

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Навчально-науковий інститут

МЕХАНІЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ І ТРАНСПОРТУ

Кафедра технології машинобудування та металорізальних верстатів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до циклу лабораторних робіт з курсу

«Комп’ютерні технології в машинобудуванні»

“Вивчення обробки математичної інформації з використанням пакету MATCAD”
для студентів напрямку 133 – галузеве машинобудування

спеціалізація

133-08 Автоматизовані та роботизовані технологічні комплекси в
машинобудуванні

Харків НТУ “ХПІ” 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Навчально-науковий інститут

МЕХАНІЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ І ТРАНСПОРТУ

Кафедра технології машинобудування та металорізальних верстатів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до циклу лабораторних робіт з курсу

«Комп’ютерні технології в машинобудуванні»

“ Вивчення обробки математичної інформації з використанням пакету MATCAD ”
для студентів напрямку 133 – галузеве машинобудування

спеціалізація

133-08 Автоматизовані та роботизовані технологічні комплекси в
машинобудуванні

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № ____ від ____

Харків НТУ “ХПІ” 2020

Методичні вказівки до циклу лабораторних робіт з курсу «Комп’ютерні технології в машинобудуванні» для студентів напрямку 133 – галузеве машинобудування, спеціалізація 133-08 Автоматизовані та роботизовані технологічні комплекси в машинобудуванні денної та заочної форми навчання / Укл. І.Е. Яковенко. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2020. – __ с .

Укладач: І. Е. Яковенко

Рецензент О. А. Пермяков

Кафедра технології машинобудування та металорізальних верстатів

Завдання

1. Вивчити пристрій, принципи роботи та меню програмного комплексу MathCAD
2. Ознайомитись з можливостями обробки математичної інформації у різних розділах системи MathCAD
3. Виконати індивідуальне завдання з кожного розділу
4. Скласти звіт про виконану роботу у вигляді оформлених завдань по кожному розділу

Мета роботи

1. Вивчити принципи роботи програмного комплексу MathCAD
2. Навчитися виконувати різні обчислення та математичні перетворення у системі MathCAD.
3. Навчитися програмувати складні обчислення у системі MathCAD

Обладнання, пристрої, інструмент

1. Персональний комп'ютер
2. Програмний комплекс MathCAD версії 15 чи вище.

Лабораторна робота №1

Робочий лист MathCAD

Робочий лист Mathcad є колекцією рівнянь, виразів, текстів, графіки та інших елементів. Кожен елемент міститься в свою область, іменовану "регіон" Mathcad створює невидимий прямокутник, в якому розміщується регіон. Для того, щоб бачити кордону регіонів, включите прапорець **Вид / Межі**. Для того щоб створити новий регіон:

1. Клацніть лівою кнопкою миші на вільному місці. В результаті на місці клацання з'явиться червоний хрестик.
2. Тепер можете вводити вирази, текст, розміщувати на цьому місці графіки і т.д.

Червоним відзначаються помилки.

Пункт меню **Вид / Панелі інструментів** крім інших містить можливість включення - виключення панелі **Математика**, натискаючи западаючі кнопки якої можна викликати інші панелі MathCAD.



завдання:

- запустіть MathCAD
- Викличте панель **Математика**
- Додайте всі панелі, що викликаються з панелі **Математика**
- Позиціонуйте регіон на довільному місці аркуша
- Виконайте команду **Вставка / Текстова** область
- У текстовій області введіть довільний текст, що містить кілька рядків
- Змініть розмір, колір і жирність тексту
- Увімкніть прапорець **Вид / Межі**
- Перемістіть текстову область, для чого:
 - Виділіть регіон з текстом клацанням лівою кнопкою миші
 - Підведіть курсор миші до кордону регіону. У цей момент він приймає форму руки
 - Утримуючи ліву кнопку миші, перемістіть регіон в потрібне місце і відпустіть кнопку миші
- Видаліть текстову область, для чого:
 - Виділіть регіон і виконайте команду меню **Правка / Видалити** або
 - Утримуючи клавішу **Ctrl** клацніть по регіону, а потім натисніть клавішу **Delete**

Введення виразів

Щоб ввести математичний вираз в Mathcad, потрібно просто позиціонувати новий регіон, клацнувши лівою кнопкою і почати друкувати літери, числа, або оператори, такі як + (плюс) або - (мінус). Коли ви будете друкувати символи, ви побачите їх виділеними "лініями редагування", які показують, які символи виділені. Для того щоб змінити область виділення, використовуйте клавіші "пробіл" і стрілки. Приклади того, як може виглядати область редагування, зображені на малюнку:

Оператори можна вводити або друкуючи їх, або вибираючи з панелі інструментів **Арифметика**. Панель інструментів **Арифметика** викликається командою **Вид /**

Панелі інструментів / Арифметика. Використовувані в вираженні функції можна або ввести в клавіатури, або взяти з однією з панелей інструментів, або виконати вставку через діалог **вставити функцію**, який викликається клацанням по кнопці **f(x)** з панелі інструментів **стандартні**.

Розглянемо процес створення числового виразу зображеного на малюнку.

$$\frac{a^2 + \sqrt{(b^2 + x)}}{a - b}$$

1. Надрукуйте **a**
2. Надрукуйте символ **^** для подальшого введення ступеня
3. Надрукуйте **2** (ступінь **a**)
4. Натисніть "пробіл", щоб розширити виділення
5. Введіть символ **+**
6. Введіть символ **О** (квадратний корінь), клацнувши по ньому в панелі "Арифметика"
7. Введіть пару дужок, взявши їх в панелі.
8. Надрукуйте **b**
9. Надрукуйте **^** (або візьміть операцію піднесення до степеня в панелі)
10. Надрукуйте ступінь **2**
11. Натисніть пробіл, щоб розширити виділення
12. Надрукуйте **+**
13. 4 рази натисніть пробіл, щоб область виділення захопила весь вираз
14. Надрукуйте символ **/** (операція ділення)
15. У знаменнику надрукуйте **ab**. Введення завершено.

завдання: Введіть вирази, зображені нижче:

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^3} - (a \cdot x - b \cdot y)^{x+y}$$

$$\frac{\sin(x+y) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2-3}} + e^{\sqrt{\sin(x)}}}{\cos(x-y)}$$

$$x + \frac{a_1}{x + \frac{a_2}{x + \frac{a_3}{x + a_4}}}$$

$$\frac{3 \sqrt{1 + \sqrt{1 + x \cdot \frac{x-1}{x-2}}}}{x-3} +$$

Збережіть документ у своїй папці під ім'ям Введення виразів, виконавши команду меню **Файл / Зберегти як**

Обчислення виразів

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{4} = 1.104$$

Mathcad може бути використаний як звичайний калькулятор (хоча він здатний на набагато більшу). Для того, щоб обчислити значення виразу, надрукуйте його в новому регіоні і, праворуч від нього введіть символ "=". Наприклад, обчисліть вираз, наведене на малюнку.

Переконайтеся, що відсутні елементи вираження, виділені червоним. Червоним Mathcad відзначає помилки.

Обчислення можуть проводитися в 2-х режимах: автоматичному і послідовному. У першому випадку операція виконується відразу після завершення введення і клацання по робочому документу поза виділеної рамки. У другому - після виконання команди меню **Математика / Обчислити** або, що те ж саме, натискання клавіші F9. Перемикання режимів може бути виконане вмиканням - вимиканням прапорця **Математика / Автоматичне обчислення**.

завдання:

Обчисліть вирази, наведені на малюнку:

The image shows four separate Mathcad calculation regions, each containing a complex mathematical expression followed by an equals sign and a result. The expressions are:

- $$23.1 \cdot \frac{\sqrt[3]{3 \cdot \pi - \frac{\ln(54)}{16}}}{5 - \pi^{4!}} = -5.661 \times 10^{-11}$$
- $$\frac{\left(\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^3}{\tan\left(\frac{2 \cdot \pi}{9}\right) - \log(44)} = -0.156$$
- $$e^{\sqrt{\frac{22-12.7}{44.8}}} - e^{\pi \left[\left(\frac{1}{3} \right)^6 - 2 \right]} = 1.575$$
- $$\frac{\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right)}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 2.929$$

Визначення змінних

$$X := 2 \cdot Y - 8$$

Щоб обчислити вираз, що включає змінні, їх треба визначити. Щоб визначити змінну, надрукуйте її ім'я. Як ім'я може бути використана будь-яка послідовність літер і цифр, що починається з букви. Праворуч від імені змінної надрукуйте символ ":" (двокрапка). Він буде відображатися на екрані як ":=" . Потім введіть значення змінної. Значним може бути вираження рядок. Наприклад, введіть визначення змінної, зображене на малюнку.

