побудував більш ніж 40 різних нових механізмів, які здійснюють задану траєкторію, зупинку деяких ланок при русі інших і т.і; структурна формула визначення ступеня волі плоских механізмів тепер носить його ім'я.

Враховуючи, що плоскими кінематичними парами нижчими є пари 5-го класу, вищими – пари 4-го класу, формула Чебишева має вигляд:

$$W=3n-(p_4+2p_5-q). \quad (1.4)$$

1.4 Групи Ассура та їх класифікація. Утворення механізмів. Заміна вищих пар нижчими

1.4.1 Утворення механізмів за Ассуром

Розроблена Л.В. Ассуром⁵ структурна класифікація плоских важільних механізмів полегшує дослідження існуючих та утворення нових механізмів без надлишкових в'язів.

Основний її принцип полягає в тому, що механізм може бути утворений шляхом приєднання до одного або декількох початкових ланок й стійки кінематичних ланцюгів (структурних груп) нульової рухомості відносно тих ланок, до яких група приєднується. Таким чином, **нульова структурна група (група Ассура) – кінематичний ланцюг, приєднання якого до механізму не змінює числа його ступеня волі.** За Ассуром в структурних групах усі ланки з'єднуються тільки кінематичними парами нижчими, тобто 5-го класу ($p_4 = 0$). Первісний механізм, або механізм 1-го класу, є найпростіший механізм, що представляє з себе дволанковий механізм, який складений з однієї рухомої ланки й стійки; число первісних механізмів рівне числу ступенів волі механізму. Для структурних груп Ассура за формулою Чебишева можна записати рівність:

$$W=3n-2p_5=0 \quad (1.5)$$

З цієї формули можна визначити співвідношення між кількістю рухомих ланок та кількістю кінематичних пар 5-го класу, які можливі в структурній групі Ассура.

⁵Л.В. Ассур, російський вчений (1878-1920), відкрив загальну закономірність в структурі багатоланкових плоских механізмів, яку використовують зараз при їх аналізі та синтезі. Його ім'ям називаються нульові групи – групи Ассура. Він же розробив метод “особливих точок” для кінематичного аналізу складних важільних механізмів.

$$n = \frac{2}{3} p_5 \cdot$$

Звідси можна скласти таку таблицю:

N	2	4	6	8	...
P ₅	3	6	9	12	...

Приклади груп Ассура з таким співвідношенням кількості ланок і кінематичних пар представлені на рис 1.5.

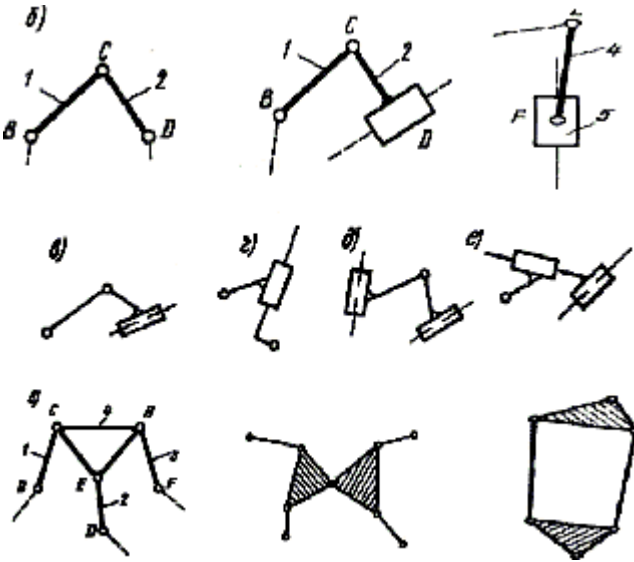


Рисунок 1.5

Найпростіше сполучення чисел ланок і пар, що задовольняє умові (1.5), буде $n = 2$ та $p_5 = 3$. Враховуючи, що будь-яка група Ассура, якщо її приєднати до початкової ланки й стійки, утворює замкнутий кінематичний ланцюг (Рис. 1.6), можна зробити висновок: **число елементів, якими група приєднується до початкової ланки та стійки не може бути менше двох.** Тоді у найпростіших групах (верхній/середній ряди рис.1.6), які складаються з трьох кінематичних пар, елементи двох ланок є вільними. **Обов'язковою умовою приєднання групи Ассура є неможливість з'єднання вільних її елементів між собою або до однієї ланки.** Ці групи можуть своїми

вільними елементами бути приєднаними до двох ланок інших груп, або до початкової ланки (механізму 1-го класу) та стійки відповідно. Якщо група буде приєднана до механізму 1-го класу і стійки, то це буде механізм з ступінню волі 1, тобто $W = 1$. Якщо група буде приєднана до двох механізмів 1-го класу, то це буде механізм з ступінню волі 2, тобто $W = 2$ (див. рисунок 1.6)

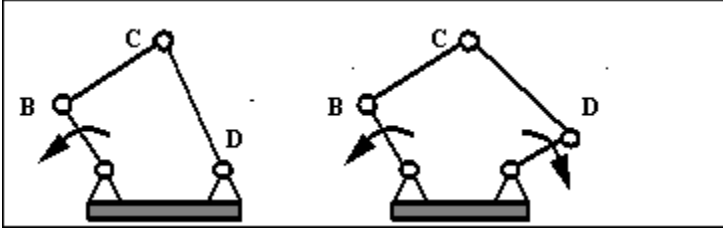


Рисунок 1.6

Робочий механізм екскаватора (Рис. 1.6,а) є практично плоским. Просторовим його робить можливість обертання основної опори відповідно вертикальної осі. Ступінь волі механізму

$$W = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 16 = 36 - 32 = 4.$$

Дійсно для нормальної роботи механізму потрібно мати 4 незалежних вхідних ланок. В даному випадку це: 1-корпус екскаватора і привод обертання механізму відносно його; 2-робочий циліндр 9, який обертається на опорі 10; 3-робочий циліндр 1; 4-робочий циліндр 5 (дивись рисунок). До передостанньої групи Ассура, яка складається зі штока циліндра 5 і ланки 6 додається ще група, яка складається із ланок 7 і 8.

Робота механізму екскаватора, крім повороту відносно основної осі, показано на рисунку 1.6,а.

Група, що має дві ланки й три кінематичні пари 5-го класу, зветься групою 2-го класу та 2-го порядку, тому що приєднання цієї групи до основного механізму здійснюється двома повідками СВ і CD.

Клас групи Ассура визначається найвищим класом контурів, з яких складається дана група. Контур – це замкнута фігура, що утворена ланками однієї групи. Контуром другого класу (Рис.1.7) вважається будь-яка ланка з двома кінематичними парами 5-го класу.

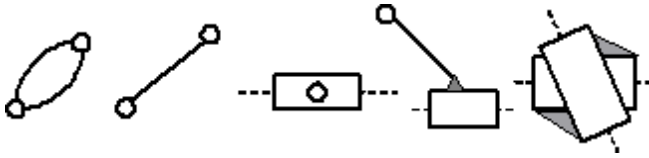


Рисунок1.7

Контуром третього класу (Рис. 1.8) вважається трикутник, утворений трьома ланками, що з'єднані між собою трьома кінематичними парами 5-го класу. Контуром четвертого класу вважається чотирикутник, утворений чотирма ланками, що з'єднані між собою чотирма кінематичними парами 5-го класу.

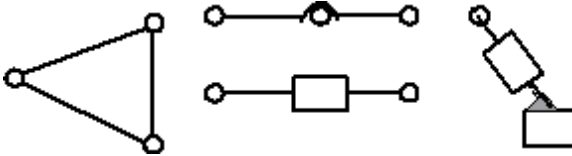


Рисунок1.8

Слід звернути увагу на те, що **кінематичні пари, які утворюють контури, повинні бути утворені ланками тільки однієї групи Ассура**. Якщо у трикутнику хоча б одна кінематична пара утворена ланками, що входять до різних груп Ассура, вона вважається несуттєвою, тобто такою, яка не входить до ознак контуру, а ланка вважається контуром другого класу.

Порядок групи Ассура визначається числом елементів ланок, якими група приєднується до основного механізму, або до інших груп.

Основний механізм (механізм 1-го класу) це:

- кривошип зі стійкою;
- ведуча ланка, з'єднана зі стійкою, якій задається незалежний рух;
- механізм, який складається з однієї рухомої і однієї нерухомої ланок і має ступінь волі $W = 1$.

Наприклад, на рис. 1.5 у двох верхніх рядках показані групи 2-го порядку, а у нижньому рядку (зліва направо) відповідно групи третього, четвертого та другого порядків.

Клас механізму визначається найвищим класом усіх груп, що входять до складу механізму.

1.4.2 Заміна вищих пар нижчими

Як було вказано раніше, плоскі механізми можуть мати ланки, що входять як у нижчі, так і у вищі кінематичні пари. При вивченні структури й кінематики плоских механізмів в багатьох випадках зручніше замінити вищі пари кінематичними ланцюгами або ланками, що входять тільки у нижчі обертальні або поступальні пари п'ятого класу. Як і у всьому іншому, при такій заміні треба виконувати деякі умови заміни умови структурної еквівалентності. Такими умовами заміни є:

- механізм, отриманий після такої заміни, повинен мати таку ж ступінь волі, яку він мав і до заміни;

- ланки, які утворювали вищу кінематичну пару, після заміни її вищою парою повинні мати ті ж відносні рухи, що і до заміни.

Розглянемо першу умову. Для плоского механізму можна записати формулу Чебишева:

$$W = 3n - p_4 - 2p_5 \quad (1.6)$$

Отриманий після заміни механізм будемо називати **замінюючим механізмом**. Або механізм, який за своїми кінематичними параметрами може повністю замінити даний. Ступінь волі замінюючого механізму буде такою ж, як і до заміни, тільки без пар четвертого класу, тобто $p_4 = 0$.

$$W_3 = W = 3n_{13} - 2p_{513} = 3n - p_4 - 2p_5. \quad (1.7)$$

Тут $n_{13} = n + n_3$ і $p_{513} = p_5 + p_{53}$, де n_3 – кількість ланок в ланцюзі заміни, p_{53} – кількість кінематичних пар п'ятого класу в ланцюзі заміни. Підставимо ці рівності у формулу (1.7).

$$3(n + n_3) - 2(p_5 + p_{53}) = 3n - 1 - 2p_5.$$

Звідки:

$$3n_3 - 2p_{53} - p_4 n = \frac{2 \cdot p_{53} - p_4}{3} \quad (1.8)$$

З цієї формули видно, що рівність може бути досягнута за умов, коли $n_3 = p_4$ і $p_{53} = 2p_4$, або: якщо $p_4 = 1$, то $n_3 = 1$ і $p_{53} = 2$; $p_4 = 2$, то $n_3 = 2$ і $p_{53} = 4$, і таке інше. Можна звичайно брати будь – яке інше сполучення n_3 і p_{53} , наприклад: якщо $p_4 = 1$, то $n_3 = 3$ і $p_{53} = 5$; $p_4 = 2$, то $n_3 = 6$ і $p_{53} = 10$, але треба пам'ятати, що чим простіше механізм, тим він надійніше. Тому приймаємо, що одну кінематичну пару четвертого класу можна замінити однією ланкою з двома кінематичними парами п'ятого класу.

Тепер треба вирішити питання, а які приймати кінематичні пари (поступальні чи обертальні) в ланці заміни та якою вибирати довжину ланки заміни. Ці питання можна вирішити, якщо звернутись до другої умови заміни.

1.4.3 Надлишкові в'язі та зайві ланки

Надлишкові в'язі – такі ступені вільності і умови зв'язку, які не впливають на рухомість механізму в цілому, однак саме число ступеня вільності може мінятись, а надається для збільшення жорсткості окремим ланкам.

Зайві ланки – такі ланки, які надаються до механізму для збільшення жорсткості деяких ланок, або для виведення механізму з положення кінематичної невизначеності, які не впливають на рухомість в цілому, однак саме число ступеня вільності може мінятись.

При довільних (у деяких межах) розмірах ланок механізм із залишковими в'язями ($q > 0$) неможна скласти без деформування ланок. Тому такі механізми потребують підвищеної точності виготовлення, інакше ланки деформуються, що викликає додаткове навантаження кінематичних пар і ланок значними силами. При недостатній точності виготовлення механізму із залишковими в'язями тертя в кінематичних парах може настільки збільшитись, що призведе до заклинення ланок, тому з цієї точки зору, надлишкові в'язі в механізмах є небажаними.

Однак у багатьох випадках приходиться свідомо проектувати й виготовляти статично невизначені механізми із залишковими в'язями для забезпечення необхідної міцності й жорсткості системи, особливо при передачі великих сил. Слід розрізняти надлишкові, або додаткові,

в'язі в кінематичних парах і в кінематичних ланцюгах механізму. Так, наприклад, (Рис. 1.9) колінчатий вал чотирициліндрового двигуна внутрішнього згоряння утворює з підшипником однорухому обертальну пару, що є достатнім з точки зору кінематики даного механізму з однією ступінню волі ($W=1$).

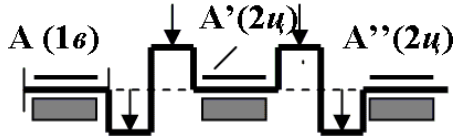


Рисунок 1.9

Однак, враховуючи велику довжину вала й значні сили, що навантажують колінчатий вал, приходится додавати ще два підшипника A' та A'' , інакше система буде непрацездатною з-за недостатньої міцності й жорсткості. При цьому потребується висока точність виготовлення для забезпечення співвісності усіх трьох опор, інакше вал буде сильно деформуватись, а в матеріалі вала та підшипників можуть з'явитись неприпустимо великі напруги.

Що стосується надлишкових в'язів в кінематичних ланцюгах механізму, то при конструюванні машин їх слід намагатись видаляти або залишати мінімальну кількість, якщо повне їх вилучення є невигідним з-за ускладнення конструкції або з яких-небудь інших міркувань.

Методику визначення й вилучення надлишкових в'язів в кінематичних ланцюгах механізмів розглянемо на прикладі.

Хай плоский чотири ланковий механізм з чотирма однорухомими обертальними парами ($W = 1$, $n = 3$, $p_1 = 4$, Рис.1.10,*a*) за рахунок неточностей виготовлення (наприклад внаслідок непаралельності осей A і D) виявився просторовим.

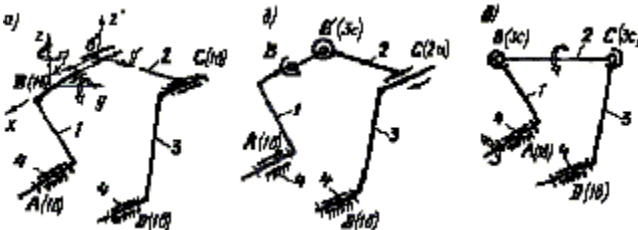


Рисунок 1.10

Складання кінематичних ланцюгів 4, 3, 2 і окремо 4, 1 не викликає труднощів, і точки B і B' можна розташувати на осі x . Однак скласти обертальну пару B , що утворена ланками 1 і 2, можна тільки якщо співпадають осі систем координат $Bxyz$ і $B'x'y'z'$, для чого необхідне лінійне переміщення (деформація) точки B' ланки 2 вздовж осі x й кутові деформації ланки 2 навколо осей y і z (показані стрілками). Це означає наявність в механізмі трьох надлишкових в'язів: $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$. Щоб даний просторовий механізм був статично визначеним, потребується його друга структурна схема, наприклад зображена на рис.1.10,б, де $W = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$. Складання такого механізму відбудеться без натягів, оскільки сполучення точок B і B' буде можливим за рахунок переміщення точки C в циліндричній парі.

Можливий також варіант механізму (Рис.1.10,в) з двома сферичними парами ($p_1 = 2$, $p_3 = 2$); в цьому випадку, окрім **основної рухомості** механізму $W_0 = 1$ з'являється **місцева рухомість** $W_m = 1$ – можливість обертання шатуну 2 навколо власної осі BC ; ця рухомість не впливає на основний закон руху механізму й може бути навіть корисним з точки зору вирівнювання зносу шарнірів: при роботі механізму шатун 2 може вільно повертатись навколо власної осі за рахунок змінних динамічних навантажень та вібрацій. Таким чином підтверджується формула Малишева за якою такий механізм є статично визначеним.

Іноді приходиться враховувати й так звану *групову рухомість* ланок; наприклад, в механізмі гідроприводу (Рис.1.11) в разі, коли пари B і C сферичні, ланки 2 і 3 будуть мати додаткову спільну (групову) рухомість у вигляді обертання навколо осі BC .

Механізми з незамкнутим кінематичним ланцюгом складаються без натягів, тому вони статично визначені, без надлишкових в'язів. Для таких механізмів легко визначається ступінь волі. Ці рухомості (ступені волі) незалежні один від одного і забезпечуються окремими приводами. На рис.1.12 показано приклад позбавлення надлишкових в'язів в кулачковому механізмі з поступально рухаючим роликівим штовхачем.

