

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА



Я. Б. ФОРКУН, М. Л. ГЛЄБОВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу

«ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ»

(для студентів усіх форм навчання спеціальності
151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2017

Форкун Я. Б. Конспект лекцій з курсу «Теорія електричних та магнітних кіл» (для студентів усіх форм навчання спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології) / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова: Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, – 2017. – 124 с.

Автори: канд. техн. наук, доц. Я. Б. Форкун,
канд. техн. наук, доц. М. Л. Глебова

Рецензент д-р техн. наук, проф. А. Г. Сосков

Рекомендовано кафедрою альтернативної електроенергетики та електротехніки, протокол засідання № 2 від 22.09.2017

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	8
1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи.....	8
1.2 Основні поняття, що характеризують електричні схеми.	
Лінійні й нелінійні електричні кола, розгалужені й нерозгалужені.....	10
1.3 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола.....	10
1.4 Види з'єднань пасивних елементів схеми.....	11
1.5 Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки).....	12
1.6 Закони Кірхгофа.....	12
1.7 Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму.....	13
1.8 Методи розрахунку електричних схем.....	14
1.8.1 Метод контурних струмів.....	14
1.8.2 Метод вузлових потенціалів. Метод двох вузлів.....	15
1.8.3 Принцип накладання і метод накладання.....	17
1.8.4 Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці.....	18
1.9 Перетворення зірки опорів на еквівалентний трикутник опорів.....	19
1.10 Потенціальна діаграма.....	20
1.11 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.	
Передача енергії по лініям передачі.....	20
Контрольні питання до розділу.....	23
РОЗДІЛ 2 ВЛАСТИВОСТІ Й МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....	24
2.1 Основні величини, що характеризують синусоїдний струм.....	24
2.2 Синусоїдний струм активного опору, індуктивності, ємності.....	25
2.3 Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму.....	27
2.4 Потужність у колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна).....	28
2.5 Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл.....	29
2.6 Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами.....	30
2.7 Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму. Закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі.....	31
2.8 Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола.....	32

2.9 Комплексна форма запису потужності. Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму.....	33
2.10 Векторні й топографічні діаграми.....	33
2.11 Резонанс у колах синусоїдного струму.....	34
2.12 Практичне застосування резонансу.....	36
2.13 Умови передачі максимальної активної потужності від активного двополюсника до навантаження.....	37
2.14 Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності...	38
2.15 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок.....	39
2.16 Визначення взаємної індуктивності.....	40
2.17 Чотириполюсники. Основні поняття і класифікація.....	41
2.18 Основні рівняння чотириполюсника.....	42
2.19 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника.....	43
Контрольні питання до розділу.....	45
РОЗДІЛ 3 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....	46
3.1 Основні поняття та визначення.....	46
3.2 Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин.....	47
3.3 Розрахунок трифазних кіл.....	48
3.4 Визначення потужності в трифазних колах.....	52
Контрольні питання до розділу.....	53
РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ КІЛ З НЕСИНУСОЇДНИМИ ПЕРІОДИЧНИМИ СТРУМАМИ ТА НАПРУГАМИ.....	54
4.1 Визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг.....	54
4.2 Зображення несинусоїдних струмів і напруг рядами Фур'є.....	55
4.3 Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію.....	57
4.4 Розкладання у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми....	58
4.5 Порядок розрахунку електричного кола з несинусоїдними джерелами енергії.....	60
4.6 Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл.....	61
4.7 Діючі й середні за модулем значення несинусоїдних функцій.....	61
4.8 Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих.....	62

4.9	Потужності в колах несинусоїдного струму.....	63
4.10	Вищі гармоніки в трифазних колах.....	64
4.11	Особливості роботи трифазних систем, що були викликані кратними трьом гармоніками.....	65
	Контрольні питання до розділу.....	68
	РОЗДІЛ 5. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.....	69
5.1	Визначення перехідних процесів.....	69
5.2	Закони комутації.....	70
5.3	Класичний метод розрахунку перехідних процесів.....	70
5.4	Незалежні й залежні початкові умови.....	71
5.5	Метод вхідного опору для складання характеристичного рівняння... ..	72
5.6	Визначення ступеня характеристичного рівняння.....	73
5.7	Властивості коренів характеристичного рівняння.....	73
5.8	Особливості вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння.....	74
5.9	Визначення постійних інтегрування у класичному методі.....	76
5.10	Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом.....	77
5.11	Операторний метод розрахунку перехідних процесів.....	78
5.12	Зображення деяких простих функцій.....	78
5.13	Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.....	80
5.14	Послідовність розрахунку операторним методом.....	82
5.15	Формула розкладання.....	82
5.16	Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів.....	84
	Контрольні питання до розділу.....	84
	РОЗДІЛ 6 МЕТОДИ АНАЛІЗУ СТАНУ НЕЛІНІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА.....	85
6.1	Загальні відомості та класифікація нелінійних елементів.....	85
6.2	Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму.....	86
6.3	Послідовне з'єднання нелінійних елементів.....	86
6.4	Паралельне з'єднання нелінійних елементів.....	87
6.5	Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів.....	88
6.6	Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами.....	89
6.7	Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора.....	90
6.8	Статичний і диференційний опір.....	91
6.9	Заміна нелінійного елемента лінійним опором і <i>EPC</i>	91

6.10 Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму...	92
6.11 Нелінійні електричні кола змінного струму.....	93
6.12 Апроксимація нелінійних характеристик.....	94
Контрольні питання до розділу.....	98
РОЗДІЛ 7 МАГНІТНІ КОЛА: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ, ЗАКОНИ, РОЗРАХУНОК.....	99
7.1. Основні поняття і закони магнітних кіл.....	99
7.2 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму... 101	101
7.3 Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму..... 103	103
Контрольні питання до розділу.....	104
РОЗДІЛ 8 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА, ЩО МІСТЯТЬ ЛІНІЇ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	105
8.1 Основні визначення.....	105
8.2 Диференціальні рівняння однорідної двохпровідної лінії..... 106	106
8.3 Рівняння однорідної лінії при усталеному синусоїдному процесі.... 107	107
8.4 Характеристики однорідної лінії.....	111
8.5 Рівняння однорідної лінії в гіперболічній формі.....	113
8.6 Вхідний опір лінії.....	113
8.7 Коефіцієнт відбиття хвилі.....	114
8.8 Узгоджене навантаження лінії.....	115
8.9 Лінія без спотворень.....	116
8.10 Неробочий хід і коротке замикання лінії з втратами.....	118
8.11 Лінії без втрат.....	119
8.12 Застосування ліній без втрат.....	120
8.13 Стоячі хвилі.....	121
Контрольні питання до розділу.....	122
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	122
Післямова.....	123

ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» є опанування фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, формування наукового світогляду та електротехнічної культури студентів, безпосередньо пов'язаної з їхнім фахом.

Завдання дисципліни – підготовка висококваліфікованих спеціалістів, які знають фізичні процеси, що відбуваються в електричних та магнітних колах, вміють аналізувати, розраховувати, синтезувати та проектувати складні системи з використанням комп'ютерного обладнання.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати основні поняття і закони, що стосуються електричних, магнітних й електромагнітних кіл; структурні елементи кіл та параметри, що їх характеризують; основні рівняння, що характеризують стан лінійного електричного кола, та методи його аналізу; явище резонансу в контурах; теорію та методи аналізу перехідних процесів електричних кіл із зосередженими параметрами;

вміти формувати схеми заміщення й топологічні структури електротехнічних об'єктів; обчислювати відповідні параметри ustalених режимів електричних кіл на підставі різних методів аналізу, електромагнітну енергію та її потужність в таких об'єктах; досліджувати методами математичного аналізу та фізичного експерименту явище резонансу; формувати розрахункові схеми заміщення нелінійних електричних, магнітних кіл; використовувати вимірювальні прилади для визначення режимів роботи електричних та магнітних кіл;

мати такі компетентності – базові уявлення про методику вибору тих чи інших вимірювальних пристроїв у разі необхідності дослідити режими роботи електричного чи магнітного кола; здатність створювати математичні моделі лінійних та нелінійних електричних, магнітних кіл; здатність використовувати методи досліджень характеристик та контролю за параметрами елементів електричного кола.

Цей конспект лекцій призначено для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.050201 – Системна інженерія та спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології освітньої програми – Системна інженерія і складений відповідно до робочої програми дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл». Дисципліна містить два змістових модулі:

- лінійні електричні кола постійного та змінного струму,
- нелінійні електричні та магнітні кола.

Перші п'ять розділів тексту лекцій відносяться до першого змістового модуля, останні три – до другого. Назви розділів співпадають з назвами тем в робочій програмі дисципліни.

РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Електричне коло, електрична схема та їхні елементи

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу і взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії, по яким може протікати електричний струм. Електромагнітні процеси в електричному колі описують за допомогою понять «струм», «напруга», «електрорушійна сила (далі ЕРС)», «опір» («провідність»), «індуктивність», «ємність».

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії – пристрої, що перетворюють механічну, теплову, хімічну та інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея та тощо);
- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти та тощо);
- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);
- споживачі електромагнітної енергії, що перетворюють електромагнітну енергію в механічну, теплову, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори та тощо).

Кожна група – це безліч різних приладів, що відрізняються за принципом дії, конструкцією тощо.

Електричні кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах та напругах, називають *колами постійного струму*.

У курсі теоретичних основ електротехніки електричне коло замінюють моделлю (графічним зображенням) – *електричною схемою*. Електричні схеми будують з ідеалізованих елементів – активних та пасивних, кожний з яких відображає одну з сторін фізичних явищ у реальних електричних колах.

До пасивних елементів (аналог споживачів електромагнітної енергії) належать (рис. 1.1 – умовні позначення опору, ємності та індуктивності):

- опір, $[R, \text{Ом}]$ – ідеалізований елемент, що приблизно замінює резистор, в якому відбувається перетворення електричної енергії в теплову;
- ємність, $[C, \text{Ф}]$ – ідеалізований елемент, який приблизно замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля;
- індуктивність $[L, \text{Гн}]$ – ідеалізований елемент, який приблизно замінює котушку індуктивності, в якій може накопичуватися енергія магнітного поля.

До активних елементів (аналог джерел електромагнітної енергії) належать джерела електрорушійної сили та джерела струму (рис. 1.2).

У джерелах ЕРС $e(t)$ і джерелах струму $j(t)$ під дією сторонніх сил неелект-

ричної природи виникає поділ зарядів, що призводить до появи напруги на затискачах джерела ЕРС або струму на ділянці з джерелом струму. Активні елементи враховують процеси перетворення неелектричних видів енергії в електромагнітну.

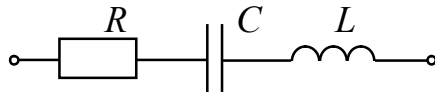


Рисунок 1.1 – Пасивні елементи схем

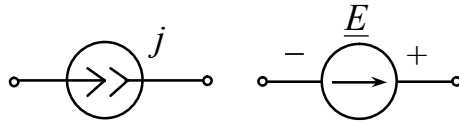


Рисунок 1.2 – Активні елементи схем (джерело струму та джерело ЕРС)

У процесі складання схеми заміщення в неї вводять ті ідеалізовані схемні елементи, за допомогою яких характеризують основні процеси в реальних елементах кола, а відносно другорядними процесами для розглянутої смуги частот і амплітуд впливів зазвичай нехтують. Так, резистор для низьких частот можна зобразити одним резистивним елементом, але для високих – той самий резистор повинен бути зображений іншою схемою (рис. 1.3, а): у ній мала (паразитна) індуктивність L_n враховує зчеплений із резистором магнітний потік, а мала паразитна ємність C_n враховує протікання струму зміщення між затискачами резистора.

Конденсатор на низьких частотах заміщують одним ємнісним елементом, а на високих частотах конденсатор подають у вигляді схеми (рис. 1.3, б). У цій схемі резистор R_n враховує втрати у неідеальному діелектрику конденсатора, а L_n – паразитна індуктивність підвідних контактів.

Індуктивну котушку повніше зображують схемою на рисунку 1.3, в. У ній R_n враховує теплові втрати в обмотці і в осерді, а паразитна ємність C_n – струми між витками котушки.

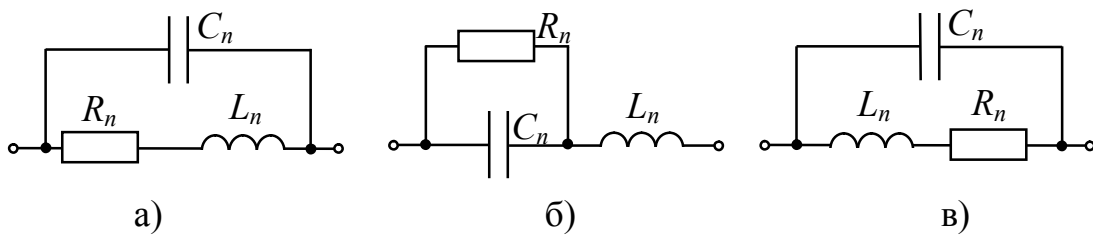


Рисунок 1.3 – Реальні схеми заміщення R, C, L

Якщо напруга і струм на всіх елементах реальної кола не залежать від просторових координат, то таке коло називають колом із зосередженими параметрами та описують алгебраїчними або звичайними диференціальними рівняннями. Процеси в колах із розподіленими параметрами описують рівняннями в часткових похідних.

Відповідність електричної схеми та кола перевіряють шляхом зіставлення розрахунку із експериментом.

1.2 Основні поняття, що характеризують електричні схеми.

Лінійні й нелінійні електричні кола, розгалужені й нерозгалужені

Лінійні електричні кола – кола, всі елементи яких лінійні (резистор, ємність, індуктивність), тобто мають лінійні вольт-амперні характеристики. Якщо коло має принаймні один нелінійний елемент (діод, стабілітрон, лампа розжарювання та тощо) – то воно *нелінійне*.

Основними поняттями, що характеризують електричні схеми є *вітка*, *вузол*, *контур*.

Вітка – ділянка кола, уздовж якої протікає один і той самий струм; утворюється вітка декількома послідовно з'єднаними елементами

Вузол – точка на схемі, де з'єднуються три й більше вітки. *Вітки*, приєднані до тих самих вузлів, називаються паралельними.

Контур – будь-який замкнутий шлях, що проходить по декількох вітках.

Розгалуженим колом зветься коло, що має три й більше вітки, два і більше вузлів. *Нерозгалуженим* колом називається коло, що має тільки один контур (не має вузлів).

1.3 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола

Напруга на ділянці кола – це різниця потенціалів точок (φ) між крайніми точками цієї ділянки. За визначенням:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b . \quad (1.1)$$

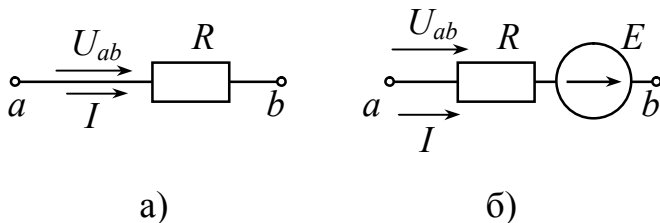


Рисунок 1.4 – Схеми для складання рівнянь за законом Ома

При протіканні через опір R струму I $\varphi_a > \varphi_b$ на величину падіння напруги в опорі R , тобто $\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R$,

$$\text{або } U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R \quad (1.2)$$

Отже, закон Ома для ділянки кола, що не має у своєму складі *ЕРС* (рис. 1.4, а):

$$I = \frac{U_{ab}}{R} . \quad (1.4)$$

Для ділянки кола, що має у своєму складі *ЕРС* (рис. 1.4, б). закон Ома має вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} . \quad (1.5)$$

Якщо ділянка кола має у своєму складі декілька *ЕРС*, спрямованих у різні боки, а також декілька опорів, то закон Ома матиме вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} \pm E_i}{\sum R_i} \quad (1.6)$$

Примітка. Коли напрямки ЕРС E_i і напруги U_{ab} збігаються з напрямком струму I у ділянці « ab », то в чисельнику беремо E_i і напругу U_{ab} зі знаками «+», і навпаки.

1.4 Види з'єднань пасивних елементів схеми

Як пасивні елементи схеми для електричних кіл постійного струму розглядають тільки активні опори. Охарактеризуємо основні види з'єднань пасивних елементів.

1. Послідовне з'єднання зображено на рисунку 1.5. Еквівалентний опір на рисунку 1.6.

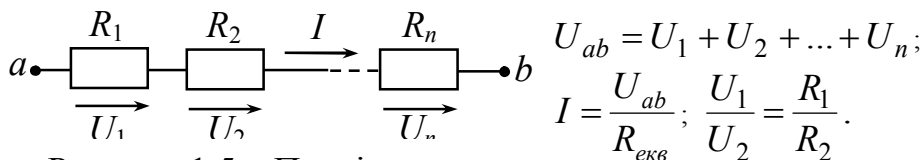


Рисунок 1.5 – Послідовне з'єднання елементів

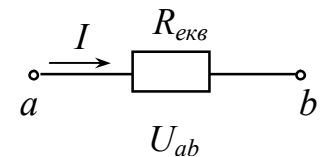
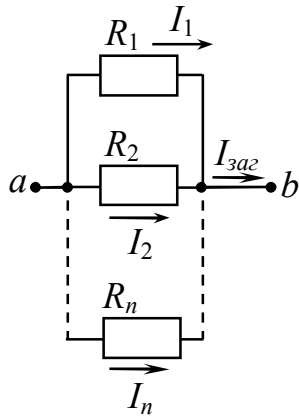


Рисунок 1.6 – Еквівалентний опір

2. Паралельне з'єднання зображено на рисунку 1.7. Еквівалентний опір на рисунку 1.8.



$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; \quad ;$$

$$I_n = \frac{U_{ab}}{R_n}$$

$$I_{заг} = I_1 + I_2 + \dots + I_n;$$

$$I_{заг} = \frac{U_{ab}}{R_{екв}} = U_{ab} \cdot G_{екв};$$

$$G_{екв} = G_{ab} = \sum_{k=1}^n G_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k};$$

$$R_{екв} = \frac{1}{G_{екв}}.$$

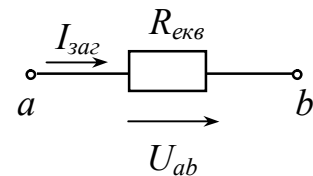
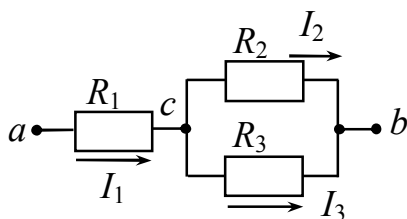


Рисунок 1.8 – Еквівалентний опір

Рисунок 1.7 – Паралельне з'єднання елементів

3. Змішане з'єднання зображено на рисунку 1.9 (чергування ділянок послідовного та паралельного з'єднання).



