

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи студентів
за темою «Операторний метод при розрахунках перехідних процесів в
лінійних електричних колах»

з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки»,
«Теорія електричних та магнітних кіл»,
«Теорія електромагнітних кіл»,
«Теорія електричних кіл та сигналів»,
«Теорія електричних кіл»

для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 28.01.2022р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів за темою «Операторний метод при розрахунках перехідних процесів в лінійних електричних колах» з дисциплін з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки» «Теорія електричних та магнітних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Теорія електричних кіл та сигналів», «Теорія електричних кіл» для студентів спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», 171 «Електроніка», 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / уклад.: Б. І. Кубрик, С. А. Литвиненко – Харків : НТУ «ХП», 2022. – 32 с.

Укладачі: Б. І. Кубрик, С. А. Литвиненко.

Рецензент: А. В. Гетьман

Кафедра теоретичних основ електротехніки

ВСТУП

Класичний метод аналізу перехідних процесів добре розкриває фізичну цю процесів та наочність зв'язків між електричними величинами, які виражаються диференціальними рівняннями Кірхгофа. В той же час цей метод потребує багаторазового розв'язання алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування. З ускладненням електричних кіл та зі зростанням їхнього порядку об'єм розрахунків суттєво збільшується. Цих недоліків позбавлений операторний метод. Відповідно до нього рівняння перехідних процесів в лінійних колах, які є лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, можна інтегрувати операторним методом, який базується на перетворенні Лапласа. Це перетворення дозволяє перенести розв'язання з області функції дійсної змінної t в область функції комплексної змінної $p = \delta + j\omega$. При цьому кожній часовій функції $f(t)$, яка називається оригіналом, ставиться у відповідність функція $F(p)$, названа зображенням. Внаслідок такої заміни диференціальні рівняння зводяться до алгебраїчних відносно зображень шуканої величини. Потім по зображенню знаходять оригінал.

Операторний метод, як і метод комплексних амплітуд, відноситься до символічних методів. Проте, у той час, як метод комплексних амплітуд застосовується тільки для гармонічних функцій, операторний метод є більш універсальним і застосовується до широкого класу функцій. Тому цей метод широко використовується в інженерній практиці для аналізу перехідних процесів,

коли вплив на електричне коло описується різноманітними видами аналітичних функцій, в тому числі й імпульсними.

У цих методичних вказівках наведені основні теоретичні положення операторного методу, ряд прикладів його використання для розрахунку перехідних процесів в колах постійного та гармонійного струму, а також при впливах вхідних імпульсних сигналів, та варіанти завдань для самостійного виконання.

Матеріали цих методичних вказівок допоможуть студентам у засвоєнні теорії та набутті практичних навичок використання операторного методу для аналізу перехідних процесів в електричних колах.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Операторний метод доцільно використовувати для аналізу роботи електричних кіл з кількістю накопичувачів електричної та магнітної енергії більше двох, в усталених та перехідних режимах. Для розрахунку кола операторним методом необхідно знати топологію кола та його параметри.

1.1. Основи операторного методу. Оригінали і зображення

В основі методу лежить заміна функції $f(t)$ дійсної змінної t (струм $i(t)$ або напруга $u(t)$), яка називається оригіналом, функцією $F(p)$, комплексної змінної p , яка називається зображенням. Ці функції пов'язані співвідношенням прямого перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

де $f(t)$ – оригінал,

$F(p)$ – зображення за Лапласом.

Скорочено такий зв'язок можна записати так:

$$F(p) \doteq f(t).$$

Застосувавши перетворення Лапласа до інтегро-диференціального рівняння, що описує роботу електричного кола, отримують алгебраїчне рівняння, що суттєво спрощує розрахунок.

Зображення $F(p)$ можна визначити по операторній схемі не застосовуючи перетворення Лапласа до інтегро-диференціального рівняння кола.

1.2. Операторна схема. Урахування ненульових початкових умов

При розрахунку перехідних процесів операторним методом операторна схема складається для режиму після комутації. При цьому треба виконати заміни:

1) всім змінним величинам (струми, напруги, ЕРС) в операторній схемі відповідають їхні зображення: $i(t) \doteq I(p)$, $u(t) \doteq U(p)$, $e(t) \doteq E(p)$, $j(t) \doteq J(p)$;

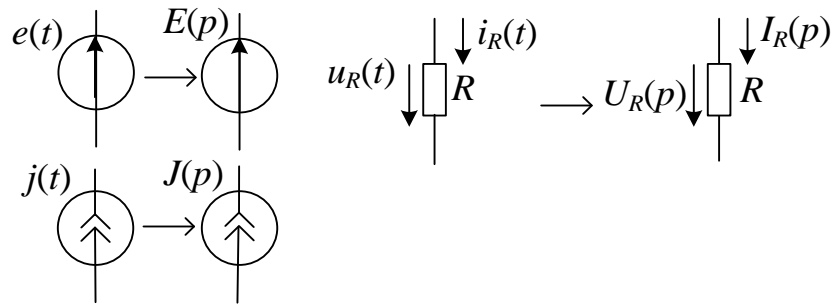


Рисунок 1.1

2) котушці індуктивності відповідає послідовне з'єднання операторного опору Lp та додаткового джерела напруги з ЕРС $L \cdot i_L(0-)$, спрямованого за струмом $i_L(t)$, яке враховує ненульові початкові умови, де $i_L(0-)$ – значення струму в котушці індуктивності в момент комутації (рис. 1.2);

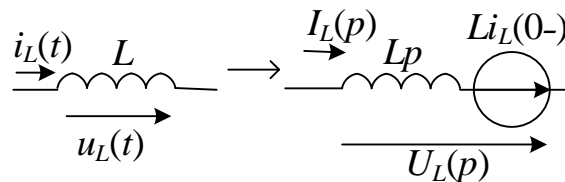


Рисунок 1.2

3) конденсатору з ємністю C відповідає послідовне з'єднання операторного опору $\frac{1}{pC}$ та джерела напруги з ЕРС $\frac{U_c(0-)}{p}$, спрямованого проти напруги на конденсаторі, де $U_c(0-)$ – значення напруги на конденсаторі в момент комутації (рис.1.3);

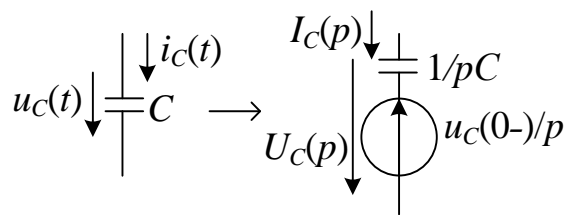


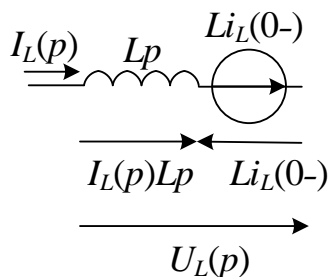
Рисунок 1.3

4) резистору з опором R відповідає операторний опір R (рис. 1.1)

Зверніть увагу: напрямок ЕРС $L \cdot i_L(0-)$ збігається з напрямком струму $i_L(t)$, а ЕРС $\frac{U_c(0-)}{p}$ спрямована проти напруги на конденсаторі $u_c(t)$.

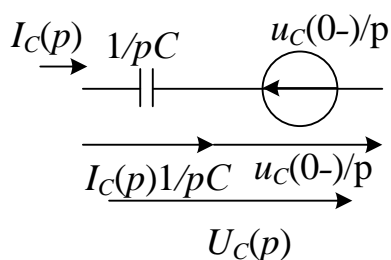
1.3. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі

Розрахунок зображень струмів та напруг в операторній схемі виконується з використанням законів Ома та Кірхгофа в операторній формі, де початкові умови враховані додатковими джерелами напруги.



$$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0-); \quad (1.1)$$

Рисунок 1.4



$$U_c(p) = \frac{1}{pC} \cdot I_c(p) + \frac{U_c(0-)}{p}. \quad (1.2)$$

Рисунок 1.5

За нульових початкових умов:

$$U_L(p) = pL \cdot I_L(p); \quad (1.3)$$

$$U_c(p) = \frac{1}{pC} \cdot I_c(p). \quad (1.4)$$

Операторна напруга на резисторі:

$$U_R(p) = R \cdot I_R(p). \quad (1.5)$$

На рис. 1.6 показані гілка ab електричної схеми та відповідна їй операторна схема заміщення.