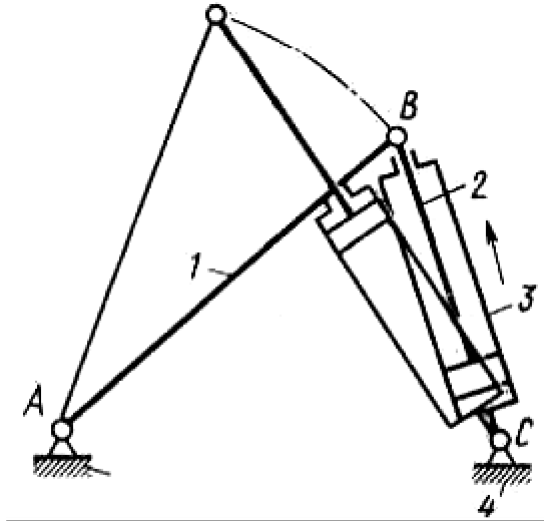


Рисунок 1.11

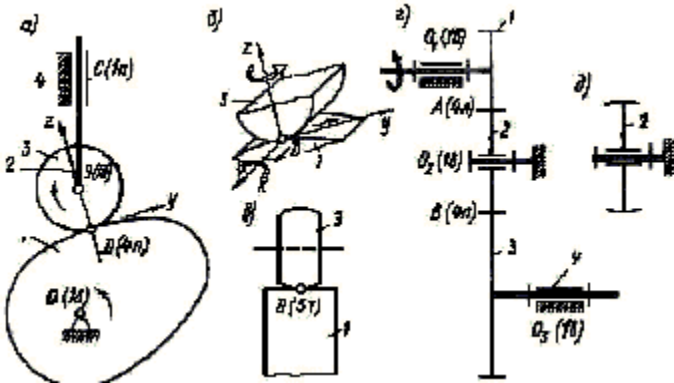


Рисунок 1.12

Механізм (Рис.1.12,*a*) – чотириланковий ($n = 3$); окрім основної рухомості (обертання кулачка 1) є ще і місцева рухомість (незалежне обертання круглого циліндричного ролика 3 навколо власної осі); таким чином $W_{\text{п}}=W=W_{\text{о}}+W_{\text{м}}=2$. Плоска схема надлишкових в'язів немає (механізм збирається без натягів, $q_{\text{п}} = W_{\text{п}}-3n+2p_5+p_4=2-3\cdot 3+2\cdot 3+1=0$). Якщо внаслідок неточностей виготовлення механізм

вважати просторовим, то при лінійному контакті ролика 3 з кулачком 1 за формулою Малишева при $r_1 = 3$ отримаємо $q = 1$, але за певною умовою. Кінематична пара циліндр – циліндр (Рис.1.12,б) при неможливості відносного повороту ланок 1, 3 навколо осі z була б трирухомою парою. Якщо ж такий поворот внаслідок неточностей виготовлення має місце, але малий, й практично зберігається лінійний контакт (при навантаженні пляма контакту за формою близька до прямокутника), то дана кінематична пара буде чотирирухомою, таким чином, $p_4 = 1$ й $q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1$.

Знижуючи клас вищої пари шляхом застосування бочковидного ролика (п'ятирухома пара з точковим контактом, рис.1.12,в), отримаємо при $r_1 = 3$ і $r_5 = 1$, $q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 0$ – механізм статично визначений. Однак слід пам'ятати, що лінійний контакт ланок, хоч і потребує при $q > 0$ підвищеної точності виготовлення, дозволяє передати більші навантаження, чим точковий контакт.

На рис.1.12,г,д показаний другий приклад позбавлення надлишкових в'язів в зубчатій чотириланковій передачі ($W = 1$, $n = 3$, $r_1 = 3$, $r_4 = 2$, контакт зубців коліс 1, 2 і 2, 3 – лінійний). В цьому випадку, за формулою Чебишева, $q_n = 1 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = 0$ – плоска схема надлишкових в'язів немає, за формулою Малишева, $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 2$ – механізм статично невизначений, таким чином, необхідна висока точність виготовлення, зокрема для забезпечення паралельності геометричних осей усіх трьох коліс.

Замінюючи зубці проміжного колеса 2 на бочко видні (рис.1.12,д), отримаємо $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0$ – статично визначений механізм.

1.4.4 Локальні надлишкові в'язі в кінематичній парі

Елементи кінематичної пари визначають умови взаємодії ланок між собою: їх відносна рухомість й обмеження, які не дають можливості точкам ланок займати довільні положення у просторі та мати довільні швидкості.

Обмеження, що накладаються на положення й швидкості точок ланок механізму (в'язі), повинні виконуватись при будь-яких, діючих на механізм силах. Рівняння, яким за умовами накладених в'язів повинні задовольняти координати точок ланок механізму та їх швидкості, звуться **рівняннями в'язів**.

Геометричні в'язі описуються рівняннями, які мають тільки координати точок механічної системи. Ці рівняння відображають ті

в'язі, які відповідають виду кінематичної пари та її конструктивному виконанню.

Конструкція елементів кінематичних пар в реальних механізмах найрізноманітніша. Так, наприклад, однорухома поступальна кінематична пара, що з'єднує ланки 1 і 2 і зображена на кінематичних схемах умовно (Рис.1.13,а), реалізується в конструкції металорізальних верстат у вигляді плоских напрямляючих з різним профілем поперечного перерізу (Рис.1.13,б), а в конструкції підйомника (Рис.1.13,в).

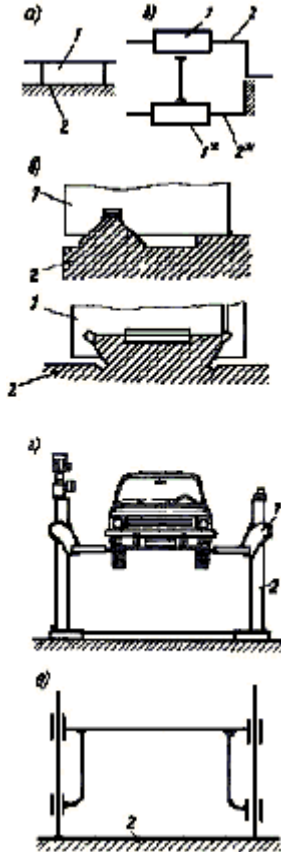


Рисунок 1.13

З наведених прикладів витікає, що контактуючі поверхні, лінії й точки ланок 1 і 2, є елементами кінематичної пари, можуть утворювати прості (Рис.1.13,*a*) й складні (Рис.1.3,*б,е*) кінематичні пари. В простій кінематичній парі контактують тільки два елементи, які визначають відповідне число компонент реакцій в'язів. В складній парі необхідні геометричні в'язі дублюються додатковими в'язями (наприклад, $1^* \text{ і } 2^*$ на рис.1.13,*б*).

Якщо крім необхідних елементів кінематичної пари, обумовлених потрібними геометричними в'язями, при конструюванні використовуються додаткові елементи, то в такій складній кінематичній парі можуть з'явитись **надлишкові локальні в'язі**. При наявності надлишкових локальних в'язів відносний рух ланок або стає неможливістю (заклинення, защемлення елементів), або здійснюється за рахунок деформації ланок, збільшення зазорів між реальними поверхнями елементів або їх зносу.

Щоб конструкції кінематичної пари були працездатними й надійними в експлуатації, до них пред'являють відповідні вимоги щодо **розмірів, форми й відносного положення її елементів**. Звичайно, обов'язковим є вказування меж відхилень від заданих або необхідних геометричних форм й розташування поверхонь, осей або точок. Наприклад, для плоских елементів кінематичної пари (Рис.1.13,*б*) нормують відхилення від площинності й прямолінійності: відхилення від прямолінійності в площині, відхилення від прямолінійності лінії у просторі й відхилення від прямолінійності лінії у заданому напрямку. Окремі види відхилень від прямолінійності і площинності – опуклість й вгнутість.

В залежності від призначення механізму й машини обмежують величини можливих відхилень форми і розташування поверхонь допусками, що передбачені відповідними стандартами. Чим менше допуск на обробку, тим складніше технологія й більше витрати на виготовлення. В цих випадках використовують більш точне й дороге обладнання та технологічну оснастку, засоби контролю, більш ретельно проводять технологічну підготовку виробництва, використовують більш кваліфіковану робочу силу. Тому конструктор повинен обґрунтовано вибирати конструкцію складних кінематичних пар, які необхідні для забезпечення заданих показників працездатності механізму, машини або пристрою. Конструкція складних кінематичних пар поряд з підвищенням жорсткості і точності повинна забезпечувати

невимушене складання вузлів й складальних одиниць і давати можливість механізмові зберігати задане число степенів волі при можливих деформаціях стійки, валів, осей та інших деталей під дією зовнішніх навантажень.

При розробці конструкцій додаткові елементи кінематичних пар вводять для того, щоб зменшити тиск і знос контактних поверхонь за

рахунок перерозподілу реактивних сил і збільшення розмірів елементів кінематичних пар (наприклад, Рис.1.13,2). Особливу увагу приділяють зменшенню деформацій під дією заданих сил шляхом встановлення додаткових підшипників.

Це можна показати на прикладі вала 1, який утворює зі стійкою 2 обертальну пару (Рис.1.14).

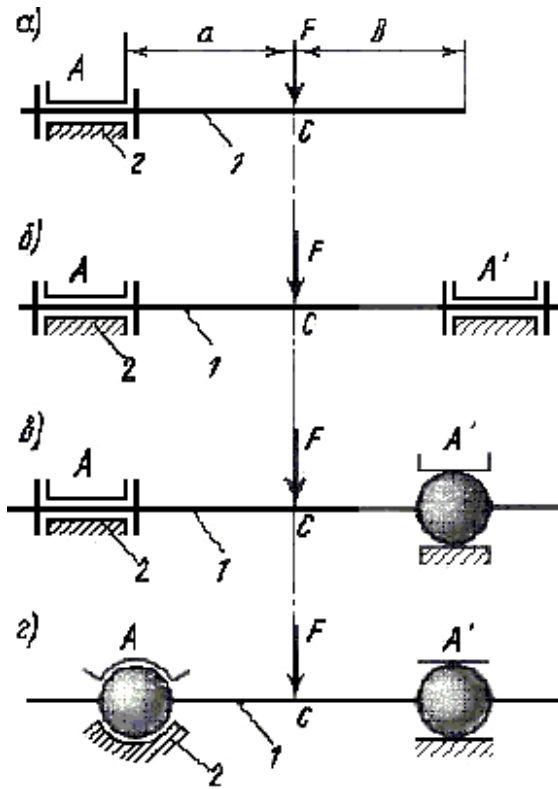


Рисунок 1.14

Якщо замість простої обертальної пари (Рис.1.14,*a*) вал установити на двох опорах, вводячи в конструкцію додаткові елементи (Рис.1.14,*б*), то вигин вала в точці С під дією сили F може бути зменшена. Для вала за схемою, що зображена на рис.1.14, *б,в*, вигин в точці С (при $a = b$) зменшується у 8 разів порівняно з консольною конструкцією вала (Рис.1.14,*a*).

Число надлишкових локальних в'язей в кінематичній парі, сприяючи зменшенню податковості конструкції, може виявитись шкідливим в разі зміни температурного режиму роботи, при деформації стійки, при відхиленнях розмірів, форми й розташування поверхонь елементів кінематичної пари. В статично невизначених системах надлишкові локальні в'язі можуть викликати додаткові зусилля та переміщення. Тому число надлишкових локальних в'язей приходить зменшувати. Так, якщо для вала правий підшипник виконати сферичним плаваючим, то число в'язей буде зменшено (Рис.1.14,*в*).

Якщо обидва підшипники виконати зі сферичними елементами (Рис.1.14,*г*), причому лівий підшипник нерухомий в осьовому напрямку, а правий підшипник має осьову рухомість (плаваючий), то максимальний прогин від навантаження F в точці С (при $a = b$) зменшиться тільки у два рази порівняно з консольною опорою вала тільки на лівому кінці (Рис.1.14,*a*), однак вал буде статично визначеним.

Вимоги до механізму – виконувати задані функції і зберігати задані параметри у відповідних межах протягом всього періоду експлуатації – висуває задачу про проектування механізмів оптимальної структури. Схему кінематичної пари, що відображає тільки необхідне число геометричних в'язей, відповідне виду пари (Рис.1.14,*a*), називають **основною**. Схему кінематичної пари, що відображає як необхідні так і надлишкові локальні (додаткові) в'язі, називають **дійсною** (Рис.1.14,*б,г*). Надлишкові локальні в'язі вносять статичну невизначеність, тобто визначити реакції в опорах методами статички неможливо і ми вимушені використовувати методи теорії пружності. Число додаткових в'язей в реальній конструкції пари називають **ступінню статичної невизначеності** кінематичної пари. Для однорухомих обертальних кінематичних пар, наведених на рис.1.14,*б*, вона дорівнює п'яти, а на рис.1.14,*в* – двом, на рис.1.14,*а,г* – нулю.

2. СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ

2.1 Синтез кінематичних схем механізмів з нижчими парами

При проектуванні механізму дуже часто треба вирішувати таку задачу: за вибраною структурною схемою й заданою кінематичною характеристикою визначити розміри ланок проектуваного механізму, при яких він здійснював би необхідні рухи. Така задача називається **синтезом кінематичної схеми механізму**.

2.1.1 Умова існування кривошипу в плоских чотириланкових механізмах

Важливою кінематичною характеристикою при синтезі механізму є можливість провертатись його ланок (наявність у ньому одного або двох **кривошипів**), яка залежить від співвідношення довжин ланок [1]. Спершу розглянемо плоский шарнірний чотириланковик ABCD (Рис.2.1,*a*) з довжинами ланок a , b , c і d .

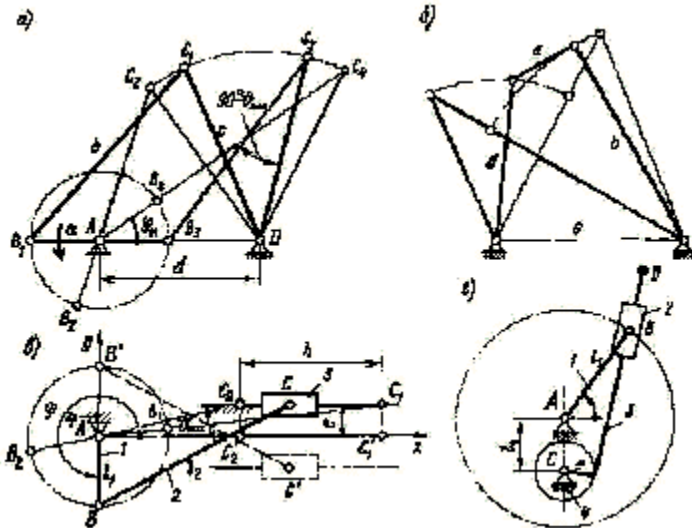


Рисунок2.1

Для того щоб ланка АВ могла бути кривошипом, вона повинна при обертанні пройти послідовно через крайні ліве (AB₁) і праве (AB₃)

положення. Припустивши, що a – довжина самій короткій ланки, d – самого довгого, і, використовуючи відоме співвідношення між довжинами сторін трикутника (довжини сторін трикутника менше суми довжин двох інших його сторін), запишемо такі нерівності:

$$\text{з } \Delta B_1 C_1 D d + a < b + c \quad (2.1)$$

$$\text{з } \Delta B_3 C_3 D d - a < b + c \quad (2.2)$$

Незалежно від співвідношення довжин b і c нерівномірність (2.1) завжди забезпечує виконання нерівності (2.2). Якщо ж самою довгою ланкою є BC або CD ($b > c > d$ або $c > b > d$), то нерівність (2.1) тільки збільшується.

Позиції AB_2 і AB_4 характеризують крайні положення коромисла CD . Ланка BC згідно рис.2.1, a не виконує повного оберту відносно стійки AD і тому є **шагуном**.

Нерівність (2.1) дозволяє дати загальне формулювання умови обертання ланки плоского шарнірного чотириланковика, а саме – **найкоротша ланка шарнірного чотириланковика може бути кривошипом, якщо сума довжин найкоротшої та найдовшої ланок менше суми довжин інших ланок**. Це положення носить назву **правила Грасгофа**⁶.

Застосовуючи це правило, шарнірні чотириланковики поділяють на три групи:

- механізм буде **кривошипно–коромисловим** (Рис.2.1, a), якщо розміри його ланок задовольняють правилу й за стійку прийнята ланка, що розташована поруч з самою короткою;

- механізм буде **двокривошипним**, якщо сума довжин найкоротшої і найдовшої ланок менше суми довжин інших ланок і за стійку прийнята найкоротша ланка; це виходить з того, що якщо кривошип при виконанні правила Грасгофа робить повний оберт відносно стійки й шатуна, то і ці ланки теж здійснюють повний оберт відносно кривошипа;

- механізм буде **двокоромисловим**, якщо розміри його ланок не задовольняють правилу, а також у випадку, коли сума довжин

⁶Ф. Грасгоф (1826-1893) математично сформулював умови існування кривошипа у плоскому важільному механізмі, використані при його синтезі.

найкоротшої і найдовшої ланок менше суми довжин інших ланок, але найкоротша його ланка є шатуном (Рис.2.1,б), і, відповідно, можливість йому бути кривошипом неможлива, тому що вона не є ланкою, розташованою рядом зі стійкою.

У граничному випадку, коли нерівність (2.1) перетворюється в рівність, усі ланки механізму в одному з крайніх положень розташовуються по одній прямій. В результаті з'явиться невизначеність руху вихідної ланки (вона може рухатись або в одному, або в другому напрямку).

У **нецентральному кривошипно-повзунному** механізмі (Рис.2.1,в) ланка 1 буде кривошипом, якщо при обертанні пройде положення $\varphi = 90^\circ$ і 270° , що можливо при виконанні умови

$$l_1 < l_2 - |e|,$$

де e – ексцентриситет (або дезаксіал), тобто відстань між лінією руху повзуна 3 та центром обертання кривошипа. Штриховою лінією зображена схема, коли $e < 0$.