$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_{екв}}; \quad R_{екв} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3};$$

$$U_{cb} = I_1 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_2 = \frac{U_{cb}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{cb}}{R_3}$$

Рисунок 1.9 – Змішане з'єднання

1.5 Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)

Джерела енергії спричиняють виникнення струмів і напруг в електричних колах. Для аналізу електричних кіл використовують поняття ідеалізованих джерел напруги та струму.

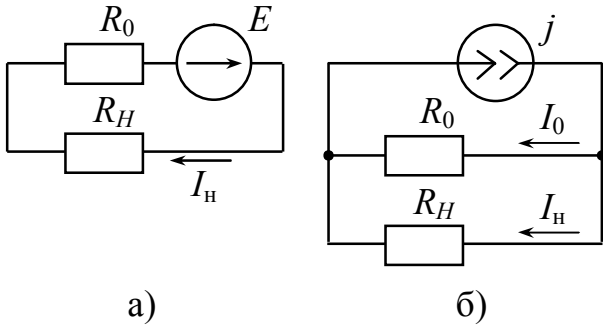


Рис. 1.10 – Схеми з джерелами E та j

При розрахунку електричних кіл реальне джерело енергії з ЕРС E та з внутрішнім опором R_0 , що з'єднане з навантаженням R_H , може бути зображено двома схемами – із джерелом ЕРС E та джерелом струму j (рис. 1.10, а і рис. 1.10, б). Ці схеми еквівалентні щодо струму в навантаженні I_H та потужності, яка споживається навантаженням

($P_H = I_H^2 \cdot R_H$), і нееквівалентні щодо потужності, яка споживається внутрішнім опором R_0 .

Для переходу від реального джерела напруги до реального джерела струму (і навпаки) застосовують такі формули:

$$\frac{E}{R_0} = j; \tag{1.7}$$

$$E = j \cdot R_0. \tag{1.8}$$

1.6 Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду: алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, у будь який момент часу дорівнює нулю. Цей закон виглядає так:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \tag{1.9}$$

де k – номери вітки, яка зв'язана з вузлом.

Якщо струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (1.9) зі знаком «+», спрямований від вузла – зі знаком «-».

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії: алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контуру дорівнює нулю в будь-який момент часу:

$$\sum_{i=1}^m U_k = 0 \tag{1.10}$$

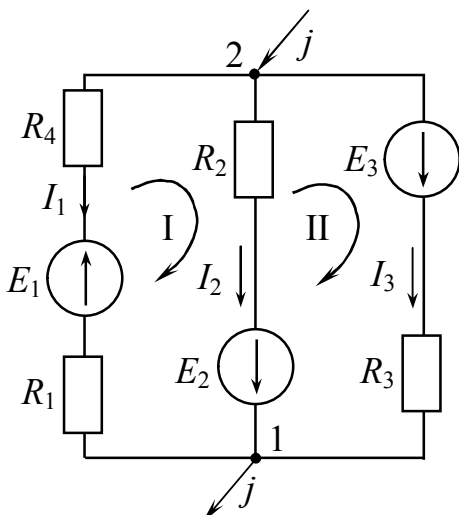


Рисунок 1.11 –
Схема для складання системи рівнянь за законами Кірхгофа

де i – номер ділянки, що входить у контур.

Частіше використовують інше формулювання другого закону Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг уздовж контуру дорівнює алгебраїчній сумі EPC уздовж цього самого контуру (знаки EPC або падінь напруг залежать від їхніх напрямків і обраних напрямків обходу контурів).

За першим законом Кірхгофа для схеми потрібно скласти « $n - 1$ » рівнянь, де n – кількість вузлів у схемі). За другим законом Кірхгофа потрібно скласти « $m - n + 1$ » рівнянь, де m – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

Розглянемо приклад складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для схеми на рисунку 1.11:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + j = 0 \\ I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = E_2 - E_1 - E_3 \\ -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot (R_3 + R_4) = E_3. \end{cases} \quad (1.11)$$

Порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа.

1. Визначаємо кількість вузлів і віток у схемі, а отже, кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа.
2. Довільно вибираємо напрямки струмів у вітках і напрямки обходу контурів.
3. Складаємо та вирішуємо систему щодо невідомих струмів.

1.7 Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму

На підставі закону збереження енергії: кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати енергії, яка постачається за той самий час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{k=1}^h (\pm E_k \cdot I_k) + \sum_{k=1}^s j_k \cdot U_{ab} = \sum_{i=1}^t I_k^2 \cdot R_k, \quad (1.12)$$

де h – кількість EPC у схемі;

s – кількість джерел струму у схемі;

t – кількість опорів у схемі;

U_{ab} – напруга між умовною точкою « a », куди спрямований струм джерела струму j_k , та умовною точкою « b », звідки спрямований струм цього джерела.

Правило складання балансу: якщо напрямок джерела EPC E_k і напрямок

струму I_k , що протікає через нього, збігаються, то доданок $E_k \cdot I_k$ беремо зі знаком «+», і навпаки.

Приклад складання балансу для схеми рисунку 1.11:

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_2 + j \cdot U_{21} = I_1^2 \cdot (R_1 + R_4) + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3. \quad (1.13)$$

1.8 Методи розрахунку електричних схем

1.8.1 Метод контурних струмів

Метод контурних струмів (далі – МКТ) застосовується для розрахунку кіл будь-якої складності й дає змогу зменшити кількість рівнянь, що потрібно було б скласти за законами Кірхгофа, а саме з кількості « m » до кількості « $m - n + 1$ ».

Відповідно до цього методу роблять припущення, що в кожному *незалежному*

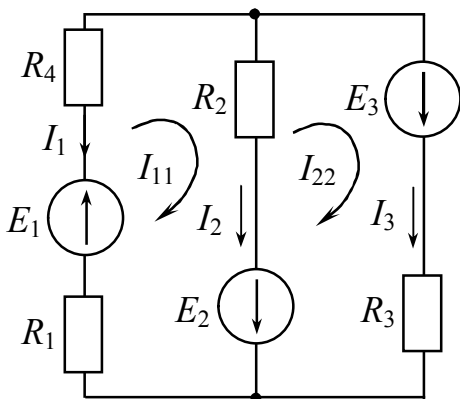


Рисунок 1.12 –
Схема для
складання

контуру тече свій *контурний* струм (*незалежний* контур – це контур, що містить хоча б одну вітку, яка не входить в інші контури). Кількість рівнянь, що потрібно скласти за методом, дорівнює кількості незалежних контурів, або кількості рівнянь за другим законом Кірхгофа. Струми віток визначають за допомогою контурних струмів.

Потрібно мати на увазі, що контурний струм – це зручне, але умовне розрахункове поняття, фізично існують тільки струми віток.

Розглянемо схему на рисунку 1.12, у якій довільно задамося напрямками струмів у вітках – I_1, I_2, I_3 і напрямками контурних струмів – I_{11}, I_{22} (за годинниковою стрілкою). Складаємо систему за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_4 + I_{11} \cdot R_2 - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ I_{22} \cdot R_3 + I_{22} \cdot R_2 - I_{11} \cdot R_2 = E_3 - E_2 \end{cases}, \quad (1.14)$$

$$\text{або} \begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_2) - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2 \end{cases}. \quad (1.15)$$

Позначаємо:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$ – власний опір першого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать першому контуру;

$R_{22} = R_2 + R_3$ – власний опір другого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать другому контуру;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ – взаємний опір першого та другого контурів, дорівнює опору

вітки, що належить обом контурам; якщо контурні струми направлені в одну сторону, то всі взаємні опори – від’ємні величини;

$E_{11} = E_1 + E_2$; $E_{22} = E_3 - E_2$ – власні *EPC* першого та другого контурів, які дорівнюють алгебраїчній сумі усіх *EPC*, які належать першому та другому контурам відповідно.

Таким чином, система рівнянь для на схеми рисунку 1.12 за МКТ з урахуванням уведених позначень:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22} \end{cases} \quad (1.16)$$

Після того, як з системи знаходять значення контурних струмів I_{11} і I_{22} , визначають значення струмів віток:

$$I_1 = -I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{22} \quad (1.17)$$

Якщо в колі є джерело струму, ввімкнене в деяку вітку, один із контурних струмів стає відомим (дорівнює струму джерела струму з відповідним знаком), тоді кількість рівнянь у системі за МКТ скорочується на одиницю.

1.8.2 Метод вузлових потенціалів. Метод двох вузлів

Метод вузлових потенціалів (далі – МВП) – це метод розрахунку електричних кіл, відповідно до якого за невідомі приймаються потенціали вузлів, після визначення яких можна знайти струм будь-якої вітки за законом Ома. Врахуємо, що завжди можна потенціал одного з вузлів схеми прийняти рівним нулю, тому система рівнянь для визначення інших невідомих потенціалів вузлів повинна мати « $n - 1$ » рівнянь. В основі методу – закони Ома та перший закон Кірхгофа.

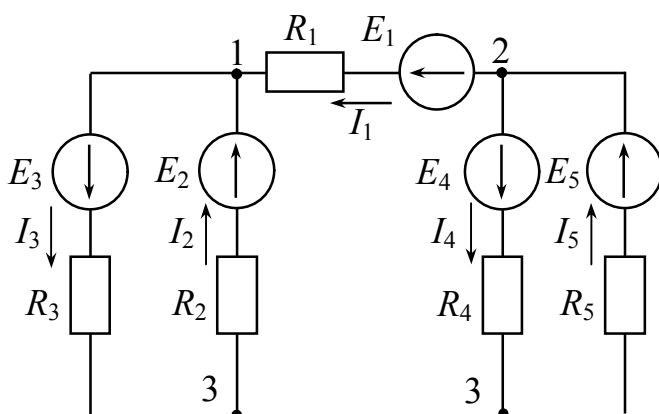


Рисунок 1.13 – Схема для складання системи за МВП

Розглянемо порядок розрахунку за МВП на прикладі схеми на рисунку 1.13.

1. Довільно спрямовуємо струми у вітках кола.
2. Приймаємо $\varphi_3 = 0$.
3. Складаємо систему рівнянь в загальному вигляді за методом, що містить $n - 1$ рівнянь.

У нашому випадку:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = \sum_1^{\pm} E_k \cdot G_k \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = \sum_2^{\pm} E_k \cdot G_k \end{cases} \quad (1.18)$$

4. Визначаємо власні й взаємні провідності вузлів:

– $G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$, $G_{22} = G_1 + G_4 + G_5$ – власні провідності вузлів «1» та «2» відповідно; дорівнюють сумі провідностей усіх віток, що приєднані до цих вузлів;

– власна провідність вузла 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 2;

– $G_{12} = G_{21} = 1/R_1$ – взаємна провідність вузлів «1» та «2», дорівнює сумі провідностей усіх віток, що безпосередньо поєднують ці вузли,

де $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$, $G_4 = \frac{1}{R_4}$, $G_5 = \frac{1}{R_5}$ – провідності віток.

5. Визначаємо вузлові струми:

$\sum_1^{\pm} E_k \cdot G_k = E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3$, $\sum_2^{\pm} E_k \cdot G_k = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5$ – вузлові струми відповідно «1» та «2» вузлів.

Добуток $E_k \cdot G_k$ беремо зі знаком «+», якщо ЕРС E_k спрямована до вузла, відносно якого визначається вузловий струм, і навпаки.

6. Вирішуємо систему (визначаємо потенціали вузлів кола).

5. За законом Ома визначаємо струми віток.

$$\begin{aligned} I_1 &= (\varphi_2 - \varphi_1 + E_1) \cdot G_1, \quad I_2 = (-\varphi_1 + E_2) \cdot G_2, \quad I_3 = (\varphi_1 + E_3) \cdot G_3, \\ I_4 &= (\varphi_2 + E_4) \cdot G_4, \quad I_5 = (-\varphi_2 + E_5) \cdot G_5. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Метод має деякі особливості застосування.

Припустимо, що в схемі рисунку 1.13 у вітці, де тече струм I_5 , немає опору R_5 . Тоді $\varphi_2 = E_5$ і достатньо тільки одного рівняння з системи (1.20) – першого.

Окремим випадком методу вузлових потенціалів є *метод двох вузлів*. Якщо в схемі два вузли, то за методом вузлових потенціалів потрібне тільки одне рівняння для визначення потенціалу одного з вузлів, бо потенціал другого дорівнює нулю. Так, для схеми на рисунку 1.12, якщо $\varphi_2 = 0$, то:

$$\varphi_1 \cdot \overbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}^{G_{11}} = \overbrace{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}^{\sum_1^{\pm} E_k \cdot G_k}, \quad (1.20)$$

де $G_1 = \frac{1}{R_1 + R_4}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$ – провідності віток.

Враховуючи, що $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$, отримуємо вираз для напруги між вузлами

$$\text{«1» та «2»}: U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)} = \frac{\sum_1 \pm E_k \cdot G_k}{\sum G_k}. \quad (1.21)$$

Після визначення напруги між двома вузлами визначаємо струми віток за законом Ома.

1.8.3. Принцип накладання і метод накладання

Принцип накладання (суперпозиції): струм у будь-якій вітці лінійного електричного кола буде дорівнювати алгебраїчній сумі так званих часткових струмів, що викликані кожним із джерел енергії окремо. Впливає принцип із лінійності рівнянь, що отримані на підставі законів Кірхгофа для кіл із постійними параметрами. З принципу накладання випливає метод накладання.

Розглянемо порядок розрахунку за методом на прикладі схеми на рисунку 1.14, а.

1. Довільно спрямовуємо струми у вітках.

2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної *EPC* чи кожного джерела струму окремо. При цьому необхідно закорочувати інші джерела напруги та розмикати джерела струму.

Так, для схеми на рисунку 1.14, б визначаємо струми від дії *EPC* E_1 :

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_2}{R_3 + R_4 + R_2}}; \quad I_2' = I_1' \cdot \frac{(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_2}; \quad I_3' = I_1' - I_2'. \quad (1.22)$$

Для схеми рисунку 1.14, в визначаємо струми від дії *EPC* E_2 :

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_1}{R_3 + R_4 + R_1}}; \quad I_1'' = I_2'' \cdot \frac{(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_1}; \quad I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_3 + R_4 + R_1}. \quad (1.23)$$

3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрямки струмів у вихідній схемі.

Для вихідної схеми рисунку 1.17, а, I_2 та I_3 :

$$I_1 = I_1' - I_1'', \quad I_2 = I_2' - I_2'', \quad I_3 = I_3' + I_3''. \quad (1.24)$$

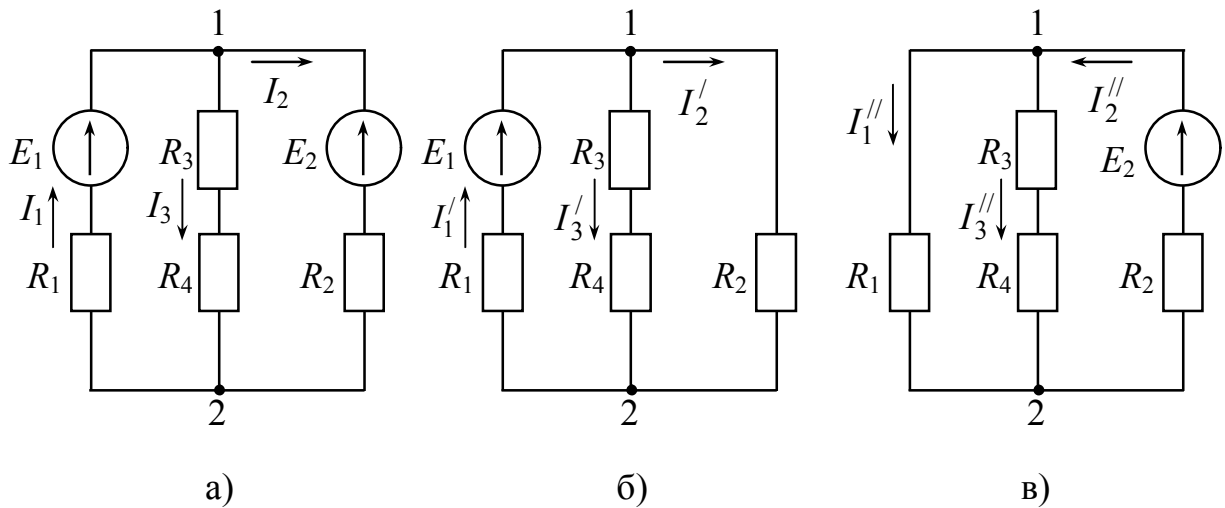


Рисунок 1.14 – Схеми для пояснення методу суперпозиції

1.8.4. Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці

У будь-якій електричній схемі (рис. 1.15, а) завжди можна виділити одну вітку, а всю частину схеми, що залишилася, незалежно від її складності, умовно позначити прямокутником з двома вихідними затискачами (рис. 1.15, б). Стосовно до виділеної вітки ця частина схеми, що залишилася, є *двополюсником*. Отже, *двополюсник* – це узагальнена назва схеми, що двома своїми вихідними затискачами приєднується до виділеної

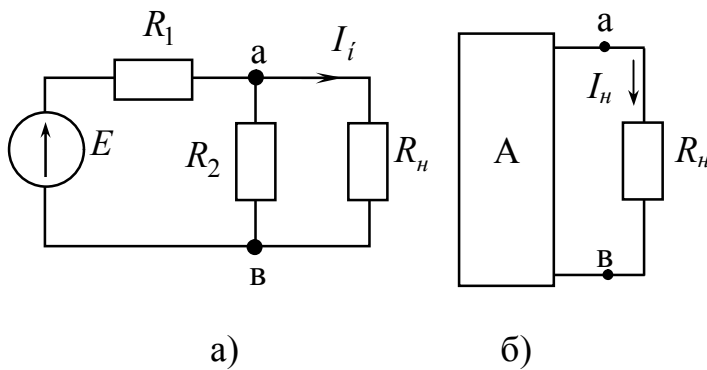


Рисунок 1.15 – Схеми для пояснення поняття чотирьополюсника

вітки, яка містить опір R_n . Двополюсники бувають активними (мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії) та пасивними.