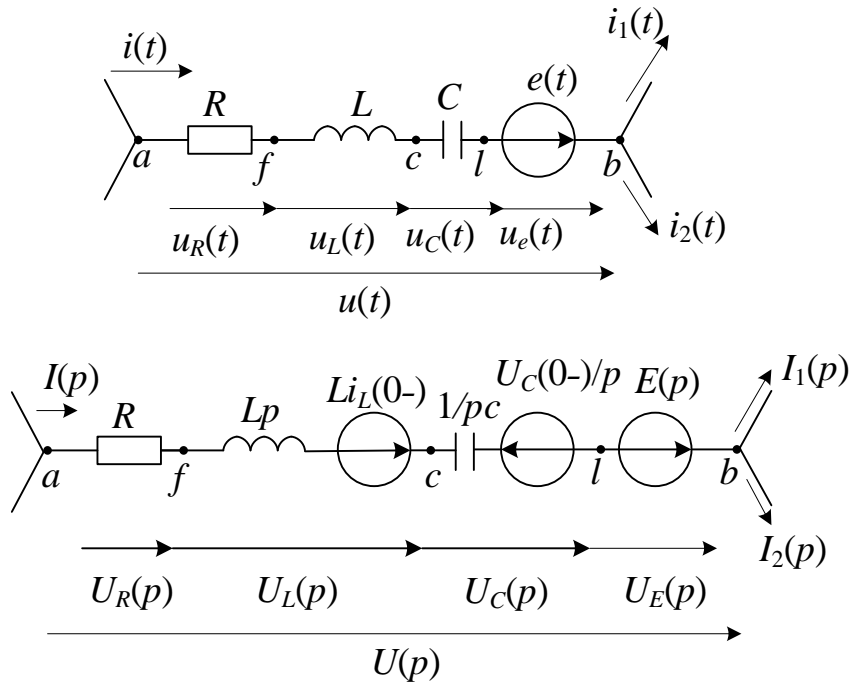


Рисунок 1.6

Зображення струму гілки $I(p)$ пов'язане із зображенням напруги $U_{ab}(p)$, прикладеної до вузлів a і b , законом Ома для гілки

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E(p) + L \cdot i_L(0-) - \frac{U_C(0-)}{p}}{Z(p)},$$

де $E(p)$ – зображення ЕРС $e(t)$;

$i_L(0-)$ та $U_C(0-)$ – значення струму в котушці і напруги на конденсаторі в початковий момент часу;

$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$ – операторний опір гілки.

Операторний опір будь-якого кола записується так само, як і опір кола в комплексній формі, в якій $j\omega$ замінено на p .

Перший закон Кірхгофа в операторній формі

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0 . \quad (1.6)$$

Другий закон Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0, \quad (1.7)$$

де m – число струмів у вузлі;

n – число напруг у контурі.

Для вузла b (рис. 1.6) перший закон Кірхгофа в операторній формі:

$$I_1(p) + I_2(p) - I(p) = 0;$$

другий закон Кірхгофа для контуру з гілкою ab :

$$U_R(p) + U_L(p) + U_C(p) + U_E(p) - U_{ab}(p) = 0.$$

1.4. Визначення операторних зображень струмів та напруг

При отриманні зображень струмів і напруг з операторних схем заміщення крім законів Ома і Кірхгофа можна застосовувати будь-який метод розрахунку електричного кола з використанням у ньому змінних величин і параметрів в операторній формі (методи контурних струмів, вузлових потенціалів, накладання, еквівалентного генератора і т. д.).

1.5. Визначення оригіналів струмів та напруг по операторних зображеннях

Оригінал $f(t)$ можна визначити за теоремою розкладання, табличним або іншими методами.

Теорема розкладання. Для використання теореми розкладання зображення струму або напруги необхідно представити у вигляді раціонального дроби:

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \\ &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \end{aligned}$$

де степінь $m < n$; a_k, b_k – дійсні числа,

p_1, p_2, \dots, p_n – корені рівняння $F_2(p) = 0$.

Якщо корені різні (дійсні чи комплексні), то $f(t)$ знаходиться з виразу

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \stackrel{\text{def}}{=} f(t) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right). \quad (1.8)$$

Для пар комплексних спряжених коренів оригінал $f(t)$ можна знайти з формули

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \stackrel{\text{def}}{=} f(t) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right). \quad (1.9)$$

1.6. Оригінали найуживаніших функцій і їх зображення

При визначенні оригіналу табличним методом користуються спеціальними таблицями оригіналів і зображень. При розрахунку електричних кіл найбільш часто зустрічаються такі оригінали і зображення:

Таблиця 1.

Оригінал	Операторне зображення
A	$\frac{A}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$
$\sin j\omega$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi)$	$\frac{(p + \alpha) \sin \psi + \omega \cos \psi}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$

1.7. Методика розрахунку перехідних процесів операторним методом

1. Здійснюється аналіз схеми електричного кола до комутації. Мета аналізу – визначення $U_c(0-)$ та $i_L(0-)$.

2. Здійснюється аналіз схеми електричного кола після комутації. Для цього необхідно виконати такі дії:

а) на підставі схеми кола складається операторна схема заміщення;

б) з операторної схеми заміщення за допомогою одного з методів розрахунку знаходиться шукана величина в операторній формі;

в) за теоремою розкладання, табличного або іншого методу знаходиться оригінал шуканої величини.

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Завдання 1

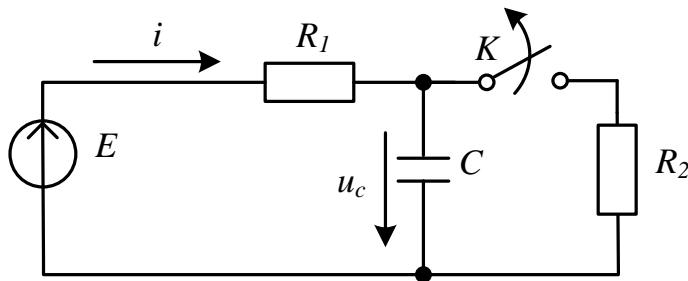


Рисунок 2.1

Дано:

$$E = 100 \text{ В};$$

$$R_1 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 15 \text{ Ом};$$

$$C = 20 \text{ мкФ}.$$

Знайти закон зміни струму і напруги на конденсаторі при розмиканні ключа K .

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації $t < 0$ (ключ K замкнутий).

Напруга конденсаторі

$$U_c(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = 75 \text{ В},$$

тобто початкові умови ненульові.

Складемо операторну схему (рис. 2.2) для кола після комутації (ключ K розімкнений).

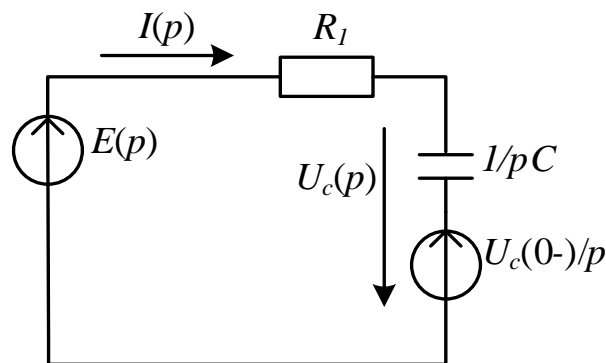


Рисунок 2.2

Послідовно з конденсатором вводимо додаткову ЕРС $\frac{U_c(0)}{p}$, яка враховує

ненульові початкові умови.

Визначимо зображення струму за законом Ома в операторній формі:

$$I(p) = \frac{E(p) - \frac{U_c(0)}{p}}{R_1 + \frac{1}{pC}} = \frac{E - \frac{ER_2}{p(R_1 + R_2)}}{pR_1C + 1} \cdot pC = \frac{ER_1C}{(R_1 + R_2)(pR_1C + 1)} =$$

$$= \frac{ER_1C}{(R_1 + R_2)R_1C} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{R_1C}} = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{R_1C}}.$$

Для визначення оригіналу струму скористаємося табличним методом (Табл.1). Струм $i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{R_1C}}$.

Використавши чисельні значення, отримаємо:

$$i(t) = \frac{100}{5 + 15} e^{-\frac{t}{5 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 5e^{-10^4 t} \text{ А.}$$

Визначимо напругу на конденсаторі:

$$U_c(t) = E - iR_1 = E - \frac{E}{R_1 + R_2} R_1 e^{-\frac{t}{R_1C}} = 100 - \frac{100}{5 + 15} \cdot 5e^{-\frac{t}{5 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (100 - 25e^{-10^4 t}) \text{ В.}$$

Виконаємо перевірку:

$$\text{за } t = 0 \quad u_c(0) = 100 - 25 = 75 \text{ В; } i(0) = 5 \text{ А;}$$

$$\text{за } t \rightarrow \infty \quad u_c(\infty) = E = 100 \text{ В; } i(\infty) = 0 \text{ А,}$$

що відповідає початковим і сталим значенням напруги і струму через конденсатор.

Завдання 2

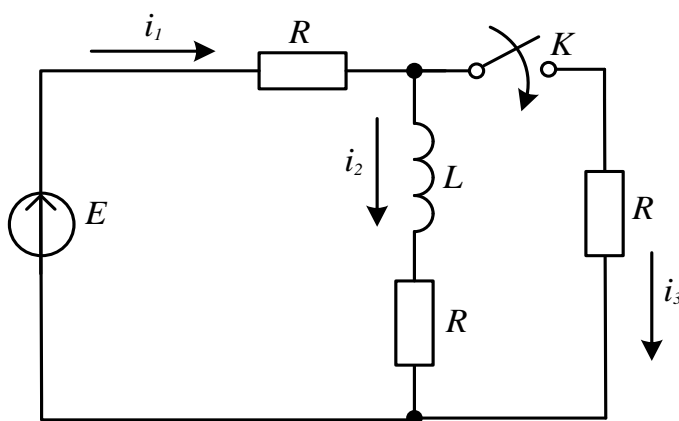


Рисунок 2.3

Дано: $E = 300 \text{ В;}$

$R = 10 \text{ Ом;}$

$L = 0,15 \text{ Гн.}$

Знайти закон вимірювання струму в котушці $i_2(t)$.

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації $t < 0$ (ключ K розімкнений).
Струм в котушці за законом Ома:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{2R} = \frac{300}{20} = 15 \text{ А.}$$

Складемо операторну схему (рис. 2.4) для стану кола після комутації (ключ K замкнутий.) Послідовно з котушкою індуктивності вводимо додаткову ЕРС $Li_2(0)$, яка враховує ненульові початкові умови.