Якщо $l_1 > l_2 - |e|$, ланка 1 буде коромислом й такий механізм вірніше буде називати коромислово-повзунним.

В **кулісному механізмі** (Рис.2.1,г) ланка 1 завжди може бути кривошипом; ланка CD (куліса) буде кривошипом, якщо при обертанні пройде положення $\varphi = 270^\circ$, що можливо при виконанні умови $l_1 > l_4 - e$, де e – ексцентриситет куліси; в цьому випадку маємо механізм з обертаючою кулісою. Якщо $l_1 < l_4 - e$, то куліса CD буде коромислом (механізм з коливальною кулісою). Найбільш розповсюджені схеми кулісних механізмів, в яких $e = 0$.

2.2 Синтез механізмів за середньою швидкістю ланки і за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки

Кривошипно – коромисловий механізм. Задані довжина вихідної ланки l_3 і координати γ_1 і γ_2 його крайніх положень (Рис. 2.2). Різниця $\gamma_2 - \gamma_1 = \beta$ є кутовим ходом (розмахом) вихідної ланки. Кривошип AB обертається рівномірно, а його центр обертання в деякій, поки що невідомій, точці A на осі x .

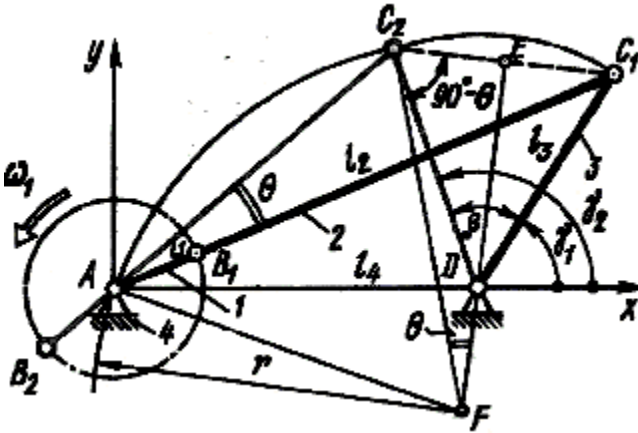


Рисунок 2.2

Рух коромисла з положення 1 у положення 2 візьмемо за прямий хід, а рух у протилежному напрямку – за зворотний хід.

Треба спроектувати кінематичну схему механізму, для якого відношення середніх кутових швидкостей вихідної ланки при зворотному у й прямому ходах дорівнює деякій заданій величині

$K_{\omega} = \omega_{звор} / \omega_{пр}$. (коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки). На рис. 2.3 зображені два крайні положення механізму, в кожному з яких кривошип і шатун розташовуються по одній прямій; кут між цими двома положеннями AC_1 і AC_2 позначений літерою θ .

З креслення витікає, що за час прямого ходу $t_{пр}$ кривошип повернеться на кут $(180^\circ + \theta)$, а за час зворотного ходу $t_{звор}$ – на кут $(180^\circ - \theta)$. Таким чином, при рівномірному обертанні кривошипа

$$K_{\omega} = \frac{\beta / t_{звор}}{\beta / t_{пр}} = \frac{180 + \theta}{180 - \theta}, \text{ звідки } \theta = 180^\circ \cdot \frac{K_{\omega} - 1}{K_{\omega} + 1}$$

Якщо кутовий хід β поділити прямою DE навпіл й через точку C_2 провести пряму C_2F , що складає кут θ з напрямком DE то вона перетнеться з останнім у деякій точці F . Коло радіусом $l_{FC_2} = r$ буде геометричним місцем шуканих центрів обертання кривошипа A , оскільки в будь-якій точці цього кола вписаний кут $\angle C_1AC_2$ дорівнює

половині центрального кута $\angle C_1FC_2=2\theta$, що опирається на ту ж дугу C_1C_2 , й, таким чином, дорівнює θ .

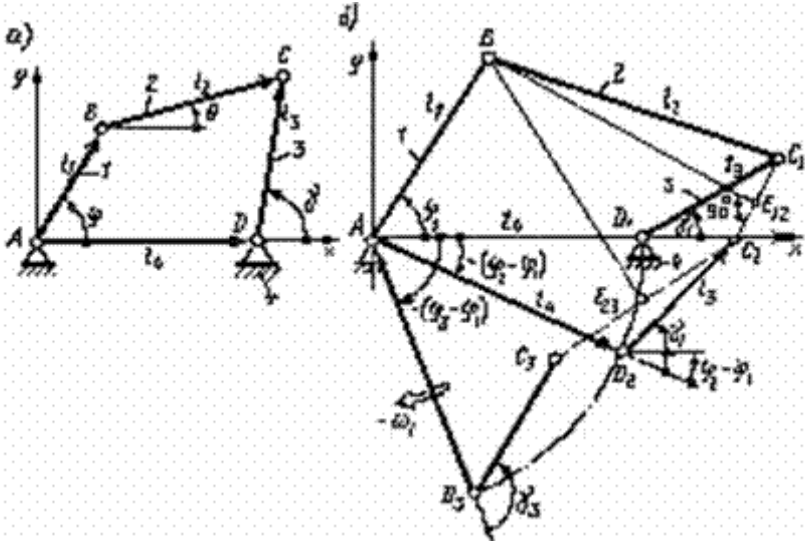


Рисунок 2.3

Точка A перетину цього кола з віссю абсцис згідно вхідним даним задачі буде центром обертання кривошипа. Після цього задача зводиться до синтезу механізму за двома крайніми положеннями ланки 3; довжини кривошипа l_1 й шатуна l_2 визначаються за формулами (2.3).

$$l_1 = \frac{(l_{AC_1} - l_{AC_2})}{2}; \quad l_2 = \frac{(l_{AC_1} + l_{AC_2})}{2}. \quad (2.3)$$

Якщо в спроектованому механізмі максимальний кут тиску більше припустимого, слід вибрати інше положення центра обертання кривошипа на колі радіуса r (вище точки A).

Кут тиску має геометричне і силове визначення:

- кут між нормаллю до ланок в точці контакту і напрямком абсолютного руху веденої ланки;

- кут між загальною реакцією між ланками та її корисною складовою, що діє на ведену ланку.

Кривошипно-повзунний механізм. При проектуванні машин інколи задають середню швидкість повзуна (поршня) $v_{ср}$ (м/с). Для центрального кривошипно-повзунного механізму (Рис. 2.4 подвійний хід повзуна, що відповідає одному повному оберту кривошипа, $2h=4l_1$).

Якщо частота обертання кривошипа дорівнює n (1/с), то

$$v_{ср}=2hn=4l_1n,$$

звідки довжина кривошипа (м) $l_1 = v_{ср}/(4n)$.

Потім за заданою величиною $\lambda_2 = l_2 / l_1$ можна визначити й довжину шатуна l_2 .

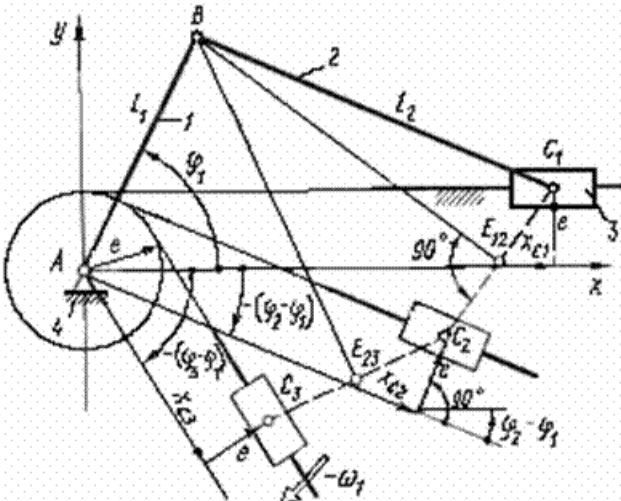


Рисунок 2.4

Механізм з коливальною кулісою. Шестиланковий кулісний механізм (Рис.2.5) перетворює обертальний рух кривошипа 1 у зворотню – поступальний рух повзуна 5, при цьому середня швидкість $v_{звор}$ повзуна при зворотньому ході більше у K_v разів середньої швидкості $v_{пр}$ прямого ходу. Вхідними даними є хід h вихідної ланки 5 й коефіцієнт зміни його середньої швидкості $K_v = v_{звор} / v_{пр}$.

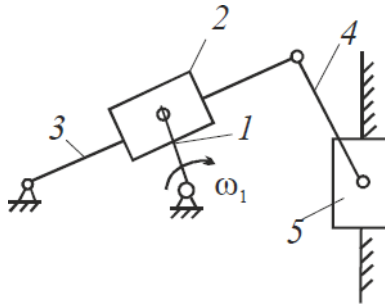


Рисунок 2.5

Наприклад, у стругальних станках виріб обробляється в одному напрямку із заданою швидкістю різання, а холостий (зворотний) хід різального інструмента здійснюється з більшою середньою швидкістю; в цьому випадку $K_v > 1$.

Коефіцієнт K_v і кут β розмаху (кутовий хід) куліси зв'язані (при $\omega_1 = \text{const}$) залежністю

$$K = \frac{h/t_{звор}}{h/t_{пр}} = \frac{180 + \theta}{180 - \theta}, \text{ звідки } \theta = 180^{\circ} \cdot \frac{K_v - 1}{K_v + 1}$$

Довжину куліси визначають з розгляду її крайнього положення за формулою

$$l_3 = l_{CD} = h / [2 \cdot \sin(\beta/2)].$$

В середньому (вертикальному) положенні куліси CD довжини ланок l_3 , $l_6 = l_{AC}$ (стійки) і $l_1 = l_{AB}$ зв'язані співвідношенням

$$l_3 = l_6 + l_1 + a, \quad (2.4)$$

де розмір a вибирають конструктивно з метою більш повного використання довжини куліси. З другого боку, з прямокутного ΔABC

$$l_1 = l_6 \sin(\beta/2). \quad (2.5)$$

Підставлення значення l_1 у вираз (2.4) дає довжину стійки (міжосьову відстань)

$$l_6 = (l_3 - a) / [1 + \sin(\beta/2)].$$

Після обчислення l_6 можна за формулою (2.5) визначити l_1 ; для механізмів даного типу $l_6 / l_1 \geq 2$.

При ведучому кривошипі кут тиску при передачі зусилля від кулісного повзуна 2 до куліси 3 $v_{32} = 0$, що є достоїнством кулісних механізмів. Для забезпечення найменших кутів тиску при передачі зусилля від ланки 4 до веденого повзуна 5 доцільно положення осі xx вибирати так, щоб вона ділила висоту сегмента f навпіл. Тоді з прямокутного $\triangle NDE$ довжина ланки 4

$$l_4 = l_{DE} \geq f / (2 \cdot \sin \theta_{дон}),$$

де $f = l_3 - l_3 \cos(\beta/2)$; в цьому випадку буде забезпечено співвідношення $v_{\max} \leq v_{\text{доп}}$.

Відстань між віссю обертання куліси й віссю направляючої повзуна 5 визначають за формулою

$$b = l_3 - f/2.$$

Використовують і другий варіант двоповодкової групи ланок 4,5 з двома поступальними та одною обертальною парами. За кутами тиску цей варіант краще попереднього: $v_{54} = 0$.

Механізм з обертальною кулісою. Схема найбільш часто зустрічаючого варіанту такого механізму зображена на рис.2.6.

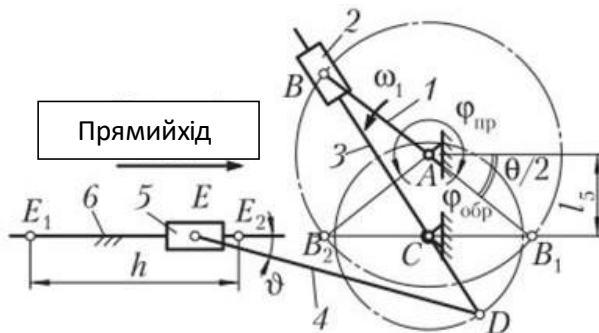


Рисунок 2.6

Вхідні дані: довжина $l_1 = l_{AB}$ кривошипа, хід h повзуна 5 та коефіцієнт зміни його середньої швидкості $K_v = v_{звор} / v_{пр} > 1$.

Прямий хід повзуна 5 здійснюється при повороті кривошипа 1 на кут $\varphi_{пр} = 180^\circ + \theta$, зворотний – при повороті кривошипа на кут $\varphi_{звор} = 180^\circ - \theta$. Тому при $\omega_1 = const$

$$K_v = \frac{\frac{h}{t_{звор}}}{\frac{h}{t_{пр}}} = \frac{180 + \theta}{180 - \theta},$$

звідки

$$\theta = 180^\circ \cdot \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Відстань $l_6 = l_{AC}$ між осями обертання кривошипа 1 і куліси 3 з ΔAB_1C визначається за формулою $l_6 = l_1 \sin(\theta / 2)$; для механізмів даного типу $l_1 / l_6 \geq 2$.

Крайні положення точки E повзуна (E_1 і E_2) визначаються положеннями точки B (B_1 і B_2), коли напрямки куліси 3 і шатуна 4 співпадають, тому довжина кривошипа CD ; $l_{CD} = h / 2$.

Довжина шатуна 4 повинна бути такою, щоб максимальна величина кута тиску $\nu = \nu_{54}$ не перевищувала припустимого значення $\nu_{дон}$, тому $l_4 \geq h / (2 \sin \nu_{дон})$.

Подовжувати шатун 4 вище отриманої межі не слід, тому що це збільшить габарити усього механізму. Для отримання найменших зусиль в кулісній парі 2-3 бажано вибирати довжину кривошипа 1 якомога більшою, однак слід враховувати, що при цьому збільшуються габарити механізму.

2.3 Синтез чотири ланкових механізмів за двома положеннями ланок

Кривошипно-повзунний механізм. Для центрального кривошипно-повзунного механізму ($e=0$, Рис.2.7,а) хід повзуна 3 (його максимальне переміщення) дорівнює подвійній довжині кривошипа: $h=2l_1$. Крайні положення повзуна відповідають кутовим координатам кривошипа $\varphi = 0$ і 180° .

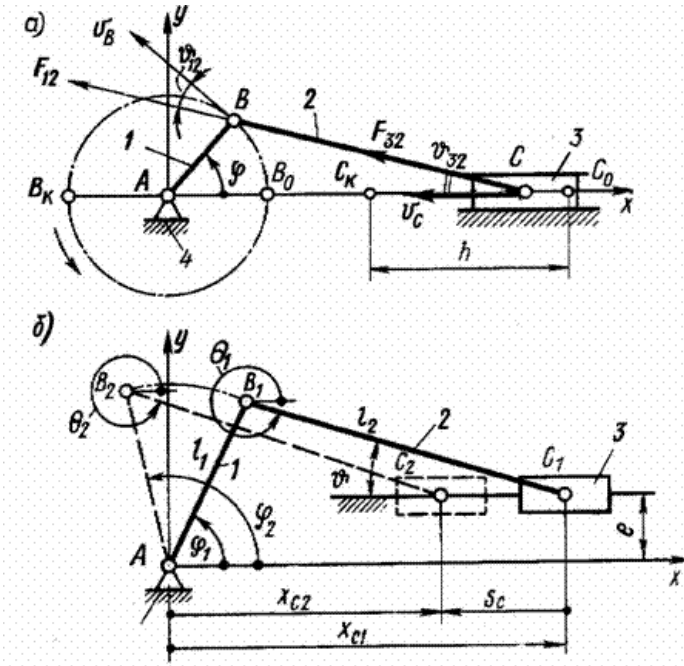


Рисунок 2.7

При проектуванні механізмів треба враховувати вельми важливий параметр, який характеризує умови передачі сил і працездатність механізму, - кут тиску ν (кут між вектором сили, прикладеної до веденої ланки, і вектором швидкості точки прикладення рушійної сили; тертя і прискорений рух мас при цьому поки що не враховуються). Кут тиску не повинен перевищувати припустимого значення: $\nu_{max} \leq \nu_{дон}$. Кут ν при передачі сили на ведену ланку показують на схемі механізму в залежності від того, яка його ланка є веденою. Якщо нею буде повзун 3, то сила F_{32} передається на нього з кутом ν_{32} , а якщо кривошип 1, то сила F_{12} складе кут ν_{12} вектором швидкості \vec{V}_B .

При веденому кривошипі кут тиску ν_{12} два рази за цикл (коли шатун і кривошип розташовуються по одній прямій) набуває максимального значення, рівного 90° . Ці положення кривошип проходить тільки завдяки інерції обертальних мас деталей, жорстко зв'язаних з кривошипом 1.

Найбільший кут тиску ν_{32max} визначають шляхом дослідження функції $\nu_{32} = \nu_{32}(\varphi)$ на максимум. Для центрального механізму ($e = 0$) максимальне значення кута тиску $\nu_{32max} = \arcsin(l_1/l_2)$ буде при $\varphi = 90^\circ$ або 270° . Таким чином, чим менше значення $\lambda_2 = l_2/l_1$, тим менше розміри механізму (по відношенню до довжини кривошипа), але більше кути тиску. Зі зростанням величини ν_{32max} , незалежно від того, яка ланка є ведучою, збільшується зусилля між повзуном та направляючою (між поршнем і стінкою циліндра поршневої машини). Тому, наприклад, для механізмів двигунів внутрішнього згорання відношення λ_2 прийнято вибирати в межах $\lambda_2 = 3 \dots 5$, що відповідає значенню $\nu_{32max} = 19 \dots 11^\circ$.