Для розрахунку струму в одній вітці електричного кола використовують теорему Тевенена про *еквівалентний генератор*: будь-який активний двополюсник

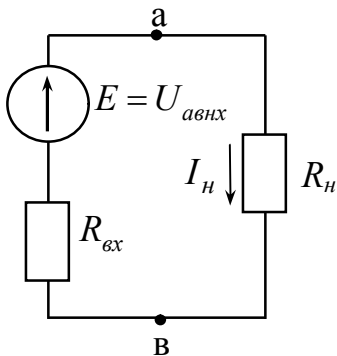


Рисунок 1.16 – Схеми, еквівалентна схемі 1.15. а

стосовно до виділеної вітки можна замінити еквівалентним джерелом напруги, EPC якого дорівнює напрузі неробочого ходу на розімкнутих затискачах активного двополюсника, а внутрішній опір – вхідному опору пасивного двополюсника. Цей метод розрахунку має назву методу еквівалентного генератора (далі – МЕГ) або активного двополюсника та дає змогу перейти від схеми рисунку 1.15, б до схеми рисунку 1.16.

$$\text{Тоді шуканий струм: } I_n = \frac{U_{авнх}}{R_n + R_{вх}}, \quad (1.25)$$

де $U_{авнх}$ – напруга неробочого ходу;

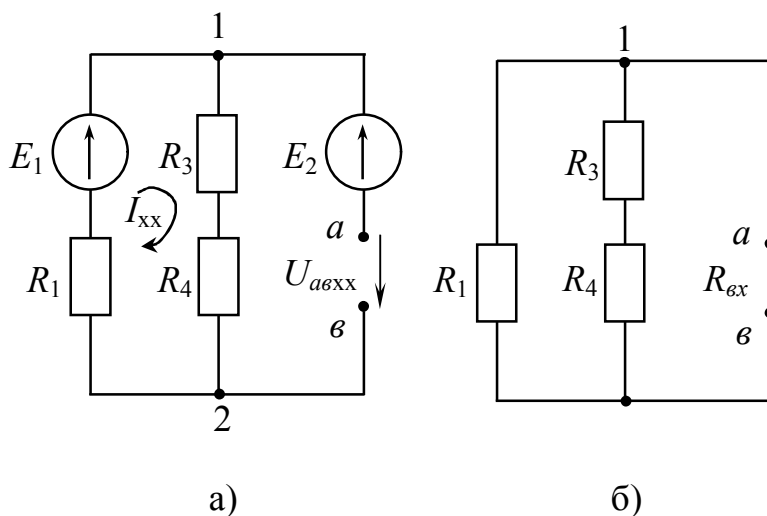
$R_{вх}$ – вхідний опір двополюсника відносно вхідних затискачів.

Розглянемо порядок визначення струму I_2 за методом для схеми на рисунку 1.14, а.

1. Вириваємо опір R_2 . (рис. 1.17, а).

2. Визначаємо $R_{вх}$, при цьому закорочуємо усі ЕРС, і розриваємо всі

джерела струму (рис. 1.17, б): $R_{вх} = \frac{R_1 \cdot (R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_1}$.



3. Визначаємо напругу неробочого ходу на розімкнутих затискачах $U_{авнх}$:

$$U_{авнх} = -E_2 + I_{нх} \cdot (R_3 + R_4),$$

де струм неробочого ходу –

$$I_{нх} = \frac{E_1}{R_3 + R_4 + R_1}.$$

4. За формулою (1.25) остаточно визначаємо струм I_2 .

Рисунок 1.17 – Схеми для пояснення МЕТ

1.9 Перетворення зірки опорів на еквівалентний трикутник опорів (і навпаки)

Зіркою опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому всі початки опорів з'єднані в одну точку (рис. 1.21, а), трикутником опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому початок одного опору з'єднується з кінцем іншого (рис. 1.21, б).

Схеми рисунка 1.21, а і рисунка 1.21, б еквівалентні щодо струмів I_1, I_2, I_3 та потенціалів вузлів 1, 2 і 3, якщо виконуються такі співвідношення:

$$R_{12} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad (1.26)$$

$$R_{13} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}; \quad (1.27)$$

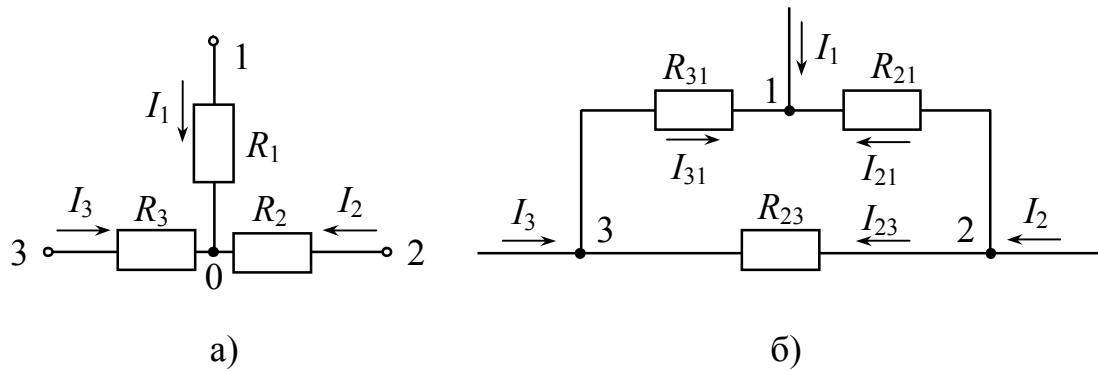


Рисунок 1.18 – Зірка опорів та трикутник опорів

$$R_{23} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 \cdot G_3} = \frac{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}{1/R_2 \cdot 1/R_3} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \quad (1.28)$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad (1.29) \quad R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad (1.30)$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.31)$$

Формули (1.26) – (1.28) застосовують для переходу від зірки опорів до трикутника, а формули (1.29) – (1.31) – для переходу від трикутника опорів до зірки опорів

1.10 Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – це графік розподілу потенціалу вздовж контуру або ділянки кола. Потенціальна діаграма, що побудована вздовж якогось контуру схеми, як і баланс, показує правильність (чи ні) проведеного розрахунку.

По осі абсцис відкладають опори вздовж контуру, один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал якої приймають рівним нулю. По осі ординат відкладають потенціали точок контуру.

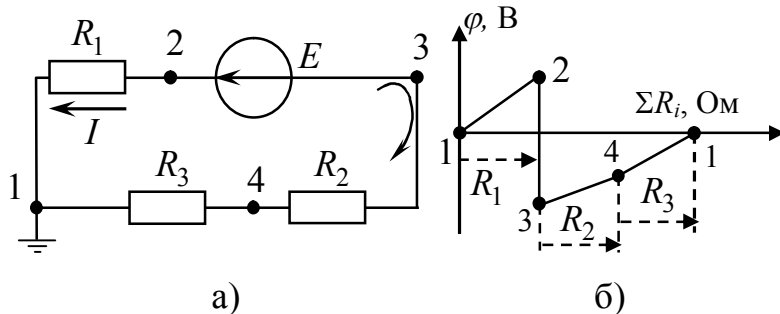


Рисунок 1.19 – Схема і потенціальна діаграма

Приклад побудови діаграми зображено на рисунок 1.19, а.

1. Визначаємо струми на ділянках кола (в нашому випадку – це один струм, бо схема нерозгалужена):
 $I = E / (R_1 + R_2 + R_3)$.

2. Один із потенціалів контуру приймаємо рівним нулю – $\varphi_1 = 0$.

3. Визначаємо потенціали інших точок (потенціал останньої, вона ж перша, точки повинен бути рівним нулю):

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I \cdot R_1, \quad \varphi_3 = \varphi_2 - E, \quad \varphi_4 = \varphi_3 + I \cdot R_2, \quad \varphi_1 = \varphi_4 + I \cdot R_3.$$

4. Обираємо масштаби за осями потенціалів та опорів та будуємо діаграму – рисунок 1.19, б.

1.11 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.

Передача енергії по лініям передачі

Припустимо, що навантаження R_H підключене до активного двополюсника (рис. 1.18, а), до того ж $R_{ex} = const$, $0 \leq R_H \leq \infty$.

Знайдемо, при якому співвідношенні опорів R_{ex} та R_H буде передаватися максимальна потужність від активного двополюсника навантаженню.

Потужність та струм навантаження:

$$P_H = I_H^2 \cdot R_H, \quad (1.32)$$

$$I_H = \frac{U_{abnx}}{R_H + R_{ex}}. \quad (1.33)$$

$$\text{Отже, } P_H = \frac{U_{abnx}^2}{(R_H + R_{ex})^2} \cdot R_H. \quad (1.34)$$

Для знаходження максимуму функції $P_H = f(R_H)$ необхідно взяти похідну виразу (1.53) й дорівняти її до нуля:

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{U_{abnx}^2 \cdot ((R_H + R_{ex})^2 - 2 \cdot (R_H + R_{ex}) \cdot R_H)}{(R_H + R_{ex})^4} = 0. \quad (1.35)$$

$$\text{Звідки } (R_H + R_{ex})^2 - 2 \cdot (R_H + R_{ex}) \cdot R_H = 0 \Rightarrow R_{ex}^2 - R_H^2 = 0 \Rightarrow R_{ex} = R_H. \quad (1.36)$$

Оскільки друга похідна $\frac{d^2 P_H}{dR_H^2} < 0$, то умова $R_{ex} = R_H$ відповідає саме максимуму функції $P_H = f(R_H)$.

Підставимо (1.55) в (1.53) та отримаємо максимальну потужність навантаження: $P_{H \max} = \frac{U_{abnx}^2}{4 \cdot R_H}$.

Коефіцієнт корисної дії (К.К.Д., η) при $R_{ex} = R_H$:

$$\eta = \frac{P_H}{P_{повн}} = \frac{U_{abnx}^2 \cdot R_H}{(R_H + R_{ex})^2 \cdot U_{abnx} \cdot I} = \frac{U_{abnx}^2 \cdot R_H \cdot (R_H + R_{ex})}{(R_H + R_{ex})^2 \cdot U_{abnx}^2} = \frac{R_H}{(R_H + R_{ex})}. \quad (1.38)$$

де $P_{повн} = U_{abnx} \cdot I = \frac{U_{abnx}^2}{(R_H + R_{ex})}$ – повна потужність, що виробляється еквівалентним генератором.

Отже, $\eta = 0,5$ якщо $R_{ex} = R_H$. При $R_H > R_{ex}$ – $\eta > 0,5$.

Висновок: якщо потужність P_H значна, то працювати з таким низьким

К.К.Д. ($\eta = 0,5$) неприпустимо. Але якщо P_H мала (наприклад потужність різних датчиків пристроїв автоматики), то такий низький К.К.Д. вважають задовільним, оскільки при цьому віддається максимально можлива активна потужність навантаженню.

Узгодження навантаження – вибір величини навантаження R_H рівним навантаженню R_{ex} активного двополюсника.

Спрощену схему передачі електричної енергії зображено на рисунку 1.20.

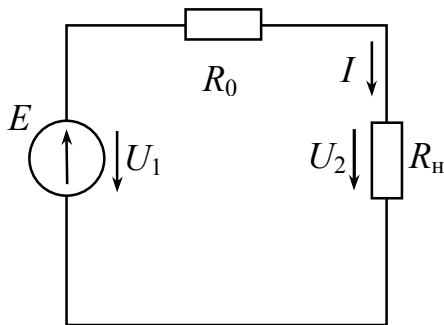


Рисунок 1.20 –
Спрощена
схема передачі
енергії

На схемі, наведеній на рисунку 1.20 позначено:

- U_1 – напруга генератора на початку лінії;
- U_2 – напруга на навантаженні (кінець лінії);
- R_H – навантаження наприкінці лінії;
- R_0 – опір проводів.

У реальних лініях передач $\eta = 0,94 \div 0,97$, тому U_2 лише на кілька процентів відрізняється від U_1 .

Криві, які повністю характеризують режим роботи лінії, при $U_1 = const$ – рисунок 1.2.

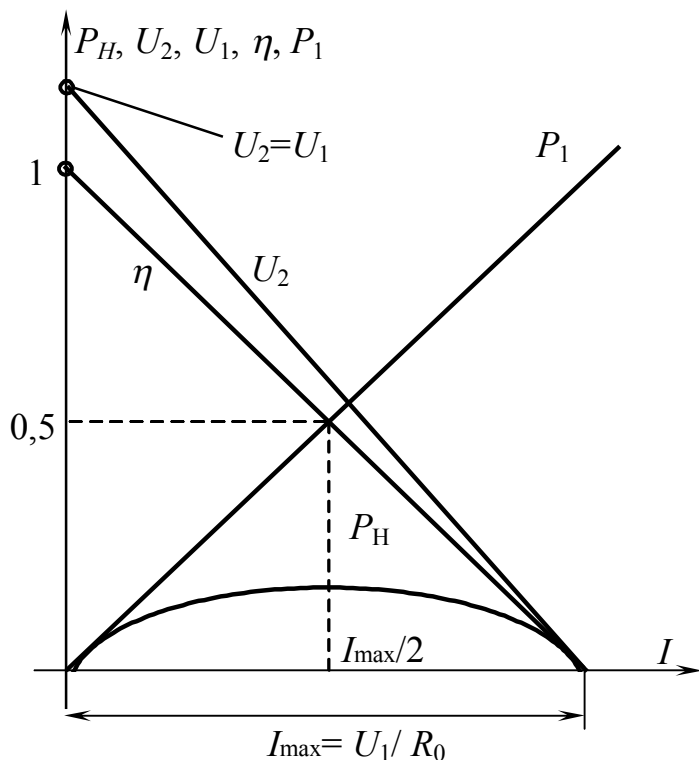


Рисунок 1.22 – Графіки $U_H(I)$, $P_H(I)$, $\eta(I)$

1.2. Вирази для цих кривих:

1) $P_1 = U_1 \cdot I$ – потужність генератора;

2) $U_2 = U_1 - I \cdot R_0$ – напруга на навантаженні;

$$P_2 = P_1 - I^2 \cdot R_0 = U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0 = I \cdot (U_1 - I \cdot R_0)$$

– потужність в навантаженні;

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0}{U_1 \cdot I} =$$

$$= 1 - \frac{I \cdot R_0}{U_1} =$$

$$= \frac{I^2 \cdot R_H}{(R_0 + R_H) \cdot I^2} = \frac{R_H}{R_0 + R_H}$$

– К.К.Д.

При $P_2 = const$ з під-

вищенням U_2 можна зменшити значення струму I і тому знизити втрати у про-

водах P_{np} , що, в свою чергу, дозволяє зменшити переріз проводів:

$$P_{np} = R_0 \cdot I^2 = \rho \cdot \frac{l_{np}}{S_{np}} \cdot \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2, \quad \text{де } l_{np}, S_{np} - \text{довжина та перетин проводів.}$$

Контрольні питання до розділу

1. Поясніть, з яких елементів складається електричне коло і схема, що таке лінійне і нелінійне, розгалужене й нерозгалужене електричне коло
2. Дайте визначення джерел електрорушійної сили та струму. Поясніть, як проводять еквівалентну заміну реального джерела ЕРС джерелом струму (і навпаки).
3. Поясніть, як записують закон Ома для ділянки кола.
4. Сформулюйте закони Кірхгофа та поясніть, як проводять розрахунок струмів за законами Кірхгофа.
5. Поясніть, як проводять баланс потужностей у колах постійного струму.
6. На прикладі поясніть, як будують потенціальну діаграму для контуру електричного кола.
7. Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом вузлових потенціалів та методом двох вузлів.
8. Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом контурних струмів.
9. Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом суперпозиції.
10. Поясніть, як здійснюють перетворення зірки опорів на еквівалентний трикутник опорів (і навпаки).
11. Наведіть теорему Тевенена про еквівалентний генератор. Поясніть, як проводять розрахунок струму методом еквівалентного генератора
12. Поясніть умови передачі максимальної потужності від джерела енергії до навантаження та дайте визначення поняттю «узгодження навантаження».

РОЗДІЛ 2 ВЛАСТИВОСТІ Й МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.

2.1 Основні величини, що характеризують синусоїдний струм

Струм, що змінюється за законом синуса, називається *синусоїдним* (або гармонійним). Миттєве значення такого струму:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_i\right), \quad (2.1)$$

де $(\omega \cdot t + \varphi)$ – фаза, аргумент синуса, характеризує стан коливання,

I_m – амплітудне, тобто максимальне значення струму, А;

φ_i – початкова фаза струму (рад), визначає зсув синусоїди відносно нуля (якщо $\varphi > 0$ синусоїда зсунута вліво, а якщо $\varphi < 0$ синусоїда зсунута вправо);

T – період, тобто час, за який відбувається одне повне коливання, с;

f – частота коливань, тобто кількість коливань в секунду, $1/\text{с} = \text{Гц}$;

ω – кутова частота, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, рад/с.

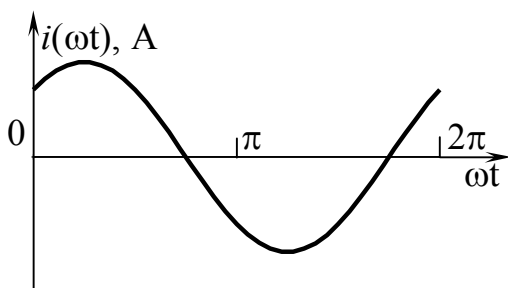


Рисунок 2.1 – Графік $i(\omega t)$

На рисунку 2.1 показана крива струму $i(\omega t)$ при $\varphi = 45^\circ$.

Синусоїдні струми відносно низьких частот отримують за допомогою синхронних генераторів, а синусоїдні струми високої частоти (більш десятків кілогерц) – за допомогою напівпровідникових генераторів.

Синусоїдна величина характеризується миттєвим, амплітудним, середнім і діючим значеннями.

Середнє значення синусоїдної величини – це її середнє значення за

половину періоду:
$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \approx 0,637 \cdot I_m. \quad (2.2)$$

Діюче значення синусоїдного струму чисельно дорівнює значенню постійного струму, який за час, що дорівнює періоду T , викликає виділення такої ж кількості тепла в провіднику з опором R , що і синусоїдний струм за той же час T . Діючий струм називають ще *ефективним* або *середньоквадратичним*:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 \cdot \sin \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (2.3)$$

Синусоїдну величину характеризують коефіцієнтом амплітуди

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} \text{ і коефіцієнтом форми } k_\phi = \frac{I}{I_{\text{сеп}}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2 / \pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}.$$

2.2 Синусоїдний струм активного опору, індуктивності та ємності

Розглянемо ділянку кола рисунку 2.2. Струм та напруга за законом Ома активного опору –: $i_R = I_{mR} \cdot \sin \omega t$, $u_R = i_R \cdot R = I_{mR} \cdot R \cdot \sin \omega t = U_{mR} \cdot \sin \omega t$, (2.4) де $U_{mR} = I_{mR} \cdot R$ – амплітудне значення напруги на активному опорі.

З формул (2.4) бачимо, що струм і напруга на активному опорі співпадають за фазою (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$) (рис. 2.3).