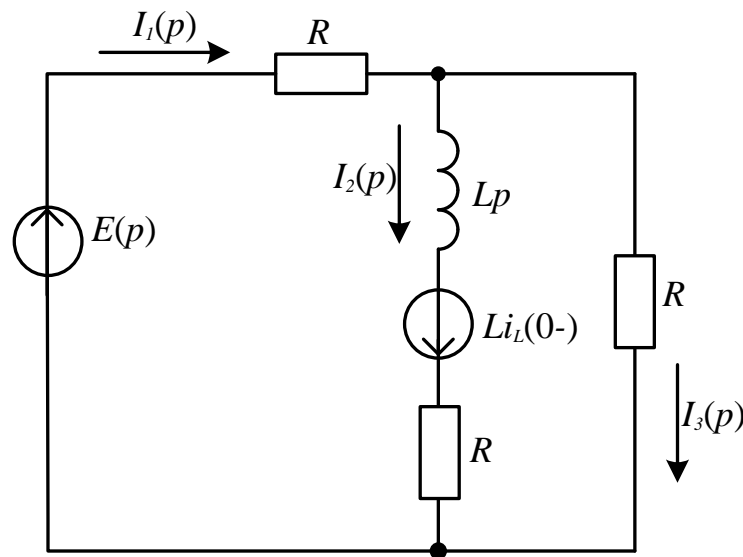


Рисунок 2.4

Знайдемо зображення струму в котушці індуктивності за допомогою методу накладання:

$$I_2(p) = I_2'(p) + I_2''(p),$$

де $I_2'(p)$ та $I_2''(p)$ – струми, викликані відповідно джерелами $E(p)$ і $Li_2(0)$.

$$\begin{aligned} I_2'(p) &= \frac{E(p)}{R + \frac{(R + Lp) \cdot R}{R + Lp + R}} \cdot \frac{R}{R + Lp + R} = \frac{E \cdot R}{p[R(2R + Lp) + (R + Lp)R]} = \\ &= \frac{E}{p(2R + Lp + R + Lp)} = \frac{E}{p(2Lp + 3R)}; \end{aligned}$$

$$I_2''(p) = \frac{Li_2(0)}{R + Lp + \frac{R \cdot R}{2R}} = \frac{Li_2(0)}{R + Lp + \frac{3}{2}R} = \frac{2Li_2(0)}{2Lp + 3R}.$$

Таким чином,

$$I_2(p) = \frac{E}{p(2Lp + 3R)} + \frac{2Li_2(0)}{2Lp + 3R} = \frac{E}{3R} \cdot \frac{\frac{3R}{2L}}{p\left(p + \frac{3R}{2L}\right)} + \frac{2Li_2(0)}{2L} \cdot \frac{1}{p + \frac{3R}{2L}}.$$

Для визначення оригіналу струму $i_2(t)$ скористаємося табличним методом. Згідно (Табл.1)

$$i_2(t) = \frac{E}{3R} \left(1 - e^{-\frac{3R}{2L}t}\right) + i_2(0)e^{-\frac{3R}{2L}t} = \frac{E}{3R} - \frac{E}{3R}e^{-\frac{3R}{2L}t} + \frac{E}{2R}e^{-\frac{3R}{2L}t} = \frac{E}{3R} + \frac{E}{6R}e^{-\frac{3R}{2L}t}.$$

Використавши чисельні значення, отримаємо:

$$i_2(t) = \frac{300}{30} + \frac{300}{60}e^{-\frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,15}t} = 10 + 5e^{-100t} \text{ А.}$$

Зробимо перевірку: за $t = 0$ $i_2(0) = 15 \text{ А}$;
за $t = \infty$ $i_2(\infty) = 10 \text{ А}$,

що відповідає початковому і сталому значенням струму.

Завдання 3

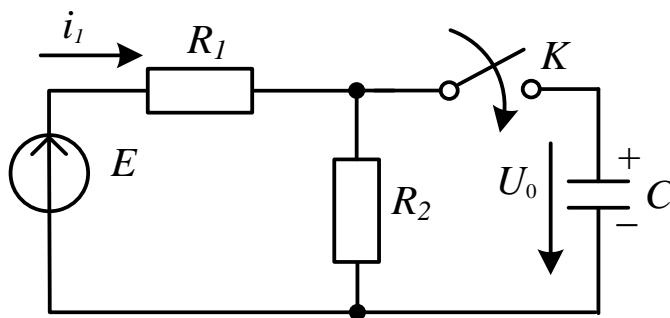


Рисунок 2.5

Дано: $E = 10 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$,
 $U_0 = 10 \text{ В}$.

Знайти закон зміни струму нерозгалуженого кола при замиканні ключа K , що підключає конденсатор C , попередньо заряджений до напруги U_0 .

Розв'язання

До комутації (ключ K розімкнений) напруга на конденсаторі

$$U_c(0-) = U_0 = 10 \text{ В},$$

тобто початкові умови – нульові.

Складемо операторну схему (рис. 2.6) для стану кола після комутації (ключ K розімкнений).

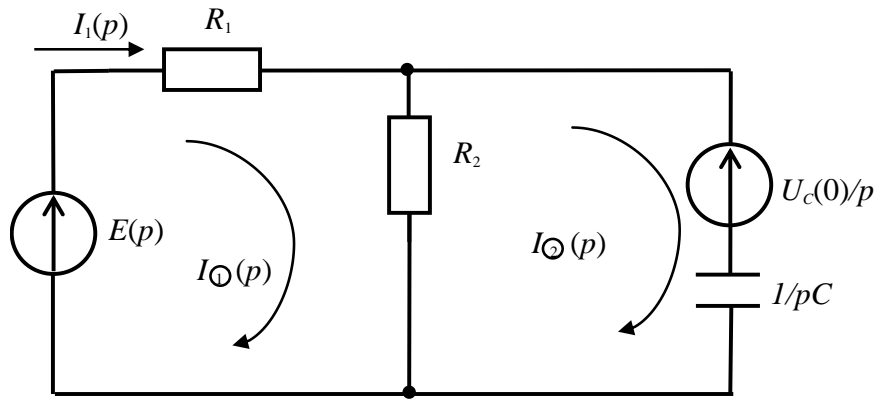


Рисунок 2.6

Визначимо зображення струму $I_1(p)$ за допомогою методу контурних струмів.

Запишемо в операторній формі рівняння згідно з методом контурних струмів,

$$\begin{aligned} z_{11}(p)I_{\text{⊙}}(p) + z_{12}(p)I_{\text{⊙}}(p) &= E_{\text{⊙}}(p); \\ z_{21}(p)I_{\text{⊙}}(p) + z_{22}(p)I_{\text{⊙}}(p) &= E_{\text{⊙}}(p), \end{aligned}$$

де власні операторні опори контурів:

$$\begin{aligned} z_{11}(p) &= R_1 + R_2 = 20; \\ z_{22}(p) &= R_2 + \frac{1}{pC} = 10 + \frac{10^6}{p}; \end{aligned}$$

загальний операторний опір контурів:

$$z_{12}(p) = z_{21}(p) = -R_2 = -10.$$

Операторні контурні ЕРС:

$$\begin{aligned} E_{\text{⊙}}(p) &= E(p) = \frac{E}{p} = \frac{10}{p}; \\ E_{\text{⊙}}(p) &= -\frac{U_c(0)}{p} = -\frac{U_0}{p} = -\frac{10}{p}. \end{aligned}$$

Операторний визначник:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} z_{11}(p) & z_{12}(p) \\ z_{21}(p) & z_{22}(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + \frac{10^6}{p} \end{vmatrix} = 100 + \frac{2 \cdot 10^7}{p}.$$

Операторний контурний струм 1-го контуру:

$$I_1(p) = I_{\oplus}(p) = \frac{10^5}{p(p+2 \cdot 10^5)} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 10^5}{p(p+2 \cdot 10^5)}.$$

Оригінал струму $i_1(t)$ визначимо табличним методом. Згідно (13)

$$i_1(t) = \frac{10^5}{2 \cdot 10^5} (1 - e^{-2 \cdot 10^5 t}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2 \cdot 10^5 t}) = 0,5 - 0,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А.}$$

Напруга на конденсаторі

$$u_C(t) = E - i_1 R_1 = 10 - (0,5 - 0,5e^{-2 \cdot 10^5 t}) \cdot 10 = 10 - 5 + 5e^{-2 \cdot 10^5 t} = 5 + 5e^{-2 \cdot 10^5 t}.$$

Перевірка:

за $t = 0$ $u_C(0) = 10 \text{ В};$

за $t = \infty$ $u_C(\infty) = 5 \text{ В},$

з розрахунку схеми за $t = \infty$:

$$u_C(\infty) = i_2 R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{10}{20} \cdot 10 = 5 \text{ В},$$

що підтверджує правильність результату.

Завдання 4

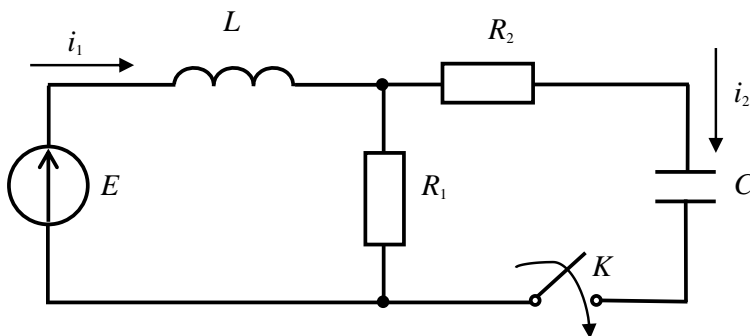


Рисунок 2.7

Дано: $E = 10 \text{ В};$

$L = 0,01 \text{ Гн};$

$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом};$

$C = 10 \text{ мкФ}.$

Знайти закон зміни струму в конденсаторі.