Якщо $e \neq 0$, хід повзуна (його максимальне переміщення) з $\Delta AC_1C'_1$ й $\Delta AC_2C'_2$

$$h = l_{C_1C_2} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - e^2} - \sqrt{(l_2 - l_1)^2 - e^2}, \quad (2.6)$$

звідки при заданих h, e і $\lambda_2 = l_2/l_1$ можна знайти l_1 (наприклад, **методом інтерполяційного наближення** – задаючись рядом значень l_1 , близьких до $h/2$, і перевіряючи рівність лівої та правої частин рівняння). Максимальний кут тиску ν_{32max} при $e > 0$ буде в положенні, коли $\varphi_1 = 270^\circ$; якщо $e < 0$, то при $\varphi_1 = 90^\circ$.

Метод інтерполяційного наближення (метод інтерполяції) – найпростіший вид наближення функції, при якій значення заданої функції $y = F(x)$ і наближеної функції $y = P(x)$ на відрізку (x_0, x_m) збігаються в k точках, які називаються вузлами інтерполяції.

Якщо задані два положення кривошипа (Рис.2.6.б), які позначені координатами φ_1 та φ_2 , переміщення повзуна s_C (з урахуванням знаку: нарис.2.6, б $s_C < 0$) і відношення $\lambda_2 = l_2/l_1$ й $\lambda_e = e/l_1$, то довжини ланок l_2 і l_1 визначають таким чином.

Проектуємо векторне рівняння $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{e} + \vec{x}_{C12}$ навись y , маємо для будь-якого положення $l_1 \cdot \sin\phi + l_2 \cdot \sin\theta = e$, звідки кутова координата ланки 2 в положеннях 1 і 2:

$$\theta_{1,2} = \arcsin[(\lambda_e - \sin\phi_{1,2})/\lambda_2].$$

Проектуючи теж векторне рівняння на вісь x , маємо

$$s_C = x_{C2} - x_{C1} = (l_1 \cos \phi_2 + l_2 \cos \theta_2) - (l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \theta_1), \text{ звідки,}$$

після підставлення $l_2 = \lambda_2 l_1$, отримаємо

$$l_1 = s_C / [\cos \phi_2 - \cos \phi_1 + \lambda_2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)].$$

Потім за величиною λ_2 визначають l_2 .

Кривошипно – коромисловий механізм (Рис.2.8).

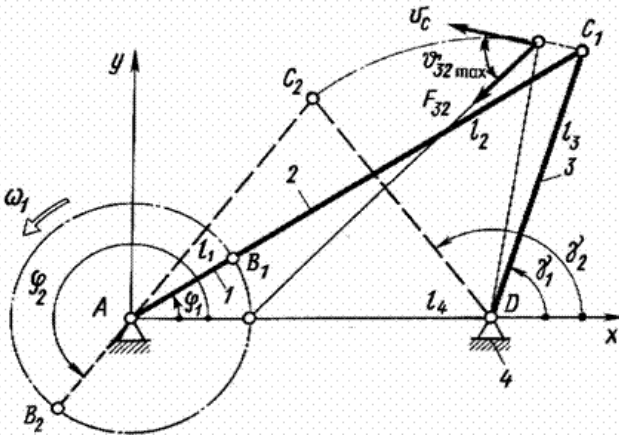


Рисунок 2.8

За заданою довжиною стійки l_4 , довжині веденої ланки – коромисла l_3 з її координатами γ_1 і γ_2 у крайніх положеннях невідомі довжини ланок l_1 і l_2 визначають так. З'єднуючи прямими лініями точки C_1 і C_2 з точкою A , маємо

$$\begin{aligned} l_{AC_1} &= l_1 + l_2; & l_{AC_2} &= l_2 - l_1, \\ \text{звідки} & & l_1 &= \frac{(l_{AC_1} - l_{AC_2})}{2}, & l_2 &= \frac{(l_{AC_1} + l_{AC_2})}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Максимальний кут тиску $\nu_{32\max}$ буде при $\phi = 90$ або 180° .

Механізм з коливальним циліндром (Рис.2.9).

У всіх інших положеннях кут тиску буде меншим, оскільки при переході точки B з положення B_1 в положення B_2 він змінює свій знак й проходить через нульове значення.

$$3 \quad \Delta AB_1 N h = 2l \sin(\beta/2).$$

3 $\Delta AB_1 C$ довжина стійки

$$l_4 = l_{AC} = \sqrt{l^2 + l^2 + 2l_1 l_3 \sin \beta / 2}.$$

При невеликих кутах β v_{\max} може бути в даній схемі значно меншим $v_{\text{доп}}$, і цей варіант кінематичної схеми можна поліпшити з точки зору габаритів механізму шляхом зменшення довжини стійки l_4 . **Оптимальну за габаритами** схему механізму за умовою $v_{\max} = v_{\text{доп}}$ отримуємо так (Рис.2.9,б). Хай задані l_1 , k , β , $v_{\text{доп}}$. Креслимо перший варіант схеми. Зміщуємо точку C у нове положення C_0 , для якого кут тиску в положенні 2 механізму збільшиться й досягне значення $v'' = v_{\text{доп}}$. При переміщенні точки C кут тиску в положенні 1 також змінюється: він спочатку зменшується, а потім може, пройшовши через нульове значення, змінити знак і знову збільшитись.

Хід поршня тепер буде $h = l_{B_2 D} < l_{B_1 B_2}$; його можна знайти, розв'язавши квадратне рівняння, що отримане з $\Delta C_0 B_1 B_2$ за теоремою косинусів:

$$(B_1 C_0)^2 = (B_1 B_2)^2 + (C_0 B_2)^2 - 2 \cdot B_1 B_2 \cdot C_0 B_2 \cdot \cos(v_{\text{доп}} - \beta/2),$$

де $B_1 C_0 = kh$, $B_1 B_2 = 2l_1 \sin(\beta/2)$, $C_0 B_2 = kh + h = (k+1)h$.

Розв'язок дає таку формулу

$$h = -b/2 + \sqrt{b^2/4 - c},$$

де $b = -4l_1(k+1)\sin(\beta/2)\cos(v_{\text{доп}} - \beta/2)/(2k+1)$;
 $c = [2l_1 \sin(\beta/2)]^2/(2k+1)$

Після цього визначають $l_3 = kh$ і довжину стійки з $\Delta AC_0 B_2$

$$l_4 = \sqrt{l^2 + (l_3 + h)^2 - 2l_1(l_3 + h)\sin \vartheta_{\text{доп}}}.$$

Цей варіант кінематичної схеми є дуже доцільним для випадку, коли треба долати велике навантаження на веденій ланці на початку руху, оскільки кут тиску $\nu' < \nu'' < \nu_{дон}$, в результаті чого збільшується момент рушійної сили F'_{12} відносно вісі А і зменшуються втрати на тертя в кінематичних парах.

Кінематичні пари слід підбирати так, щоб механізм був статично визначеним, або ж, якщо це важко, звести до мінімуму число надлишкових в'язей. В даному випадку механізм буде статично визначеним (без надлишкових в'язей), якщо пара А обертальна, пари В і С сферичні, пара поршень - циліндр циліндрична.

Тоді, враховуючи, що число степенів волі механізму $W = W_0 + W_M = 1 + 2 = 3$ (дві місцеві рухомості незалежні обертання поршня зі штоком й циліндра відносно власних осей), за формулою Малишева маємо $q = 0$.

2.4 Синтез чотири ланкових механізмів за трьома положеннями ланок

Шарнірний чотириланковик. Нехай задані (Рис.2.10,а) довжина стійки l_4 , кутові координати ланки 1 у трьох положеннях $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ відповідні кутові координати вихідної ланки $3\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Треба визначити довжини ланок l_1, l_2, l_3 .

Розглянемо векторний контур $ABCD$, для якого у будь-якому положенні механізму $l_1 + l_2 = l_4 + l_3$. Проектуючи цей контур на координатні осі x та y , маємо

$$l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\theta = l_4 + l_3 \cos\gamma; \quad (2.8)$$

$$l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\theta = l_3 \sin\gamma. \quad (2.9)$$

Виключимо кут θ , розв'язавши рівняння (2.8) і (2.9) відносно складових, що мають θ , підносячи отримані рівняння до другої степені і склавши їх:

$$l_2^2 = l_2^2 + l_1^2 + l_3^2 + 2l_3l_4\cos\gamma - 2l_1l_4\cos\varphi - 2l_1l_3\cos(\varphi - \gamma).$$

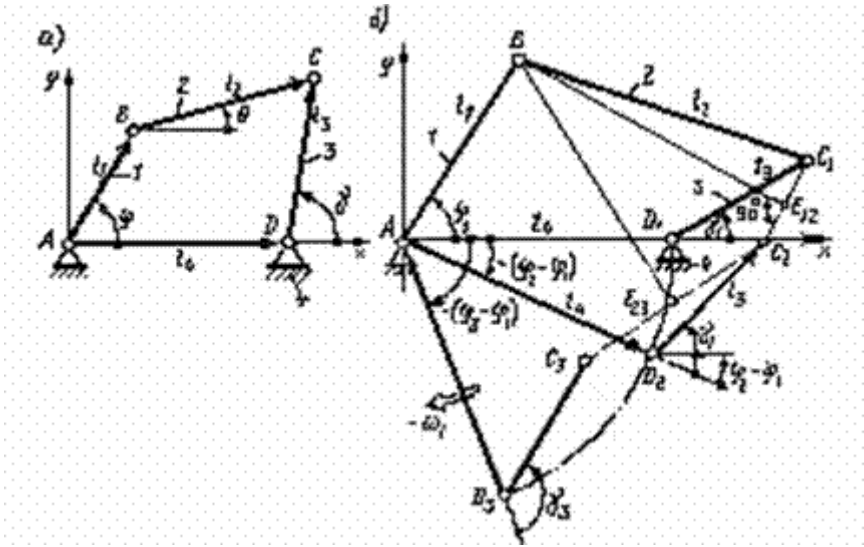


Рисунок 2.10

Після ділення на $2l_3l_4i$ заміни поточних значень кутів φ і γ на задані φ_i і γ_i (індекс $i = 2, 2, 3$) отримаємо систему трьох лінійних рівнянь

$$\frac{l_1}{l_4} \cos(\varphi_i - \gamma_i) + \frac{l_1}{l_3} \cos \varphi_i + \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} = \cos \gamma_i$$

або

$$p_1 \cos(\varphi_i - \gamma_i) + p_2 \cos \varphi_i + p_3 = \cos \gamma_i, (i=1, 2, 3). (2.10)$$

де невідомими є безрозмірні параметри

$$p_1 = \frac{l_1}{l_4}; \quad p_2 = \frac{l_1}{l_3}; \quad p_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} \quad (2.11)$$

З системи (2.10) визначаємо p_1, p_2, p_3 , а потім згідно (2.11) визначаємо довжини ланок за формулами

$$l_1 = p l_{14} ; \quad l_3 = \frac{l_1}{p_2} ; \quad l_2 = \sqrt{2l_{34}^2 + l_1^2 + l_3^2 + l_4^2}$$

Задачу синтезу шарнірного чотириланковика за трьома положеннями вихідної ланки і відповідними кутам повороту вхідної ланки розв'язують методом оберненого руху.

Метод оберненого руху – метод при якому усьому механізмові задаємо обертальний рух з кутовою швидкістю однієї з його ланок. Інші ланки механізму набувають при цьому інших кутових швидкостей, а деякі з них мають нульову кутову швидкість (зупиняються). Це і є метою метода. Використовується при синтезі:

- важільних механізмів при заданих трьох положеннях вихідної ланки;
- багатоланкових зубчатих (планетарних та диференціальних) механізмів;
- кулачкових механізмів, тощо.

В цьому випадку задані довжини ланок l_4 , l_3 , координати вихідної ланки 3 у трьох положеннях $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ й кути повороту вхідної ланки ($\varphi_2 - \varphi_1$) і ($\varphi_3 - \varphi_1$). Треба знайти довжини ланок l_1, l_2 і початкову кутову координату (в положенні 1) φ_1 .

Положення шарніра B за заданими умовами визначають шляхом надання всьому механізмові відносно центра A кутової швидкості ($-\omega_1$). В результаті ланка AB в системі координат Axy станене рухомою, а замість нього у протилежному напрямку буде обертатись стійка AD_1 (Рис.2.10,б). Для другого й третього положень механізму кутовими координатами стійки відносно осі абсцис будуть — ($\varphi_2 - \varphi_1$) та — ($\varphi_3 - \varphi_1$). Положення шарніра C є визначеним відносно стійки і знайдеться шляхом побудови кутів $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (точки C_1, C_2, C_3). Довжина шатуна BC для трьох заданих положень одна і та ж ($BC = BC_i, i=1, 2, 3$), тому точки C_i повинні знаходитись на колі, описаному з центра B . Таким чином, положення невідомої точки B визначиться, якщо точки C_i з'єднати двома прямими C_1C_2 і C_3C_2 , провести через їх середини E_{12}, E_{23} перпендикуляри й знайти точку пересічення останніх. При аналітичному розв'язку для отримання формул координат x_i, y_i точок C_i кінематичний ланцюг AD_iC_s представлений у вигляді суми двох векторів l_{4i} і l_3 . Координати точок C_s визначаються проекціями вказаного векторного ланцюга на координатні осі:

$$\begin{aligned}x_i &= l_4 \cos(\phi_i - \phi_1) + l_3 \cos[\gamma_i - (\phi_i - \phi_1)]; \\y_i &= -l_4 \sin(\phi_i - \phi_1) + l_3 \sin[\gamma_i - (\phi_i - \phi_1)].\end{aligned}$$

Координати точки B знайдемо з системи рівнянь кола, яке описане з центра B радіусом l_2 :

$$(x_i - x_B)^2 + (y_i - y_B)^2 = l_2^2; \quad i=1,2,3. \quad (2.12)$$

Система (2.12) трьох рівнянь з трьома невідомими x_B, y_B і l_2 після деяких перетворень для виключення x_B^2 і y_B^2 зводиться до лінійної.

По координатах x_B і y_B визначають шукані параметри кінематичної схеми механізму:

довжину вхідної ланки 1

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} \quad (2.13)$$

довжину шатуна BC

$$l_{BC} = l_2 = \sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2} \quad (2.14)$$

(як відстань між точками $B(x_B, y_B)$ і $C_1(x_1, y_1)$;

початкову кутову координату вхідної ланки

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{y_B}{x_B}\right). \quad (2.15)$$

Кривошипно-повзунний механізм. Проектування схеми даного механізму за трьома положеннями вхідної та вихідної ланок проводять в системі координат Axy (Рис.2.11) аналогічно синтезу механізму шарнірного чотириланковика.

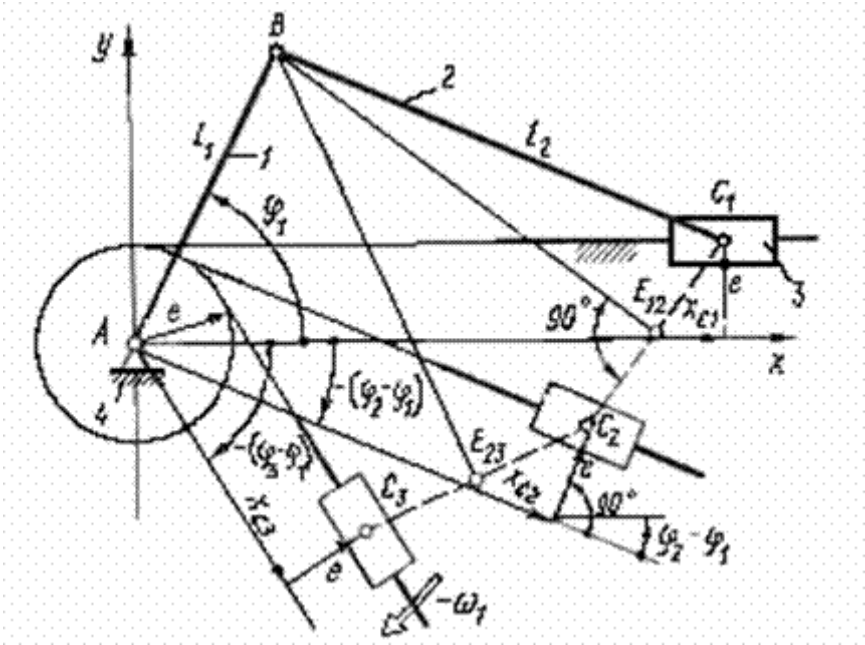


Рисунок 2.11

Задача зводиться до визначення невідомих довжин ланок l_1 і l_2 , а також початкової кутової координати φ_1 ланки 1 при заданих поза вісності (ексцентриситеті) e , трьох лінійних координатах точки C повзуна x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} і кутах повороту ланки 1 відносно його початкового (першого) положення $(\varphi_2 - \varphi_1)$ і $(\varphi_3 - \varphi_1)$.

Щоб визначити положення шарніра B за цими умовами, застосуємо **метод оберненого руху**, надаючи всьому механізмові відносно центра A кутову швидкість $(-\omega_1)$. В результаті ланка AB стане нерухомою, а замість неї у протилежному напрямку буде обертатись стійка і вісь направляючої повзуна. Якщо $e \neq 0$, то ця вісь у всіх положеннях є дотичною кола радіусом e .

Графічно центр шарніра B знаходять як точку пересічення перпендикулярів BE_{12} і BE_{23} до середин відрізків C_1C_2 і C_2C_3 .