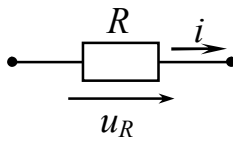


Рисунок 2.2 – Ділянка кола з R

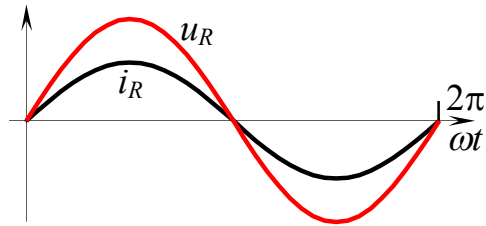


Рисунок 2.3 – Графіки $i_R(\omega t)$, $u_R(\omega t)$

Миттєва потужність – добуток миттєвої напруги на ділянці кола і миттєвого струму. Для активного опору:

Активна потужність – це середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_R dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_R i_R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U_{mR} I_{mR}}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{U_{mR} I_{mR}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = UI = I^2 R. \quad (2.5)$$

Будь-яка обмотка (катушка) має індуктивність і активний опір. На схемі катушку позначають так, як зображено на рисунку 2.4, а. Як відомо, *індуктивність* – це елемент схеми заміщення, який дає змогу врахувати при розрахунках явища самоіндукції та накопичування енергії магнітного поля. Виділимо зі схеми рисунку 2.4, а тільки одну індуктивність яка зображена на рисунку 2.4, б. Припустимо, струм індуктивності – $i_L = I_{mL} \cdot \sin \omega t$. У катушці наводиться ЕРС:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_{mL} \cos(\omega t) = -\omega \cdot L \cdot I_{mL} \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right). \quad (2.6)$$

Напруга на індуктивності:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_{mL} \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) = U_{mL} \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right). \quad (2.7)$$

Амплітудне значення напруги на індуктивному опорі:

$$U_{mL} = I_{mL} \cdot \omega \cdot L = I_{mL} \cdot X_L, \quad (2.8)$$

$$\text{де } X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \text{індуктивний опір.} \quad (2.9)$$

З (2.7) бачимо, що напруга на індуктивності випереджає струм на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$). Тобто, якщо $u_L = 0$, то $i_L = \max$ (див. рис. 2.5)

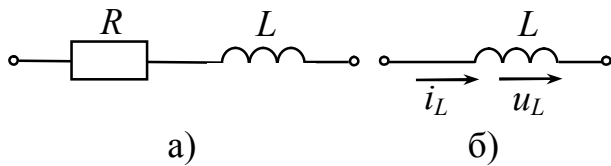


Рисунок 2.4 – Ділянки кола R-L та L

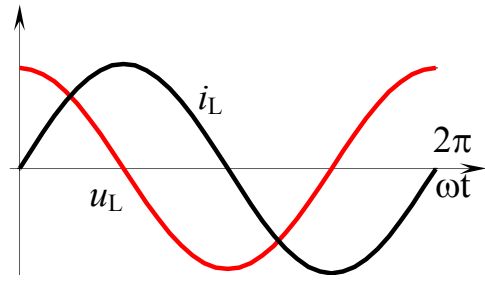


Рисунок 2.5 – Графіки $i_L(\omega t)$, $u_L(\omega t)$

Миттєва потужність індуктивності може мати додатний знак – тоді індуктивність накопичує енергію, що береться з джерела, і від’ємний знак – тоді індуктивність віддає енергію в джерело – $p_L = u_L \cdot i_L = \frac{U_{mL} \cdot I_{mL}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$. (2.10)

Активна потужність індуктивності – $P_L = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} p_L dt = 0$. (2.11)

Розглянемо ділянку кола рисунку 2.7. Ємність, як елемент схеми заміщення, дає змогу врахувати явища зарядки конденсатора і накопичування енергії електричного поля, а паралельно включений резистор враховує втрати у неідеальному діелектрику конденсатора (рис. 1.3, б):

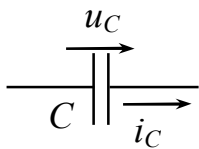


Рисунок 2.6 – Ділянки кола C

Якщо $u_C = const$, то $i_C = \frac{dq}{dt} = 0$. (2.12)

А якщо $u_C = U_{mC} \cdot \sin(\omega t)$, то заряд:

$q = C \cdot u_C = C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t)$. (2.13)

Конденсатор при цьому періодично перезаряджається, що супроводжується протіканням через нього зарядного струму:

$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{d(C \cdot U_{mC} \sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_{mC} \cdot \cos(\omega t) = I_{mC} \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right)$, (2.14)

де $I_{mC} = \frac{U_{mC}}{1/\omega \cdot C} = \frac{U_{mC}}{X_C}$ – амплітудне значення струму ємності, (2.15)

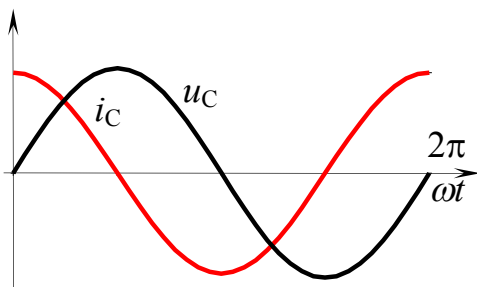


Рисунок 2.7 – Графіки $i_C(\omega t)$, $u_C(\omega t)$

$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$ – ємнісний опір. (2.16)

Отже, струм ємності випереджає напругу на ній на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$) (рис. 2.7).

Миттєва потужність ємності може мати додатний і від’ємний знаки:

$$p_C = u_C \cdot i_C = \frac{U_{mC} \cdot I_{mC}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.17)$$

Активна потужність ємності: $P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_C dt = 0.$ (2.18)

2.3 Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

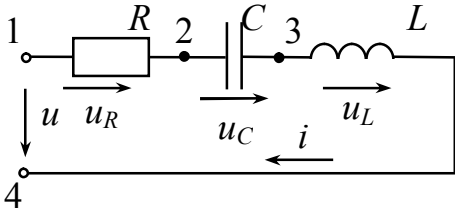


Рисунок 2.8 – Послідовний коливальний контур

Розглянемо послідовне з'єднання активного опору, ємності, індуктивності, так званий послідовний коливальний контур (рис. 2.8). До входу прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, унаслідок чого протікає синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень напруг: $u = u_R + u_C + u_L.$ (2.19)

З урахуванням розглянутого раніше:

$$u = I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t) - I_m \cdot X_C \cdot \cos(\omega t) + I_m \cdot X_L \cdot \cos(\omega t), \quad (2.20)$$

або $U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot (R \cdot \sin(\omega t) + (X_L - X_C) \cdot \cos(\omega t)).$ (2.21)

Позначимо $X = X_L - X_C$ – реактивний опір кола. (2.22)

Тоді $R \cdot \sin(\omega t) + X \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Z \cdot \sin(\omega t + \varphi),$ (2.23)

де $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ – кут зсуву фаз між напругою u і струмом i ; (2.24)

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – модуль повного опору кола. (2.25)

Отже вираз (2.21) можна записати у такий спосіб:

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.26)$$

або $U_m = I_m \cdot Z$ – закон Ома. (2.27)

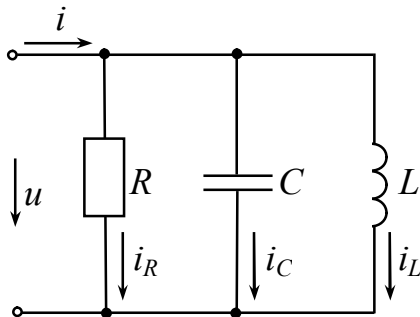


Рисунок 2.9 – Паралельний коливальний контур

Для так званого паралельного коливального контуру (рис. 2.9) напруга та струм на вході кола: $u = U_m \cdot \sin(\omega t), i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi).$

Перший закон Кірхгофа для кола: $i = i_R + i_C + i_L.$ (2.28)

З урахуванням раніш розглянутого струми віток дорівнюють:

$$i_R = U_m \cdot G \sin(\omega t), i_L = -U_m \cdot B_L \cos(\omega t),$$

$$i_C = U_m \cdot B_C \cdot \cos(\omega t) = U_m \cdot \omega \cdot C \cos(\omega t), \quad (2.29)$$

$$\text{де } G = \frac{1}{R} \text{ – активна провідність;} \quad (2.30)$$

$$B_C = \omega \cdot C \text{ – реактивна ємнісна провідність;} \quad (2.31)$$

$$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L} \text{ – реактивна індуктивна провідність.} \quad (2.32)$$

З урахуванням (2.30), (2.31) і (2.32) вираз (2.28) набуває вигляду:

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot [G \cdot \sin(\omega t) - (B_L - B_C) \cdot \cos(\omega t)], \text{ або} \quad (2.33)$$

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot \sqrt{G^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (2.34)$$

Позначимо φ – кут зсуву фаз між напругою u і струмом i на вході кола:

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G}, \quad (2.35)$$

$$\text{де } B = B_L - B_C \text{ – повна реактивна провідність.} \quad (2.36)$$

Застосуємо позначення:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \text{ – повна провідність кола.} \quad (2.37)$$

$$\text{Остаточно маємо: } I_m = U_m \cdot Y \text{ – закон Ома.} \quad (2.38)$$

2.4 Потужність у колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)

Припустимо, до якогось складного кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, на вході кола тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність:

$$p = u \cdot i = U \cdot I \cdot (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (2.39)$$

Активна потужність – середнє значення p за період:

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} p \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot \pi = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (2.40)$$

де $\cos \varphi$ – коефіцієнт потужності.

При розрахунках синусоїдних кіл застосовують поняття *реактивної* потужності: $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$. (2.41)

Реактивна потужність додатна при активно-індуктивному ($R-L$) навантаженні, коли $\varphi > 0$, і від'ємна при активно-ємнісному навантаженні ($R-C$), коли $\varphi < 0$. Тобто індуктивність можна розглядати як споживача реактивної енергії, а ємність – як її генератор.

Оскільки електричні машини й апарати конструюють для роботи на певні значення струмів і напруг, їх характеризують не активною, що залежить від $\cos\varphi$, а повною потужністю: $S = U \cdot I$ (2.42)

Повна потужність показує ту активну потужність, яку джерело енергії може віддати споживачу, якщо останній працює при $\cos\varphi = 1$. Трикутники опорів, провідностей і потужностей зображені на рисунку 2.10.

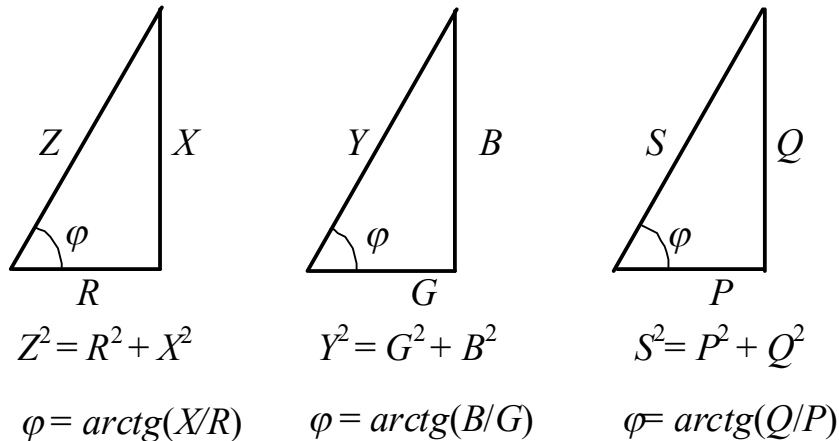


Рисунок 2.10 – Трикутник опорів, провідностей і потужностей

2.5 Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл синусоїдного струму

Розрахунок електричних кіл істотно полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число $e^{j\cdot\alpha}$ дорівнює: $e^{j\cdot\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$, і на комплексній площині (рис. 2.11) зображується вектором, що має одиничну довжину та складає з віссю дійсних чисел кут α . ($j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця). Якщо замість числа $e^{j\cdot\alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha}$,

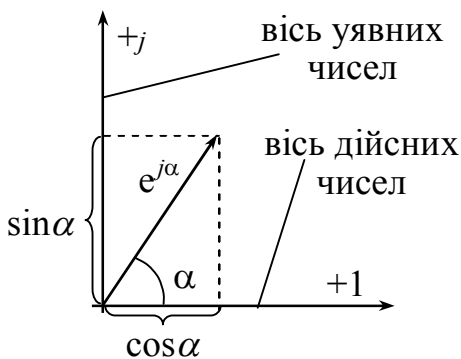


Рисунок 2.11 – $e^{j\alpha}$ на комплексній площині

де $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді $I_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. (2.43)

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина, $I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при j .

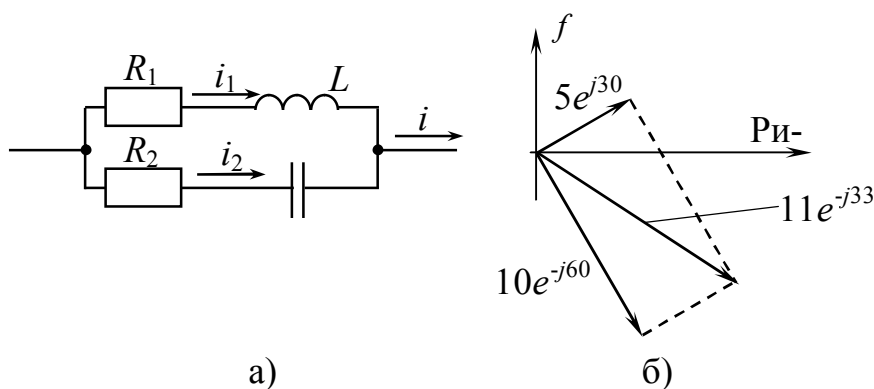
Отже, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ можна уявити як проекцію вектора $I_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω , на ось уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою та початковою фазою

при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j \cdot \varphi}$ називається комплексною амплітудою струму. Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дає змогу легко проводити простіші операції.

Примітка. На комплексній площині додатні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, від'ємні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Розглянемо приклад розв'язання задачі на комплексній площині. Для схеми на рисунку 2.12: $i_1 = 10 \cdot \sin\left(\omega t - 60^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right)$, $i_2 = 5 \cdot \sin\left(\omega t + 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right)$.

За першим законом Кірхгофа струм i дорівнює $i = i_1 + i_2$.



Будуємо на комплексній площині в обраному масштабі вектори, що зображують струми i_1 , i_2 , та складаємо їх для отримання загального струму i .

Рис 2.12 – Приклад задачі на комплексній площині

2.6 Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами

Існує три форми запису комплексних чисел:

– показова $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$;

– алгебраїчна $\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$, де 4,33 – дійсна частина, $j \cdot 2,5$ – уявна частина;

– тригонометрична $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від показової форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$).

Дії над комплексними числами:

– множення та ділення роблять у показовій формі, наприклад:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \cdot 15 \cdot e^{-j \cdot 40^\circ} = 75 \cdot e^{-j \cdot 10^\circ}, \quad \underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot e^{-j \cdot 10^\circ}}{15 \cdot e^{-j \cdot 40^\circ}} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ};$$

– складання або віднімання роблять в алгебраїчній формі, наприклад:

$$\underline{I}_{m1} = 10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8,66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 10 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 4,33 + j \cdot 2,5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8,66 + 4,33 + j \cdot 2,5 = 9,33 - j \cdot 6,16.$$

Перехід від алгебраїчної до показової форми має деякі особливості.

Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять у такий спосіб:

$$\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(\arctg\left(\frac{2,55}{4,33}\right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ},$$

$$\underline{I}_m = 4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{-j \cdot \left(\arctg\left(\frac{2,55}{4,33}\right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у першій або другій чверті комплексної площини, перехід роблять у такий спосіб:

$$\underline{I}_m = -4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(180^\circ - \arctg\left(\frac{2,55}{4,33}\right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{j \cdot 150^\circ}.$$

$$\underline{I}_m = -4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{-j \cdot \left(180^\circ - \arctg\left(\frac{2,55}{4,33}\right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ}.$$

Примітка. $\frac{1}{j} = -j$; множення вектора на уявне число j означає його обертання на 90° проти годинникової стрілки.

2.7 Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Сутність методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені щодо комплексних струмів, ЕРС і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщає її, диференціювання замінюється множенням на $j\omega$, а інтегрування – діленням на $j\omega$.

Для схеми на рисунку 2.8 синусоїдна напруга та струм дорівнюють: $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальне

$$\text{формі: } u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int u_C dt. \quad (2.44)$$

Другий закон Кірхгофа в комплексній формі:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m &= R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \\ &= \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} = \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \cdot e^{j \cdot \varphi}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

де $X_L = \omega \cdot L$, $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$, $X = X_L - X_C$ відповідно індуктивний, ємнісний, реактивний опори,

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – модуль повного опора,

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ – кут зсуву фаз між струмом і напругою.

Уведемо позначення:

$$\underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \cdot e^{j \cdot \varphi} \text{ – комплекс повного опора кола.} \quad (2.46)$$

$$\text{Закон Ома в комплексній формі має вигляд } \underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}. \quad (2.47)$$

Розглянемо коло рисунку 2.9, до якого прикладено синусоїдну напругу $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ і на вході якого тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів в інтегрально-диференціальній формі:

$$i = i_R + i_L + i_C = u \cdot G + \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt + C \cdot \frac{du}{dt}, \quad (2.48)$$

Перший закон Кірхгофа в комплексній формі:

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot G + \frac{\underline{U}_m}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\underline{U}_m}{-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \underline{U}_m \cdot (G - j \cdot (B_L - B_C)) = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC}. \quad (2.49)$$

Висновки:

– алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$;

– алгебраїчна сума комплексних напруг уздовж замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС: $\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k$ ($\underline{U}_k = \underline{I}_k \cdot \underline{Z}_k$);

– оскільки в основі усіх розглянутих методів розрахунку кіл постійного струму лежать закони Кірхгофа, то всі вони можуть бути використані для розрахунку кіл синусоїдного струму в комплексній формі.

2.8 Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола

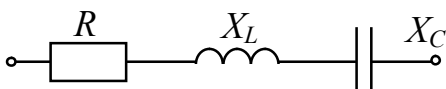


Рисунок 2.13 – Ділянка R-L-C кола

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j \cdot \varphi}} = Y \cdot e^{-j \cdot \varphi} = G - j \cdot B. \quad (2.50)$$

де G – активна провідність;

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність.

Активна та реактивна провідності ділянки кола рисунку 2.13 відповідно при відомих R та $X=X_L-X_C$:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}. \quad (2.51)$$

Активний та реактивний опір ділянки кола (рис. 2.14) при відомих G і B :

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad (2.52)$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}. \quad (2.53)$$

2.9 Комплексна форма запису потужності.

Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму

Припустимо, напруга і струм на ділянці кола – $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$, $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Тоді комплексом повної потужності називають:

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot \varphi} = P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos \varphi + U \cdot I \cdot \sin \varphi, \quad (2.54)$$

де $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i}$ – спряжене комплексне значення струму \underline{I} (кут струму міняємо на протилежний)

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і пасивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелом, повинна дорівнюватись сумі всіх потужностей, що приймаються споживачами:

$$\sum_{k=1}^n P_{k\text{джер}} = \sum_{k=1}^m P_{k\text{спож}}; \quad \sum_{k=1}^n Q_{k\text{джер}} = \sum_{k=1}^m Q_{k\text{спож}}. \quad (2.55)$$

2.10 Векторно-топографічні діаграми

Векторні діаграми – сукупність на комплексній площині векторів синусоїдних величин, що розглядаються, з дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма – сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо *векторно-топографічну* діаграму.

Розглянемо побудову векторно-топографічної (далі – ВТ) діаграми на прикладі схеми рисунка 2.8.