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації ($t < 0$, ключ K розімкнений).

Струм через котушку індуктивності $i_L(0-) = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{2 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А},$ напруга

на конденсаторі $U_C(0-) = 0$, тобто маємо нульові початкові умови для струму, що проходить через котушку, і нульові – для напруги на конденсаторі. Складемо операторну схему (рис. 2.8) (ключ K замкнутий).

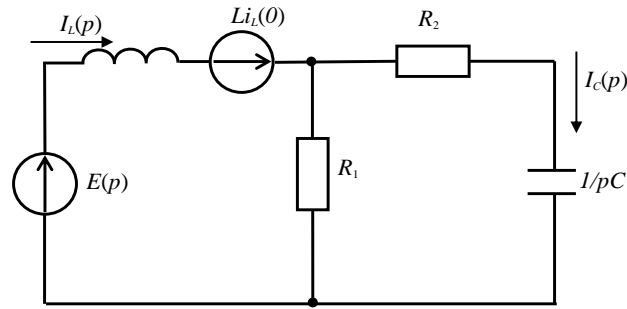


Рисунок 2.8

Визначимо зображення струму $I_L(p)$ за законом Ома в операторній формі:

$$I_L(p) = \frac{E(p) + Li_L(0)}{pL + \frac{R_1 \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}}} = \frac{\left(\frac{E}{p} + Li_L(0) \right) \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} \right)}{pLR_1 + pL \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) + R_1 \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right)}.$$

Знайдемо зображення шуканого струму $I_C(p)$ за правилом розкиду:

$$\begin{aligned} I_C(p) &= I_L(p) \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{(E + pLi_L(0))R_1C}{p^2LC(R_1 + R_2) + p(L + CR_1R_2) + R_2} = \\ &= \frac{Li_L(0)R_1C}{LC(R_1 + R_2)} \cdot \frac{p + \frac{E}{Li_L(0)}}{p^2 + p \frac{L + CR_1R_2}{LC(R_1 + R_2)} + \frac{R_1}{LC(R_1 + R_2)}} = \\ &= \frac{i_L(0)R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{p + \frac{E}{Li_L(0)}}{p^2 + p \frac{L + CR_1R_2}{LC(R_1 + R_2)} + \frac{R_1}{LC(R_1 + R_2)}}. \end{aligned}$$

Числові значення:

$$\begin{aligned} I_C(p) &= \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} \cdot \\ &\cdot \frac{10}{p + \frac{10}{0,01 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} = \\ &= \frac{0,01 + 0,01 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{0,01 \cdot 0,01 \cdot 10^{-6} \cdot (2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3)} + \frac{2 \cdot 10^3}{0,01 \cdot 0,01 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^3} = \\ &= 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{p \cdot 2 \cdot 10^5}{p^2 + p \cdot 14 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^9}. \end{aligned}$$

Визначимо оригінал струму $i_C(t)$ за допомогою теореми розкладання.

Запишемо:

$$F_1(p) = 2 \cdot 10^{-3}(p \cdot 2 \cdot 10^5);$$

$$F_2(p) = p^2 + 14 \cdot 10^4 p + 4 \cdot 10^9;$$

$$F_2'(p) = 2p + 14 \cdot 10^4.$$

Обчислимо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$$p_{1,2} = -\frac{14 \cdot 10^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-14 \cdot 10^4}{2}\right)^2 - 4 \cdot 10^9} = -7 \cdot 10^4 \pm 3 \cdot 10^4;$$

$$p_1 = -4 \cdot 10^4, \quad p_2 = -10 \cdot 10^4.$$

Обчислимо значення :

$$F_1(p_1) = 2 \cdot 10^{-3}(-4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5) = 3,2 \cdot 10^2;$$

$$F_1(p_2) = 2 \cdot 10^{-3}(-10 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5) = 2 \cdot 10^2;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-4 \cdot 10^4) + 14 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-10 \cdot 10^4) + 14 \cdot 10^4 = -6 \cdot 10^4.$$

Для знаходження оригіналу використаємо отримані значення в формулі розкладання:

$$i_C(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{3,2 \cdot 10^2}{6 \cdot 10^4} e^{-4 \cdot 10^4 t} + \frac{2 \cdot 10^2}{-6 \cdot 10^4} e^{-10 \cdot 10^4 t} =$$

$$= (0,533 e^{-4 \cdot 10^4 t} - 0,533 e^{-10^5 t}) \cdot 10^{-2} \text{ А.}$$

Задача 5

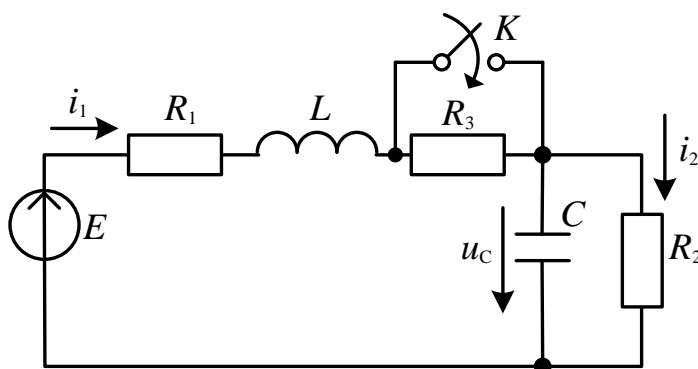


Рисунок 2.9

Дано: $E = 125 \text{ В};$

$L = 0,01 \text{ Гн};$

$R_1 = 50 \text{ Ом};$

$R_2 = 200 \text{ Ом};$

$R_3 = 250 \text{ Ом};$

$C = 5 \text{ мкФ};$

Знайти закон зміни струму в нерозгалуженій частині кола

Розв'язання

Розглянемо схему до комутації $t < 0$ (ключ K розімкнений).

Струм через індуктивність:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{125}{50 + 200 + 250} = 0,25 \text{ A},$$

напруга на конденсаторі $u_C(0-) = i_2(0-)R_2 = 0,25 \cdot 200 = 50 \text{ В}$, тобто маємо ненульові початкові умови.

Складемо операторну схему (рис. 2.10) (ключ K замкнутий).

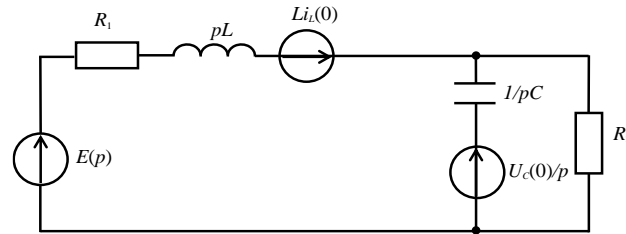


Рисунок 2.10

Визначимо зображення струму $I_1(p)$ за допомогою методу накладання:

$$I_1(p) = I_1'(p) + I_1''(p),$$

де $I_1'(p)$ та $I_1''(p)$ – струми, викликані відповідно ЕРС $E(p) + Li_L(0)$ та $\frac{U_C(0)}{p}$;

$$I_1'(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li_L(0)}{R_1 + pL + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}} = \frac{(E + pLi_L(0)) \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right)}{p \left(R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{pC} + pLR_2 + \frac{pL}{pC} + R_2 \frac{1}{pC} \right)} =$$

$$= \frac{(E + pLi_L(0))(pCR_2 + 1)}{p(pCR_1R_2 + R_1 + p^2CLR_2 + pL + R_2)} = \frac{EpCR_2 + Ep^2LCR_2i_L(0) + pLi_L(0)}{p(p^2CLR_2 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2)};$$

$$I_1''(p) = \frac{-\frac{U_C(0)}{p}}{\frac{1}{pC} + \frac{(R_1 + pL)R_2}{R_1 + pL + R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + pL + R_2} = \frac{-U_C(0)R_2}{p \left[\frac{1}{pC}(R_1 + pL + R_2) + (R_1 + pL)R_2 \right]} =$$

$$= \frac{-U_C(0)R_2C}{p^2LCR_2 + p(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2}.$$

Таким чином,

$$I_1(p) = \frac{p^2LCR_2i_L(0) + p[ECR_2 + Li_L(0) - U_C(0) \cdot R_2C] + E}{p[p^2LCR_2 + p(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2]} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Числові значення:

$$\begin{aligned} F_1(p) &= p^2 \cdot 0,01 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 0,25 + \\ &+ p(125 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + 0,01 \cdot 0,25 - 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200) + 125 = \\ &= 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 0,0775p + 125; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(p) &= p[p^2 \cdot 0,01 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + p(0,01 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 200) + 50 + 200] = \\ &= p(10^{-5} p^2 + 0,06p + 250). \end{aligned}$$

Знайдемо похідну від $F_2(p)$:

$$F'_2(p) = 3 \cdot 10^{-5} p^2 + 2p \cdot 0,06 + 250 = 3 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,12 + 250.$$

Визначимо оригінал струму $i_1(t)$ за допомогою теореми розкладання. Для цього знайдемо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$$p(10^{-5} p^2 + 0,06p + 250) = 0,$$

$$\begin{aligned} p_1 = 0, \quad p_{23} &= \frac{-0,06 \pm \sqrt{0,06^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 250}}{2 \cdot 10^{-5}} = \frac{-0,06 \pm j0,08}{2 \cdot 10^{-5}} = -3000 \pm j4000. \\ p_2 &= -3000 + j4000, \quad p_3 = -3000 - j4000. \end{aligned}$$