При аналітичному розв'язку визначають координати x_i, y_i точок повзуна C_i (індекс $i=1,2,3$) з рівнянь проєкцій на координатні осі суми векторів $\bar{x}_{Ci} + \bar{e}$:

$$x_i = x_{Ci} \cos[-(\varphi_i - \varphi_1)] + e \cos[90^\circ - (\varphi_i - \varphi_1)];$$

$y_i = x_{Ci} \sin[-(\phi_i - \phi_1)] + e \sin[90^\circ - (\phi_i - \phi_1)]$, або
після перетворень

$$x_i = x_{Ci} \cos(\phi_i - \phi_1) + e \sin(\phi_i - \phi_1);$$

$$y_i = x_{Ci} \sin(\phi_i - \phi_1) + e \cos(\phi_i - \phi_1).$$

Подальший розв'язок аналогічний розв'язку чотириланкового механізму за формулами (2.12) - (2.15).

3. АНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА.

Аналітичний метод кінематичного дослідження ґрунтується на методі В.Я.Зінов'єва⁷, згідно якого механізм, складений із замкненого кінематичного ланцюга з нижчими кінематичними парами, зображається як замкнений векторний контур або система векторних контурів.

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = 0, \text{ або } L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2} + \dots + L_n \cdot e_{\rightarrow n} = 0, (3.1)$$

де $e_{\rightarrow i}$ – одиничні орти векторів $\vec{L}_{\rightarrow i}$, які також можна визначити через орти $i \rightarrow j \rightarrow$ прямокутної системи координат.

Кожен вектор має своїм початком і кінцем кінематичні пари, до яких надходить кожна ланка. Таким чином величина (розмір) ланки може бути як постійною так і змінною. Напрямок кожного вектора визначається кутом, відрахованим від додатного напрямку вісі x обраної системи координат до додатного напрямку вектора проти руху годинникової стрілки. **Умова замкненості контуру** записується:

$$e_{\rightarrow m} = i \rightarrow \cos \alpha_m + j \rightarrow \sin \alpha_m$$

Диференціюючи це рівняння по узагальненій координаті α_1 , маємо:

$$e_{\rightarrow m}' = \frac{de_{\rightarrow m}}{d\alpha_1} = -i \rightarrow \sin \alpha_m \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} + j \rightarrow \cos \alpha_m \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1},$$

або

$$e_{\vec{m}}' = (-i \rightarrow \sin \alpha_m \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} + j \rightarrow \cos \alpha_m \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1}) \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} \quad (3.2)$$

Вираз

$$\frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} = \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} \frac{dt}{dt} = \frac{\omega_m}{\omega_1}, \text{ або } \frac{ds_m}{d\alpha_1} = \frac{ds_m}{d\alpha_1} \frac{dt}{dt} = \frac{V_m}{\omega_1}$$

⁷Вяч.А.Зінов'єв (1899-1975) запропонував метод замкнутого векторного контуру – метод кінематичного аналізу, при якому положення кожної ланки визначається зв'язаним з ним вектором так, що послідовність цих векторів утворює один або декілька замкнутих векторів. Умова замкнутості векторних контурів для плоского механізму дає можливість визначити його кінематичні характеристики.

зветься **передаточною функцією** або аналогом кутової (лінійної) швидкості.

Передаточною функцією називається відношення кутової швидкості будь-якої ланки, лінійної швидкості будь-якої точки або її проекції на вісь координат, до швидкості ланки зведення (узагальненої швидкості).

Передаточні функції, які є відношенням кутових швидкостей, або лінійних швидкостей (якщо узагальнена координата лінійна) – **безрозмірні** і позначаються як U_{m1} або U_m , де m – номер ланки для якої визначається передаточна функція.

Передаточні функції, які є відношенням лінійних швидкостей до кутових, або навпаки (якщо узагальнена координата лінійна) – **розмірні** і позначаються як V_{m1} або V_m . Розмірність таких передаточних функцій – метр, або метр⁻¹.

Визначимо скалярний добуток одиничних векторів або їх похідних:

$$\begin{aligned} \vec{e}_m' \cdot \vec{e}_n &= \left(\begin{matrix} -i \rightarrow & m+J \rightarrow \\ \text{Sin} \alpha & \text{Cos} \alpha_n \end{matrix} \right) \cdot U_{m1} \cdot \left(\begin{matrix} i \rightarrow & m+J \rightarrow \\ \text{Cos} \alpha & \text{Sin} \alpha_n \end{matrix} \right) = \\ &= \text{Sin}(\alpha_m - \alpha_n) \cdot U_{m1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\rightarrow m} \cdot \vec{e}_{\rightarrow n} &= (i \rightarrow \text{Cos} \alpha_m + J \rightarrow \text{Sin} \alpha_n) \cdot (i \rightarrow \text{Cos} \alpha_m + J \rightarrow \text{Sin} \alpha_n) = \\ &= \text{Cos}(\alpha_m - \alpha_n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ці залежності використовуються для визначення передаточних функцій різних механізмів.

$$\begin{aligned} \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n &= \left(\begin{matrix} -i \rightarrow & \text{Sin} \alpha & J \rightarrow \\ \text{Cos} \alpha & & \end{matrix} \right) \cdot U_{m1} \cdot \\ &\cdot \left(\begin{matrix} i \rightarrow & \text{Sin} \alpha_n + J \rightarrow \\ \text{Cos} \alpha_n & \end{matrix} \right) \cdot U_{n1} = \\ &= \text{Cos}(\alpha_m - \alpha_n) \cdot U_{m1} \cdot U_{n1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Крім передаточних функцій є ще **функції положення**. Функції положення це відношення координати, що визначає положення будь-якої ланки або точки будь-якої ланки, до узагальненої координати. Це дуже важливі функції, тому що з них можна отримати також і передаточні функції.

Метою аналітичної кінематики є здобуття функцій положення і передаточних функцій.

3.1 Аналітична кінематика шарнірного чотириланковика

Шарнірний чотириланковик (Рис.3.1) є дуже поширеним механізмом. За цією схемою побудовані механізми пресів, конвеєрів, верстатів, тощо.

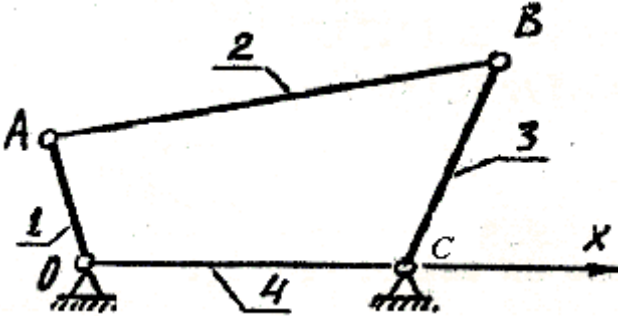


Рисунок 3.1

Перетворимо механізм чотириланковика на векторний чотирикутник (Рис.3.2). Координатну вісь x проведемо через нерухомі кінематичні пари O і O_1 . Позначимо на малюнку вектори. Початком і кінцем кожного вектора є кінематичні пари, якими ланка приєднується до інших ланок. Напрямки векторів треба показувати таким чином, щоб сума одних векторів дорівнювала сумі інших у замкнутому векторному багатокутнику.

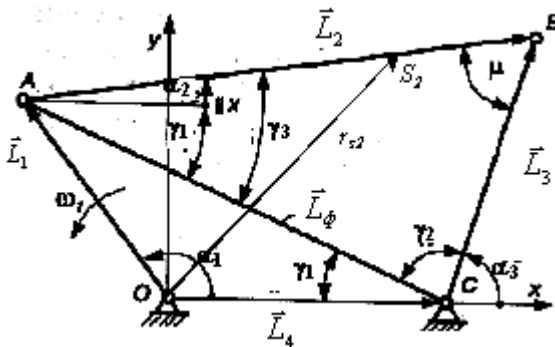


Рисунок 3.2

Положення кожного вектора визначається кутом α_i , який вимірюється від осі x до відповідного вектора проти руху годинникової стрілки.

Розіб'ємо чотири ланковий контур на два векторних трикутника додатковим фіктивним вектором $\vec{L}_\phi = \vec{CA}$. Крім кутів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уведемо додатково кути $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

За теоремою косинусів визначимо:

$$L_\phi = \sqrt{L_4^2 + L_1^2 - 2L_4L_1 \cos \alpha_1};$$

$$\gamma_i = \arccos\left(\frac{L^2 + L_\phi^2 - L_1^2}{2L_jL_\phi}\right)$$

де $i = 1, 2, 3; j = 5 - i$.

Тоді для значення кута $\pi > \alpha_1 > 0$: $\alpha_2 = \gamma_3 - \gamma_1$ і $\alpha_3 = \pi - \gamma_1 - \gamma_2$. Для значення кута $2\pi > \alpha_1 > \pi$: $\alpha_2 = \gamma_3 + \gamma_1$ і $\alpha_3 = \pi + \gamma_1 - \gamma_2$. Див. Рис. 3.3.

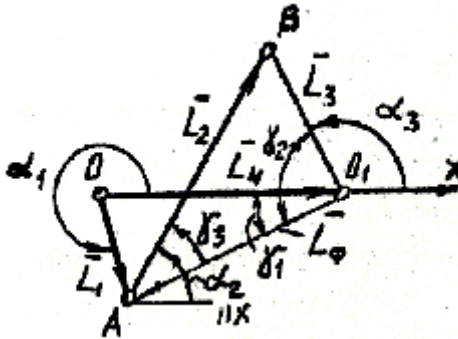


Рисунок 3.3

Таким чином ми бачимо, що треба уважно ставитись до визначення кутів α_2 і α_3 при різних значеннях кута α_1 , тобто при різних положеннях механізму.

Для визначення передаточних функцій використаємо залежності:

$$L_1 \cdot e^{-\gamma_1} + L_2 \cdot e^{-\gamma_2} = L_4 \cdot e^{-\gamma_4} + L_3 \cdot e^{-\gamma_3}, \quad (3.6)$$

Диференціюючи це рівняння по узагальненій координаті α_1 , маємо:

$$L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2} = L_3 \cdot e_{\rightarrow 3} \quad (3.7)$$

Помножимо це рівняння скалярно на вектор $-орте_{\rightarrow 3}$. Маємо:
 $L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} \cdot e_{\rightarrow 3} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2} \cdot e_{\rightarrow 3} = L_3 \cdot e_{\rightarrow 3} \cdot e_{\rightarrow 3} = 0$, тому $e_{\rightarrow 1} \cdot e_{\rightarrow 3} = 0$

(див.(1.3)).

Підставимо значення скалярних добутків.

$$L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot U_{11} + L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_3) \cdot U_{21} = 0. \quad \text{Тут } U_{11} = 1.$$

Тоді

$$U_{21} = - \frac{L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{L \sin(\alpha_{12} - \alpha_3)} \quad (3.8)$$

Помножимо рівняння (3.7) скалярно на вектор $-орте_{\rightarrow 2}$.
 $L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} \cdot e_{\rightarrow 2} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2} \cdot e_{\rightarrow 2} = L_3 \cdot e_{\rightarrow 3} \cdot e_{\rightarrow 2}$ або $L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} \cdot e_{\rightarrow 2} = L_3 \cdot e_{\rightarrow 3} \cdot e_{\rightarrow 2}$

Підставимо значення скалярних добутків.

$$L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = L_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot U_{31}$$

$$U_{31} = \frac{L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{L \sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \quad (3.9)$$

Для будь-якої точки, наприклад для точки S_2 , можна записати:

$$r_{\rightarrow S_2} = L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} + L_{AS_2} \cdot e_{\rightarrow 2}. \quad (3.10)$$

Проектуючи це рівняння на осі координат, визначимо положення для цієї точки:

$$X_{S_2} = L_1 \cdot \cos \alpha_1 + L_2 \cdot \cos \alpha_2, Y_{S_2} = L_1 \cdot \sin \alpha_1 + L_2 \cdot \sin \alpha_2$$

Диференціюємо рівняння (3.10) по узагальненій координаті α_i :

$$\frac{dr_{\rightarrow S_2}}{d\alpha_1} = \vec{V}_{qS_2} = L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} + L_{AS_2} \cdot e_{\rightarrow 2}$$

Передаточні функції для точки S_2 в проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} V_{qS_2x} &= -L_1 \cdot \sin \alpha_1 - L_{AS_2} \cdot \sin \alpha_2 \cdot U_{21}, \\ V_{qS_2y} &= L_1 \cdot \cos \alpha_1 + L_{AS_2} \cdot \cos \alpha_2 \cdot U_{21}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Повна передаточна функція:

$$V_{qs2} = \sqrt{V^2 \frac{qS2x}{qS2x} + V^2 \frac{qS2y}{qS2y}} \quad (3.12)$$

Аналогічно можна визначити передаточні функції для будь-якої іншої точки механізму.

3.2 Аналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму

Кривошипно-повзунний механізм показано на Рис.3.4.

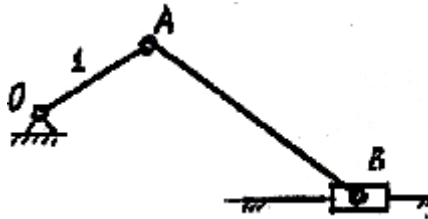


Рисунок 3.4

Перетворимо його на векторний багатокутник (Рис.3.5) і запишемо умову замкнутості контуру:

$$L_1 \cdot e^{-i\alpha_1} + L_2 \cdot e^{-i\alpha_2} + L_4 \cdot e^{-i\alpha_4} = L_3 \cdot e^{-i\alpha_3} \quad (3.13)$$

Тут треба зазначити, що у добутку $L_3 \cdot e^{-i\alpha_3}$ обидва параметри є змінними.

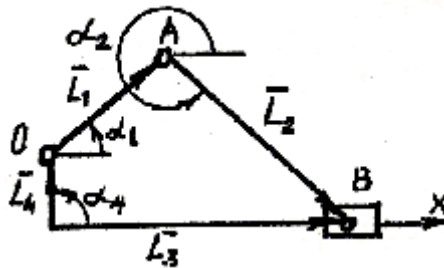


Рисунок 3.5

Для визначення функцій положення проектуємо рівняння (1.13) на осі прямокутної системи координат. Врахуємо так оже, що $\alpha_4 = \pi/2$ і $\alpha_3 = 0$. Тоді:

$$L_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1 + L_2 \cdot \text{Cos}\alpha_2 = L_3,$$

$$L_1 \cdot \text{Sin}\alpha_1 + L_2 \cdot \text{Sin}\alpha_2 + L_4 = 0$$

Звідси:

$$X_3 = L_3 \quad \text{і} \quad \alpha_2 = \text{arcSin}\left(-\frac{L_1 \cdot \text{Sin}\alpha_1 + L_4}{L_2}\right). \quad (3.14)$$

Диференціюємо рівняння (3.13) по узагальненій координаті α_1 :

$$L_1 \cdot e \rightarrow_1' + L_2 \cdot e \rightarrow_2' = L_3 \cdot e \rightarrow_3'. \quad (3.15)$$

Врахуємо рівняння (3.2) і запишемо рівняння (3.15) у проєкціях на осі координат:

$$L_3' = V_{q3x} = V_{q3} = -L_1 \cdot \text{Sin}\alpha_1 - L_2 \cdot \text{Sin}\alpha_2 \cdot U_{21} \quad (3.16)$$

$$L_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1 + L_2 \cdot \text{Cos}\alpha_2 \cdot U_{21} = 0.$$

$$U_{21} = -\frac{L_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1}{L_2 \cdot \text{Cos}\alpha_2}. \quad (3.17)$$

3.3 Аналітична кінематика кулісного механізму

Кулісний механізм має у своєму складі повзун (ланка 2), який знаходиться у складному русі – переносному разом з ланкою 3 і відносному по відношенню до тієї ж ланки (див. рис. 3.6). Одночасно, враховуючи її нульовий розмір, абсолютний рух повністю співпадає з рухом точки А ланки 1.

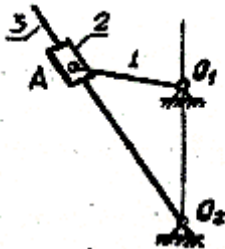


Рисунок 3.6

Перетворимо механізм на векторний трикутник (див. рис. 3.7) і запишемо умову замкненості контуру:

$$L_1 \cdot e_{\rightarrow 1} + L_4 \cdot e_{\rightarrow 4} = L_2 \cdot e_{\rightarrow 2}$$



Рисунок 3.7

Проектуємо це рівняння на осі координат:

$$L_4 + L_1 \cdot \cos \alpha_1 = L_2 \cdot \cos \alpha_2, L_1 \cdot \sin \alpha_1 = L_2 \cdot \sin \alpha_2.$$

З цих рівнянь визначаємо:

$$L_2 = \sqrt{L_1^2 + L_4^2 + 2L_1L_4 \cos \alpha_1},$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left(L_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{L_2} \right). \quad (3.18)$$

Диференціюємо рівняння замкненості контуру по узагальненій координаті α_1 . Маємо:

$$L_1 \cdot e_{\rightarrow 1}' = L_1' \cdot e_{\rightarrow 1} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2}' \quad (3.19)$$

Помножимо це рівняння скалярно на вектор –орт $e_{\rightarrow 3}$.

$$L_1 \cdot e_{\rightarrow 1}' \cdot e_{\rightarrow 3} = L_1' \cdot e_{\rightarrow 1} \cdot e_{\rightarrow 3} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2}' \cdot e_{\rightarrow 3} = L_2' \cdot V_{\varphi_2}$$

Помножимо рівняння (1.19) скалярно на вектор –орт $e_{\rightarrow 3}$.

$$L_1 \cdot e_{\rightarrow 1}' \cdot e_{\rightarrow 3} = L_1' \cdot e_{\rightarrow 1} \cdot e_{\rightarrow 3} + L_2 \cdot e_{\rightarrow 2}' \cdot e_{\rightarrow 3} = L_2' \cdot U_{31}$$

Звідси:

$$U_{31} = \frac{L_1 \cdot \cos \alpha_1}{L_2}.$$

4. ГРАФІЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ФУНКЦІЙ

План швидкостей це векторний багатокутник, в якому усі абсолютні швидкості виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними швидкостями.