Порядок побудови векторно-топографічної діаграми:

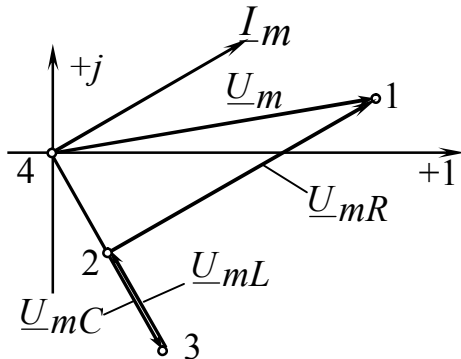
– розраховуємо комплекс струму \underline{I}_m ;

– визначаємо модулі напруг на окремих ділянках кола –

$$U_{mR} = I_m \cdot R, \quad U_{mL} = I_m \cdot X_L, \quad U_{mC} = I_m \cdot X_C;$$

– вибираємо масштаби за струмом і за напругою – m_I, m_U ;

– позначаємо точки на схемі (1–4);



– останню точку (4 в нашому випадку) розташовуємо на початку координат, обхід робимо назустріч струму послідовно від останньої точки до першої; при цьому пам'ятаємо, що напруга на активному опорі співпадає зі струмом за фазою, напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90° , напруга на ємності відстає від струму за фазою на 90° .

Рисунок 2.14 – ВТ діаграма

На рисунку 2.14 наведено приклад побудови діаграми у разі активно-ємнісного різновиду кола (струм I_m випереджає напругу $U_m = U_{m14}$ на вході кола).

На рисунку 2.14 наведено приклад побудови діаграми у разі активно-ємнісного різновиду кола (струм I_m випереджає напругу $U_m = U_{m14}$ на вході кола).

2.11 Резонанс у колах синусоїдного струму (резонанс напруг, струмів)

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого струм на вході співпадає за фазою з вхідною напругою.

Розрізняють два основних резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Досягти резонансу можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить послідовно з'єднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході співпадає за фазою зі вхідною напругою та досягає максимального значення. Резонанс напруг відбувається в послідовному коливальному контурі (рис. 2.8). У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним: $X = X_L - X_C = 0$, $Z_{вх} = R$, а сумарна реактивна потужність $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Поняття, що характеризують резонанс напруг:

1) *резонансна частота* – частота під час резонансу ω_0 , яка знаходиться за

$$\text{умови } X_L = X_C, \text{ тобто } \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (2.56)$$

2) *хвильовий (характеристичний) опір* – це ємнісний або індуктивний опір під час резонансу, тобто $\rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$; (2.57)

3) *добротність контуру* – це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше за напругу на вході під час резонансу:
 $q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}$. (2.58)

Резонанс струмів – такий режим роботи кола, що містить паралельно з'єднанні ємності й індуктивності, при якому вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струмів струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж у загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю:

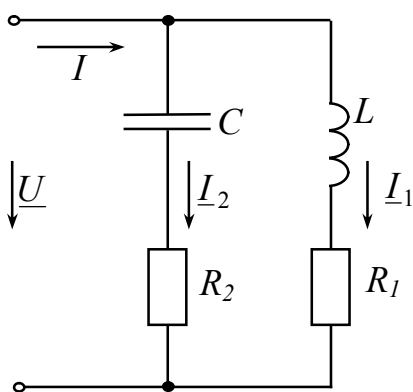


Рисунок 2.15 – Паралельний коливальний контур

$B = B_L - B_C = 0; Q = Q_L - Q_C = 0$.

Отримати резонанс струмів можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Для реального паралельного коливального контуру (рис. 2.15), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$ модулі струмів:

$$I = U \cdot Y, \quad I_1 = U \cdot Y_1, \quad I_2 = U \cdot Y_2, \quad (2.59)$$

$$\text{де } Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}; \quad Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}. \quad (2.60)$$

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \quad (2.61)$$

$$\text{Повна активна провідність кола} - G = G_1 + G_2. \quad (2.62)$$

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2}; \quad B_2 = B_C = -\frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \quad (2.63)$$

$$\text{Повна реактивна провідність кола } B = B_1 + B_2. \quad (2.64)$$

Під час резонансу повна провідність – $Y_0 = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$ і тому

загальний струм досягає мінімального значення – $I_o = U \cdot Y_o = U \cdot (G_1 + G_2)$. (2.65)

Резонансна частота ω_o за умови $B = 0$:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (2.66)$$

З останнього виразу бачимо, що резонанс є можливим у випадках:

1) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_1$ і $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_2$;

2) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_1$ і $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_2$;

3) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 = \rho$ – резонанс можливий за будь-якої частоти, оскільки

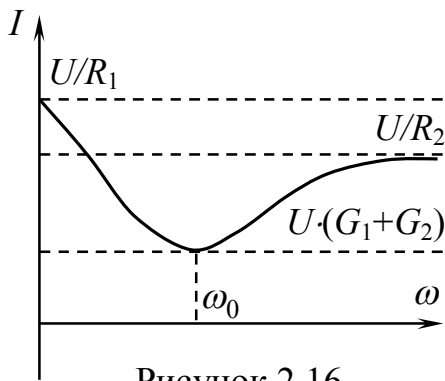


Рисунок 2.16 –

Резонансна характеристика

вхідний опір відрізняється активністю.

Залежність струму I від кутової частоти ω для реального контуру, що представлений на рис.2.15, зображена на рис.2.16.

Якщо $R_1 \approx 0$ та $R_2 = 0$, то струм $I \rightarrow 0$, $Z_{ex} \rightarrow \infty$. Контури, у яких R_1 та R_2 є малими в порівнянні з $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ звуться *контурами з малими втратами*. Для таких контурів резонансна частота – $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

Добротність контуру: $q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}$. (2.67)

Хвильова провідність: $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$ (2.68)

2.12 Практичне застосування резонансу

1. Підвищення коефіцієнта потужності (компенсація куту зсуву фаз).

Для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати

найвищий коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$, тобто намагатися отримати

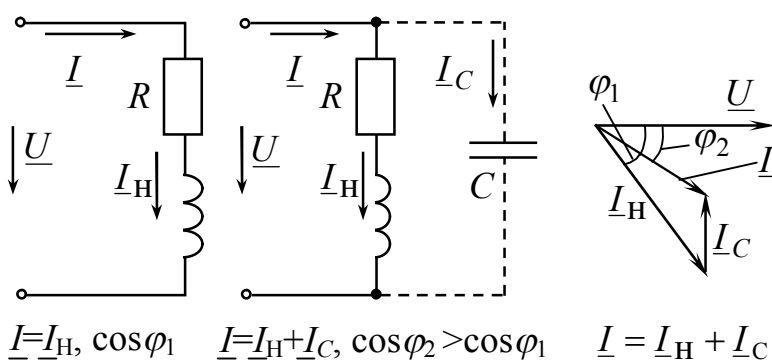
менший зсув за фазою між напругою на приймачі й струмом від генератора.

Високий $\cos \varphi$ необхідний для зменшення втрат під час передачі енергії по лі-

ніях електропередач: якщо підвищувати $\cos \varphi$, то струм $I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$, від

якого залежить рівень втрат у проводах, можна зменшити.

На практиці це виконують так: конденсатор під'єднують паралельно до



індуктивних елементів (наприклад, до асинхронних двигунів) – рисунок 2.17 (I_H – струм навантаження).

2. У передавачах та радіоприймальних пристроях (наприклад, налаштування радіоприймача на яку-небудь

$$I = I_H, \cos \varphi_1 \quad I = I_H + I_C, \cos \varphi_2 > \cos \varphi_1 \quad I = I_H + I_C$$

Рисунок 2.17 – Компенсація куту зсуву фаз

станцію означає досягнення резонансу його коливального контуру з частотою електромагнітних хвиль, що випромінює ця станція).

3. У провідниковому міжміському зв'язку.

4. В електровимірjuвальній техніці й пристроях автоматики.

5. У ферорезонансних стабілізаторах напруги.

Але якщо резонанс не передбачений спеціально, він може призвести до небажаних наслідків – пробій ізоляції та пошкодження електротехнічних пристроїв.

2.13 Умови передачі максимальної активної потужності від активного двополюсника до навантаження

При передачі сигналів, особливо слабких, від джерела до навантаження потрібно забезпечити максимальну потужність цього сигналу в навантаженні методом підбору параметрів навантаження.

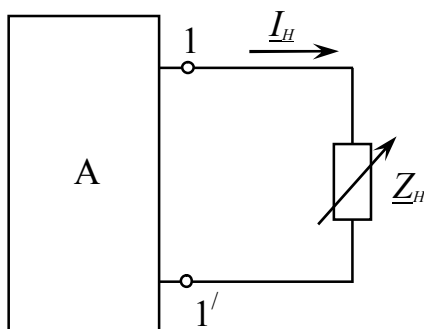


Рисунок 2.18 – Двополюсник

Якщо до вихідних затискачів активного двополюсника (рис. 2.18) підключене навантаження з опором $Z_n = R_n + j \cdot X_n$, а вхідний опір активного двополюсника – $Z_o = R_o + j \cdot X_o$, то умовою передачі максимальної активної потужності є рівність комплексу вхідного опора Z_o активного двополюсника спряженому комплексу Z_n^* навантаження.

При цьому $R_o = R_n$ та $X_n = -X_o$.

2.14 Індуктивно зв'язані елементи кола.

Поняття взаємної індуктивності.

Якщо зміна струму в одному елементі кола призводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то ці два елементи *індуктивно зв'язані*, а ЕРС, що виникає при цьому, називається ЕРС взаємної індукції (e_M). Кола, в яких, крім ЕРС самоіндукції, наводяться ЕРС взаємної індукції, називаються *індуктивно* або *магнітнозв'язаними* колами.

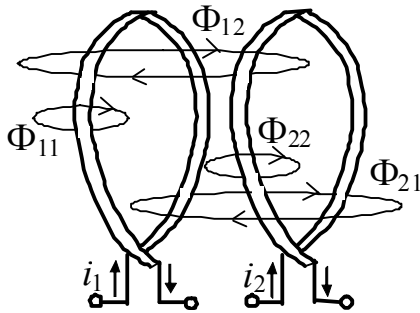


Рисунок 2.19 – Дві індуктивно зв'язані котушки

На рисунку 2.19 дві котушки умовно зображені у вигляді двох витків і віддалені одна від одної на деяку відстань. По котушках протікають синусоїдні струми i_1 та i_2 . Витки першої котушки зчеплені з магнітним потоком самоіндукції Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (2.69)$$

де Φ_{11} – частина магнітного потоку Φ_1 , який замикається, проходячи тільки через перший контур;

Φ_{12} – частина потоку Φ_1 , який замикається, проходячи через другий контур.

$$\text{Аналогічно для другого контуру: } \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (2.70)$$

Зрозуміло, що кожна котушка зчеплена з двома магнітними потоками: самоіндукції та взаємоіндукції.

Повне потокозчеплення першого та другого контурів:

$$\Psi_{1п} = w_1 \cdot (\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \Psi_1 \pm \Psi_{21}, \quad \Psi_{2п} = w_2 \cdot (\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_2 \pm \Psi_{12}, \quad (2.71)$$

де w_1, w_2 – число витків першого та другого контурів;

Знак «+» у формулі (2.71) ставиться в тому випадку, коли потік самоіндукції (створюється струмом власного контуру) і потік взаємної індукції направлені узгоджено.

При розрахунках таких електричних кіл вводять поняття *взаємної індуктивності* M (Гн), яка дає змогу при розрахунках врахувати явище взаємоіндукції та явище накопичення енергії в магнітному полі індуктивно зв'язаних котушок. Для нашого випадку:

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \quad (2.72)$$

Взаємна індуктивність M залежить від взаємного розташування, геометричних розмірів котушок, кількості витків і від μ (відносна магнітна проникність) осердя. M може бути визначена за допомогою експерименту.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку між двома контурами з індуктивностями L_1 і L_2 і взаємною індуктивністю M :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (2.73)$$

Зрозуміло, що $k \leq 1$. Коефіцієнт індуктивного зв'язку $k = 1$ (теоретично), якщо весь потік, що створюється першим контуром, буде зчеплений із другим контуром і залежить від взаємного розташування контурів (зміна індуктивного зв'язку досягається переміщенням однієї котушки відносно іншої).

Зазначимо, що M може бути більше L_1 (або L_2), але не може бути більше $i L_1$, $i L_2$ одночасно.

2.15 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок

Під час складання рівнянь для індуктивно зв'язаних кіл необхідно знати узгоджено або зустрічно спрямовані потоки самоіндукції та взаємоіндукції (або ще говорять: *узгоджено* або *зустрічно* включені котушки), тобто знати напрямки намотування витків котушок і напрямки струму в них.

Котушки включені узгоджено, якщо струми в них однаково орієнтовані щодо однойменних затискачів, які на схемах позначаються «*» або «•». При узгодженому включенні котушок *EPC* самоіндукції та взаємоіндукції додаються.

На прикладі схеми рисунка 2.74 розглянемо методику складання рівнянь за законами Кірхгофа для розрахунку магнітозв'язаних кіл (включення котушок узгоджене):

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_1 \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_2 \cdot R_2 = e_1, \\ i_3 \cdot R_3 + L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt - i_2 \cdot R_2 = e_2 \end{cases} \quad (2.74)$$

де $L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt}$, – падіння напруги в першій котушці; відповідно;

$L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$ – падіння напруги в другій котушці; відповідно.

Перейдемо до системи рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 \cdot \left(R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_1} + j \cdot \omega L_1 \right) + \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 \cdot j \omega M = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_1 \cdot j \omega M + \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j \cdot \omega L_2) - \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) = \underline{E}_2. \end{cases} \quad (2.75)$$

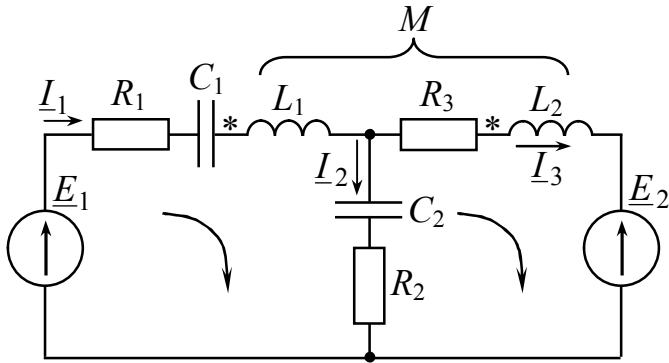


Рисунок 2.20 – Схема з індуктивно зв'язаними елементами

Величина $X_M = \omega \cdot M$ – реактивний опір взаємної індуктивності, Ом.

Величина $\underline{Z} = j \cdot \omega \cdot M$ – комплексний опір взаємної індуктивності.

2.16 Визначення взаємної індуктивності

Розглянемо рисунок 2.21, на кому зображено послідовне включення двох індуктивно зв'язаних котушок.

Нехай включення котушок – узгоджене. За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e,$$

$$\text{або } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M)] = \underline{E}$$

Отже, комплексний опір кола в цьому випадку

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{узр.}} &= R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) = \\ &= R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot X_{\text{узр.}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

У разі зустрічного включення котушок (*) за другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} - 2M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e,$$

або:

$$\underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M)] = \underline{E}.$$

Комплексний опір кола в цьому

разі:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{зустр.}} &= R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = \\ &= R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot X_{\text{зустр.}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\text{Отже } X_{\text{узр.}} - X_{\text{зустр.}} = 4 \cdot \omega \cdot M = 4 \cdot X_M, \quad \text{звідки } M = \frac{X_{\text{узр.}} - X_{\text{зустр.}}}{4 \cdot \omega}. \quad (2.78)$$

Вираз (2.78) використовують для визначення експериментальним шляхом взаємної індуктивності M .

2.17 Чотириполюсники. Основні поняття і класифікація

Чотириполюсник – електричне коло, що має два вхідних і два вихідних

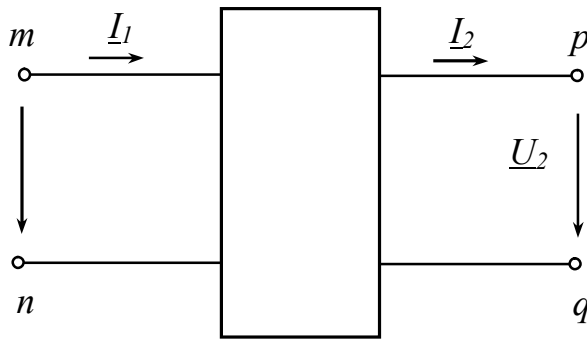


Рисунок 2.22 – Умовне позначення чотириполюсника

затискачі (наприклад, трансформатор, мостова схема, тощо). Поняття чотириполюсника використовують, коли потрібно визначити тільки вхідні й вихідні струми та напруги на вході й виході пристрою. Умовне позначення чотириполюсника наведено на рисунку 2.22, де позначено:

m, n – вхідні затискачі, до яких під'єднують джерело живлення;

p, q – вихідні затискачі, до яких під'єднують навантаження;

I_1, U_1 – вхідні } струми та напруги.
 I_2, U_2 – вихідні }

Отже, чотириполюсник – передаточна ланка між джерелом живлення і навантаженням, які можуть змінюватися, але елементи чотириполюсника та схема їх внутрішнього з'єднання, залишаються незмінними.

Класифікація чотириполюсників:

- за принципом лінійності – лінійні й нелінійні;
- за схемою внутрішніх поєднань – Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис. 2.23);
- активні (мають у своєму складі принаймні одне джерело енергії) і пасивні (не мають у своєму складі джерел енергії);

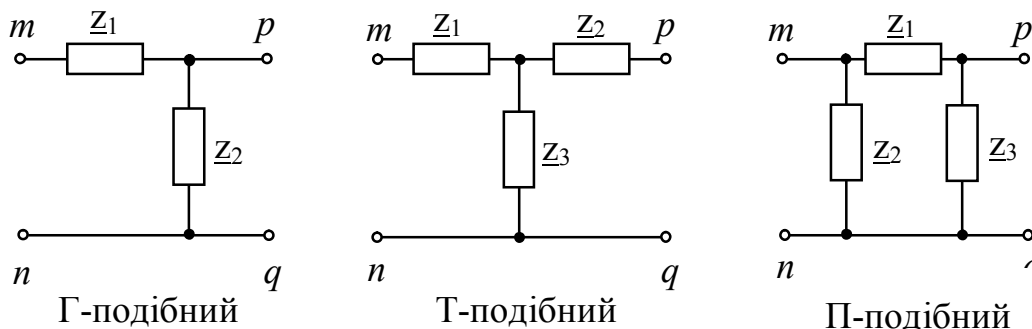


Рисунок 2.23 – Типи чотириполюсників

- автономні й неавтономні (якщо автономний чотириполюсник відімкнути від решти схеми, то принаймні на одній парі затискачів існуватиме напруга);
- симетричний (зміна містами джерела живлення і навантаження не змінить струмів на вході й виході чотириполюсника) і несиметричний.

2.18 Основні рівняння чотириполюсника

Для будь-якого лінійного пасивного чотириполюсника існують основні рівняння, що пов'язують струм \underline{I}_1 і напругу \underline{U}_1 на вході із струмом \underline{I}_2 та напругою \underline{U}_2 на виході. Розглянемо так звану А-форму запису системи основних рівнянь чотириполюсника, якій властиві напрямки струмів і напруг, зображен на рисунку 2.22:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (2.79)$$

де A, B, C, D – комплексні коефіцієнти, що залежать від значень елементів чотириполюсника, їхніх особливостей, типу внутрішнього з'єднання, частоти та визначають розрахунком та експериментом.