завдання:

- Розпочніть відтворення повністю процес обчислення площі трикутника за формулою Герона:

Стороны треугольника	$a := 4$	$b := 7$	$c := 5$
Полупериметр	$p := \frac{(a + b + c)}{2}$		
Площадь по формуле Герона	$s := \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$		
Вычисление результата	$s = 9.798$		

Змінюючи значення змінних a, b, c, переконайтеся, що площа переобчислюють (це буде відбуватися, якщо включений прапорець **Математика / Автоматичне Обчислення**)

КУХНЯ	Длина	$a := 3.1$	Ширина	$b := 4.2$	Высота	$h := 1.6$
Площадь двери	$d := 2.2$	Площадь окна	$w := 1.8$			
Размеры плитки	$pa := 0.15$	$pb := 0.15$				
Площадь, которую нужно закрыть кафелем	$s := 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h - d - w$					
Требуемое количество плитки	$N := \frac{s}{pa \cdot pb}$					
Вычисление результата	$N = 860.444$					

- Задані довжина, ширина і висота кухні. Відома площа дверного отвору і площа вікна. Всю решту площі потрібно покрити кахлем. Відома ширина і висота кахельної плитки. Розрахуйте кількість плиток. Розрахунок в MathCAD наведено на малюнку. Розпочніть відтворення його.

Збережіть документ у своїй папці з ім'ям Кахель.

Визначення функції

Функція - це правило обчислення значення по заданих аргументів. Для того, щоб визначити функцію:

- Надрукуйте ім'я функції, а за ним ліву дужку
- Надрукуйте список аргументів через кому, а потім праву дужку
- Введіть символ ":" (двокрапка).
- Праворуч від ":" надрукуйте вираз для обчислення функції з її аргументів.

Якщо будь-які елементи виділені червоним, то це помилки. Переконайтеся, що всі змінні, які використовуються в вираженні правій частині визначення або визначені раніше, або є аргументами, перерахованими в лівій частині.

Визначення функції не викликає будь-яких обчислень. Обчислення будуть викликатися, коли ви звернетесь до функції в будь-якому вираженні.

Завдання: Визначте функції і виконайте обчислення як це показано на рисунку

Определение функций

$$f(x) := \frac{1+x^2}{1+x^4} \quad g(x) := \sin(\sqrt{x}) - \sqrt{\sin(x)^2}$$

Обращение к функциям

$$f(3) = 0.122 \quad f(g(2.5)) = 1.132$$

Вычисление выражений, в которые входят функции

$$a := 5 \quad b := 7$$

$$\frac{f(a) - g(a)}{f(b) - g(b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1.086$$

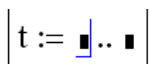
Змінні діапазону

Існує можливість для змінної вказати дискретний діапазон значень, які вона приймає. Змінну, що пробігає дискретне безліч значень можна задати двома способами:

- якщо це ціла змінна, то досить вказати початкове і кінцеве значення
- для нецілої змінної потрібно вказати перше значення, через кому таке значення і, після трьох крапок, кінцеве значення. Різниця між другим і першим значенням буде використана як крок зміни змінної діапазону.

приклад 1. Визначимо цілу змінну **t**, що змінюється в діапазоні від -3 до 3.

- надрукуйте **t:** (Результат буде відображений як **t: =**)
- натисніть **[m..n]** в панелі "арифметика". Результат буде виглядати як на рисунку:



- Вкажіть початкове і кінцеве значення

Тепер в новому регіоні введіть **t =**. Ви побачите стовпець, в якому перераховані всі значення змінної діапазону.

Приклад2 Визначимо не цілу змінну, що змінюється від 1 до 1.8 з кроком 0.1. Для цього:

- надрукуйте **z:** (Двокрапка)
- надрукуйте **1,1.1**

- натисніть кнопку **[m..n]** в панелі "арифметика" і додрукувати **1.8**

результат буде мати вигляд:

$z := 1, 1.1 \dots 1.8$

Змінними діапазону можна скористатися для побудови таблиць і графіків. Як приклад використовуйте тільки що певну змінну z . Створіть два регіони. У першому надрукуйте z , А в другому $z^2 - z$. Результат матиме вигляд:

$z =$	$z^2 - z$
1	0
1.1	0.11
1.2	0.24
1.3	0.39
1.4	0.56
1.5	0.75

Завдання:

- визначте змінну z пробігають значення 0; 0.1; 0.2 ... 2.1
- визначте функцію $f(x)$ як $(1 + x + 0.5x^2) / (1-x)$
- побудуйте таблицю значень $f(x)$ на безлічі значень, яке приймає z .

Ще раз виконайте цю вправу для іншої діапазону значень і функції, наприклад,

$t := 1.2, 1.4 \dots 3.2$ $f(x) := e^{\sqrt{x}}$

Операції з виразами

Спростити вираз

Введіть вираз, наведене нижче і виконайте команду **Символи / Спростити**. MathCAD створить новий регіон, в який помістить результат, рівний $3 \cdot x$.

$$\left(1 + \frac{2}{3 \cdot x - 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{9 \cdot x - 9 \cdot x^2}{3 \cdot x + 1}\right) + 1$$

$3 \cdot x$

Завдання: Спростите наведені нижче вирази

$$\frac{\frac{1+a \cdot x^{-1}}{a^{-1} \cdot x^{-1}} \cdot \frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1} \cdot x-a \cdot x^{-1}}}{\left(\frac{a \cdot x^{-1}}{x-a}\right)} \quad \frac{\frac{y^2 \cdot (x \cdot y^{-1}-1)^2}{x \cdot (1+x^{-1} \cdot y)^2} \cdot \frac{y^2 \cdot (x^{-2}+y^{-2})}{x \cdot (x \cdot y^{-1}-x^{-1} \cdot y)}}{\left(\frac{1-x^{-1} \cdot y}{x \cdot y^{-1}+1}\right)}$$

Розкрити дужки і привести подібні

Введіть вираз, наведене нижче і виконайте команду **Символи / Розширити**.

$$x \cdot (z+1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+z)$$

MathCAD створить новий регіон, у якому результат:

$$x \cdot z^2 + x - 2 \cdot x^2$$

завдання: виконайте операцію "Розкрити дужки і привести подібні" для наведених нижче виразів:

$$\begin{aligned} & (2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \\ & (a \cdot x^2 + b \cdot x^3 + c) \cdot (a \cdot x + b \cdot x^2) - a \cdot x^3 \end{aligned}$$

Розкладання на множники

Введіть вираз, наведене нижче, і виконайте команду **Символи / Фактор**

$$a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c + a^2 \cdot c + a \cdot c^2 + b \cdot c^2$$

Результат буде мати вигляд:

$$(b+c) \cdot (c+a) \cdot (a+b)$$

завдання: Розкладіть на множники вирази, зображені на малюнку:

$$x^4 - 10 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 50 \cdot x + 24$$

$$24 \cdot a^3 \cdot b - 6 \cdot a \cdot b \cdot x^3 - 8 \cdot a^3 \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x^5 - 12 \cdot x \cdot b \cdot a^2 + 3 \cdot x^4 \cdot b + 4 \cdot x^3 \cdot a^2 - x^6$$

Розкладання на прості дроби

Введіть вираз, наведене нижче, виділіть змінну **x** в вираженні (MathCAD повинен знати, з якої змінної виконувати розкладання) і виконайте команду **Символи / Змінні / Перетворення в часткові частки**.

$$\frac{x^2 - 3 \cdot x + 7}{(x-1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)}$$

Буде отриманий результат:

$$\frac{5}{3 \cdot (x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(5+3 \cdot x)}{(x^2 + x + 1)}$$

Завдання: розкладіть на найпростіші дроби наведені нижче вирази

$$x(t) := 2 \cdot \sin(t) + t$$

$$y(t) := \cos(4t) - t$$

$$\frac{(5 \cdot x^4 + 6 \cdot x^3)(2 \cdot x + 1) \cdot (x - 3)}{(x^2 + x + 4)(x - 6) \cdot (3 \cdot x - 2)}$$

Лабораторна робота №2

Побудова таблиць значень і графіків

приклад 1 Побудуйте таблицю значень функції

$$f(x) := x \cdot \sin(\sqrt{x})$$

Для цього :

- визначте функцію **f**
- створіть змінну діапазону

$$i := 0..10$$

- Визначте ще 2 змінних:

$$x_i := i \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{20}$$

$$F_i := f(x_i)$$

- Виконайте обчислення, надрукувавши в двох регіонах: у першому - $X =$, у другому - $F =$. Результат виглядає наступним чином:

$x =$		0	$F =$		0
	0	0		0	0
	1	1.974		1	1.947
	2	3.948		2	3.611
	3	5.922		3	3.852
	4	7.896		4	2.571
	5	9.87		5	$1.209 \cdot 10^{-15}$
	6	11.844		6	2.409