План прискорень, це векторний багатокутник, в якому усі абсолютні прискорення виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними прискореннями (або їх складовими).

Нормальне прискорення це проекція повного прискорення точки на головну нормаль. Нормальне прискорення визначає зміну вектора швидкості за напрямком, тому воно завжди направлене до центра абсолютного або відносного обертання. Величина нормального прискорення визначається за формулою: $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{BA} = V^2 / l_{BA}$.

Тангенціальне прискорення це проекція повного прискорення на дотичну. Тангенціальне прискорення визначає зміну вектора швидкості за величиною. Тангенціальне прискорення направлене по дотичній до траєкторії руху точки. Величина тангенціального прискорення визначається за формулою: $a^t = \varepsilon_{BA} \cdot l_{BA}$

Масштабний коефіцієнт це відношення будь-якої фізичної величини, яку ми хочемо зобразити на кресленні, до величини відрізка у мм, яким ми зображаємо цю фізичну величину.

Теорема подібності: відрізки прямих ліній, що з'єднують точки однієї і тієї ж ланки на плані механізму і відрізки прямих ліній, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей або прискорень на планах швидкостей або прискорень, утворюють подібні та стосовно розташовані фігури.

Переносний рух це:

- рух твердого тіла, відносно якого рухається ще одне тіло не відриваючись від нього;
- рух, який здійснює рухома система з усіма незмінно зв'язаними з нею точками простору по відношенню до нерухомої системи.

Відносний рух це:

- рух твердого тіла по будь-якому іншому тілу не відриваючись від нього;

- рух, який здійснює точка, по відношенню до рухомої системи координат.

4.1 Механізм шарнірного чотириланковика

Побудуємо **план швидкостей** для механізму (Рис. 4.1) повернутий на 90^0 з масштабним коефіцієнтом $\mu_V = \omega_1$. Тоді $pa \cdot \mu_V = V_A = \omega_1 \cdot OA$ і $pa = OA$.

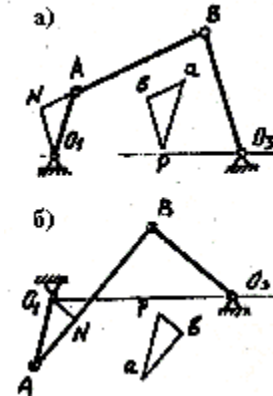


Рисунок 4.1

Поєднаємо план швидкостей з планом механізму. Передаточні функції:

$$U_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{ab \cdot \mu}{AB} \cdot \frac{O_1A}{pa \cdot \mu} = \frac{ab}{AB} = \pm \frac{AN}{AB}$$

$$U_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \cdot \frac{pb \cdot \mu_V}{O_3B} \cdot \frac{OA}{pa \cdot \mu_V} = \pm \frac{O_1N}{O_3B}$$

Знак “+” ставимо у разі збігу напрямків відрізків O_1N і O_3B , та коли відрізок AN є продовженням ланки AB .

4.2 Кривошипно-повзунний механізм

Для кривошипно-повзунного механізму будемо план швидкостей сумісний з планом механізму тільки повернутий на 90^0 (Рис. 4.2).

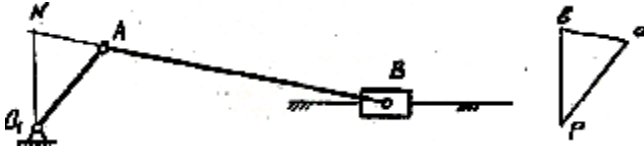


Рисунок 4.2

Передаточні функції

$$U_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{ab \cdot \mu}{AB} \cdot \frac{O_1A}{pa \cdot \mu} = \frac{ab}{AB} = \pm \frac{AN}{AB}$$

$$V_{q31} = \frac{pb \cdot \mu_v \cdot OA}{pa \cdot \mu_v} = pb = \pm O_1N$$

Яку прикладі 4.1, $\mu_v = \omega_1$. Правило знаків таке ж.

4.3 Кулісний механізм

Аналогічно попереднім прикладам будуємо повернутий на 90° план швидкостей (Рис.4.3), доповнюємо його до прямокутника (дивись пунктирними лініями).

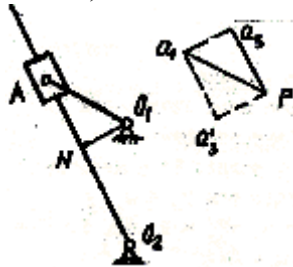


Рисунок 4.3

Масштабний коефіцієнт $\mu_v = \omega_1$. Тоді

$$pa \cdot \mu_v = V_A = \omega_1 \cdot OA_i \quad pa = OA$$

Накладаємо трикутник pa_3a' на план механізму і визначаємо передаточні функції:

$$U_{21} = U_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{pa_3 \cdot \mu_v}{\frac{OA}{2}} \cdot \frac{O_1A}{\frac{pa}{1} \cdot \mu_v} = \pm \frac{AN}{\frac{OA}{2}};$$

$$V_{q21} = \frac{pa'_3 \cdot \mu_V \cdot OA}{pa_1 \cdot \mu_V} = \pm O_1 N$$

Правило знаків таке ж, які у попередніх прикладах.

4.4 Формули переходу при визначенні передаточних функцій складних механізмів

На рисунку 4.4 показано механізм, який складається з двох простих механізмів – шарнірного чотириланковика і кривошипно-повзунного.



Рисунок 4.4

Для визначення передаточних функцій запишемо

$$U_{43} = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{\omega_4}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{U_{41}}{U_{31}}, \text{ або } U_{41} = U_{43} \cdot U_{31}$$

$$V_{q53} = \frac{V_5}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{V_5}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{V_{q51}}{U_{31}}, \quad V_{q51} = V_{q53} \cdot U_{31}$$

Таким чином ми бачимо, що передаточні функції складних механізмів дорівнюють добутку передаточних функцій простих механізмів. Це правило стосується не тільки стержневих механізмів, а і зубчатих і інших.

4.5 Визначення швидкостей і прискорень точок та ланок механізмів

Для обчислення усіх швидкостей і прискорень, як кутових так і лінійних, складемо матрицю передаточних функцій:

$$PF(I,J,K) = \begin{vmatrix} U_{11} & V_{qS1X} & V_{qS1Y} \\ U_{21} & V_{qS2X} & V_{qS2Y} \\ U_{31} & V_{qS3X} & V_{qS3Y} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} & V_{qSnX} & V_{qSnY} \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

Цю матрицю можна отримати прямим внесенням до неї передаточних функцій, або диференціюючи матрицю функцій положення:

$$FP(I,J,K) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & X_{S1} & Y_{S1} \\ \alpha_2 & X_{S2} & Y_{S2} \\ \alpha_3 & X_{S3} & Y_{S3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & X_{Sn} & Y_{Sn} \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Диференціювання можна проводити за формулою:

$$Z' = \frac{Z(\alpha_1 + \Delta\alpha) - Z(\alpha_1 - \Delta\alpha)}{2 \cdot \Delta\alpha}, \text{ де } Z = FP(I, J, K) \quad (4.3)$$

$$Z' = \frac{d[FP(I,J,K)]}{d\alpha_1} = PF(I,J,K) \quad (4.4)$$

Похідна передаточної функції, або друга похідна функції положення може бути розрахована за формулою:

$$Z'' = \frac{Z(\alpha_1 + \Delta\alpha) - 2 \cdot Z(\alpha_1) + Z(\alpha_1 - \Delta\alpha)}{\Delta\alpha^2} = PF1(I, J, K) \quad (4.5)$$

Для нормальної точності розрахунків значення $\Delta\alpha$ приймається рівним одному градусу, або $\pi/180$ рад.

Усі швидкості визначаються за формулою:

$$V(I,J,K) = PF(I,J,K) \cdot \omega_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & V_{S1X} & V_{S1Y} \\ \omega_2 & V_{S2X} & V_{S2Y} \\ \omega_3 & V_{S3X} & V_{S3Y} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_n & V_{SnX} & V_{SnY} \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Прискорення точок і ланок механізму визначаються формулою:

$$A(I,J,K) = PF1(I,J,K) \cdot \omega^2 + PF_{\underline{I}}(I,J,K) \cdot \varepsilon_1 \quad (4.7)$$

Матриця прискорень має вигляд:

$$A(I,J,K) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & a_{S1X} & a_{S1Y} \\ \varepsilon_2 & a_{S2X} & a_{S2Y} \\ \varepsilon_3 & a_{S3X} & a_{S3Y} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_n & a_{SnX} & a_{SnY} \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

5. ГРАФОАНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА СТЕРЖНЕВИХ МЕХАНІЗМІВ

Графоаналітичний метод базується на теоремах кінематики про швидкість та прискорення точок твердого тіла у плоскому або складному русі і на теоремі подібності.

З структурного аналізу знаємо, що механізми можуть бути другого або третього класів в залежності від того, які групи Ассура входять до його складу. Від цього залежать і методи вирішення задач кінематики. Тому будемо розглядати окремо кінематику механізмів другого і третього класів.

5.1 Графоаналітична кінематика механізмів другого класу

Графоаналітичний метод буде розглянуто на конкретних прикладах шарнірного чотириланкового, кривошипно-повзунного та кулісного механізмів.

5.1.1 Графоаналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму. Графоаналітичне дослідження проводиться для фіксованого положення механізму, визначеного кутом α_1 ведучої ланки Рис.5.1.

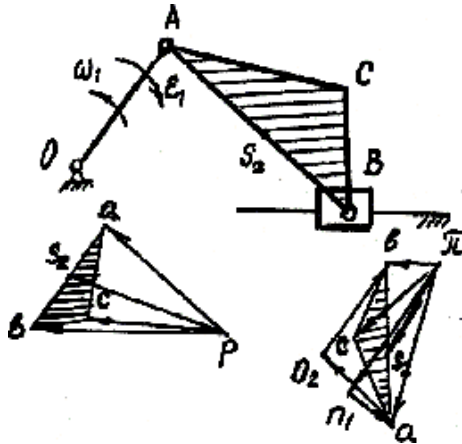


Рисунок 5.1

Вважаємо відомими розміри ланок, їх положення, кутові швидкість і прискорення ведучої ланки (узагальнені швидкість і прискорення).

Лінійна швидкість точки А визначається за формулою:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Вектор \vec{V}_A діє у напрямку кутової швидкості ω_1 перпендикулярно ланці ОА (дотично до траєкторії точки А).

Для визначення швидкості точки В запишемо векторне рівняння відповідно до теореми про складання швидкостей точок твердого тіла у його плоскому русі:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (5.1)$$

Вектор \vec{V}_B направлений вздовж напрямляючої руху повзуна 3, а вектор \vec{V}_{BA} - перпендикулярно ланці АВ. Величини цих векторів невідомі. Розв'яжемо рівняння (5.1) графічно. З довільно обраного полюса p проведемо промінь у напрямку вектора \vec{V}_A на якому відкладемо відрізок $pa = V_A/\mu_v$, де μ_v - **масштабний коефіцієнт побудови плану швидкостей**. З точки a проведемо лінію паралельну вектору \vec{V}_{BA} до пересічення з лінією, проведеною з точки p паралельно вектору \vec{V}_B . Точку пересічення позначаємо літерою v .

Для визначення швидкості точки С запишемо рівняння:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB} \quad (5.2)$$

З точки a плану швидкостей проводимо лінію перпендикулярну відрізку АС плану механізму (вектор $\vec{V}_{CA} \perp CA$) до пересічення з лінією, проведеною з точки v перпендикулярно до відрізка ВС (вектор $\vec{V}_{CB} \perp CB$). Точку пересічення позначимо літерою c і з'єднаємо її з полюсом p (дивись рис. 5.1).

Можна використати теорему подібності згідно якої:

$$\frac{ac}{av} = \frac{AC}{AB}; \quad \frac{vc}{av} = \frac{BC}{AB}$$

Звідси визначити відрізки ac і bc плану швидкостей і побудувати на ньому трикутник $\Delta acs \sim \Delta ABC$. Букви трикутника на плані механізму і на плані швидкостей повинні читатись в одній послідовності.

Лінійні швидкості визначимо за формулами:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_v, \quad V_B = pb \cdot \mu_v, V_C = pc \cdot \mu_v.$$

Кутова швидкість ланки 2: $\omega_2 = V_{BA} / l_{BA}$

Напрямок кутової швидкості визначається так: вектор \vec{V}_{BA} умовно переносимо у точку В ланки 2 плану механізму і дивимось куди він буде обертати ланку відносно точки А. Це і є напрямок кутової швидкості ланки 2.

Прискорення точки Аведучоїланки 1 визначимо за формулою:

$$a_{A \rightarrow A} = a_{A \rightarrow AO} = a_{A \rightarrow A}^n + a_{A \rightarrow A}^t, \quad (5.3)$$

де a_{AO}^n – **нормальне прискорення** точки А в обертальному русі навколо точки О, a_{AO}^t – **тангенціальне прискорення** точки А в обертальному русі навколо точки О.

Як відомо з теоретичної механіки, нормальне прискорення завжди направлене до центра обертання або до прийнятого полюса. Тому напрямок нормального прискорення завжди відомий. Тут вектор a_{AO}^n направлений від точки А до точки О. Тангенціальне прискорення направлене перпендикулярно нормальному у бік кутового прискорення.

Величина нормального прискорення визначається за формулою:

$$a_{AO}^n = \omega^2 \cdot l_{OA} = V^2 / l_{AO}.$$

Величина дотичного прискорення визначається за формулою:

$$a_{AO}^t = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}.$$

Рівняння (5.3) розв'язуємо графічно – побудовою **плану прискорень**. Для цього з точки π - полюса плану прискорень, проводимо промінь у напрямку вектора a_{AO}^n і на ньому відкладаємо відрізок $\pi n_1 = a^n / \mu_a$, де μ_a – **масштабний коефіцієнт** побудови

плану прискорень. З точки n_1 у напрямку вектора a_{A0}^t відкладаємо відрізок $n_1 a = \frac{a_{A0}^t}{\mu_a}$. Точку a з'єднуємо з полюсом π . Повне прискорення точки A на плані прискорень виражається відрізком πa :
 $a_{A0} = a_A = \pi a \cdot \mu_a$.

Прискорення точки B визначимо згідно з теоремою про складання прискорень точок твердого тіла у плоскому русі:

$$a_{\rightarrow B} = a_{\rightarrow A} + a_{\rightarrow n_1} + a_{\rightarrow \pi} \quad (5.4)$$

У цьому рівнянні невідомими є величини векторів $a_{\rightarrow B}$ і $a_{\rightarrow \pi}$. Розв'язуємо рівняння (5.4) графічно. З точки a у напрямку вектора $a_{\rightarrow n_1}$, тобто від точки B до точки A , проводимо промінь, на якому відкладаємо відрізок $a n_2 = a_{\rightarrow n_1} / \mu_a = \omega^2 \cdot l_{AB} / \mu_a$. З точки n_2 проведемо лінію перпендикулярну ланці AB ($a_{\rightarrow n_2} \perp AB$) до пересічення з лінією проведеною з полюса π паралельно напрямку руху повзуна 3 – вектора $a_{\rightarrow B}$. Точку пересічення позначимо літерою v і з'єднаємо її з полюсом.

З плану прискорень визначаємо:

$$a_{BA}^t = n_2 b \cdot \mu_a = \varepsilon_2 \cdot l_{AB}, a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Кутове прискорення ланки 2: $\varepsilon_2 = a^t / l_{AB}$

Для визначення напрямку кутового прискорення вектор a_{BA}^t плану прискорень умовно переносимо у точку B плану механізму і дивимось куди цей вектор обертає ланку AB відносно точки A . Це і буде напрямком кутового прискорення.

Прискорення точки C знайдемо за допомогою **теорема подібності**.

Теорема подібності: Відрізки прямих ліній, що з'єднують точки однієї і тієї ж ланки на плані механізму і відрізки прямих ліній, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей або прискорень на планах швидкостей або прискорень, утворюють подібні та стосовно розташовані фігури.

Таким чином. На відрізку av плану прискорень будуюмо трикутник Δavc подібний трикутнику ΔABC плану механізму. Точку c з'єднаємо з полюсом π .

$$a_c = \pi c \cdot \mu_a.$$

Аналогічно визначаються прискорення і інших точок, наприклад точки S_2 .

Виходячи з побудованих планів швидкостей та прискорень, визначимо, що ж таке план швидкостей і план прискорень.

План швидкостей, це векторний багатокутник, в якому усі абсолютні швидкості виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними швидкостями.

План прискорень, це векторний багатокутник, в якому усі абсолютні прискорення виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними прискореннями (або їх складовими).