Коефіцієнти чотириполюсника зв'язані між собою співвідношенням:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1. \quad (2.80)$$

Якщо поміняти місцями \underline{E}_1 і \underline{Z}_H , то отримаємо систему основних рівнянь чотириполюсника, коли його живлення здійснюється з боку вихідних затискачів:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases} \quad (2.81)$$

Існують також інші форми запису рівнянь чотириполюсника – H, Y, Z, G, B . Наприклад, для Y – форми напрямок струму \underline{I}_1 такий самий, як і для А-форми, а напрямок \underline{I}_2 – протилежний. Y -форма запису має вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = Y_{11} \cdot \underline{U}_1 + Y_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = Y_{21} \cdot \underline{U}_1 + Y_{22} \cdot \underline{U}_2, \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\text{де } Y_{11} = \frac{D}{B}; \quad Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B}; \quad Y_{22} = \frac{A}{B}. \quad (2.83)$$

Отже, якщо з чотирьох величин $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2$ дві величини є відомими, то інші визначаються з основних рівнянь чотириполюсника за умови відомих коефіцієнтів.

Форма A застосовується в теорії кругових діаграм, форми Y, Z – у теорії синтезу кіл, параметри схем заміщення транзисторів представляють в H -формі.

2.19 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника

У цьому разі повинні бути відомими схема з'єднання елементів і параметри цих елементів. Отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів.

Припустимо, що струм $\underline{I}_2 = 0$ (режим неробочого ходу на виході).

$$\text{Тоді з (2.79) } \begin{cases} \underline{U}_{1нх} = A \cdot \underline{U}_{2нх} \\ \underline{I}_{1нх} = C \cdot \underline{U}_{2нх} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1нх}}{\underline{I}_{1нх}} = \frac{A}{C} = \underline{Z}_{1нх}, \quad (2.84)$$

де $\underline{Z}_{1нх}$ – вхідний опір чотириполосника у режимі неробочого ходу на виході.

Припустимо, що напруга $\underline{U}_2 = 0$ (режим короткого замикання на виході).

$$\text{Тоді з (2.79) } \begin{cases} \underline{U}_{1кз} = B \cdot \underline{I}_{2кз} \\ \underline{I}_{1кз} = D \cdot \underline{I}_{2кз} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1кз}}{\underline{I}_{1кз}} = \frac{B}{D} = \underline{Z}_{1кз}, \quad (2.85)$$

де $\underline{Z}_{1кз}$ – вхідний опір чотириполосника у режимі короткого замикання на виході.

Основні рівняння чотириполосника, коли його живлення здійснюється з боку вихідних затискачів, як відомо, мають вигляд – (2.81).

Припустимо, що на вході коротке замикання – $\underline{U}_1 = 0$.

$$\text{Тоді з (2.81) } \begin{cases} \underline{U}_{2кз} = B \cdot \underline{I}_{1кз} \\ \underline{I}_{2кз} = A \cdot \underline{I}_{1кз} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{2кз}}{\underline{I}_{2кз}} = \frac{B}{A} = \underline{Z}_{2кз}, \quad (2.86)$$

де $\underline{Z}_{2кз}$ – вихідний опір чотириполосника у режимі короткого замикання на вході при живленні зі сторони виходу.

Виразимо всі коефіцієнти через коефіцієнт A :

$$C = \frac{A}{\underline{Z}_{1нх}}; \quad B = A \cdot \underline{Z}_{2кз}; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1кз}} = \frac{A \cdot \underline{Z}_{2кз}}{\underline{Z}_{1кз}}. \quad (2.87)$$

Скористаємося рівнянням (2.80), в яке підставимо рівняння (2.87):

$$A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2кз}}{\underline{Z}_{1кз}} - A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2кз}}{\underline{Z}_{1нх}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1кз} \cdot \underline{Z}_{1нх}}{\underline{Z}_{2кз} \cdot (\underline{Z}_{1нх} - \underline{Z}_{1кз})}}. \quad (2.88)$$

Висновок: якщо відомі $\underline{Z}_{2кз}$, $\underline{Z}_{1нх}$, $\underline{Z}_{1кз}$, то за формулами (2.88), (2.87) знаходять усі коефіцієнти чотириполосника.

Схему для експериментального визначення коефіцієнтів зображена на рисунку 2.24. Етапи визначення коефіцієнтів такі.

1. *Режим неробочого ходу* (живлення з боку входу чотириполосника):

– модуль опору $\underline{Z}_{1нх} = \frac{U_{1нх}}{I_{1нх}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1}$;

– модуль кута зсуву фаз $\varphi_{1нх}$:

$$\varphi_{1нх} = \arccos \frac{P_{1нх}}{U_{1нх} \cdot I_{1нх}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_1}{(\text{показання амперметра } A_1) \cdot (\text{показання вольтметра } V_1)};$$

2. *Режим короткого замикання* (живлення з боку входу):

– модуль опору $Z_{1кз} = \frac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1}$;

– модуль кута зсуву фаз $\varphi_{1кз}$:

$$\varphi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} \cdot I_{1кз}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_1}{(\text{показання амперметра } A_1) \cdot (\text{показання вольтметра } V_1)}$$

3. Режим короткого замикання на вході (живлення зі сторони виходу, при проведенні цього досліду ватметр W_2 потрібно ввімкнути в вихідне коло):

– модуль опору $Z_{2кз} = \frac{U_{2кз}}{I_{2кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_2}{\text{показання амперметра } A_2}$;

– модуль кута зсуву фаз $\varphi_{2кз}$ (ватметр потрібно перенести в вихідне коло):

$$\varphi_{2кз} = \arccos \frac{P_{2кз}}{U_{2кз} \cdot I_{2кз}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_2}{(\text{показання амперметра } A_2) \cdot (\text{показання вольтметра } V_2)}$$

4. Для визначення знаків кутів $\varphi_{1нх}$, $\varphi_{1кз}$, $\varphi_{2кз}$ використовують ланцюг «ключ – конденсатор»: якщо при замиканні ключа K показання амперметра A_1 зменшиться ($I_{A_1} = I_1 + I_C$), то це означає, що різновид кола є активно-індуктивним, а кут має знак «+»;

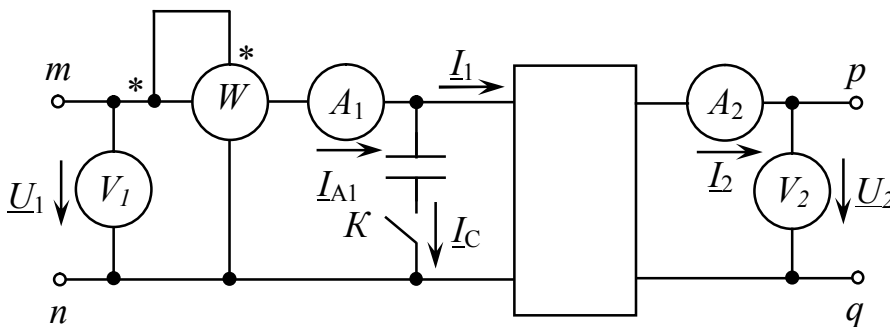


Рисунок 2.24 Схема для експериментального визначення коефіцієнтів чотиріполюсника

індуктивним, а кут має знак «+»; а якщо при замиканні ключа K показання амперметра A_1 збільшиться, то різновид кола є активно-ємнісним, а кут має знак «-» – дивись векторні діаграми на рисунку 2.25.

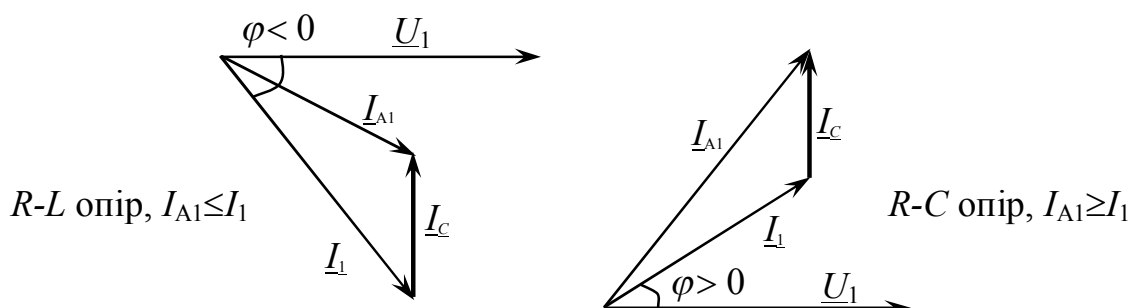


Рисунок 2.25 – Векторні діаграми для визначення знаків кутів $\varphi_{1нх}$, $\varphi_{1кз}$, $\varphi_{2кз}$

Контрольні питання до розділу

1. Дайте визначення синусоїдного струму, поясніть, які основні величини його характеризують.
2. Поясніть особливості синусоїдного струму активного опору, індуктивності та ємності.
3. Поясніть, як проводять розрахунок кіл синусоїдного струму тригонометричним методом.
4. Поясніть, як проводять розрахунок кіл синусоїдного струму символічним методом.
5. Наведіть формулювання законів Ома та Кірхгофа в комплексній формі.
6. Наведіть формулювання комплексного опору і комплексної провідності ділянки кола.
7. Поясніть зв'язок між комплексним опором та комплексною провідністю ділянки кола.
8. Дайте визначення активної, реактивної та повної потужностей.
9. Наведіть комплексну форму запису повної потужності.
10. Наведіть порядок побудови векторно-топографічної діаграми напруг на прикладі послідовного коливального контуру.
11. Поясніть, за яких умов у колах синусоїдного струму виникає резонанс
12. Охарактеризуйте особливості резонансу напруг.
13. Охарактеризуйте особливості резонансу струмів.
14. Поясніть, яке практичне застосування знаходить явище резонансу.
15. Дайте визначення індуктивно зв'язаних елементів кола та поняття взаємної індуктивності.
16. Поясніть, як можна визначити взаємну індуктивність експериментальним шляхом.
17. Охарактеризуйте особливості розрахунку електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок.
18. Дайте визначення чотириполюсника та охарактеризуйте їх класифікацію.
19. Наведіть основні рівняння пасивного чотириполюсників (А-форма запису).
20. Охарактеризуйте коефіцієнти чотириполюсника та поясніть, як експериментально вони можуть бути знайдені.

РОЗДІЛ 3 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

3.1 Основні поняття та визначення

Сукупність електричних кіл, де діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили однакової частоти й амплітуди, що відрізняються один від одної на кут $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ (m – кількість фаз) – це багатofазні симетричні системи.

Багатofазні системи бувають дво-, три-, чотири-, шести-, дванадцятифазними.

Трифазна симетрична система EPC – сукупність трьох синусоїдних EPC однієї частоти, що мають однакові амплітуди й зсунуті між собою на 120° .

Графіки миттєвих значень EPC e_A , e_B , e_C зображені на рисунку 3.1, а векторні діаграми – на рисунку 3.2.

Чергування фаз – послідовність проходження EPC через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза EPC e_A дорівнює нулю, початкова фаза EPC e_B дорівнює « -120° », а початкова фаза EPC e_C дорівнює « $+120^\circ$ », називається *прямим*; миттєві значення фазних EPC при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin(\omega t); \quad e_B = E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ); \quad e_C = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ). \quad (3.1)$$

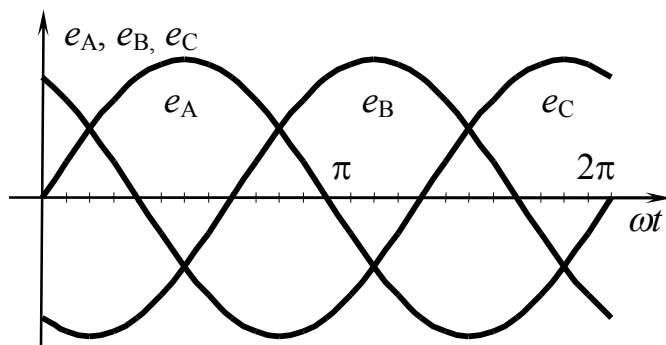


Рисунок 3.1 – Графіки фазних EPC e_A , e_B , e_C

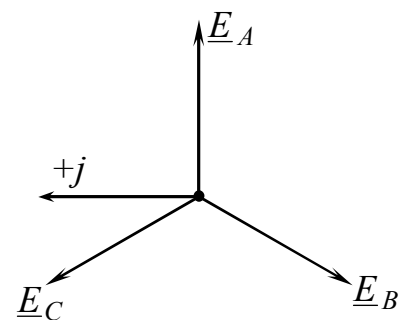


Рисунок 3.2 – Векторні діаграми фазних EPC

Трифазне коло – сукупність трифазної системи EPC, трифазного навантаження та з'єднаних проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече той самий струм.

Переваги трифазних систем порівняно з іншими багатofазними системами:

- передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;
- елементи трифазної системи, такі як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор, є простими у виробництві, економічні, надійні в роботі;
- система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однаково.

Виводи фазних обмоток генераторів називають «початок» і «кінець». Початки обмоток позначають буквами А, В, С, а кінці – буквами х, у, z.

3.2 Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин

Основні схеми з'єднання у трифазних колах (обмоток трифазного генератора або трансформатора та навантаження) – це з'єднання зіркою та трикутником.

Якщо всі «початки» або всі «кінці» фазних обмоток з'єднані в один вузол (нейтральну точку чи, якщо вона заземлена, в нульову) – таке з'єднання називається *зіркою* (рис. 3.3).

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються *лінійними*, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно *нейтральним* або *нульовим*.

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ($\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$) або на фазних навантаженнях (\underline{U}_{aO_1} , \underline{U}_{bO_1} , \underline{U}_{cO_1} – рис. 3.6) – це фазні напруги.

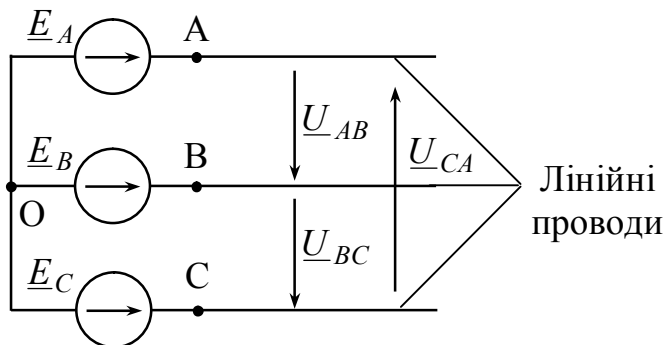


Рисунок 3.3 – Обмотки з'єднані зіркою

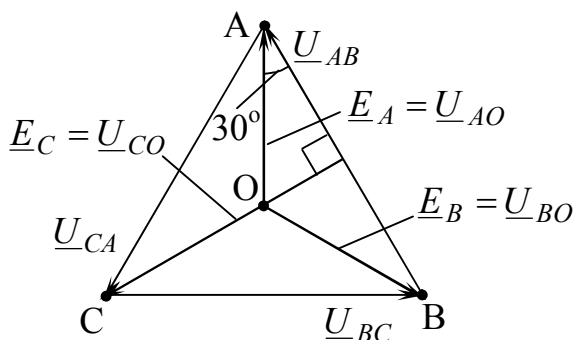


Рисунок 3.4 – Векторна діаграма напруг

$$\underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j30^\circ}. \quad (3.3)$$

Лінійні напруги дорівнюють різниці фазних напруг:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \\ \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \\ \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Відповідно до виразів (3.2) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис. 3.4), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні й випереджають їх на 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг мають вигляд:

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j30^\circ};$$

При з'єднанні в трикутник фазні обмотки генератора, трансформатора або навантаження з'єднані один з одним у такий спосіб, що «початок» однієї фази генератора (або навантаження)

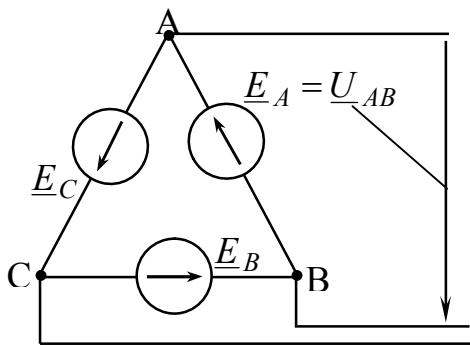


Рисунок 3.5 – Обмотки з'єднані трикутником

з'єднується з «кінцем» іншої фази (рис. 3.5), а кожна фаза навантаження вмикається між лінійними проводами, унаслідок чого вона знаходиться під лінійною напругою. Лінійна напруга одночасно є також фазною напругою, тобто: $\underline{U}_L = \underline{U}_\Phi$. Якщо до затискачів генератора не підключене навантаження, то по обмотках не протікатиме струм, оскільки:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0. \quad (3.4)$$

3.3 Розрахунок трифазних кіл

Трифазне коло є різновидом кіл синусоїдного струму, і тому його розрахунок і дослідження здійснюють за допомогою методів, що розглядалися раніше, при цьому вважаємо, що трифазна EPC є симетричною.

При з'єднанні «зірка-зірка» обмотки генератора й фазні навантаження поєднуються зіркою. Таке трифазне коло може бути без нейтрального проводу (трипровідна система, (рис. 3.6)) або з ним (чотирипровідна система (рис. 3.7)).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називаються лінійними, струми, що течуть по них – лінійні струми ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$). Для схем, зображених на рисунку 3.6 і рисунку 3.7, фазні струми дорівнюють лінійним. Струм, що тече по нейтральному проводу (рис. 3.7) – струм нейтрального або нульового проводу (\underline{I}_N).