Визначимо значення функції $F_1(p)$ і похідної $F'_2(p)$ за $p = p_1$, $p = p_2$ та $p = p_3$.

$$F_1(p_1) = 125;$$

$$F_1(p_2) = 2,5 \cdot 10^{-6}(-3000 + j4000)^2 + 0,0775(-3000 + j4000) + 125 = -125 + j250;$$

$$F_1(p_3) = 2,5 \cdot 10^{-6}(-3000 - j4000)^2 + 0,0775(-3000 - j4000) + 125 = -125 - j250;$$

$$F'_2(p_1) = 250;$$

$$F'_2(p_2) = 3 \cdot 10^{-5}(-3000 + j4000)^2 + 0,12(-3000 + j4000) + 250 =$$

$$= 3 \cdot 10^{-5}(9 \cdot 10^6 + j2 \cdot 12 \cdot 10^6) - 360 + j480 + 250 = -3320 + j240;$$

$$F'_2(p_3) = 3 \cdot 10^{-5}(-3000 - j4000)^2 + 0,12(-3000 - j4000) + 250 = -320 - j240.$$

Для знаходження оригіналу скористаємося формулами розкладання (1.8) та (1.9):

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} \right],$$

оскільки корінь p_1 – дійсний, а корені p_2 та p_3 – комплексно-спряжені.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{125}{250} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{(-125 + j250)}{-320 + j240} e^{(-3000 + j4000)t} \right\} = 0,5 + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{281 e^{j116^\circ 30'}}{400 e^{j216^\circ 50'}} e^{-3000t} \cdot e^{j4000t} \right\} = 0,5 + \operatorname{Re} \left\{ 1,4 e^{j(4000t - 100^\circ 20')} \right\} e^{-3000t} = \\ &= 0,5 + 1,4 e^{-3000t} \cos(4000t - 100^\circ 20') = 0,5 + 1,4 e^{-3000t} \sin(4000t - 10^\circ 20'). \end{aligned}$$

Перевірка: за $t = 0$ струм $i_1(0) = 0,5 + 1,4 \sin(-10^\circ 20') = 0,25$, що задовольняє початковій умові.

Завдання 6

Дано: $u(t) = 200 \sin \omega t$ В,

$R = 10$ Ом,

$L = 0,1$ Гн,

$\omega = 100$ с⁻¹.

Визначити струм $i(t)$

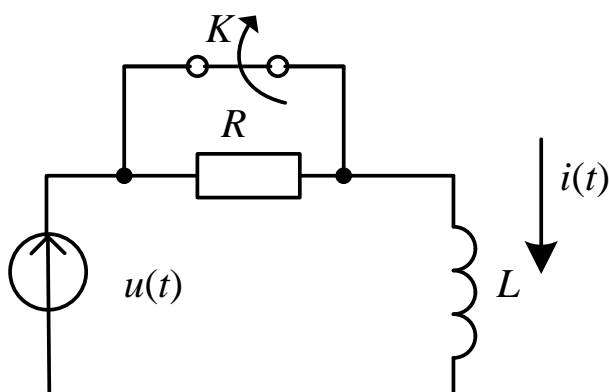


Рисунок 2.11

Розв'язання

Здійснимо аналіз схеми до комутації. Комплексним методом розрахуємо струм $i(t)$:

$$I_m = \frac{U_m}{Z},$$

де $U_m = 200$ В; $Z = j\omega L = j10$ Ом.

Таким чином, $I_m = \frac{200}{j10} = -j20$ А.

Переходимо до оригіналу: $i(t) = 20 \sin(\omega t - 90^\circ)$ А.

Початкове значення струму: $i(0^-) = 20 \sin(-90^\circ) = -20$ А.

Аналіз схеми після комутації здійснимо трьома способами.

Спосіб 1.

Загальний підхід.

Складемо операторну схему (рис. 2.12), де, згідно з табл.1,

$$U(p) = U_m \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{2 \cdot 10^4}{p^2 + 10^4}.$$

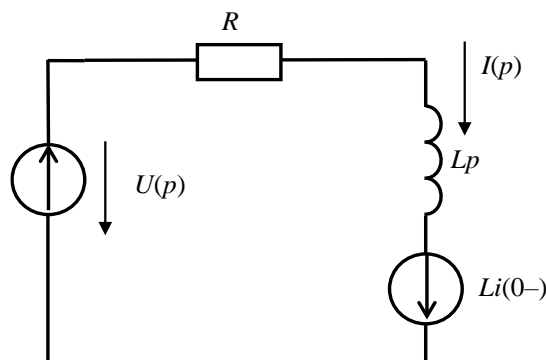


Рисунок 2.12

З операторної схеми знаходимо струм:

$$I(p) = \frac{U(p) + L \cdot i(0-)}{R + pL} = \frac{2p^2}{(p^2 + 10^4)(10 + 0,1p)};$$

$$I(p) = \frac{2p^2}{0,1p^3 + 10p^2 + 10^3 p + 10^5}.$$

Оригінал струму визначимо за теоремою розкладання.

У даному випадку

$$F_1(p) = -2p^2;$$

$$F_2(p) = 0,1p^3 + 10p^2 + 10^3 p + 10^5.$$

Обчислимо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$$p_1 = j100 ; p_2 = -j100 ; p_3 = -100 .$$

Визначимо:

$$F_1(p_1) = 2 \cdot 10^4 ; F_1(p_2) = 2 \cdot 10^4 ; F_1(p_3) = -2 \cdot 10^4 .$$

Оскільки $F_2'(p) = 0,3p^2 + 20p + 10^3$, то

$$F_2'(p_1) = -2 \cdot 10^3 + j2 \cdot 10^3 ;$$

$$F_2'(p_2) = -2 \cdot 10^3 - j2 \cdot 10^3 ;$$

$$F_2'(p_3) = 2 \cdot 10^3 .$$

Для знаходження оригіналу підставимо отримані значення для дійсного кореня p_3 в формулу розкладання (1.8), а для комплексних сполучених коренів p_1 і p_2 – в формулу (1.9).

Отримаємо:

$$i(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right) + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{2 \cdot 10^4 \cdot e^{j100t}}{-2 \cdot 10^3 + j2 \cdot 10^2} \right) - \frac{2 \cdot 10^4 \cdot e^{-100t}}{2 \cdot 10^3} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{10e^{j100t}}{-1 + j} \right) - 10e^{-100t} = \frac{20}{\sqrt{2}} \cos(100t - 135^\circ) - 10e^{-100t}.$$

Спосіб 2.

Подамо функцію $u(t)$ в комплексній гармонічній формі:

$$u(t) = 200e^{j100t}.$$

Складемо операторну схему (рис. 2.13), де згідно табл.1 комплексна операторна напруга

$$U(p) = \frac{200}{p - j100}, \quad i(0-) = ji(0-) = -j20.$$

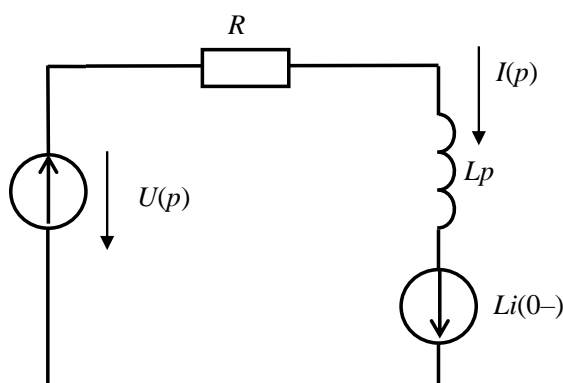


Рисунок 2.13

Із операторної схеми знаходимо комплексний операторний струм:

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0-)}{R + pL} = \frac{\frac{200}{p - j100} + j20 \cdot 0,1}{10 + 0,1p} = \frac{-2jp}{(p - j100)(10 + 0,1p)} =$$

$$= \frac{-2jp}{0,1p^2 + 10p - 10jp - j1000}.$$

Оригінал комплексного струму визначили по теоремі розкладання.

У даному випадку:

$$F_1(p) = -2jp;$$

$$F_2(p) = 0,1p^2 + 10p - 10jp - j1000;$$

$$F_2'(p) = 0,2p = j10 + 10.$$

Обчислимо корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$$p_1 = j100;$$

$$p_2 = -100.$$

Визначимо:

$$F_1(p_1) = 200; \quad F_1(p_2) = j200; \quad F_2'(p_1) = 10 + j10; \quad F_2'(p_2) = -10 - j10.$$

Підставимо отримані значення в формулу розкладання (1.8). Отримаємо комплексний струм.

$$i(t) = \frac{200}{10 + j10} e^{j100t} - \frac{j200}{10 + j10} e^{-100t} = \frac{200}{10\sqrt{2}e^{j45}} e^{j100t} - \frac{j200}{10\sqrt{2}e^{j45}} e^{-100t} =$$

$$= 10\sqrt{2}e^{j(100t-45^\circ)} - 10\sqrt{2}e^{j45} e^{-100t}.$$

Знаходимо струм:

$$i(t) = \text{Im}[i(t)] = 10\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ) - 10e^{-100t}.$$

Спосіб 3.

Подамо розв'язання у вигляді суми вимушеної і вільної складових:

$$i(t) = i_{\text{вим}}(t) + i_{\text{віль}}(t).$$

Вимушену складову $i_{\text{вим}}(t)$ знаходимо комплексним, а вільну складову $i_{\text{віль}}(t)$ – операторним методом.