5.1.2 Графоаналітична кінематика механізму шарнірного чотириланковика. Побудову плана швидкостей почнемо з визначення швидкості точки А ведучої ланки 1:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO}; \quad V_{AO} = \omega_1 \cdot l_{AO}.$$

Напрямок вектора \vec{V}_{AO} визначається перпендикуляром до ланки АО у бік кутової швидкості ω_1 (Рис. 5.2).

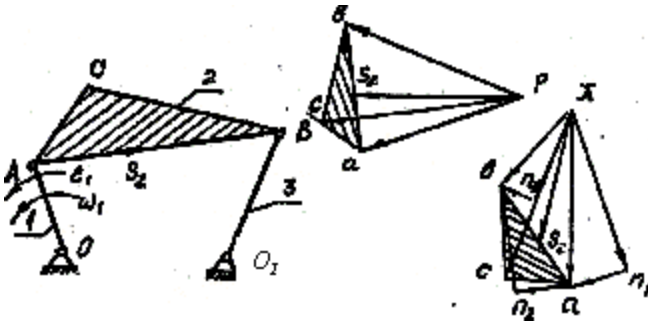


Рисунок 5.2

Для визначення швидкості точки В запишемо векторні рівняння

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{O1} + \vec{V}_{BO1}.$$

Враховуючи, що $\vec{V}_{O1} = 0$, можна записати:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_{BO1}.$$

З полюса побудови p проведемо відрізок pa у напрямку вектора \vec{V}_{AO} . З точки a проведемо лінію у напрямку вектора \vec{V}_{BA} (перпендикулярну ланці AB) до пересічення з лінією, проведеною з полюса p у напрямку вектора \vec{V}_{BO1} , в точці v . Швидкість точки C визначимо аналогічно попередньому прикладу. З плану швидкостей визначимо:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V, \quad V_B = pb \cdot \mu_V, \quad V_C = pc \cdot \mu_V.$$

Кутова швидкість ланки 2: $\omega_2 = V_{BA} / l_{BA}$.

Кутова швидкість ланки 2: $\omega_3 = V_{BO1} / l_{BO1}$.

Прискорення точки A ведучої ланки 1 визначимо за формулою:

$$a \rightarrow_A = a \rightarrow_{AO} = a \rightarrow^n + a \rightarrow^t, \quad (5.5)$$

де $a \rightarrow^n$ – нормальне прискорення точки A в обертальному русі навколо точки O , $a \rightarrow^t$ – тангенціальне прискорення точки A в обертальному русі навколо точки O . Визначення величин та напрямків цих векторів дивись попередній приклад.

Для визначення прискорення точки B запишемо векторне рівняння:

$$a \rightarrow_B = a \rightarrow_A + a \rightarrow^n_{BA} + a \rightarrow^t_{BA} = a \rightarrow^n_{BO1} + a \rightarrow^t_{BO1}.$$

Розв'яжемо це рівняння графічно. Для цього з точки π – полюса плану прискорень, проводимо промінь у напрямку вектора $a \rightarrow^n$ і на ньому відкладаємо відрізок $\pi n_1 = a \rightarrow^n / \mu_a$, де μ_a – масштабний коефіцієнт побудови плану прискорень. З точки n_1 у напрямку вектора $a \rightarrow^t_{AO}$ відкладаємо відрізок $n_1 a = a \rightarrow^t / \mu_a$. Точку a з'єднаємо з полюсом

π . Повне прискорення точки A на плані прискорень виражається відрізком πa : $a_{AO} = a_A = \pi a \cdot \mu_a$.

З точки a проведемо промінь у напрямку вектора $a \rightarrow^n_{BA}$ на якому відкладемо відрізок $a n_2 = a \rightarrow^n_{BA} / \mu_a$. З полюса π проведемо промінь у напрямку вектора $a \rightarrow^n_{BO1}$ на якому відкладемо відрізок $\pi n_2 = a \rightarrow^n_{BO1} / \mu_a$. З точки n_2 проведемо лінію у напрямку вектора $a \rightarrow^t_{BA}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_3 , у напрямку вектора $a \rightarrow^t_{BO1}$. Точку пересічення позначимо літерою v і з'єднаємо її з полюсом.

Визначення величин лінійних і кутових прискорень ланок і точок, а також прискорення точки C , дивись п. 5.1.1

5.1.3 Графоаналітична кінематика кулісного механізму. Швидкість точки А, як і у попередніх прикладах, визначимо, виходячи з того, що ланка 1 обертається з кутовою швидкістю ω_1 навколо нерухомої точки О: $V_A = V_{AO} = \omega_1 \cdot l_{AO}$.

Повзун 2 (Рис.5.3) здійснює складний рух, який ми можемо, розкласти на два прості рухи: **переносний** і **відносний**.

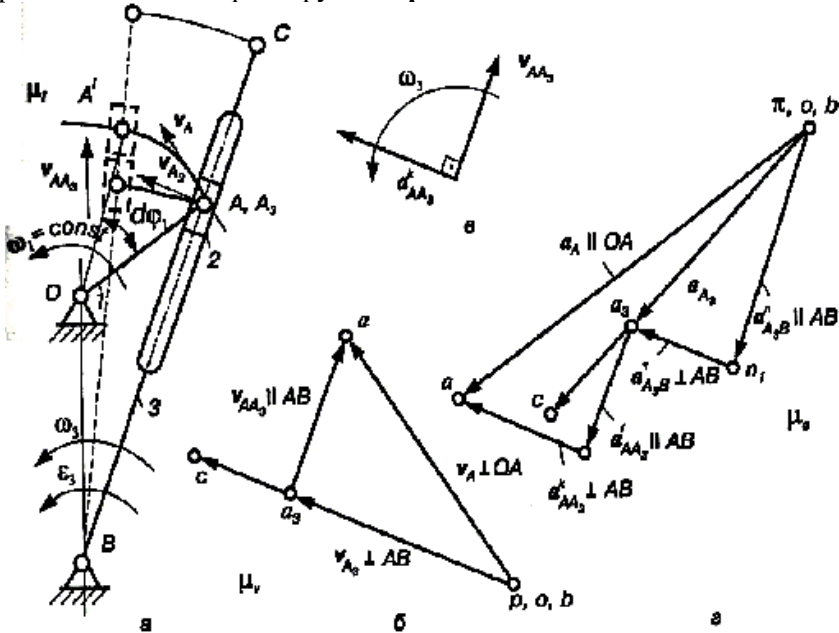


Рисунок 5.3

Переносний рух це рух повзуна 2 разом з точкою A_3 куліси 3 навколо нерухомої точки В. Відносний рух це рух повзуна 2 відносно куліси 3. Переносний рух у нашому прикладі це рух **обертальний**, а відносний – **поступальний**. Абсолютний рух точки 2 це рух разом з ланкою 1.

Швидкість точки A_1 і A_2 визначимо за формулою:

$$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_{A_1} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_{A_3B} + \vec{V}_{A_2-A_3}. \quad (5.6)$$

Це векторне рівняння вирішуємо графічно – побудовою плану швидкостей. Для цього з полюса p у напрямку вектора \vec{V}_{A_1} проведемо промінь на якому відкладемо відрізок $pa = V_{A_1}/\mu_v$. З точки a проведемо лінію паралельно вектору $\vec{V}_{A_2-A_3}$ (паралельно ланці 3) до пересічення з лінією, проведеною з полюса p паралельно вектору \vec{V}_{A_3B} (перпендикулярно ланці 3). Точку пересічення позначимо літерою a_3 . Напрямки векторів на плані швидкостей проставляємо згідно векторного рівняння (5.6). З плану швидкостей визначимо

$$V_{A_3B} = pa_3 \cdot \mu ; V_{A_2-A_3} = a_{1,2} a_3 \cdot \mu ; \omega_3 = \frac{V_{A_3B}}{l_{AB}} \quad \omega_2 = \omega_3.$$

Напрямок кутової швидкості ω_3 можна визначити, якщо вектор швидкості точки A_3 (Рис.5.3,а) прикласти у точці A_3 і розглянути обертання ланки 3 навколо точки B . У даному випадку ω_3 направлена проти руху годинникової стрілки.

Швидкість точки C , яка належить кулісі 3, можна визначити, скориставшись теоремою подібності, склавши пропорцію:

$$\frac{pc}{pa_3} = \frac{BC}{BA_3} \quad pc = pa_3 \cdot \frac{BC}{BA_3}$$

Тоді швидкість точки C : $V_c = pc \cdot \mu_v$.

З тієї ж точки A_1 почнемо визначення прискорень.

$$a_{A_1} = a_{A_1O} = a_{A_1O}^n + a_{A_1O}^t \quad (5.7)$$

В нашому прикладі, коли $\omega_1 = \text{Const}$, $a_{A_1O}^t = 0$;
 $a_{A_1} = a_{A_1O}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = V_{OA}^2 / l_{OA}$

Вибравши полюс плану прискорень π (Рис.5.3,з), відкладаємо від нього відрізок pa , який відповідає прискоренню точки A_1 з масштабним коефіцієнтом μ_a . Прискорення точки A_1 спрямоване по лінії OA від точки A до точки O .

Для визначення прискорення точки A_2 повзуна 2 використаємо **теорему Коріоліса**⁸, Згідно з якою, якщо переносний рух тіла обертальний, то абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і коріолісового (поворотного).

$$a \rightarrow_{A_2} = a \rightarrow_{A_1} = a \rightarrow_e + a \rightarrow_r + a \rightarrow_c = a \rightarrow_{A_3B} + a \rightarrow_{A_3B}^t + a \rightarrow_{A_2-A_3} + a \rightarrow_c \quad (5.6)$$

Теорема Коріоліса: абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, яке характеризує зміну відносної швидкості точки у відносному русі, переносного, яке характеризує зміну переносної швидкості точки у переносному русі, і коріолісового, яке характеризує зміну відносної швидкості у переносному русі і переносній швидкості точки у відносному русі.

Визначення нормального прискорення (дивись попередні приклади).

Прискорення Коріоліса: $a \rightarrow_c = 2 \cdot \vec{\omega} \rightarrow_e \times \vec{V} \rightarrow_r$.

Величина цього прискорення

$$a_c = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A_2-A_3} \cdot \text{Sin}(\vec{\omega} \rightarrow_3, \vec{V} \rightarrow_{A_2-A_3}).$$

Враховуючи, що $\vec{\omega} \rightarrow_3 \perp \vec{V} \rightarrow_{A_2-A_3}$, напрямком вектора прискорення Коріоліса визначаємо за **правилом Жуковського**: вектор $\vec{V} \rightarrow_{A_2-A_3}$ повертаємо на 90° у бік ω_3 , це і буде напрямком прискорення Коріоліса (Рис.5.3, в).

Правило Жуковського⁹: модуль прискорення Коріоліса дорівнює подвійному добутку кутової швидкості переносного обертання на модуль проєкції відносної швидкості на площину, що перпендикулярна осі переносного обертання; щоб отримати напрямок прискорення

⁸Г. Коріоліс (G.Coriolis) – французький математик і механік (1792-1843). Вперше вивів аналітичну залежність між прискореннями точки в рухомій і нерухомій системах координат.

⁹М.С.Жуковський(1847-1921) вніс значний вклад у динаміку машин. Він був автором цілого ряду робіт з прикладної механіки й теорії регулювання ходу машин. Характерною рисою у творчості М.С.Жуковського було застосування методів механіки до розв'язку актуальних технічних питань. Великий вплив ідеї М.С.Жуковського зробили і на викладання теоретичної механіки у вищих технічних закладах.

Коріоліса, треба вектор проєкції відносної швидкості \vec{V}_{A2-A3}^r (\vec{V}_r) повернути на 90° навколо вісі, паралельній вісі переносного обертання у напрямку цього обертання.

З полюса π у напрямку вектора a_{A10}^r проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок $\pi a = a^n / \mu_a$. З точки π у напрямку вектора $a \rightarrow^n$ $A3B$ проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок $\pi n_1 = a^n / \mu_{A3B}$. З точки a у напрямку протилежному напрямку прискорення $a \rightarrow c$ проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок $ak = a_c / \mu_a$. З точки n_1 проведемо лінію паралельну вектору a_{A3B}^t до пересічення з лінією, проведеною з точки k паралельно вектору $a \rightarrow A2-A3$, тобто вздовж ланки 3. Точку пересічення позначимо літерою a_3 , яку з'єднаємо з полюсом π . З плану прискорень визначимо:

$$a_{A3B}^t = n_1 a_3 \cdot \mu_a; \quad a_{A2-A3} = a_3 k \cdot \mu_a; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = a^t / l_{A3B}.$$

Щоб встановити напрямок кутового прискорення ланки 3, вектор a_{A3B}^t перенесемо у точку A_3 і будемо спостерігати обертання ланки 3 навколо точки B . У даному випадку кутове прискорення ε_3 буде направлене проти руху годинникової стрілки. Тобто ланка 3 буде рухатись з прискоренням.

5.2 Графоаналітична кінематика механізму III класу

Для вирішення цієї задачі застосуємо метод особливих точок, або **точок Ассура**.

Точки Ассура це точки пересічення ліній, проведених через кінематичні пари **поводків**, якщо повідки уявляють собою повзуни.

Повідки це ланки, за допомогою яких група приєднується до інших груп або стійок.

Розглянемо кінематику однієї групи Ассура III класу 3-го порядку. Якщо ми визначимось з однією групою, то впораємось і з цілим механізмом.

Хай будуть задані швидкості і прискорення точок B , C і D за величинами і напрямками. Треба визначити швидкості і прискорення усіх ланок та точок групи.

Точки Ассура це точки пересічення ліній, проведених через кінематичні пари **поводків**, або перпендикулярів до них, якщо повідки уявляють собою повзуни.

Для групи Ассура третього порядку таких точок буде три. З цих трьох точок S_1, S_2, S_3 вибираємо для розгляду тільки одну, наприклад S_1 . Вважаємо її незмінно приналежною ланці 7 (див. рис.5.4).

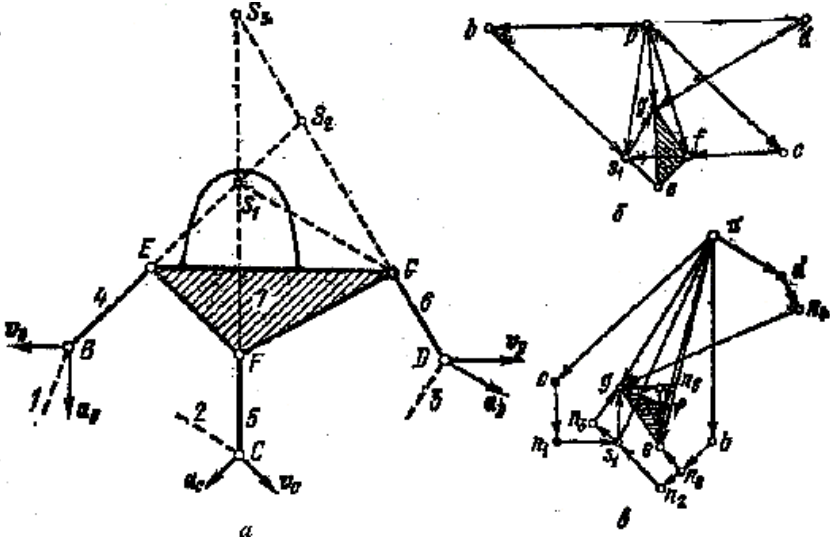


Рисунок 5.4

Визначимо швидкість точок E, F і G, а також точки S_1 .

$$\vec{V}_E = \vec{V}_B + \vec{V}_{EB}, \quad (5.7)$$

$$\vec{V}_F = \vec{V}_C + \vec{V}_{CF}, \quad (5.8)$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_D + \vec{V}_{GD}, \quad (5.9)$$

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_E + \vec{V}_{S_1E} = \vec{V}_F + \vec{V}_{S_1F}, \quad (5.10)$$

В рівняння (5.10) підкладемо значення швидкостей з рівнянь (5.7) і (5.8). Маємо

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_B + \vec{V}_{EB} + \vec{V}_{S_1E} = \vec{V}_C + \vec{V}_{CF} + \vec{V}_{S_1F}, \quad (5.11)$$

В цьому рівнянні вектори \vec{V}_{EB} і \vec{V}_{S_1E} паралельні, тому що обидва перпендикулярні до лінії S_1EB . Так саме і вектори \vec{V}_{FC} і \vec{V}_{S_1F} перпендикулярні до лінії S_1FC . Ці вектори умовно об'єднаємо у вигляді векторів:

$$\vec{V}_{S_1B} = \vec{V}_{EB} + \vec{V}_{S_1E} \quad i \quad \vec{V}_{S_1C} = \vec{V}_{FC} + \vec{V}_{S_1F}$$

Тоді рівняння (5.11) буде мати вигляд:

$$\vec{V}_{S_1} = \vec{V}_B + \vec{V}_{S_1B} = \vec{V}_C + \vec{V}_{S_1C}, \quad (5.12)$$

Рівняння (5.12) вирішуємо графічно, тобто будуємо план швидкостей. З точки p з масштабним коефіцієнтом μ_V відкладаємо швидкості точок B , C і D у вигляді відрізків pb , pc і pd . З точки b проведемо лінію паралельну вектору \vec{V}_{S_1B} до пересічення з лінією, проведеною з точки c паралельно вектору \vec{V}_{S_1C} . Точку пересічення позначимо літерою S_1 .

Тепер запишемо векторні рівняння для визначення швидкості точки G , приймаючи за полюси точки S_1 і D (див.(5.9)).