За додатний напрямок струмів у лінійних проводах приймається напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа): $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$. (3.5)

За симетричного навантаження ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) у випадку, що відповідає схемі рисунку 3.6, потенціали точок O і O_1 дорівнюють один одному:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0, \text{ оскільки } \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0.$$

При цьому струми однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° , а комплекси фазних струмів дорівнюють:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C}. \quad (3.6)$$

При симетричному навантаженні (рис. 3.7) за наявності нульового проводу фазні струми визначають за (3.6), а струм у нейтральному проводі відсутній:

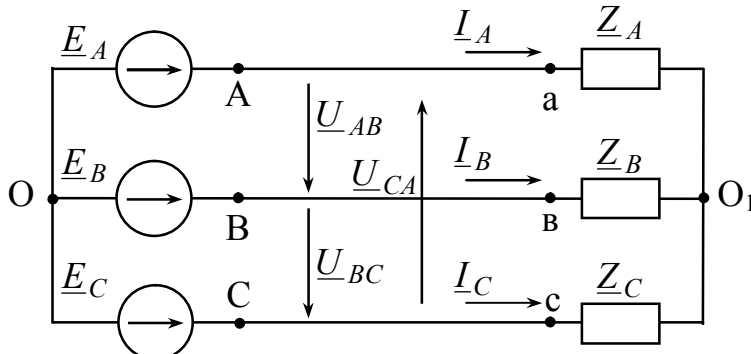


Рисунок 3.6 – «Зірка-зірка» без нульового проводу

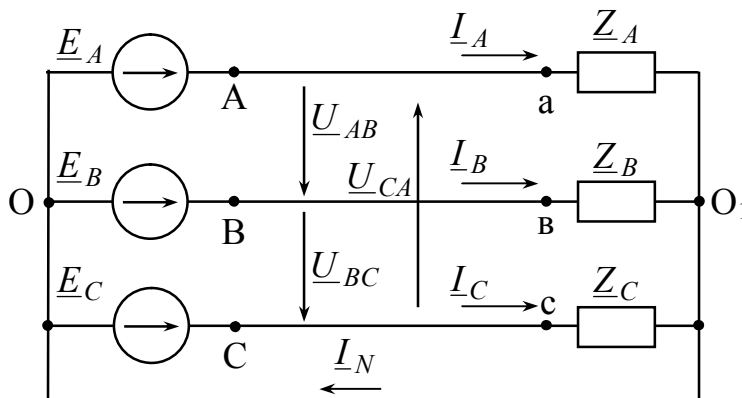


Рисунок 3.7 – «Зірка-зірка» із нульовим проводом

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

Якщо навантаження несиметричне ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$) та нульовий провід відсутній, фазні струми встановлюються у такий спосіб, щоб їх сума дорівнювала нулю. Унаслідок чого відбувається викривлення симетрії фазних напруг так, що навантаження опиняються під різними, не рівними одна одній (та фазним EPC) напругами. Потенціали точок O та O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють так:

– визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (3.7)$$

$$\text{де } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{ – комплекси фазних провідностей}; \quad (3.8)$$

– визначають фазні напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (3.9)$$

– визначають фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C. \quad (3.10)$$

Коли в нейтральному проводі відсутній опір і навантаження несиметричне (рис. 3.7) потенціали точок O і O_1 дорівнюють один одному – $\underline{U}_{O_1O} = 0$, і тому фазні струми визначають за формулами (3.10). Струм нейтрального проводу визначають за виразом (3.5).

У разі несиметричного навантаження та наявності в нейтральному проводі опору \underline{Z}_N (рис. 3.8), потенціали точок O і O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють у такій послідовності:

– визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} , за виразом, що випливає з методу двох вузлів:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (3.11)$$

де $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$ – комплекс провідності нейтрального проводу; (3.12)

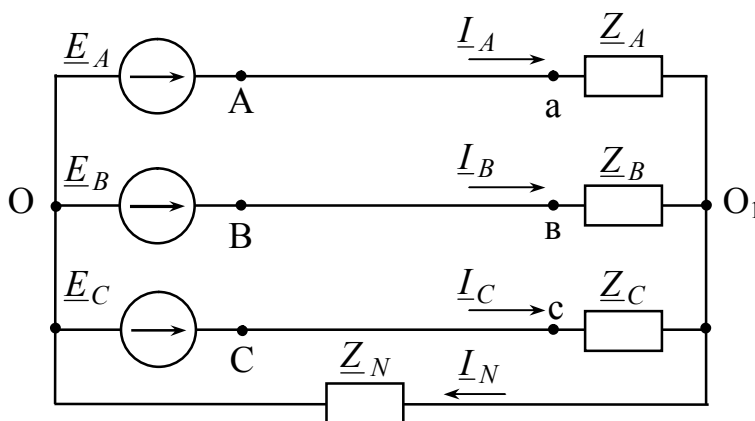


Рисунок 3.8 – «Зірка-зірка» з нульовим проводом та опором \underline{Z}_N у ньому

відає схемі рисунку 3.8, потенціали точок O і O_1 дорівнюють один одному:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0, \text{ внаслідок того, що } \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0.$$

Розрахунок кіл «трикутник-трикутник» і «зірка-трикутник» (рис.3.9) відрізняються тільки величиною напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\text{ф.навантаження}}$): у випадку кола «трикутник-трикутник» – $\underline{U}_{\text{ф.навантаження}} = \underline{U}_{\text{ф. генератора}}$, а у випадку кола «зірка-трикутник» – $\underline{U}_{\text{ф.навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{\text{ф}} \cdot \angle 30^\circ$.

За позитивний напрямок лінійних струмів ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) приймається напрямок від джерела до навантаження. Додатний напрямок фазних струмів вибирають від точки «а» до «в» (струм $\underline{I}_{ав}$), від точки «в» до «с» (струм $\underline{I}_{вс}$), від точки «с» до «а» (струм $\underline{I}_{са}$).

Розглянемо коло «зірка-трикутник» без урахування опорів проводів (рис. 3.9). Розрахунок якого проводять у такій послідовності:

– визначають комплекси фазних струмів за виразами: $\underline{I}_{ав} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ав}} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_{ав}$;

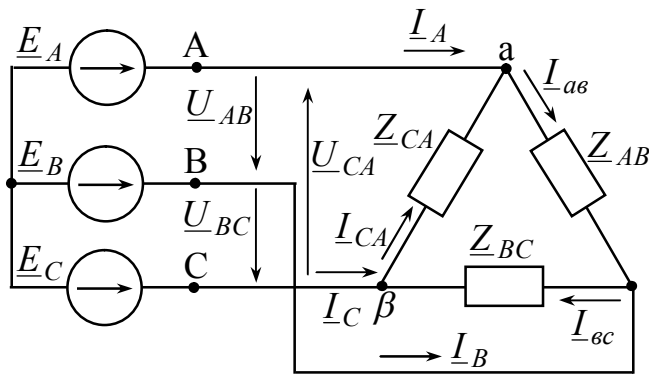
– визначають фазні напруги на навантаженнях за формулами (3.9);

– визначають фазні струми за формулами (3.10);

– струм у нейтральному проводі \underline{I}_N визначають як суму фазних струмів (3.5).

За симетричного навантаження у випадку, що відпо-

$$\underline{I}_{BC} = \frac{U_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = U_{BC} \cdot \underline{Y}_{BC}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{U_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = U_{CA} \cdot \underline{Y}_{ca}. \quad (3.13)$$



де $\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{Y}_{bc} = \frac{1}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{Y}_{ca} = \frac{1}{\underline{Z}_{ca}}$

– комплекси фазних провідностей.

Лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів «а», «в», «с»:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \\ &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \end{aligned} \quad (3.14)$$

При симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові

Рисунок 3.9 «Зірка-трикутник» без урахування опорів

й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням $\varphi = \arctg \frac{X_\phi}{R_\phi}$,

де X_ϕ – реактивний опір навантаження;

R_ϕ – активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть однаковими між собою, у $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ab} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_B = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{bc} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ca} \angle -30^\circ. \quad (3.16)$$

Отже, при симетричному навантаженні фаз розрахунок трифазного кола можна звести до розрахунку однієї фази. При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

Розглянемо загальний випадок кола «зірка-трикутник» з урахуванням опорів проводів, коли опори в лініях не дорівнюють один одному ($\underline{Z}_{ла} \neq \underline{Z}_{лв} \neq \underline{Z}_{лс}$) і навантаження фаз несиметричне (рис. 3.10).

Розрахунок такої схеми потрібно виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою. Опори променів зірки:

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (3.17)$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$, то опір

променів еквівалентної зірки: $\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_b = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_\phi}{3}, \quad (3.18)$

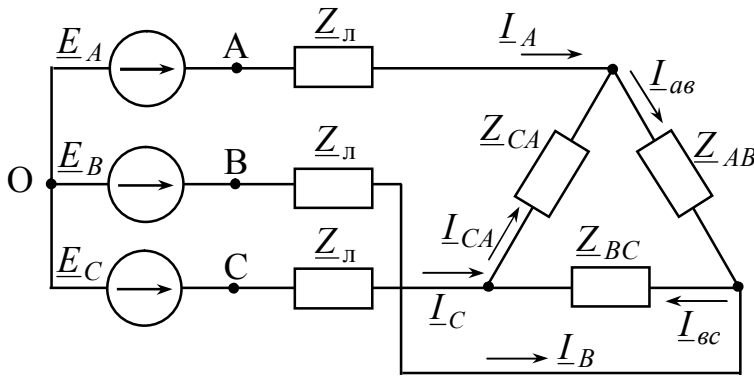


Рис. 3.10 – «Зірка-трикутник» з урахуванням опорів проводів

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{ла}; \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Z}_B = \underline{Z}'_b + \underline{Z}_{лв}; \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Z}_C = \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{лс}; \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}; \quad (3.19)$$

– визначають напругу зміщення нейтралі за формулою (3.7);

– визначають фазні напруги за формулами (3.9);

– визначають лінійні струми за формулами (3.10).

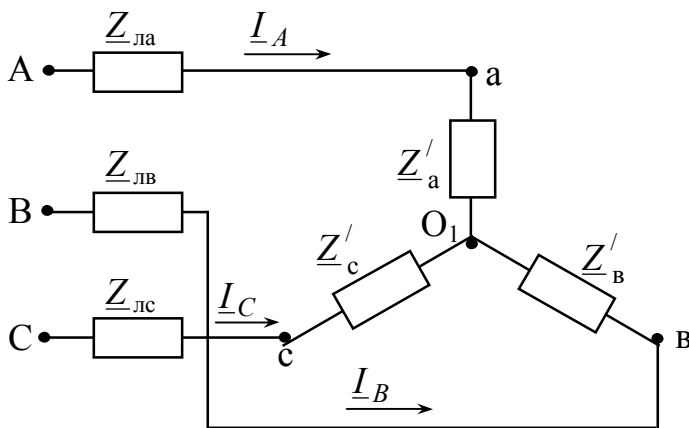


Рисунок 3.11 – Еквівалентна схема

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}'_{ab}; \underline{Z}'_{bc}; \underline{Z}'_{ca}$ вихідної схеми (рис. 3.10) визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{ав} = \frac{\underline{U}_{ав}}{\underline{Z}'_{ав}}; \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}'_{bc}}; \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}'_{ca}}. \quad (3.20)$$

де $\underline{U}_{ав}; \underline{U}_{bc}; \underline{U}_{ca}$ – лінійні напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{ав} = \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{bO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}'_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}'_b; \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{bO_1} - \underline{U}_{cO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}'_b - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}'_c; \quad (3.21)$$

$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{cO_1} - \underline{U}_{aO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}'_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}'_a.$$

3.4 Визначення потужності в трифазних колах

Комплексна потужність трифазного кола:

$$\tilde{S}_3 = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_C^* = P_3 + j \cdot Q_3, \quad (3.22)$$

$$\text{де } P_3 = U_{AO} \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_{BO} \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_{CO} \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C - \quad (3.23)$$

активна потужність трифазного кола;

$$Q_3 = U_A \cdot I_A \cdot \sin \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \sin \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \sin \varphi_C - \quad (3.24)$$

реактивна потужність трифазного кола.

Якщо навантаження симетричне, то в випадку схеми «зірка-зірка» можна

користуватися такими формулами ($E_A = U_{AO} = E_B = U_{BO} = E_C = U_{CO} = U_\Phi$;
 $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\Delta$):

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Delta \\ P_3 &= 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Delta \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Delta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ – фазна форма запису;} \quad (3.25)$$

де φ – кут зсуву між фазною EPC і лінійним струмом;

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \\ P_3 &= \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ – лінійна форма запису.} \quad (3.26)$$

Вимірювання активної потужності в трифазних чотирипровідних колах проводять за допомогою схеми трьох ватметрів – рисунок 3.12, а:

$$P_3 = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (3.27)$$

Схема двох ватметрів (рис. 3.12, б) дає змогу виміряти повну активну потужність трифазного три провідного кола.

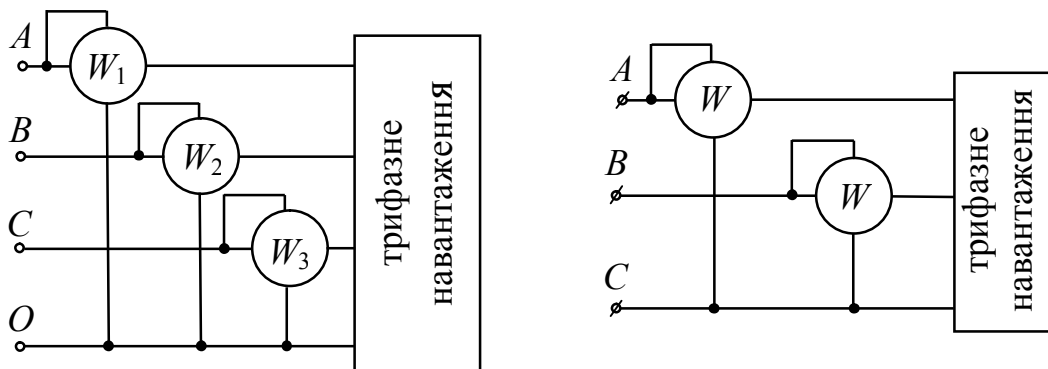


Рисунок 3.12 – Схеми трьох та двох ватметрів
 а) б)

Контрольні питання до розділу

1. Дайте визначення трифазної системи EPC .
2. Покажіть співвідношення між лінійними і фазними напругами.
3. Поясніть, як проводять розрахунок схем «зірка-зірка» без нульового проводу і з нульовим проводом при симетричному й несиметричному навантаженні.
4. Поясніть, як проводять розрахунок кола «зірка-трикутник» при симетричному й несиметричному навантаженні без урахування та з урахуванням опорів у лініях.
5. Поясніть, у який спосіб вимірюють активну потужність в трипровідних та чотирипровідних колах та проводять баланс потужностей.

РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ КІЛ З НЕСИНУСОЇДНИМИ ПЕРІОДИЧНИМИ СТРУМАМИ ТА НАПРУГАМИ.

4.1 Визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг

У трьох попередніх розділах розглядалися лінійні кола з незмінними параметрами активного опору (R), індуктивності (L), ємності (C) і взаємоіндуктивності (M) при дії джерел постійних або синусоїдних EPC і струмів. Але на практиці EPC , напруги й струми відрізняються від постійних або синусоїдних, до того ж їх залежність від часу може бути періодичною, майже періодичною та неперіодичною.

Періодичними несинусоїдними струмами й напругами називають струми й напруги, які змінюються в часі за періодичним несинусоїдним законом.

Розглянемо режими роботи кіл, які призводять до їх появи:

1. Джерела EPC (або струму) дають несинусоїдну EPC (струм), а всі елементи кола (R, L, C, M) – лінійні елементи (їхні величини від струму не залежать).

Так, у різних пристроях радіотехніки, автоматики, телемеханіки, обчислювальної техніки застосовують генератори періодичних імпульсів. При цьому форма імпульсів може бути різною (прямокутною, трапецієподібною, ступінчастою тощо – рисунок 4.1). Під час проходження цих імпульсів по електричних колах їх форма суттєво змінюється.

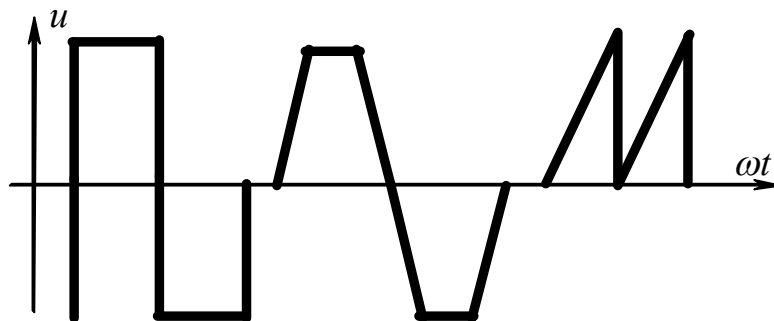


Рисунок 4.1 – Приклади періодичних несинусоїдних кривих $u(\omega t)$

2. Джерело EPC (струму) дає синусоїдну EPC (струм), але один чи декілька елементів кола – нелінійні.

Приклад отримання несинусоїдного періодичного струму в колі з синусоїдним джерелом енергії – схема з котушкою з феромагнітним осердям (рис. 4.2). Струм у цьому разі має приблизно таку форму, що зображена на рисунку 4.3.

3. Сукупність першого і другого режимів.

4. Якщо джерело EPC (струму) дає постійну або синусоїдну EPC (струм), а один або декілька елементів кола періодично змінюються у часі.

В усіх задачах, де доводиться мати стикатися з складними несинусоїдни-

ми кривими струмів і напруг, важливо вміти звести складну задачу до простої та застосувати методи розрахунку простих задач.

У цьому розділі розглядаються методи розрахунку лінійних кіл при несинусоїдних періодичних або майже періодичних струмах і напругах, які можна розкласти на гармонійні складові.

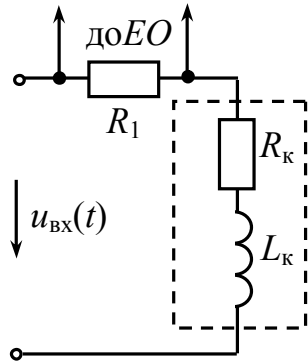


Рисунок 4.2 – Схема з нелінійним елементом

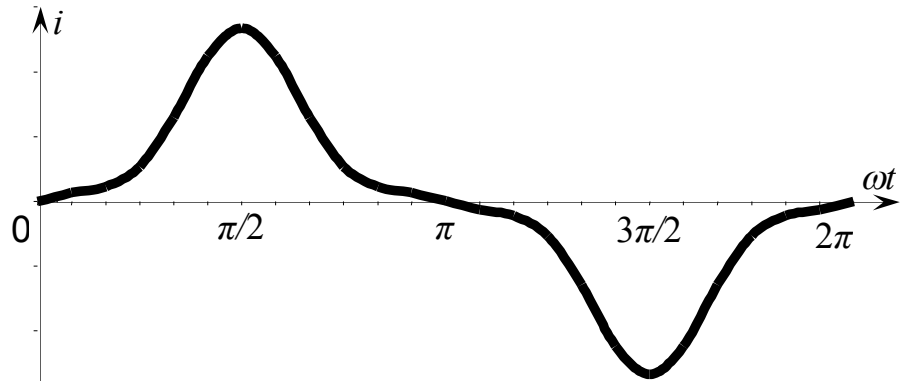


Рисунок 4.3 – Форма струму в схемі на рисунку 4.2

4.2 Зображення несинусоїдних струмів і напруг рядами Фур'є

Як відомо, будь-яка періодичну функцію $f(x)$ із періодом 2π , яка задовольняє умові Діріхле може бути розкладена у нескінченний тригонометричний ряд. При цьому змінна x зв'язана з часом t співвідношенням $x = \omega t = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}$, де T – період функції у часі (тобто період функції за змінною x дорівнює « $2 \cdot \pi$ », а за часом період тієї самої функції дорівнює « T »). Отже:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)''} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)'} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)''} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots, \quad (4.1)$$

де $A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) d\omega t$ – нульова гармоніка (постійна складова); (4.2)

$$A_m^{(k)'} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t) d\omega t$$
 – амплітуда синусної складової (4.3)

гармоніки з номером k ;

$$A_m^{(k)''} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t) d\omega t$$
 – амплітуда косинусної складової (4.4)

гармоніки з номером k .