Комплексна амплітуда струму:

$$\underline{I}_{m \text{ вим}} = \frac{U_m}{R + j\omega L};$$

$$\underline{I}_{m \text{ вим}} = \frac{200}{10 + j10} = \frac{200}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ}.$$

Оригінал струму

$$i_{\text{вим}}(t) = 10\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ).$$

Далі визначаємо $i_{\text{віль}}(0+)$:

$$i_{\text{віль}}(0+) = i(0+) - i_{\text{вим}}(0+),$$

$$\text{де } i_{\text{вим}}(0+) = 10\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ)|_{t=0} = -10.$$

Таким чином, $i_{\text{віль}}(0+) = -20 - (-10) = -10$.

Складемо операторну схему (рис. 2.14), в яку включимо тільки операторні ЕРС, що враховують початкові умови комутації, які визначаються через вільні складові струму індуктивності і напруги на ємності.

З операторної схеми знаходимо:

$$I_{\text{віль}}(p) = \frac{L \cdot i_{\text{віль}}(0+)}{R + pL} = \frac{10 \cdot 0,1}{10 + 0,1p}; \quad I_{\text{віль}}(p) = \frac{10}{100 + p}.$$

Табличним методом згідно табл.1 визначимо $i_{\text{віль}}(t) = -10e^{-100t}$.

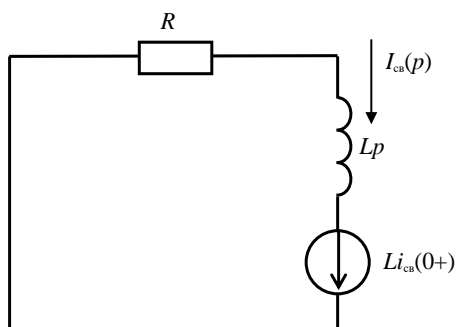


Рисунок 2.14

Таким чином, струм $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ) - 10e^{-100t}$.

Перевірка: при $t = 0+$ струм $i(0+) = -20$ А, що відповідає початковому значенню.

Завдання 7

На вхідні затискачі кола, схема якого зображена на рис. 2.15 а, поданий імпульс, зображений на рис. 2.15 б. Необхідно визначити реакцію кола на такий вплив у випадку зняття напруги з котушки та у випадку зняття напруги з резистора.

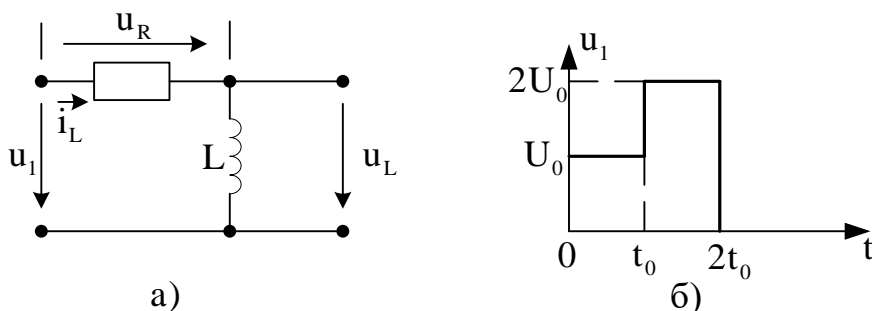


Рисунок 2.15

1. Розкладемо залежність $u_L(t)$, на елементарні впливи (рис. 2.16).

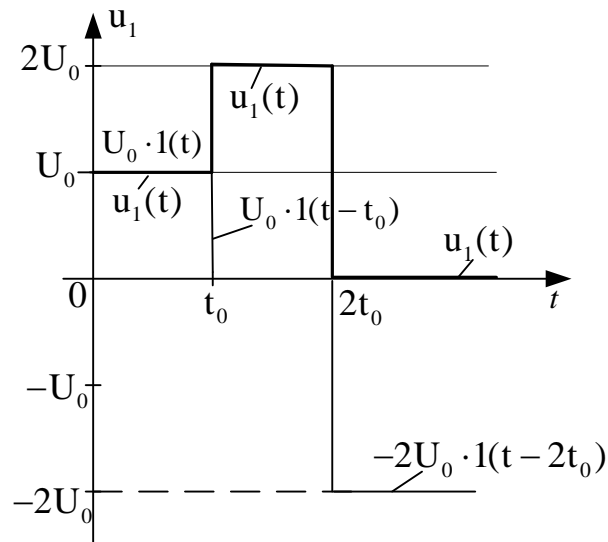


Рисунок 2.16

На I ділянці $0 \leq t \leq t_0$: $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t)$.

На II ділянці $t_0 \leq t \leq 2t_0$: $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t) + U_0 \cdot 1(t - t_0)$.

На III ділянці $2t_0 \leq t \leq \infty$: $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t) + U_0 \cdot 1(t - t_0) - 2U_0 \cdot 1(t - 2t_0)$.

Виконаємо перевірку:

$$u_1(3t_0) = U_0 + U_0 - 2U_0 = 0.$$

2. Зображення вхідного сигналу отримаємо з використанням табличних відповідностей (табл. 1):

$$0 \leq t \leq t_0: U_1(p) = \frac{U_0}{p};$$

$$t_0 \leq t \leq 2t_0: U_1(p) = \frac{U_0}{p} + \frac{U_0 e^{-pt_0}}{p};$$

$$2t_0 \leq t \leq \infty: U_1(p) = \frac{U_0}{p} + \frac{U_0 e^{-pt_0}}{p} - \frac{2U_0 e^{-2pt_0}}{p}.$$

3. Операторна схема кола наведена на рис. 2.17.

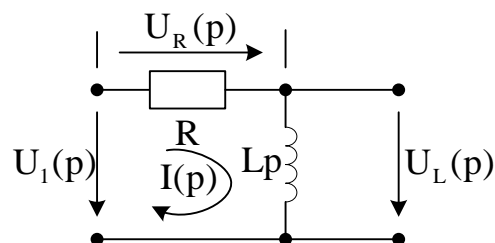


Рисунок 2.17

Операторний опір кола:

$$Z(p) = R + Lp.$$

Зображення струму:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{R + Lp}.$$

Зображення напруг на елементах кола:

$$U_R(p) = RI(p) = \frac{RU_1(p)}{R + Lp};$$

$$U_L(p) = LpI(p) = \frac{LpU_1(p)}{R + Lp}.$$

На окремих ділянках зміни вхідної напруги $u_1(t)$ отримаємо зображення вихідних напруг:

$0 \leq t \leq t_0$:

$$U_R(p) = \frac{RU_0}{p(R + Lp)} = \frac{\frac{R}{L}U_0}{p\left(p + \frac{R}{L}\right)} = U_0 \cdot \frac{\alpha}{p(p + \alpha)},$$

де $\alpha = \frac{R}{L}$; $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{L}{R}$; $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

$$U_L(p) = \frac{LpU_0}{p(R + Lp)} = U_0 \frac{1}{p + \alpha}; \quad \alpha = \frac{R}{L}.$$

$t_0 \leq t \leq 2t_0$:

$$U_R(p) = U_R(p)|_{t \leq t_0} + \frac{RU_0 e^{-pt_0}}{p(R + Lp)} = U_R(p)|_{t \leq t_0} + U_0 \cdot \frac{\alpha e^{-pt_0}}{p(p + \alpha)};$$

$$U_L(p) = U_L(p)|_{t \leq t_0} + \frac{LpU_0 e^{-pt_0}}{p(R + Lp)} = U_L(p)|_{t \leq t_0} + U_0 \cdot \frac{e^{-pt_0}}{p + \alpha}.$$

$2t_0 \leq t \leq \infty$:

$$U_R(p) = U_R(p)|_{t \leq 2t_0} - \frac{2U_0 e^{-2pt_0} R}{p(R + Lp)} = U_R(p)|_{t \leq 2t_0} - 2U_0 \cdot \frac{\alpha e^{-2pt_0}}{p(p + \alpha)}.$$

$$U_L(p) = U_L(p)|_{t \leq 2t_0} - \frac{2U_0 e^{-2pt_0} Lp}{p(R + Lp)} = U_L(p)|_{t \leq 2t_0} - 2U_0 \cdot \frac{e^{-2pt_0}}{p + \alpha}.$$

4. Виконаємо перехід від зображення до оригіналу використавши табличні відповідності (табл. 1).