Приклад 2

Побудуємо графік функції

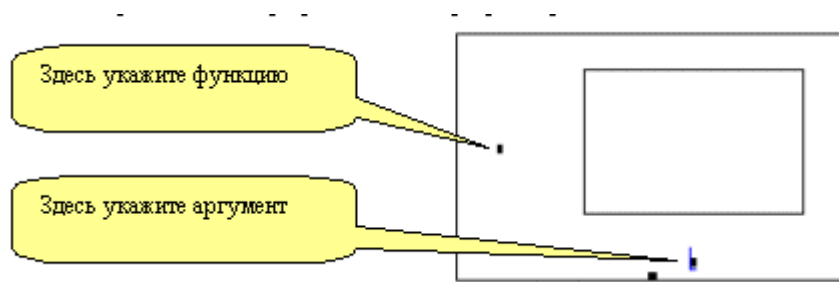
$$f(x) := x \cdot \sin(\sqrt{|x|})$$

Для цього:

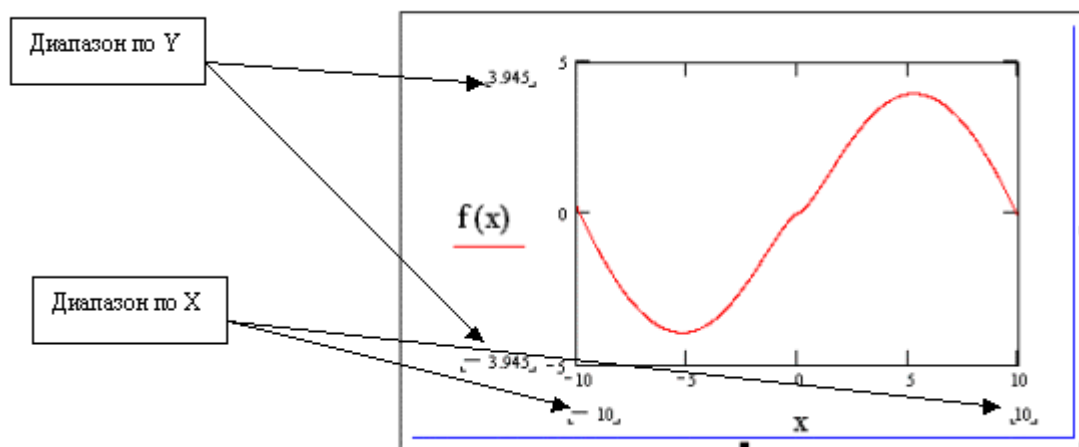
- увімкніть панель "графіки" командою Вид / Панелі інструментів / Графік.



- визначте функцію $f(x)$
- клацніть на панелі інструментів "графік" кнопку "декартовий графік". Буде створений новий регіон для графіка. Поки графік порожній.



- Після того, як ви вказали аргумент і функцію, клацніть в будь-якому місці поза графіком. Побудований графік має вигляд:



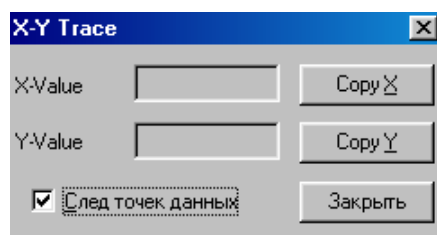
Інші властивості графіка можуть бути встановлені в діалозі, що викликається командою "формат" контекстного меню.

Завдання 1

- Визначте змінну діапазону t , що пробігає значення від 1 до 3 з кроком 0.2
- Визначте функцію

$$f(x) := 1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \frac{x}{4}}}$$

- Побудуйте таблицю значень $f(t)$



Завдання: 2

- визначте функцію

$$f(t) := \frac{3 \cdot t^3 - 2 \cdot t^2 + 1}{(2 \cdot t - 5)^2}$$

- Побудуйте її графік для t , що змінюється від -3 до 6, діапазон зміни по осі ординат прийміть -5 - +25

Завдання: 3

- Визначте функції

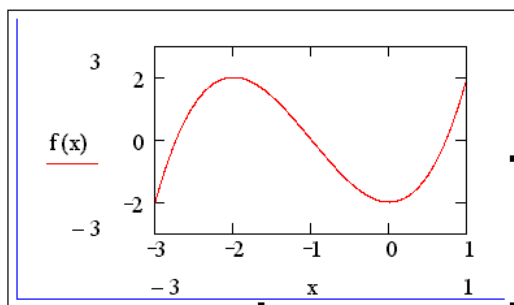
$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad g(x) := \operatorname{atan}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$$

- Побудуйте їх спільний графік
- Підберіть діапазони зміни по осях так, щоб було видно характерні особливості поведінки функцій

Графічне рішення рівняння

Вирішимо графічно рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Для цього:

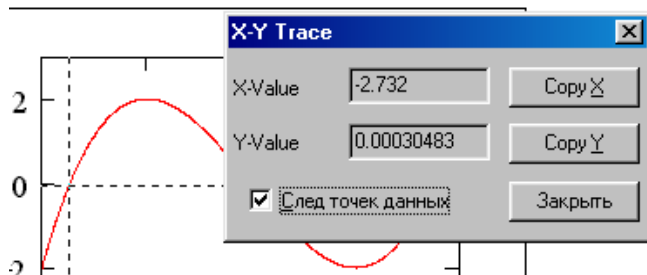
- визначимо функцію $f(x)$
- побудуємо її графік



Для того, щоб знайти корені рівняння - абсциси точок перетину графіка з прямою $y = 0$, виконайте команду **Формат / Графік / Слід**. У діалозі

встановіть прапорець Слід точок даних; клацніть по полю графіка і встановіть стрілками клавіатури або мишею маркер (перехресні пунктирні лінії) в точку перетину графіка функції з віссю абсцис. У вікні діалогу відображаються координати маркера. Значення координати x і є корінь рівняння. Викладене ілюструється малюнком:

Діючи описаним чином, послідовно знайдіть все три кореня.



Завдання:

Вирішіть рівняння, ліві частини яких задані наступним чином:

$$f(x) := \frac{x^4}{24} - 2 \cdot x^3 - 16x^2 + 14 \quad g(x) := 2 \sin(x) - x$$

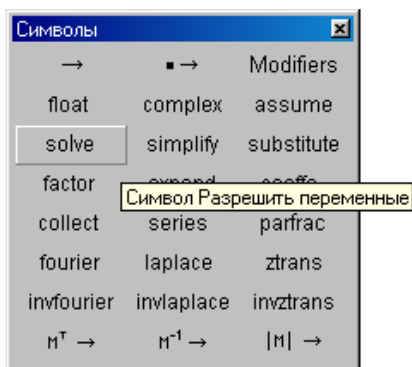
Символьний розв'язок рівнянь

Вирішимо рівняння

$$\sqrt[3]{(x-a)^2} - \sqrt[3]{(x-b)^2} = 0$$

Для цього:

- введіть вираз лівій частині рівняння
- викличте панель символічних обчислень, включивши прапорець **Вид / Панелі інструментів / Символи.**



- У панелі, що з'явилася натисніть кнопку **solve** (вирішити).
- У позиції праворуч від слова **solve** введіть ім'я змінної, щодо якої потрібно розв'язати рівняння.
- Клацніть мишею по вільному місцю на аркуші

Результат буде зображений праворуч від стрілки, що знаходиться слідом за ім'ям змінної.

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} \text{ solve, } x \rightarrow \frac{5}{2}$$

Завдання:

Вирішіть рівняння щодо x:

$$x^2 - 5 \cdot x + z \sin(x) + 2 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

Рішення систем рівнянь

Вирішимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x \cdot (z+1)^2 - 2 \cdot z \cdot (x+z) = 0 \\ (1+x^2) \cdot \sqrt[4]{y-2} - 2 \cdot x^2 = 0 \\ \sqrt{y-2} \cdot (z-2) + z = 0 \end{cases}$$

Для цього:

- введіть з клавіатури ключове слово **Given** (дано)
- правіше і нижче ключового слова - ліву частину першого рівняння системи, далі символічний знак рівності (клавіші <Ctrl> + <=>) і праву частину рівняння (нуль).
- Аналогічно введіть два інших рівняння
- Правіше і нижче останнього рівняння введіть ім'я функції **Find** (знайти) і перерахуйте в дужках імена змінних, значення яких потрібно знайти
- Виділіть **Find (x, y, z)** і клацніть по кнопці



в панелі символічних обчислень.

Знайдене рішення системи буде відображено після клацання мишею поза виділяє рамки праворуч від стрілки. Рішення відображається у вигляді матриці, кожен стовпець якої містить одне з рішень системи.