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{S_1} + \vec{V}_{GS_1} = \vec{V}_D + \vec{V}_{GD}, \quad (5.13)$$

З точки s_1 проведемо лінію перпендикулярну до S_1G до пересічення з лінією, проведеною з точки d перпендикулярно до CD . Точку пересічення позначимо літерою g . З'єднаємо її з полюсом p .

Використовуючи рівняння (5.8), запишемо рівняння для визначення швидкості точки F :

$$\vec{V}_F = \vec{V}_C + \vec{V}_{FC} = \vec{V}_G + \vec{V}_{FG} \quad (5.14)$$

З точки c проведемо лінію перпендикулярну до PC до пересічення з лінією, проведеною з точки g перпендикулярно до PG . Точку пересічення позначимо літерою f . З'єднаємо її з полюсом p . Положення точки e на плані швидкостей можна визначити вирішуючи рівняння $\vec{V}_{\rightarrow E} = \vec{V}_{\rightarrow F} + \vec{V}_{\rightarrow EF} = \vec{V}_{\rightarrow G} + \vec{V}_{\rightarrow EG}$, або використовуючи теорему подібності. В разі останнього на відріжку gf будуємо трикутник gfe

подібний трикутнику GFE плану механізму і стосовно відносно нього розташований. Точку e з'єднаємо з полюсом p .

Примітка: точка e повинна лежати на лінії bs_1 .

Розглянемо тепер задачу побудови плану прискорень. Почнемо з визначення прискорень точок E, F і G :

$$a \rightarrow_E = a \rightarrow_B + a \rightarrow^n + a \rightarrow^t \quad EB \quad (5.15)$$

$$a \rightarrow_F = a \rightarrow_C + a \rightarrow^n + a \rightarrow^t \quad FC \quad (5.16)$$

$$a \rightarrow_G = a \rightarrow_D + a \rightarrow^n + a \rightarrow^t \quad GD \quad (5.17)$$

Для точки S_1 , вибираючи за полюси точки E і F , а також враховуючи рівняння (5.15) і (5.16), можемо записати:

$$a \rightarrow_{S_1} = a \rightarrow_E + a \rightarrow^n_{S_1E} + a \rightarrow^t_{S_1E} = a \rightarrow_B + a \rightarrow^n + a \rightarrow^n_{S_1E} + a \rightarrow^t_{S_1E} + a \rightarrow^t_{EB} + a \rightarrow^t_{S_1E} = a \rightarrow_B + a \rightarrow^n_{S_1B} + a \rightarrow^t_{S_1B}, \quad (5.18)$$

$$\text{де } a \rightarrow^n_{S_1B} = \overrightarrow{a \rightarrow_{EB} + a \rightarrow^n_{S_1E}}; \quad \text{і} \quad a \rightarrow^t_{S_1E} = \overrightarrow{a \rightarrow^t_{EB} + a \rightarrow^t_{S_1E}}.$$

Напрямки векторів $a \rightarrow^n_{EB}$ і $a \rightarrow^n_{S_1E}$ співпадають з лінією векторів $a \rightarrow^t_{EB}$ і $a \rightarrow^t_{S_1E}$ перпендикулярні до лінії EB і S_1E , які є подовженням одна одної.

Аналогічно запишемо рівняння для визначення прискорення точки S_1 , приймаючи за полюс точку F :

$$a \rightarrow_{S_1} = a \rightarrow_F + a \rightarrow^n_{S_1F} + a \rightarrow^t_{S_1F} = a \rightarrow_C + a \rightarrow^n + a \rightarrow^n_{S_1F} + a \rightarrow^t_{S_1F} + a \rightarrow^t_{FC} + a \rightarrow^t_{S_1F} = a \rightarrow_C + a \rightarrow^n_{S_1C} + a \rightarrow^t_{S_1C}, \quad (5.19)$$

$$\text{де} \quad a \rightarrow^n_{S_1C} = \overrightarrow{a \rightarrow^n_{EC} + a \rightarrow^n_{S_1F}}; \quad \text{і} \quad a \rightarrow^t_{S_1C} = \overrightarrow{a \rightarrow^t_{EC} + a \rightarrow^t_{S_1F}}.$$

Об'єднаємо рівняння (5.19) і (5.18).

$$a \rightarrow_{S_1} = a \rightarrow_B + a \rightarrow^n_{S_1B} + a \rightarrow^t_{S_1B} = a \rightarrow_C + a \rightarrow^n_{S_1C} + a \rightarrow^t_{S_1C} \quad (5.20)$$

Розв'язуємо це рівняння графічно – побудовою плану прискорень.

З полюса p у напрямках векторів $a \rightarrow_B, a \rightarrow_C$ і $a \rightarrow_D$ відкладемо відрізки pb, pc і pd з масштабним коефіцієнтом побудови μ_a . З точки b

у напрямку вектора $a \rightarrow_{EB}^n$ відкладемо відрізок bn_6 на подовженні якого у напрямку вектора $a \rightarrow_{S1F}^n$ відкладаємо відрізок n_6n_2 . З точки c у напрямку вектора $a \rightarrow_{FC}^1 + a \rightarrow_{S1F}^n$ відкладемо відрізок cn_1 . З точки n_2 проводимо лінію паралельно вектору $a \rightarrow_{S1B}^t$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_1 , паралельно вектору $a \rightarrow_{S1C}^t$ до взаємного пересічення в точці s_1 .

Для визначення прискорення точки G , враховуючи рівняння (5.17), запишемо векторне рівняння:

$$a \rightarrow_c = a \rightarrow_{s1} + a \rightarrow^n + a \rightarrow_{CS1}^t = a \rightarrow_G + a \rightarrow^n + a \rightarrow_{GD}^t \quad (5.21)$$

З точки d у напрямку вектора $a \rightarrow_{GD}^n$ відкладемо відрізок dn_4 , а з точки s_1 у напрямку вектора $a \rightarrow_{S1}^n$ відкладемо відрізок s_1n_3 . З точки n_4 проводимо лінію паралельно вектору $a \rightarrow_{GD}^t$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_3 паралельно вектору $a \rightarrow_{S1G}^t$. Точку пересічення позначимо літерою g . З'єднаємо її з полюсом π .

Приймаючи точку G за полюс, запишемо векторне рівняння для прискорення точки E :

$$a \rightarrow_E = a \rightarrow_B + a \rightarrow^n + a \rightarrow_{EB}^t = a \rightarrow_G + a \rightarrow^n + a \rightarrow_{EG}^t \quad (5.22)$$

З точки g у напрямку вектора $a \rightarrow_{EG}^n$ відкладемо відрізок gn_5 . З точки n_5 проведемо лінію паралельно вектору $a \rightarrow_{EG}^t$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_6 , паралельно вектору $a \rightarrow_{EB}^t$ до взаємного пересічення в точці e . З'єднаємо її з полюсом π .

Для визначення прискорення точки F запишемо і графічно розв'яжемо рівняння $a \rightarrow_F = a \rightarrow_G + a \rightarrow^n + a \rightarrow_{FG}^t = a \rightarrow_E + a \rightarrow^n + a \rightarrow_{FE}^t$, або використовуємо **теорему подібності**.

Графічний метод кінематичного дослідження механізму

Графічний метод є одним з найбільш поширених методів при дослідженні кінематики точки за **цикл**, тобто за час повного виконання технологічного процесу на даному обладнанні. В більшості випадків циклом є час одного повного оберту кривошипа. Цей метод має таку перевагу як наочність, але він все ж таки не абсолютно точний.

Цикл це час повного виконання технологічного процесу на даному обладнанні. Якщо на даному обладнанні технологічний процес буде виконуватись за один оберт кривошипа, наприклад для преса, то цикл це час одного оберту кривошипа, якщо за два, наприклад для двигуна внутрішнього згоряння, то це час двох обертів кривошипа.

Для дослідження кінематики точки треба викреслити механізму у декількох (краще якомога більшої кількості) положеннях кривошипа (Рис.5.5).

Креслення робиться при рівній зміні кута повороту кривошипа. Можна користуватися аналітичними розрахунками положення вихідної ланки (дивись функції положення з розділу аналітичної кінематики). На підставі креслення або розрахунків креслимо діаграму переміщень вихідної точки механізму (Рис.5.6).

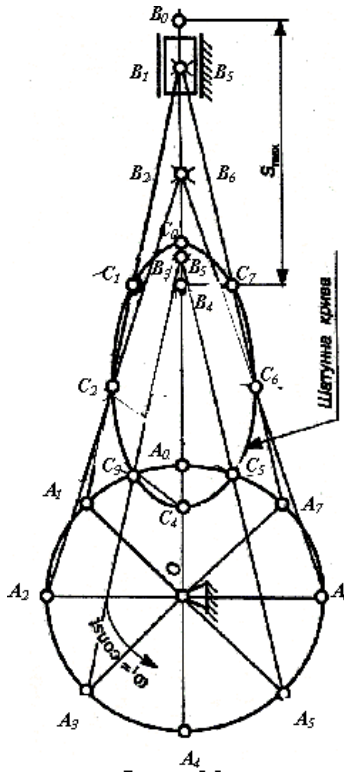


Рисунок 5.5

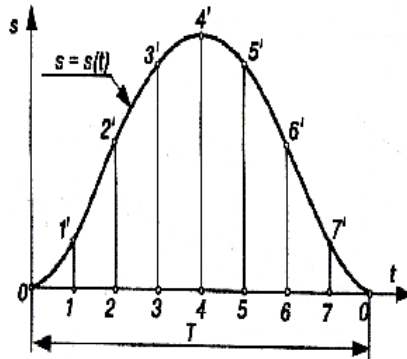


Рисунок 5.6

Положення механізму при якому вихідна ланка займає крайнє положення (наприклад, положення початку робочого ходу) називається крайнім положенням.

Початком підрахунку переміщень приймається саме положення початку робочого ходу. На рис.5.5 показана схема двигуна внутрішнього згоряння, тому початком робочого ходу прийнята верхня мертва точка B_0 . Усі переміщення повзуна з відраховуються від цього положення.

Якщо кривошип робить n обертів на хвилину (об/хв), то час одного оберту $T = 60/n$, сек.

Масштабний коефіцієнт діаграми переміщень по осі t

$$\mu_t = T/L = 60/nL \text{ (сек./мм)},$$

де L – відрізок по осі t , пропорційний часу T .

Масштабний коефіцієнт переміщень

$$\mu_s = H/S_{max} \text{ (м/мм)},$$

де H – повний хід вихідної ланки, виміряний в метрах,

S_{max} – максимальна величина переміщення на кресленні в міліметрах.

Для визначення швидкості точки графічно диференціюємо діаграму $[S, t]$ (Рис.5.7).

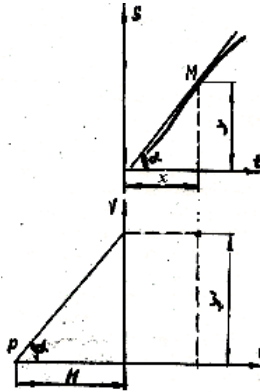


Рисунок 5.7

Проведемо дотичну в будь-якій точці діаграми $[S, t]$, наприклад в точці $M(t, y)$. Кут нахилу її позначимо літерою α . На новій системі координат (на рис.5.7 це нижня система координат) з полюса p проведемо промінь під тим же кутом α до пересічення з віссю ординат. Точку пересічення знесемо на вертикаль з координатою t положення точки M .

Візьмемо похідні від виразів $S_i = y \cdot \mu_s$ $t_i = x \cdot \mu_t$.

Маємо: $dS = dy \cdot \mu_s$ $dt = dx \cdot \mu_t$.

Відношення цих похідних

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dy \cdot \mu_s}{dx \cdot \mu_t}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dS \cdot \mu_t}{dt \cdot \mu_s} = \frac{y'}{H} = V_i \cdot \mu_t \cdot \frac{\mu_s}{S}$$

Звідки

$$y' \cdot \mu_t = V_i \quad (5.23)$$

де $\mu = \frac{\mu_s}{H \cdot \mu_t}$ - масштабний коефіцієнт побудови діаграмі швидкості точки. Тут H - полюсна відстань, мм.

Графічне диференціювання методом дотичних має недоліки, які полягають у неточності графічних побудов з-за неможливості точного проведення дотичної до кривої у даній точці. Тому на практиці використовують **метод хорд**, який базується на тому, що хорда, яка стягує кінці дуги, паралельна дотичній до цієї дуги у середині розглядуваного інтервалу, якщо величина інтервалу наближається до нуля.

Для використання метода хорд відрізків L на осі t поділяємо на якомога більшу кількість рівних інтервалів (на рис.5.8 ця кількість рівна 8, як і кут повороту кривошипа на рис. 5.5). Кінці дуг на інтервалах $0-1$, $1-2$ і т.д. проводимо дуги $0-1'$, $1'-2'$ і т.д (Рис.5.8, а), а на діаграмі

$V = V(t)$ (Рис.5.8, б) із точки P_1 — промені P_11'' , P_12'' і т.д, які паралельні відповідним хордам, до перетину з віссю ординат V . Відрізки $0-1''$, $0-2''$, $0-3''$ і т.д з масштабним коефіцієнтом μ_V , отриманого за формулою (5.23), визначають значення швидкостей посередині відповідних інтервалів часу.

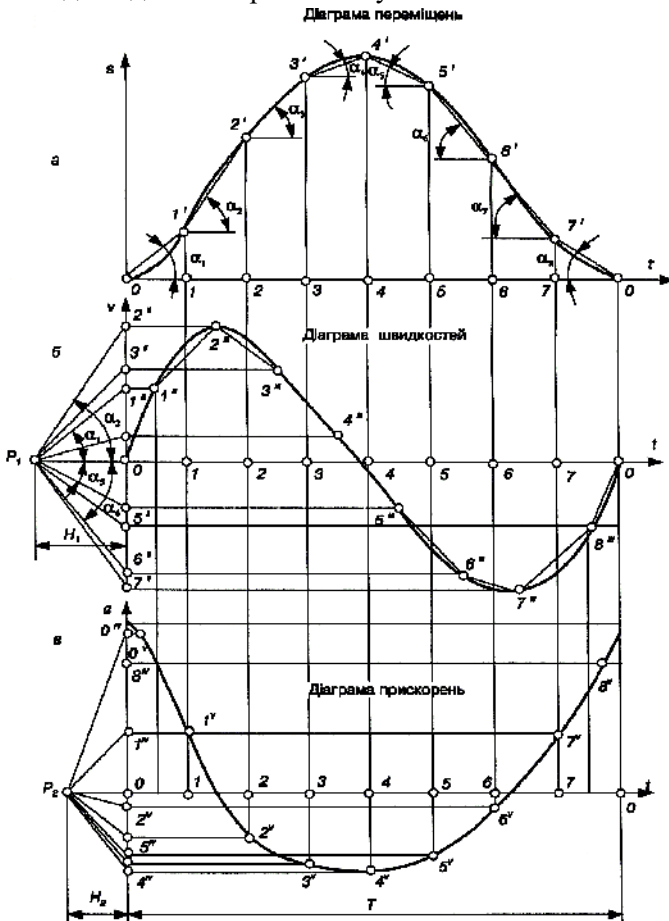


Рисунок 5.8

Для спрощення побудови діаграм відрізки $0 - 1''$, $0 - 2''$, $0 - 3''$... відкладають посередині відповідних інтервалів часу. Точки $0, 1''$, $2''$, $3''$... з'єднують плавною кривою і одержують з певною точністю діаграму швидкостей $V = V(t)$.

Чим менший інтервал часу розглядається, тобто чим більше проведено хорд, тим більше наближаються до заданої кривої. Особливу увагу треба звернути на ділянку, де крива, яку диференціюють, має екстремум. У цьому місці криву треба розділити на менші ділянки (проміжки часу).

Аналогічно методом хорд будують діаграму прискорень $a = a(t)$ (Рис.5.8,в). Порівнюючи побудовані графіки переміщень, швидкостей і прискорень, між ними можна встановити такі залежності:

- зростанню ординат кривої, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню – від'ємні значення;

- при максимумі кривої, що диференціюється, диференціальна крива переходить через нуль від додатних значень ординат до від'ємних, а при мінімумі – від від'ємних значень ординат до додатних;

- точці перетину кривої, що диференціюється, відповідає максимум або мінімум на диференціальній кривій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу “Теорія механізмів і машин” для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі М.А. Ткачук, В.Б. Зеленський, З.С. Сафонова, А.О. Зарубіна, Г.А. Кротенко, О.І. Зінченко, Г.Д. Гриценко. - НТУ “ХПІ”, 2007. – 64 с.
2. Теорія механізмів і машин. Методичні вказівки до виконання розділу курсового проекту „Синтез кулачкових механізмів” для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад. М. А. Ткачук, О. І. Зінченко, Г. А. Кротенко та інш. – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – 24 с.
3. Грунауер О.А., Долгіх І.Д. Теорія механізмів і машин (системний підхід), НМК ВО, Київ, 1992. - 376 с.
4. Курсове проектування з теорії механізмів і машин: учбовий посібник. Є.І. Крижанівський, Б.Д. Малько, В.М. Сенчішак та ін. - Івано-Франківськ: 1996. - 357 с.
5. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К.: Наукова думка, 2002. – 660 с.
6. Кореняко О.С. Теорія механізмів і машин. – К.: Вища школа, 1987. – 206 с.
7. Кіницький Я.Т. Практикум з теорії механізмів і машин. Навчальний посібник. – Львів: Афіша, 2002. – 452 с