$0 \leq t \leq t_0$:

$$u_R(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

$t_0 \leq t \leq 2t_0$:

$$u_R(t) = u_R(t)|_{t \leq t_0} + U_0 \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) +$$

$$+U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) = 2U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right).$$

$$u_L(t) = u_L(t) \Big|_{t \leq t_0} + U_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right).$$

$2t_0 \leq t \leq \infty$:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= u_R(t) \Big|_{t \leq 2t_0} - 2U_0 \left(1 - e^{-\frac{t-2t_0}{\tau}} \right) = 2U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) - 2U_0 + 2U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{2t_0}{\tau}} = \\ &= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} + 2e^{-\frac{2t_0}{\tau}} \right). \end{aligned}$$

$$u_L(t) = u_L(t) \Big|_{t \leq 2t_0} - 2U_0 \cdot e^{-\frac{t-2t_0}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + e^{-\frac{t_0}{\tau}} - 2e^{-\frac{2t_0}{\tau}} \right).$$

Графіки вихідних напруг:

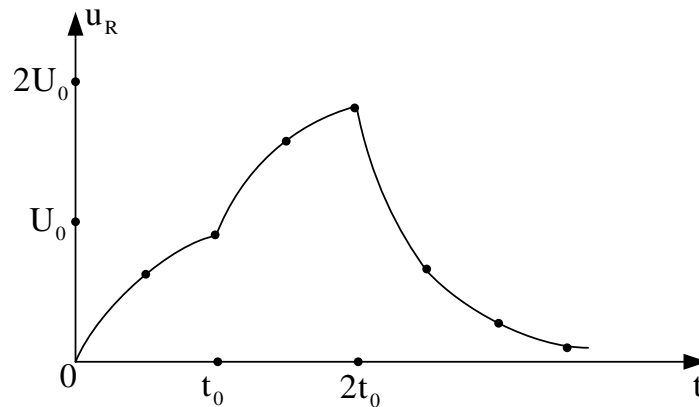


Рисунок 2.18

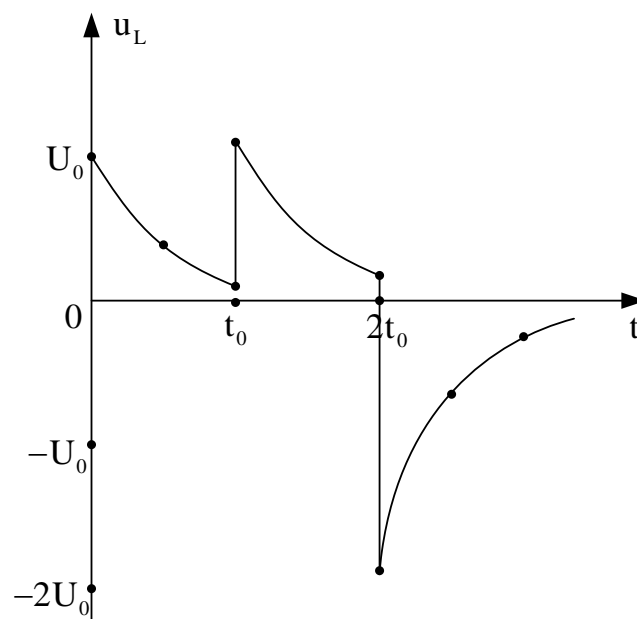


Рисунок 2.19

Завдання 8.

На вхідні затискачі кола, схема якого зображена на рис. 2.20 а, поданий імпульс, зображений на рис. 2.20 б. Необхідно визначити реакцію кола на такий вплив у випадку зняття напруги з конденсатора та у випадку зняття напруги з резистора.

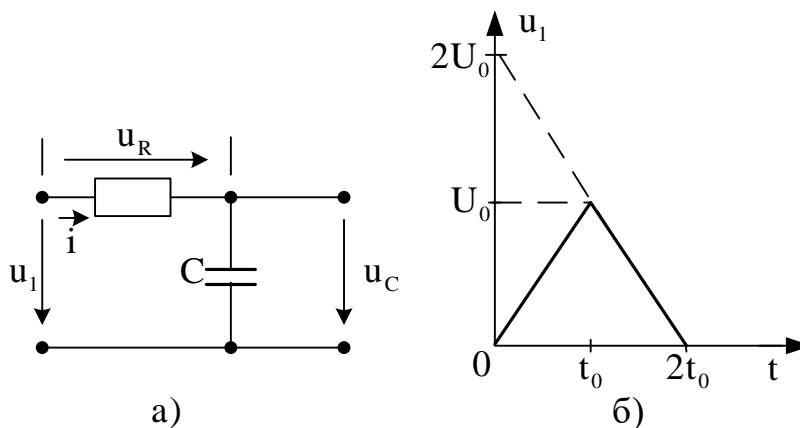


Рисунок 2.20

1. Розкладемо імпульс напруги $u_1(t)$, на елементарні впливи (рис. 2.21).

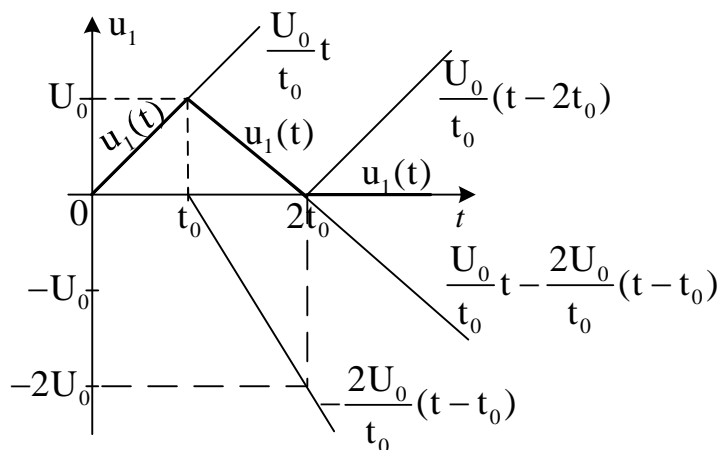


Рисунок 2.21

Напруга на різних проміжках складається з елементарних впливів:

$$0 \leq t \leq t_0: u_1(t) = \frac{U_0}{t_0} t.$$

$$t_0 \leq t \leq 2t_0: u_1(t) = \frac{U_0}{t_0} t - \frac{2U_0}{t_0} (t - t_0).$$

$$2t_0 \leq t \leq \infty: u_1(t) = \frac{U_0}{t_0} t - \frac{2U_0}{t_0} (t - t_0) + \frac{U_0}{t_0} (t - 2t_0).$$

Правильність отриманих виразів перевіряється для моменту $3t_0$:
 $u_1(3t_0) = 3U_0 - 4U_0 + U_0 = 0$.

2. Для визначених проміжків отримаємо зображення вхідної напруги згідно табл. 1.

$$0 \leq t \leq t_0: U_1(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2};$$

$$t_0 \leq t \leq 2t_0: U_1(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2} - \frac{2U_0 e^{-pt_0}}{t_0 p^2};$$

$$2t_0 \leq t \leq \infty: U_1(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2} - \frac{2U_0 e^{-pt_0}}{t_0 p^2} + \frac{U_0 e^{-2pt_0}}{t_0 p^2}.$$

2. Операторна схема кола представлена на рисунку 2.22.

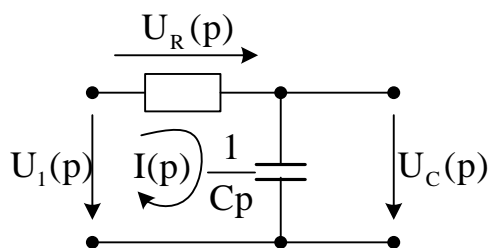


Рисунок 2.22

Опір кола:

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = \frac{RCp + 1}{Cp}.$$

Зображення струму:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1(p) \cdot Cp}{RCp + 1}.$$

Зображення напруг на елементах кола:

$$U_R(p) = RI(p) = \frac{U_1(p)RCp}{RCp + 1} = \frac{U_1(p) \cdot p}{p + \frac{1}{RC}};$$

$$\frac{1}{RC} = \alpha = \frac{1}{\tau}. \quad (*)$$

$$U_c(p) = \frac{1}{Cp} I(p) = \frac{U_1(p)Cp}{Cp(RCp + 1)} = \frac{U_1(p)}{RC(p + \alpha)} = \frac{U_1(p)\alpha}{p + \alpha} \quad (**)$$

Застосуємо формули (*, **) на всіх ділянках залежності $u_1(t)$.

$0 \leq t \leq t_0$:

$$U_R(p) = \frac{U_0 \cdot p}{t_0 p^2 (p + \alpha)} = \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}.$$

$$U_c(p) = \frac{U_0}{t_0 p^2} \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha} = \frac{U_0}{t_0 \alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{p^2 (p + \alpha)}.$$

$t_0 \leq t \leq 2t_0$:

$$U_R(p) = U_R(p) \Big|_{t \leq t_0} - \frac{2U_0 e^{-pt_0} \cdot p}{t_0 p^2 (p + \alpha)} = U_R(p) \Big|_{t \leq t_0} - \frac{2U_0}{t_0 \alpha} \cdot \frac{\alpha e^{-pt_0}}{p(p + \alpha)};$$

$$U_c(p) = U_c(p) \Big|_{t \leq t_0} - \frac{2U_0 e^{-pt_0} \cdot \alpha}{t_0 p^2 (p + \alpha)} = U_c(p) \Big|_{t \leq t_0} - \frac{2U_0}{t_0 \alpha} \cdot \frac{\alpha^2 e^{-pt_0}}{p^2 (p + \alpha)};$$

$2t_0 \leq t \leq \infty$:

$$U_R(p) = U_R(p) \Big|_{t \leq 2t_0} + \frac{U_0 e^{-2pt_0} \cdot p}{t_0 p^2 (p + \alpha)} = U_R(p) \Big|_{t \leq 2t_0} + \frac{U_0}{t_0 \alpha} \cdot \frac{\alpha e^{-2pt_0}}{p(p + \alpha)};$$

$$U_c(p) = U_c(p) \Big|_{t \leq 2t_0} + \frac{U_0 e^{-2pt_0} \cdot \alpha}{t_0 p^2 (p + \alpha)} = U_c(p) \Big|_{t \leq 2t_0} + \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot \frac{e^{-2pt_0} \alpha^2}{p^2 (p + \alpha)}.$$

4. Виконаємо перехід від зображення до оригіналу.