Given

$$x \cdot (z+1)^2 - 2 \cdot z \cdot (x+z) = 0$$

$$(1+x^2) \cdot \sqrt[4]{y-2} - 2 \cdot x^2 = 0$$

$$\sqrt{y-2} \cdot (z-2) + z = 0$$

$$\text{find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання:

Вирішіть системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 9 = 0 \\ x + 2 \cdot y - 4 = 0 \end{cases}$$

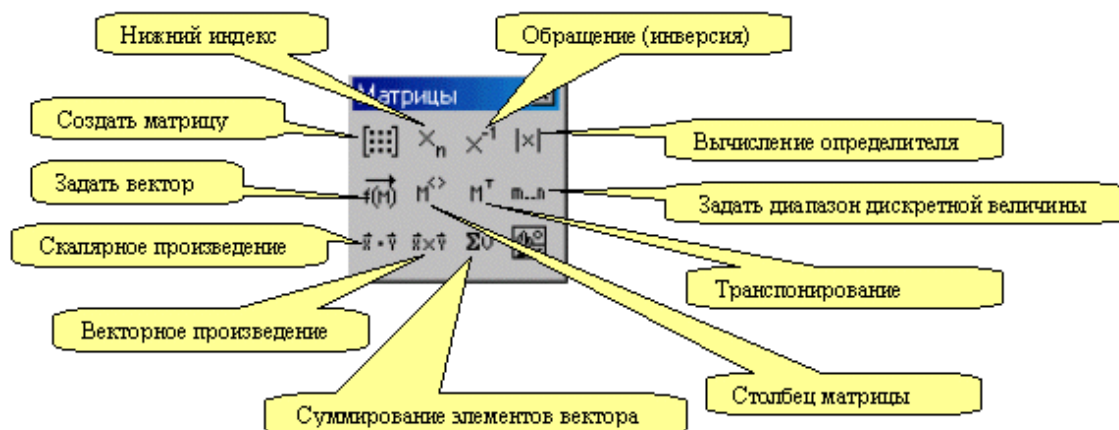
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 27 = 0 \\ x \cdot y - 16 = 0 \end{cases}$$

Лабораторна робота №3

Завдання лінійної алгебри та математичного аналізу

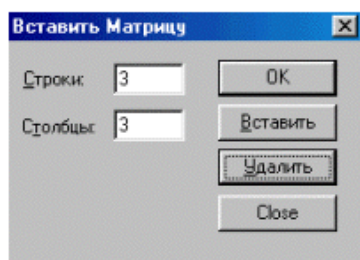
Панель "Матриці"

При роботі з матрицями використовується панель інструментів "Матриці"



Для введення матриці:

- введіть ім'я матриці і знак присвоювання (двокрапка)
- клацніть по значку "створити матрицю" в панелі "Матриці".
- У діалозі вкажіть кількість рядків і стовпців матриці.



$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Після натискання кнопки ОК відкривається поле для введення елементів матриці. Для того, щоб ввести елемент матриці, встановіть курсор у зазначеній позиції і введіть з клавіатури число або вираз.

Для того, щоб виконати будь-яку операцію за допомогою панелі інструментів, потрібно:

- виділити матрицю і клацнути в панелі по кнопці операції,
- або клацнути по кнопці в панелі і ввести в поміченої позиції ім'я матриці

Меню "Символи" містить три операції - транспонування, інвертування, визначник.

Це означає, наприклад, що обчислити визначник матриці можна, виконавши команду Символи / Матриці / Визначник.

Номер першого рядка (і першого стовпця) матриці MathCAD зберігає в змінній ORIGIN. За замовчуванням відлік ведеться від нуля. В математичного запису частіше прийнято вести відлік від 1. Для того, щоб MathCAD вів відлік номерів рядків і стовпців від 1, потрібно задати значення змінної ORIGIN: = 1.

Функції, призначені для роботи з завданнями лінійної алгебри, зібрані в розділі "Вектори і матриці" діалогу "вставити функцію" (нагадуємо, що він викликається кнопкою  з панелі "Стандартні"). Основні з функцій описані нижче.

- `matrix (m, n, f)` - створює і заповнює матрицю розміром $\langle m, n \rangle$, елемент якої, розташований в рядку i і стовпці j , равент $f(i, j)$.

$$f(x, y) := x^2 + x \cdot y \quad A := \text{matrix}(3, 4, f) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

- `diag (v)` - створює діагональну матрицю, елементи головної діагоналі якої зберігаються у векторі v .

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A := \text{diag}(v) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- `identity (n)` - створює одиничну матрицю порядку n .

$$A := \text{identity}(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- `augment (A, B)` формує матрицю, в перших шпальтах якої міститься матриця A , а в останніх - матриця B . Матриці A і B повинні мати однакове число

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad C := \text{augment}(A, B) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 10 & 11 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

рядків.

- `stack (A, B)` - формує матрицю, в перших рядках якої міститься матриця A , а в останніх - матриця B . Матриці A і B повинні мати однакове число стовпців.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad C := \text{stack}(A, B) \quad \boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \blacksquare}$$

- `submatrix (A, ir, jr, ic, jc)` - формує матрицю, яка є блоком матриці A, розташованим в рядках з `ir` по `jr` і стовпцях від `ic` до `jc`.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad D := \text{submatrix}(C, 2, 4, 1, 2) \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 10 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad +$$

Функції обчислення різних числових характеристик матриці:

- `last (v)` - обчислення номера останньої компоненти вектора `v`
- `length (v)` - число компонент вектора `v`
- `rows (A)` - число рядків матриці A
- `cols (A)` - число стовпців матриці A
- `max (A)` - найбільший елемент матриці A
- `min (A)` - найменший елемент матриці A
- `tr (A)` - слід (сума діагональних елементів) матриці A
- `rank (A)` - ранг матриці A

Функції, що реалізують чисельні алгоритми розв'язання задач лінійної алгебри:

- `eigenvals (A)` - обчислення власних значень матриці A
- `eigenvecs (A)` - власні вектори квадратної матриці A
- `eigenvec (A, I)` - власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню I
- `lsolve (A, b)` рішення системи лінійних рівнянь $Ax = b$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad X := \text{lsolve}(A, b) \quad \boxed{X = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.409 \\ 0.124 \end{pmatrix} \blacksquare}$$

Множенням на матриці спеціального виду можна переставити в матриці стовпці або рядки, виділити певну рядок або стовець.

Суммирование элементов по столбцам выполняется умножением на матрицу (1,1,1) ■

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{Crow} := (1 \ 1 \ 1) \quad \text{Crow} \cdot D = (12 \ 15 \ 18)$$

Выделение 3-го столбца матрицы D может быть выполнено умножением на матрицу C3

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad C3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D \cdot C3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Аналогічно, виділення 1-го рядка виконується множенням зліва на матрицю (1 0 0), виділення другого рядка - на матрицю (0 1 0)

Перестановка 1-й и 2-й строки:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad C12 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C12 \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Множення справа $D * C12$ переставляє стовпці.

Завдання:

1. Обчисліть матрицю $2 * A * B - 3 * C * D$, де:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Відповідь:

$$2 \cdot A \cdot B - 3 \cdot C \cdot D = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ -8 & 17 \\ 7 & -40 \end{pmatrix}$$

2. Знайдіть визначник і зворотний матрицю для матриць:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 11 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 11 & -11 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Обчисліть матричні вирази:

$$\left[(A + 2 \cdot B)^T - (3 \cdot A - B)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{identity}(3) + A)^{-1} + (B + 2 \cdot A^{-1})^T$$

4. Отримайте матрицю C перестановкою 2-го і 3-го стовпців матриці A

5. Вирішіть систему лінійних рівнянь $A * x = b$, де

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -8 & -2 & -9 & -3 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

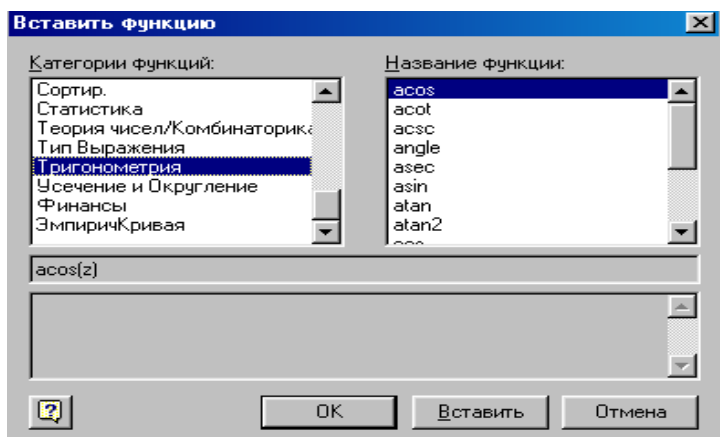
6. З'ясуйте, чи є лінійно-незалежними вектори p, q, r :

$$p = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(Нагадуємо, що вектори лінійно незалежні, якщо змішане твір $\overline{(p \times q)} \cdot r$ дорівнює нулю)

Визначення функцій.