$0 \leq t \leq t_0$:

$$u_R(t) = \frac{U_0}{t_0 \alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t}) = U_0 \frac{\tau}{t_0} (1 - e^{-t/\tau}),$$

оскільки $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

$$u_c(t) = U_0 \frac{1}{\alpha t_0} \cdot (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}) = \frac{U_0}{t_0} (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}).$$

$t_0 \leq t \leq 2t_0$:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= u_R(t) \Big|_{t \leq t_0} - \frac{2U_0}{\alpha t_0} (1 - e^{-(t-t_0)\alpha}) = \frac{U_0 \tau}{t_0} \cdot (1 - e^{-t/\tau} - 2 + 2e^{t_0/\tau} e^{-t/\tau}) = \\ &= \frac{U_0 \tau}{t_0} \cdot [e^{-t/\tau} (2e^{t_0/\tau} - 1) - 1]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_c(t) &= u_c(t) \Big|_{t \leq t_0} - \frac{2U_0}{\alpha t_0} \cdot [\alpha(t - t_0) - 1 + e^{-\alpha(t-t_0)}] = \\ &= \frac{U_0}{t_0} \cdot (t - \tau + \tau e^{-t/\tau} - 2t + 2t_0 + 2\tau - 2\tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot e^{t_0/\tau}) = \\ &= \frac{U_0}{t_0} [2t_0 - t + \tau (1 + e^{-t/\tau} - 2e^{-t/\tau} \cdot e^{t_0/\tau})]. \end{aligned}$$

$2t_0 \leq t \leq \infty$:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= u_R(t) \Big|_{t \leq 2t_0} + \frac{U_0}{t_0 \alpha} (1 - e^{-\alpha(t-2t_0)}) = \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot (-1 - e^{-t/\tau} + 2e^{-t/\tau} \cdot e^{t_0/\tau} + \\ &+ 1 - e^{-t/\tau} \cdot e^{2t_0/\tau}) = \frac{U_0 \tau}{t_0} e^{-t/\tau} (-1 + 2e^{t_0/\tau} - e^{2t_0/\tau}) \\ u_c(t) &= u_c(t) \Big|_{t \leq 2t_0} + \frac{U_0}{\alpha t_0} \cdot [\alpha(t - 2t_0) - 1 + e^{-\alpha(t-2t_0)}] = \frac{U_0}{t_0} \cdot (2t_0 - t + \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau} - \end{aligned}$$

$$-2\tau e^{-t/\tau} \cdot e^{t_0/\tau} + t - 2t_0 - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot e^{2t_0/\tau} = \frac{U_0\tau}{t_0} e^{-t/\tau} (1 - 2e^{t_0/\tau} + e^{2t_0/\tau}).$$

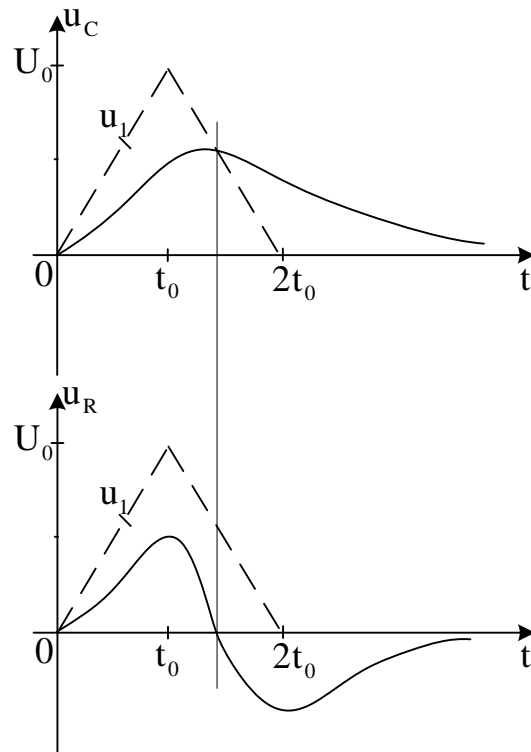


Рисунок 2.23

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Основні положення операторного методу аналізу перехідних процесів та його переваги над класичним.
2. Поясніть сутність прямого та зворотного перетворень Лапласа.
3. Основні теореми та властивості перетворення Лапласа.
4. Наведіть приклади операторних зображень для елементарних функцій за Лапласом.
4. Операторні схеми заміщення та їхні особливості. Навести приклад складання такої схеми.
5. Як в операторному методі враховуються ненульові початкові умови?
6. Запишіть закон Ома в операторній формі при ненульових початкових умовах для елементів L , C , R і елементарної гілки електричного кола.
7. Запишіть і сформулюйте закони Кірхгофа в операторній формі за ненульових початкових умов.
8. Які методи використовуються для складання та розв'язання операторних рівнянь?
9. Перелічіть відомі вам способи переходу від зображення до оригіналу. Наведіть приклади їх застосування.
10. Сформулюйте алгоритм використання теореми розкладання для розрахунку оригіналу за його операторним зображенням.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Завдання

Визначити позначений в таблиці Б.1 струм або напругу в перехідному режимі операторним методом. Побудувати часову залежність отриманої функції.

ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1 – Схеми та числові дані

№ вар.	Схема	E, В	R, Ом	L, мГн	C, мкФ	Визначити
1		160	40	20	33,3	$i_1(t)$
2		600	300	33,3	20	$i_2(t)$
3		600	150	600	10	$i_3(t)$
4		270	54	13,3	50	$u_L(t)$
5		240	60	50	13,33	$u_C(t)$
6		120	24	50	1000	$i_2(t)$
7		240	24	100	500	$i_3(t)$
8		500	100	200	250	$u_L(t)$
9		150	60	500	100	$u_C(t)$
10		250	500	400	125	$i_1(t)$
11		100	20	200	100	$i_3(t)$
12		320	32	100	200	$u_L(t)$
13		30	6	50	400	$u_C(t)$
14		60	120	400	50	$i_2(t)$
15		50	5	80	1000	$i_1(t)$
16		300	50	200	1000	$u_L(t)$
17		60	20	400	500	$u_C(t)$
18		180	300	800	250	$i_1(t)$
19		120	40	500	400	$i_2(t)$
20		600	500	1000	200	$i_3(t)$
21		150	10	100	100	$u_C(t)$
22		30	10	200	50	$i_1(t)$
23		75	25	500	200	$i_2(t)$
24		75	500	1000	10	$i_3(t)$
25		450	75	500	20	$u_L(t)$

Продовження додатка Б
Продовження таблиці Б.1

№ вар.	Схема	E, В	R, Ом	L, мГн	C, мкФ	Визначити
26		180	30	250	100	$i_1(t)$
27		72	6	100	250	$i_2(t)$
28		120	10	500	50	$i_3(t)$
29		10	3,33	50	500	$u_L(t)$
30		24	1	25	1000	$u_C(t)$
31		75	5	10	100	$i_2(t)$
32		60	40	20	50	$i_3(t)$
33		150	50	50	5	$u_L(t)$
34		600	20	100	10	$u_C(t)$
35		900	600	1000	1	$i_1(t)$
36		200	100	50	100	$i_3(t)$
37		400	20	100	50	$u_L(t)$
38		640	16	200	25	$u_C(t)$
39		200	10	25	200	$i_1(t)$
40		80	20	40	125	$i_2(t)$
41		600	50	500	100	$u_L(t)$
42		48	2	100	500	$u_C(t)$
43		300	12,5	200	250	$i_1(t)$
44		60	50	250	200	$i_2(t)$
45		300	50	400	125	$i_3(t)$
46		30	5	100	60	$u_C(t)$
47		600	50	200	30	$i_1(t)$
48		120	10	120	50	$i_2(t)$
49		240	100	240	25	$i_3(t)$
50		450	75	60	100	$u_L(t)$
51		90	15	40	100	$i_1(t)$
52		36	3	20	200	$i_2(t)$
53		600	50	80	50	$i_3(t)$
54		300	50	400	10	$u_L(t)$
55		120	200	800	20	$u_C(t)$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л. А. Бессонов. – Москва : Гардарики, 2007. – 701 с.
2. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні поля : навч. посібник / В. С. Маляр. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 312 с.
3. Мандзій Б. А. Основи теорії сигналів : навч. посібник / Б. А. Мандзій, П. І. Женьяк. – Львів : АДКР «Атлас», 2003. – 152 с.
4. Основи теорії електротехніки: підручник / Ю. Я. Бобало, Б. А. Мандзій, П. Г. Стахів, Л. Д. Писаренко, Ю. І. Якіменко ; за ред. Ю. Я. Бобала. – Львів: Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2008. – 332с.
5. Переходные процессы и четырехполюсники : учебное пособие / Е. Г. Глебова, И. Г. Мякшина, Б. И. Кубрик. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2007. – 192с. – На рус. яз.

Навчальне видання

Методичні вказівки

до самостійної роботи студентів

за темою «Операторний метод при розрахунках перехідних процесів в лінійних
електричних колах»

з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки»,

«Теорія електричних та магнітних кіл»,

«Теорія електромагнітних кіл»,

«Теорія електричних кіл та сигналів»,

«Теорія електричних кіл»

для студентів електротехнічних та комп'ютерних спеціальностей

Укладачі:

КУБРИК Борис Іванович

ЛИТВИНЕНКО Світлана Анатоліївна

Відповідальний за випуск доц. Борис КУБРИК

Роботу рекомендував до друку доц. Олександр ЧЕПЕЛЮК

Комп'ютерна верстка Світлана ЛИТВИНЕНКО

В авторській редакції

План 2022р., поз. 124

Підп. до друку _____. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 1,95.
Наклад 20 прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавець Видавничий центр НТУ «ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронний варіант