У виразах можуть бути використані функції визначені користувачем і / або зумовлені в MathCAD. Зумовлені функції (тобто ті, які MathCAD знає) можна знайти в діалозі, що викликається через команду меню Вставка / Функція. Діалог має вигляд:



Для того, щоб визначити функцію самому:

- введіть ім'я функції
- введіть список аргументів у круглих дужках
- введіть символ присвоювання, для чого натисніть: (двокрапка). Символ присвоювання буде відображено як: =
- праворуч від символу присвоювання введіть вираз для обчислення значення функції з її аргументів

У наведеному нижче прикладі визначається функція і обчислюється її значення при $t = 1$ і $t = 2$

$$f(t) := 2^{t \sin(3t-1)} - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{t}\right) \quad f(1) = 1.093 \quad t := 2 \quad f(t) = -0.199$$

Завдання

Визначте функції

$$f(x) := \left(x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + e^{\tan(1+x)} \right)^{\sqrt[3]{1+x^2}} + \frac{1-x}{1+\sin(x)^2} \quad g(x) := \left(\sin(\sqrt[3]{x}) + \frac{x-1}{1+x+x^2} \right)^2 - \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}$$

Обчисліть вираз

$$f(g(6)) \quad f(3) + \frac{g(4)}{f(7)}$$

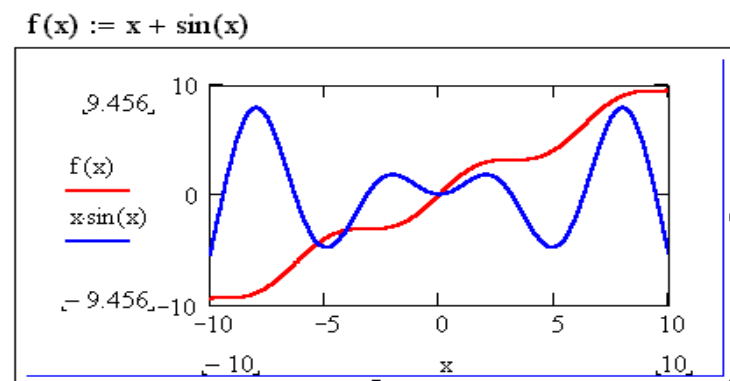
Побудова графіків

Інструменти для побудови графіків в MathCAD доступні в панелі **Графіка**, яка відкривається клацанням по кнопці  в панелі **Математика** або командою меню **Вставка / Графік**. Є можливість побудувати графік (і) функцій, заданих в декартових координатах, параметричної формі, а також в полярних координатах.

Приклад 1 Побудуємо суміщені графіки функцій $f(x) = x + \sin(x)$ і $g(x) = x * \sin(x)$ в декартових координатах.

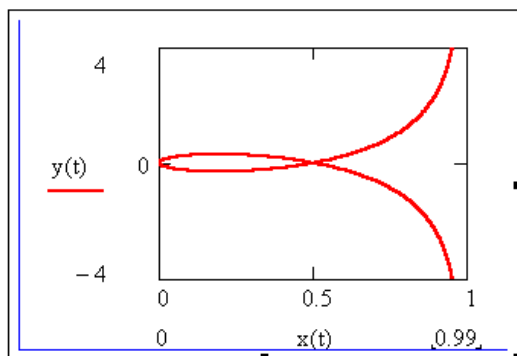
- введіть визначення функції **$f(x) := x + \sin(x)$**
- виберіть вид графіка (меню **Вставка / Графік / XY-Залежність**)
- ім'я аргументу введіть в поміченій позиції біля осі абсцис
- біля осі ординат введіть вираження для обчислення функцій, перераховуючи їх через кому.
- встановіть параметри зображення (кольору, товщина ліній ...) викликавши діалог подвійним клацанням по полю графіка.

Результат зображений на малюнку.



Приклад 2. Побудувати криву, задану в параметричній формі:

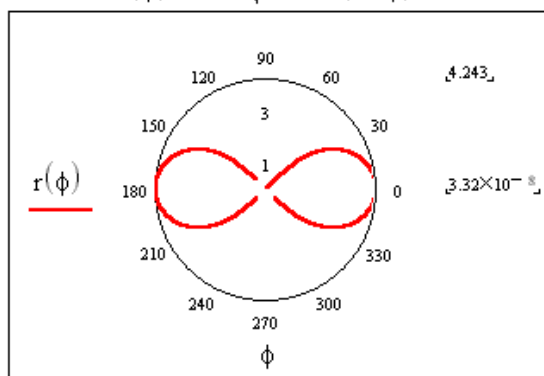
$$x(t) := \frac{t^2}{1+t^2} \quad y(t) := \frac{t \cdot (1-t^2)}{1+t^2}$$



Приклад 3 Побудова лемніскати Бернуллі $r = 2 \cdot (2 \cdot \cos 2\phi)$. Для побудови графіка:

- визначте функцію
- виконайте команду **Графік / Полярні координати**.
- В позначених позиціях введіть вираження для осей X і Y.

$$r(\phi) := 3 \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)}$$



Завдання:

1. побудуйте графік функції

$$f(x) := \frac{\cos(x)}{1 + \sqrt{|x|}}$$

2. суміщені графіки функцій

$$f(x) := \frac{\cos(x)^2 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{|x|} + 0.1 \cdot x^2} \quad g(x) := \sqrt{e^{\frac{1-x}{1+x+6x^2}}} \cdot \sin\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$$

3. графік спіралі Архімеда в полярних координатах

$$\rho(\phi) := 0.5 \cdot \phi$$

4. графік функції, заданої параметрично

$$x(t) := 2 \cdot \sin(t) + t$$

$$y(t) := \cos(4t) - t$$

Примітка: у всіх графіках підберіть розмір графіка, колір, спосіб відображення, діапазони зміни змінних так, щоб графік найбільш повно відображав особливості поведінки функцій.

Обчислення меж

Більшість інструментів для вирішення завдань математичного аналізу в MathCAD зібрано в панелі **Матаналіз**, яка відкривається клацанням по кнопці  в панелі **Математика**, яку, в свою чергу, можна включити командою **Вид / Панелі інструментів / Математика**. Панель **Матаналіз** має вигляд:



Три нижні кнопки призначені для обчислення меж. кнопкою  в робочий документ вставляється оператор обчислення функції в точці або на нескінченності. Дві інших кнопки вставляють оператори обчислення односторонніх меж відповідно праворуч і ліворуч. Для обчислення границі:

- клацніть по вільному місцю на аркуші
- клацніть по потрібній кнопці, вставляти оператор обчислення границі
- введіть з клавіатури в позначених позиціях вираз, межа якого потрібно обчислити, ім'я аргументу і значення граничної точки
- виділіть всі вираз
- виконайте команду **Символи / Розрахунки / Символічні** або натисніть Shift-F9. Нижче наведені приклади обчислення трьох меж

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Завдання:

Обчислити

межі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot x^2 + x - 1}{x^2 - 3 \cdot x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\cos(x) - \cos(x_0))^3}{4 \cdot x - \sin(x)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (3 - 2 \cdot x)^{\frac{2x}{x-1}}$$

При $x_0 = 2; -1; \square$;

Диференціювання

Для того, щоб знайти похідну:

- клацніть по вільному місцю на аркуші MathCAD.
- клацніть по панелі **Матаналіз** по кнопці 
- введіть з клавіатури в позначених позиціях вираз для функції і ім'я аргументу
- виділіть всі вираз
- натисніть Shift-F9 або натисніть кнопку  і клацніть на вільному місці аркуша
- Ви отримаєте результат

$$\frac{d}{dx} x^x \quad \boxed{x^x \cdot (\ln(x) + 1)}$$

Для обчислення похідних вищих порядків:

- - клацніть по вільному місцю на аркуші MathCAD.
- клацніть по панелі **Матаналіз** по кнопці 
- введіть з клавіатури в позначених позиціях вираз для функції, ім'я аргументу і порядок похідної
- виділіть всі вираз
- натисніть Shift-F9 і отримаєте результат

Приклад обчислення другої похідної наведено нижче

$$\frac{d^2}{dx^2} x^x \quad \boxed{x^x \cdot (\ln(x) + 1)^2 + \frac{x^x}{x}}$$

завдання:

- знайдіть перші, другі та треті похідні функцій:

$$f1(x) := (3 \cdot x + 4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2)^4$$

$$f2(x) := \cos(3 \cdot x) \cdot e^{\sin(x)}$$

$$f3(x) := \frac{4 \cdot x + \tan(x)}{\sqrt{1 + 9 \cdot x^2}}$$

$$f4(x) := \ln(\operatorname{atan}(2 \cdot x))$$

Інтегрування

Для того, щоб знайти невизначений інтеграл:

- клацніть по вільному місцю на аркуші MathCAD.
- клацніть в панелі **Матаналіз** по кнопці 
- введіть з клавіатури в позначених позиціях вираз для функції і ім'я змінної, по якій виконується інтегрування
- виділіть всі вираз

- натисніть Shift-F9 або натисніть кнопку 

в панелі Символи і клацніть на вільному місці аркуша і отримаєте результат

Приклад:

$$\int \frac{x}{1+x} dx \quad \boxed{x - \ln(1+x)}$$

Завдання:

- Знайдіть невизначені інтеграли:

$$\int \sin(x) \cdot \sqrt{\cos(x)} dx \quad \int \frac{4 \cdot x - 1}{x^2 - 4 \cdot x + 8} dx \quad \int \ln(x) dx \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$$

Визначений інтеграл

Для того, щоб знайти невизначений інтеграл:

- клацніть по вільному місцю на аркуші MathCAD.
- клацніть по панелі **Матаналіз** по кнопці 
- введіть з клавіатури в позначених позиціях вираз для функції, ім'я змінної, по якій виконується інтегрування, межі інтегрування
- виділіть всі вираз
- натисніть Shift-F9 або натисніть кнопку  в панелі Символи і клацніть на вільному місці аркуша і отримаєте результат

Приклад:

$$\int_3^9 \frac{x}{1+x} dx \quad \boxed{6 + \ln(2) - \ln(5)}$$

Завдання:

1. Обчисліть певні інтеграли:

$$\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx \quad \int_2^3 \frac{x-3}{\sqrt{x}-2} dx \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx \quad \int_0^1 \frac{4 \cdot \operatorname{atan}(x) - x}{1+x^2} dx$$

2. Знайдіть площу, обмежену лініями

$$f1(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + 1 \quad f2(x) := -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x + 6$$

Вказівка:

- побудуйте суміщені графіки функцій f_1 і f_2 ; на яких буде наочно видно фігуру, площа якої потрібно знайти;
- вирішіть рівняння $f_1(x) - f_2(x) = 0$, що дасть вам межі інтегрування a, b
- обчисліть площу фігури:

$$S := \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx$$

Числові ряди

Для символічного обчислення суми ряду:

- клацніть по кнопці  в панелі **Матаналіз**
- Введіть з клавіатури в позначених позиціях змінну підсумовування і межі її зміни
- Введіть вираз для члена ряду як функцію змінної підсумовування
- Виділіть все вираз суми
- Клацніть по кнопці 

(Символічна оцінка) в панелі **Обчислення** і, потім по вільному місцю на аркуші

приклади

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2$$

Якщо потрібно числове значення суми ряду, то, як і в загальному випадку, введіть вираз для ряду і виконайте команду **Символи / Розрахунки / С плаваючою комою**. У діалозі, який з'явиться вкажіть необхідну розрядність результату.

завдання:

Знайдіть суми рядів як:

1. результат символічних обчислень (в тих випадках, коли MathCAD не може знайти аналітичного рішення, він про це повідомляє)
2. чисельно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{3^{n+2}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k+2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

Аналогічно знаходяться твори.

Завдання: Знайдіть (аналітично і чисельно) наступні твори:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Функції багатьох змінних

Функції багатьох змінних визначаються так само, як функції одного змінного, наприклад:

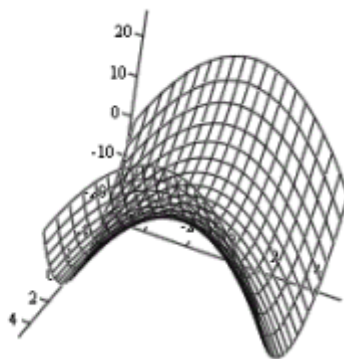
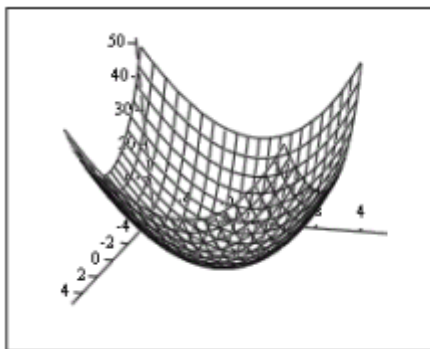
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

Графіки функцій багатьох змінних

Для того, щоб побудувати графік функції багатьох змінних:

- введіть визначення функції
- клацніть по кнопці 
- У поміченої позиції введіть ім'я функції. Якщо ви збираєтеся побудувати графіки декількох функцій, їх імена повинні бути перераховані через кому
- Клацніть по вільному місцю на аркуші

Приклади побудови графіків наведені нижче.



завдання:

Побудуйте графіки функцій:

$$f(x, y) := x^3 \cdot y^3 - x^2 - y^2 + x + y \quad g(x, y) := \sqrt{|x \cdot y|} + \sqrt{|x + y|}$$

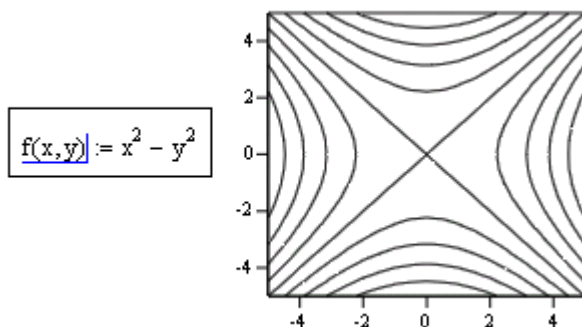
Лінії рівня

лінією рівня функції 2-х змінних x, y називають геометричне місце точок у площині xOy , в яких функція приймає одне і те ж значення. Лінії рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ визначаються рівнянням $f(x, y) = \text{Const}$.

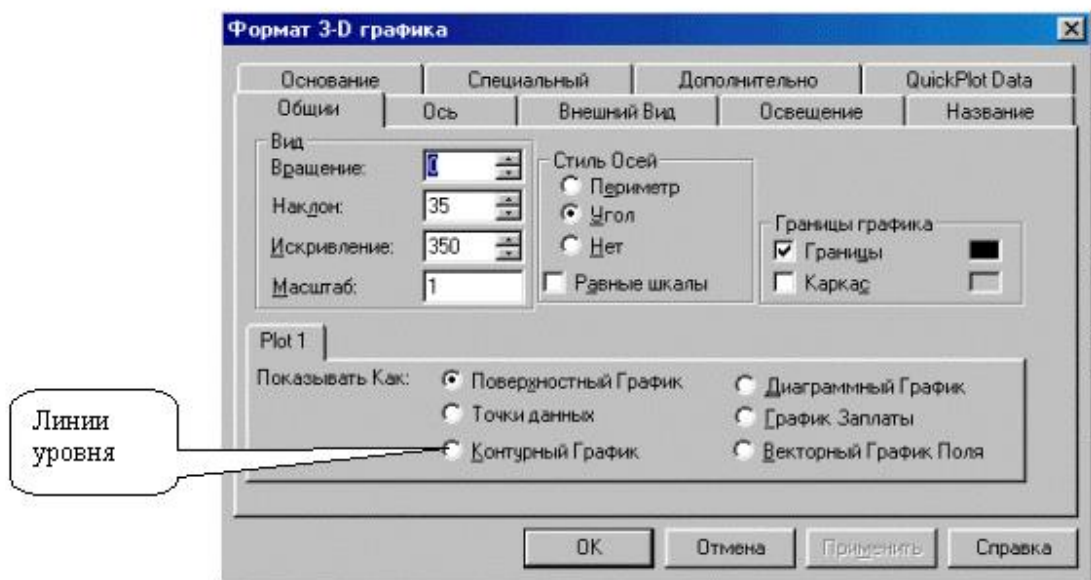
Для того, щоб побудувати лінії рівня функції:

- клацніть по кнопці  в панелі **Графіки**
- У поміченої позиції введіть ім'я функції. Якщо ви хочете зібрати лінії рівня декількох функцій, їх імена повинні бути перераховані через кому
- Клацніть по вільному місцю на аркуші

приклад наведено нижче



Лінії рівня можна також отримати зміною параметрів настройки графіків в діалозі **Формат 3D графіка**, який викликається подвійним клацанням по графіку:



Завдання:

Побудуйте лінії рівня для функцій попереднього завдання:

$$f(x,y) := x^3 \cdot y^3 - x^2 - y^2 + x + y \quad g(x,y) := \sqrt{|x \cdot y|} + \sqrt{|x + y|}$$

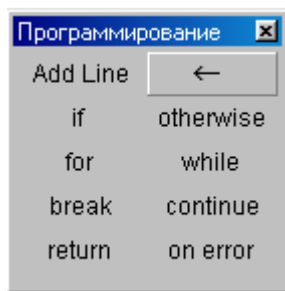
Прослідкуйте зміни графіка при зміні всіх налаштувань в діалозі **Формат 3D графіка**.

Лабораторна робота №4

Програмування

Програми в MathCAD - це просто вираження, порядок обчислення яких заданий у вигляді послідовності декількох простих кроків. Таке завдання виразів часто виявляється простіше, ніж написання звичайних виразів з безліччю вкладених дужок.

Нехай нам потрібно визначити функцію

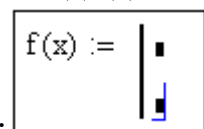


$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

Зверніть увагу на те, що підвираз $\sqrt{1+x^2}$ ми були змушені виписувати неодноразово. Побудуємо визначення тієї ж функції з використанням панелі **Програмування**.

Виконаємо такі дії:

- надрукуйте $f(x) :=$
- Натисніть кнопку  або надрукуйте символ $\downarrow$. Це призведе до створення



вертикальної смуги з мітками для приміщення операторів:

- У позиції верхньої мітки надрукуйте символ **z** і натисніть кнопку  (Привласнити значення локальної змінної) в панелі **Програмування**
- У що з'явилася справа мітці введіть вираз $\sqrt{1+x^2}$
- У позиції мітки знизу введіть вираз для остаточного обчислення $f(x)$ з використанням тільки що певною локальної змінної:

$$\frac{z+1}{z-1} + \frac{z}{1+z}$$

Відзначимо, що остаточний результат обчислення за програмою повинен бути вираженням в останньому рядку програми.

- В результаті виконаних дій маємо визначення функції:

$$f(x) := \begin{cases} z \leftarrow \sqrt{1+x^2} \\ \frac{z+1}{z-1} + \frac{z}{1+z} \end{cases}$$

□ Дії в програмі при обчисленні значення $f(x)$ виконуються послідовно зверху вниз:

- спочатку обчислюється значення змінної z ,
- а потім значення функції, при обчисленні якого використовується раніше обчислене значення z .

□ Побудоване таким чином визначення функції може бути використано згодом так само, як і будь-яка інша - для побудови графіків, рішення рівнянь і т.д.

завдання

- Визначте функцію

$$f(a,b,c) := \begin{cases} p \leftarrow \frac{a+b+c}{2} \\ \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \end{cases}$$

обчислює площу трикутника зі сторонами a, b, c за формулою Герона.

- Визначте функцію

$$f(x,y) := \begin{cases} z \leftarrow x^2 - y \\ v \leftarrow y^2 - x \\ \frac{(z+v)}{(z-v)^2 + 1} \end{cases}$$

і побудуйте її графік

Оператор if

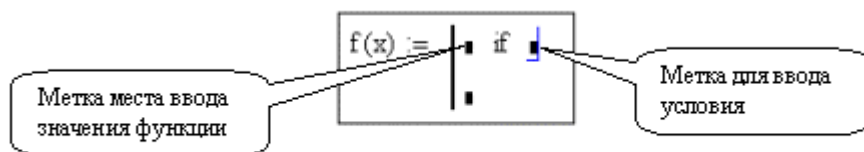
Оператор **if** використовують в тих випадках, коли потрібно, щоб деякі рядки програми виконувалися або не виконувалися в залежності від виконання умови. Нехай потрібно визначити функцію

$$f(x) = x + 1 \text{ при } x < 0 \text{ і } f(x) = 1 - x \text{ при } x > 0$$

Для цього

- введіть $f(x) :=$

- натисніть кнопку **Add Line** в панелі **Програмування**
- виділіть верхню мітку і натисніть кнопку **if** в панелі **Програмування** (годі було друкувати слово if). В результаті ви отримаєте наступне стан області введення



- в позиції лівій верхній мітки надрукуйте $x + 1$, в позиції правій верхній мітки введіть умова $x < 0$ (символ $<$ ви знайдете в панелі **Булево**, яка включається прапорцем **Вид / Панелі інструментів / Булево**)
- Виділіть нижню мітку і натисніть клавішу **if**. Ви отримаєте наступну

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{if } x \leq 0 \\ \text{if} \end{cases}$$

ситуацію:

- У позиції лівого мітки введіть вираз $1 - x$, а в позиції правого мітки умова $x > 0$.

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

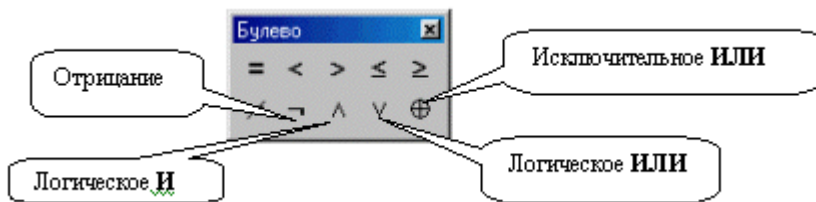
В результаті визначена функція

- Побудуйте його графік.

Функція може бути визначена по-різному на більш ніж двох ділянках. Нижче наведено приклад такої функції:

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{if } x > 0 \wedge x < 2 \\ x - 2 & \text{if } x \geq 2 \wedge x < 4 \\ 4 - x & \text{otherwise} \end{cases}$$

Умови перевіряються згори вниз. Значення **4-x**, що знаходиться в рядку зі словом **otherwise** (в інших випадках) буде вибрано, коли все вище розміщені умови виявляться помилковими. Для отримання рядка з **otherwise** використовуйте кнопку **otherwise** панелі **Програмування**. *Примітка:* Символ $\wedge$, який використовується в умовах, позначає логічну операцію **I**. Результат операції "логічне **I**" має значення **ІСТИНА** тоді і тільки тоді, коли значення **ІСТИНА** мають обидва її операнда. Позначення і кнопки інших логічних операцій, наявних в панелі **Булево** наведені на малюнку:



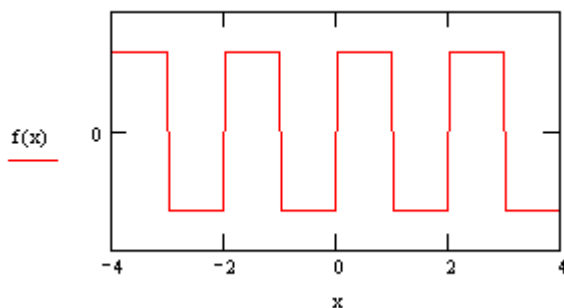
- Операція **Заперечення** дає результат, протилежний значенню операнда: заперечення **ІСТИНИ** дає **НЕПРАВДА** і навпаки.
- Операція **АБО** має значення **ІСТИНА**, коли хоча б один з операндів
- Операція **виключне АБО** має значення **ІСТИНА**, коли значення * **ІСТИНА** має тільки один з операндів

Завдання 1: визначте функцію, яка дорівнює:

- $x + 1$ в інтервалі від мінус нескінченності до 0
- 1 при $x > 0$ і $x < 1$
- $2-x$ при $x > 1$

Побудуйте графік цієї функції

Завдання 2: Зробіть те ж саме для функції, зображеної на графіку



Рекомендація: використовуйте функції

- $\text{floor}(x)$ - округлення до цілого з недоліком
- $\text{mod}(x, y)$ - залишок від ділення x на y

Теорія ймовірностей і математична статистика

MathCAD дозволяє:

- створювати послідовності псевдовипадкових чисел,
- обчислювати щільності розподілу
- функції розподілу
- інверсні функції розподілу.

У таблиці вказані деякі закони розподілу і відповідні їм функції.

Розподіл	Генератор	Формула обчислення щільності	Щільність розподілу	Функція розподілу	Зворотна функція розподілу
рівномірний	runif (n, a, b)	$1 / (b-a)$ при $x > a$ і $x < b$	dunif (x, a, b)	punif (x, a, b)	qunif (p, a, b)
нормальне	rnorm (n, m, s)	$\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$	dnorm (x, m, s)	pnorm (x, m, s)	qnorm (p, m, s)
Пуассона	rpois (n, l)	$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$	dpois (k, l)	ppois (k, l)	qpois (p, l)

де:

- n-довжина випадкової вибірки
- m -математичне очікування
- s - середньоквадратичне відхилення
- l - параметр розподілу Пуассона
- p - значення ймовірності
- x або k- значення випадкової величини

Нижче наведено перелік деяких функцій, пов'язаних з теорією ймовірностей і математичної статистики:

Функція	Опис
mean (A, B, C ...)	Обчислює середнє по всіх масивів A, B, C ...
stdev (A, B, C ...)	Середньоквадратичне відхилення по всіх масивам
corr (A, B)	Коефіцієнт кореляції за Пірсоном масивів A і B
cvar (A, B)	Коваріація масивів A і B

var (A, B, C ...)	Дисперсія, обчислена по масивах A, B, C ...
-------------------	---

Дослідження випадкових вибірок

Завдання: знайти характеристики випадкової вибірки з рівномірного розподілу і порівняти їх з теоретичними значеннями. Наведені нижче кроки ілюструються фрагментами листа MathCAD.

1. задамо діапазон рівномірного розподілу і обсяг вибірки

Диапазон равномерного
распределения
 $a := 0 \quad b := 1$

Размер выборки
 $N := 1000$

2. Визначимо щільність розподілу

Плотность вероятности
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x > a \wedge x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. Створимо вибірку випадкових чисел і помістимо її в масив

Случайная выборка помещается в вектор x
 $x := \text{runif}(N, a, b)$

4. Знайдемо вибіркове середнє

Выборочное
среднее $xsr := \text{mean}(x) \quad xsr = 0.49$

5. Підрахуємо теоретичне середнє (математичне очікування)

Теоретическое
среднее $xsrt := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad xsrt = 0.5$

6. Визначимо формулу для розрахунку вибіркового середньоквадратичне відхилення

Выборочное среднееква-
дратичное отклонение $dv := \text{stdev}(x) \cdot \sqrt{\frac{N}{N-1}}$

7. Аналогічно для теоретичного середньоквадратичне відхилення

Теоретическое средне-
квадратичное отклонение $dt := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - xsrt)^2 \cdot f(x) dx}$

8. Знайдемо їх значення:

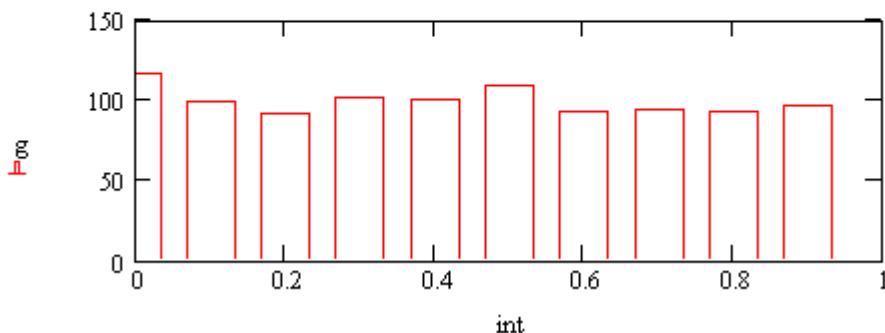
$dv = 0.291 \quad dt = 0.289$

9. Побудуємо гістограму вибіркового розподілу. MathCAD будує гістограми, використовуючи функцію **hist (interv, v)**, де

- a. **interv** масив інтервалів - **interv0, interv1 ...**

- b. **v** - вектор (масив) вибірки функція **hist** підраховує для кожного **intervi** скільки значень з вибірки **v** потрапляє в інтервал між **intervi** і **intervi + 1**

Интервалы
гистограммы $j := 0..10 \quad \text{int}_j := a + \frac{(b-a)}{10} \cdot j$
ГИСТОГРАММА
 $g := \text{hist}(\text{int}, x)$



Повторіть завдання для нормального розподілу з змінними параметрами μ, σ .

Апроксимація

Нехай значення функції y_i задані на множині значень аргументу x_i ($i = 0 \dots N$). Требується знайти апроксимацію (наближення) $F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x)$ таке, щоб функція $F(x)$ проходила якомога ближче до точок (x_k, y_k) . Якщо в якості міри близькості ми візьмемо суму квадратів відхилень $(F(x_i) - y_i)^2$, то отримаємо задачу середньоквадратической апроксимації. Нашою метою є відшукування коефіцієнтів a_i . Для вирішення цього завдання може бути використана функція **linfit** (x, y, F), де x - вектор значень аргументу, y - вектор значень функції в точках x_i , F - вектор функцій, складових функціональний базис. Функція **linfit** повертає вектор коефіцієнтів a .

Завдання: побудувати апроксимацію параболою $F(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$ для

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 2 \\ 2.2 \\ 3.1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 3.1 \\ 3.3 \\ 3.2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

функції, заданої на множині точок:

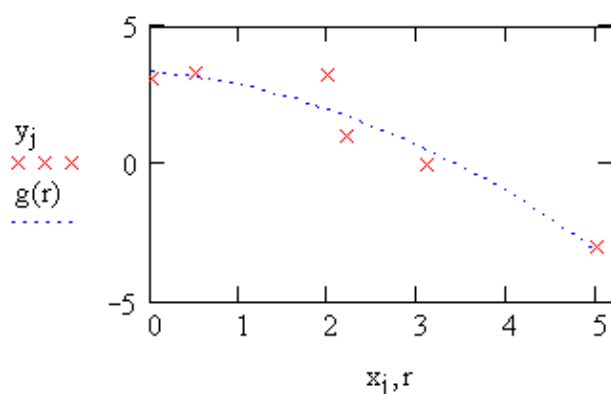
- визначимо векторну функцію, яка описує функціональний базис:

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$s := \text{linfit}(x, y, F) \quad s = \begin{pmatrix} 3.347 \\ -0.279 \\ -0.204 \end{pmatrix}$$

- знайдемо коефіцієнти апроксимації ai:
- для того, щоб візуально оцінити якість апроксимації, побудуємо суміщені графіки вихідної і апроксимуючої функцій:

$$g(t) := F(t) \cdot s \quad j := 0..5 \quad r := 0, 0.1..5$$



завдання: Знайдіть апроксимацію функції, заданої в точках

$$x := (0.5 \ 1 \ 1.2 \ 1.6 \ 2 \ 2.7 \ 3.2 \ 6)$$

$$y := (9 \ 8 \ 7 \ 5.5 \ 4.4 \ 3 \ 2 \ 0)$$

в функціональному базисі, складеному з функцій: $f_0 = 1/x$; $f_1 = 1$; $f_2 = x$. Побудуйте суміщені графіки.

завдання: Знайдіть апроксимацію функції $y = \cos(x)$ поліномом 4 ступеня на відрізку від $-\pi/2$ до $\pi/2$.

У тому випадку, коли потрібно апроксимація лінійною функцією, можна скористатися функцією **line (vx, vy)**, де vx - масив абсцис, а vy - масив ординат. Функція повертає вектор, що містить коефіцієнти a, b апроксимації $y = a * x + b$.

завдання: масиви абсцис і ординат точок функції, що апроксимується:

$$x := (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \quad y := (2 \ 2.8 \ 3.2 \ 3.8 \ 4.7 \ 6)$$

знайдіть лінійну апроксимацію. Підказка: оскільки x і y - вектори - рядки, а функція line очікує вектори стовпці, не забудьте їх транспонувати.

$$z := \text{line} \begin{pmatrix} x^T, y^T \end{pmatrix}$$

Читання даних з файлу і запис в файл

Функція READPRN ("ім'я текстового файлу") повертає масив числових даних, лічених з файлу. Наприклад, нехай в текстовому файлі на ім'я "data1.txt" знаходяться дані:

1 2 3

4 5 6

7 8 9

10 11 12

і змінна x визначається наступним чином:

```
x := READPRN("data1.txt")
```

якщо після цього поцікавитися значенням змінної x, то виявиться, що це матриця 4 * 3:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Значення її елементів MathCAD прочитав з текстового файлу data1.txt. Якщо згодом вміст файлу зміниться, то для того щоб прочитати оновлені дані з файлу, слід виконати команду **Математика / Прорахувати документ**. Файл може містити заголовок - деякий довільний пояснювальний текст. Однак цей заголовок не повинен містити чисел. Виявивши перше число в файлі, MathCAD вважає, що почався масив чисел і починає його зчитувати.

Функція WRITEPRN, звернення до якої має вигляд WRITEPRN ("ім'я файлу"): = <ім'я масиву> пише дані з масиву <ім'я масиву> в файл "ім'я файлу", наприклад:

```
y := runif(1000,0,1)    WRITEPRN("data2.txt") := y
```

тут перша операція генерує масив з 1000 рівномірно розподілених на відрізок 0; 1 випадкових чисел, а друга записує цей масив в файл data2.txt.

Функція APPENDPRN ("ім'я файлу") пише дані з масиву в уже існуючий файл, наприклад:

```
APPENDPRN("data3.txt") := y
```