Частіше ряд Фур'є записують у вигляді суми нульової гармоніки та синусоїдних складових із ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (4.5)$$

$$\text{де } A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)/2} + A_m^{(k)//2}}; \varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k)//}}{A_m^{(k)/}} - \quad (4.6)$$

амплітуда та початкова фаза гармоніки з номером « k ».

Під час розглядання цієї теми ми будемо говорити, що гармоніки бувають такими: нульова, перша (основна) та вищі (із номерами 2, 3, 4 тощо). Крім того, якщо $k=1, 3, 5, \dots$ – це непарні гармоніки, а якщо $k=2, 4, 6, \dots$ – це парні гармоніки.

Розглянемо приклад.

Крива напруги має в своєму складі три гармонійні складові:

$$u(\omega t) = 100 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \cos(\omega t) + 30 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) - 15 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + 8 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 12 \cdot \cos(3 \cdot \omega t), \text{ В.}$$

Подамо ряд Фур'є у вигляді суми синусних складових з ненульовими початковими фазами. Відповідно до формул (4.6) визначаємо амплітуди та початкові фази синусних складових першої, третьої та п'ятої гармонік:

$$A_m^{(1)} = \sqrt{A_m^{(1)/2} + A_m^{(1)//2}} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 127 \text{ В}; \varphi^{(1)} = \arctg \frac{80}{100} = 38,66^\circ;$$

$$A_m^{(3)} = \sqrt{A_m^{(3)/2} + A_m^{(3)//2}} = \sqrt{30^2 + 15^2} = 34,7 \text{ В}; \varphi^{(3)} = \arctg \frac{-15}{30} = -26,6^\circ;$$

$$A_m^{(5)} = \sqrt{A_m^{(5)/2} + A_m^{(5)//2}} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14,4 \text{ В}; \varphi^{(5)} = \arctg \frac{12}{8} = 56,3^\circ.$$

Отже, ряд Фур'є матиме вигляд, В:

$$u(\omega t) = 127 \sin\left(\omega t + 38,66^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 34,7 \sin\left(3\omega t - 26,6^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 14,4 \sin\left(5\omega t + 56,3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

Крива, що відповідає цьому ряду, (рис. 4.4).

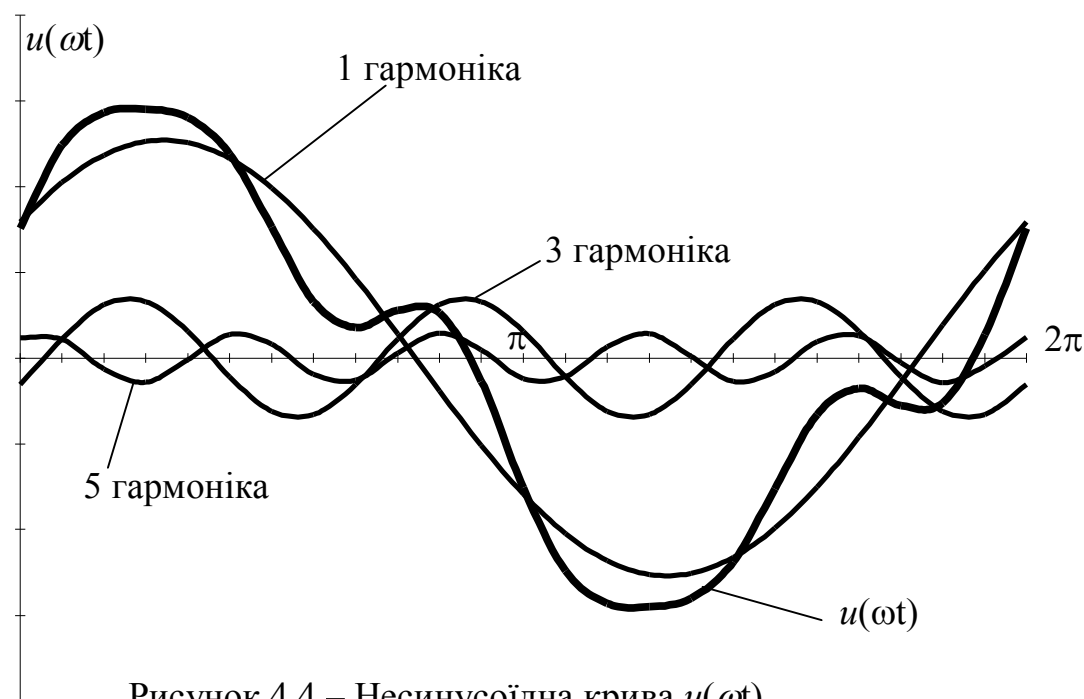


Рисунок 4.4 – Несинусоїдна крива $u(\omega t)$

4.3 Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші вигляди симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо деякі гармоніки заздалегідь виключаються з ряду.

1. Крива симетрична відносно осі абсцис (рис. 4.5), тобто задовольняє умові:

$f(\omega t + \pi) = f(\omega t)$. При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є нульова і парні гармоніки дорівнюють нулю: $A_0 = A_2' = A_2'' = A_4' = A_4'' = \dots = 0$, а сам ряд має вигляд

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + A_m^{(5)'} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + A_m^{(5)''} \cdot \cos(5 \cdot \omega t) + \dots$$

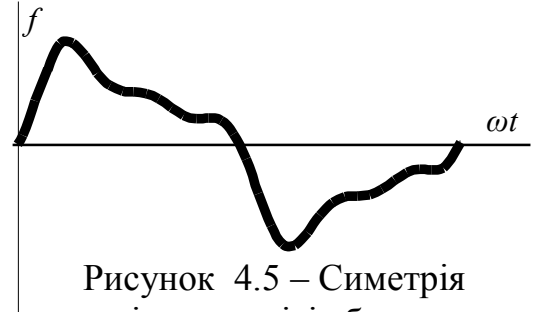


Рисунок 4.5 – Симетрія відносно вісі абсцис

2. Крива симетрична відносно осі ординат (рис. 4.6), тобто задовольняє умові

$f(\omega t) = f(-\omega t)$. При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є відсутні синусні складові, тобто $A_1' = A_2' = A_3' = \dots = 0$, а сам ряд Фур'є має вигляд

$$f(\omega t) = A_0 + A_1'' \cdot \cos(\omega t) + A_2'' \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_3'' \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots$$

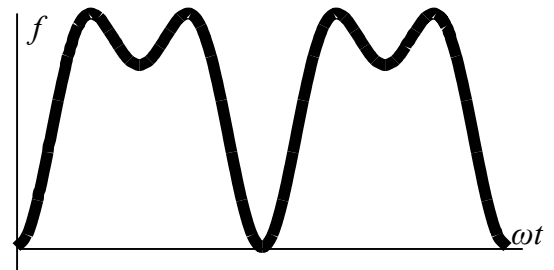


Рисунок 4.6 – Симетрія відносно вісі ординат

3. Крива симетрична відносно початку координат (рис. 4.7), тобто задовольняє умові $f(\omega t) = -f(-\omega t)$. Такий ряд Фур'є не містить нульову та косинусні складові, тобто: $A_0 = A_1'' = A_2'' = A_3'' = \dots = 0$, і має вигляд

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots$$

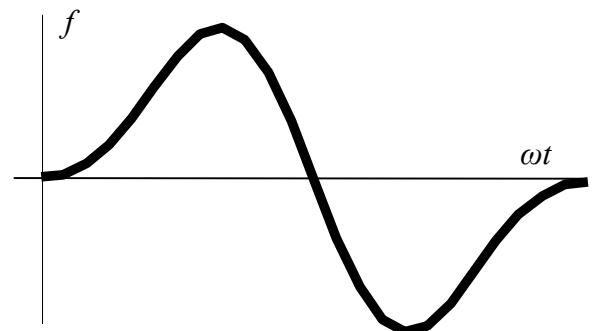


Рисунок 4.7 – Симетрія відносно початку координат

4. Крива одночасно симетрична відносно осі абсцис та початку координат (рис. 4.8), тобто задовольняє умовам:

$$f(\omega t) = -f(-\omega t), f(\omega t) = -f(\omega t + \pi).$$

Такий ряд Фур'є містить тільки непарні синусні гармоніки і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots$$

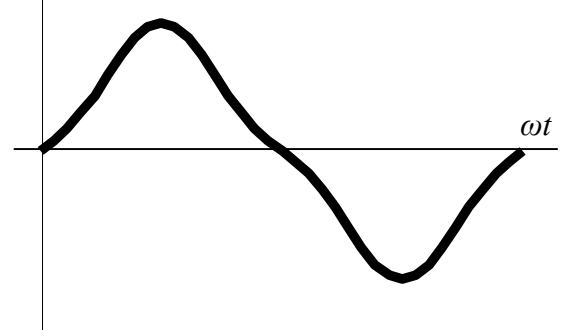


Рисунок 4.8 – Симетрія відносно початку координат та вісі абсциса

Перед тим як розкласти криву у ряд Фур'є, потрібно подивитися, які види симетрії вона задовольняє, та виключити ті чи інші гармоніки.

Усі періодичні криві, які зустрічаються в електротехніці можна розділити на дві групи:

1) періодичні криві геометрично правильної форми (трапеції, трикутники, прямокутники тощо); їх розкладання у ряд Фур'є наведено у довідниках. Так, наприклад, якщо періодична крива напруги має форму прямокутника (рис. 4.1), то ряд Фур'є, що відповідає такій формі (обмежимося трьома членами ряду) має вигляд: $u_{ex}(\omega t) = \frac{4 \cdot U_{\max}}{\pi} \left(\sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{3} \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + \frac{1}{5} \sin(5 \cdot \omega \cdot t) \right)$.

2) Криві довільної геометрично неправильної форми. Вони розкладаються у ряд Фур'є графоаналітичними методом.

4.4 Розкладання у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми

Криві довільної геометрично неправильної форми мають бути зображені у вигляді графіка. Графоаналітичний метод, який застосовують для розкладання таких кривих у ряд Фур'є, заснований на заміні визначених інтегралів (4.2, 4.3, 4.4) сумою кінцевого числа складових. Для цього період функції 2π поділяється на n рівних інтервалів, кожен з яких можна визначити так:

$$d\omega t \rightarrow \Delta\omega t = \frac{2 \cdot \pi}{n}. \text{ Отже,}$$

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left(f_p(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t). \quad (4.7)$$

де $f_p(\omega t)$ – значення функцій $f(\omega t)$ у середині p -го інтервалу, тобто при значенні $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$,

p – поточний індекс.

Амплітуди синусної і косинусної складових k -ї гармоніки є відповідно такими :

$$\begin{aligned} A_m^{(k)'} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t); \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$A_m^{(k)''} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)), \quad (4.9)$$

де $\sin_p(k\omega t)$ і $\cos_p(k\omega t)$ – значення функцій $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ у середині p -го інтервалу.

Зазвичай період поділяють на $n = 24$ частини ($\Delta\omega t = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад).

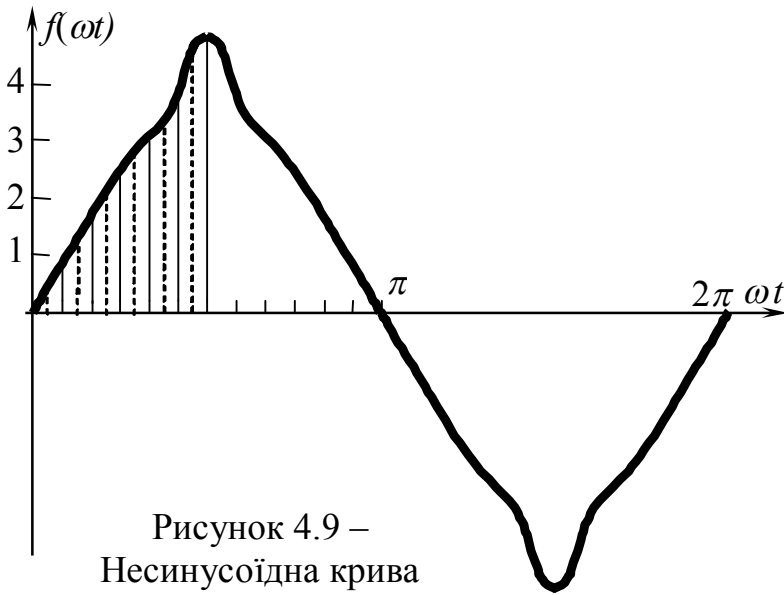


Рисунок 4.9 – Несинусоїдна крива

Розглянемо приклад графоаналітичного розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є (рис. 4.9). Потрібно урахувати, що крива має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис), отже можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме:

$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin \omega t + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(5)'} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + \dots$ (обмежуємося трьома членами ряду). Знайдемо амплітуди A_{1m}' , A_{3m}' , A_{5m}' .

Розділимо чверть періоду кривої $f(\omega t)$ на шість рівних частин і визначимо ординати функції $f(\omega t)$ посередині кожної ділянки, яка становить 15° . Результати розкладання за наведеною вище методикою подано в таблиці 4.1 (для зручності значення ωt у таблиці наведено в градусах).

Таблиця 4.1 – Результати розкладання кривої $f(\omega t)$ у ряд Фур'є

$f(\omega t)$	ωt	$\sin \omega t$	$f(\omega t) \cdot \sin \omega t$	$3 \omega t$	$\sin \omega t$	$f(\omega t) \cdot \sin 3 \omega t$	$5 \omega t$	$\sin 5 \omega t$	$f(\omega t) \cdot \sin 5 \omega t$
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,5	$7,5^\circ$	0,13	0,0665	22,5	0,382	0,191	37,5	0,608	0,304
1,2	$22,5^\circ$	0,382	0,46	67,5	0,924	1,108	112,5	0,923	1,1
2,1	$37,5^\circ$	0,608	1,27	112,5	0,924	1,94	187,5	-0,13	-0,273
2,8	$52,5^\circ$	0,793	2,22	157,5	0,382	1,07	262,5	-0,99	-2,77
3,3	$67,5^\circ$	0,924	3,05	202,5	-0,382	-1,26	337,5	-0,382	-1,26
4,7	$82,5^\circ$	0,991	4,6	247,5	-0,923	-4,34	412,5	0,79	3,72

Знаходимо суму значень $f(\omega t) \cdot \sin k \omega t$ для першої, третьої та п'ятої гармонік, тобто суму отриманих значень у стовпчиках із номерами «5», «8», «11»:

$$\sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin \omega t = 11,66 ; \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 3 \omega t = -1,29 ; \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 5 \omega t = 0,821 .$$

Амплітуди синусних гармонік з номерами 1, 3, 5 відповідно:

$$A_m^{(1)'} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot 11,66 = \frac{1}{3} \cdot 11,66 = 3,88; \quad A_m^{(3)'} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot (-1,29) = \frac{1}{3} \cdot (-1,29) = -0,43;$$

$$A_m^{(5)'} = \frac{1}{3} \cdot 0,821 = 0,247 \quad (\text{коефіцієнт «4» застосовуємо оскільки розкладаємо}$$

тільки $\frac{1}{4}$ періоду, а для отримання кінцевого результату треба помножити

відповідне значення $\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t)) \right]$ на «4»).

Отже, ряд Фур'є $f(\omega t)$ має вигляд

$$f(\omega t) = 3,88 \cdot \sin(\omega t) - 0,43 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 0,247 \cdot \sin(5 \cdot \omega t).$$

4.5 Порядок розрахунку електричного кола з несинусоїдними джерелами енергії

1. Зображуємо несинусоїдну *EPC* тригонометричним рядом Фур'є. Припустимо, що ряд Фур'є має вигляд

$$e(\omega t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + \pi/4) + E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - \pi/3), \text{ В.}$$

Умовно розглянемо несинусоїдну *EPC* $e(\omega t)$ як послідовне з'єднання постійної *EPC* $E^{(0)}$ і трьох синусоїдних *EPC*, а саме $e^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$, $e^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$, $e^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - \pi/3)$ (рис. 4.10).

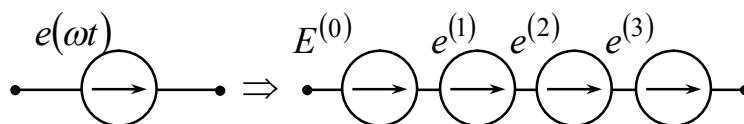


Рисунок 4.10 – Умовне зображення несинусоїдної *EPC*

2. Записуємо комплексні амплітуди *EPC* гармонік із номерами 1, 2, 3:

$$\underline{E}_m^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot e^{j \cdot \pi/4}; \quad \underline{E}_m^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot e^{-j \cdot \pi/3}, \text{ В.}$$

4. Визначаємо активні й комплексні опори віток для окремих гармонік.

При цьому потрібно врахувати, що реактивні опори залежать від номеру гармоніки, тобто індуктивний і ємнісний опори для гармоніки з номером « k »:

$$x_L^{(k)} = k \cdot x_L^{(1)} = k \cdot \omega \cdot L, \quad x_C^{(k)} = \frac{x_C^{(1)}}{k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C}. \quad (4.10)$$

Отже, з ростом номера гармоніки індуктивний опір збільшується, а ємнісний зменшується.

Комплексний опір вітки, що містить активний опір, індуктивність та ємності, дорівнює:

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left(k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} \right) = R + j \cdot \left(k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right). \quad (4.11)$$

4. Розраховуємо струми від дії нульової гармоніки несинусоїдної ЕРС – $I_n^{(0)}$; потім визначаємо комплексні амплітуди струмів від дії першої, другої та третьої гармонік несинусоїдної ЕРС – $\underline{I}_{mn}^{(1)}, \underline{I}_{mn}^{(2)}, \underline{I}_{mn}^{(3)}$, де « n » – номер вітки.

Отже, зрозуміло, що основний метод розрахунку електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами енергії – метод суперпозиції (накладання).

5. За комплексними амплітудами записуємо миттєві значення струмів окремих гармонік – $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}$.

6. Записуємо ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді суми окремих гармонік, наприклад, для вітки з номером: « n » несинусоїдний струм у загальному вигляді матиме вигляд $i_n(\omega t) = I_n^{(0)} + i_n^{(1)} + i_n^{(2)} + i_n^{(3)}$.

4.6 Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл

1. Додавання різнойменних гармонік струмів або напруг за комплексним методом неможливе, оскільки кутові швидкості обертання векторів різних гармонік неоднакові.

2. Фізичний сенс нульової гармоніки напруги чи струму – це постійна напруга чи струм. Тому падіння напруги на індуктивності від нульової гармоніки струму дорівнює нулю – $x_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0 \Rightarrow U_L^{(0)} = 0$ В та нульова гармоніка струму через конденсатор також дорівнює нулю – $x_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \Rightarrow I_C^{(0)} = 0$ А.

4. При розрахунках несинусоїдних кіл вважають, що величина активного опору не залежить від частоти.

4.7 Діючі й середні за модулем значення несинусоїдних функцій

$$\text{За визначенням діюче значення: } I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}, \quad (4.12)$$

$$\text{де } i = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \sin(k \cdot \omega t + \psi^{(k)}) \text{ – несинусоїдний струм.} \quad (4.13)$$

Якщо у рівняння (4.13) підставити вираз (4.14), то отримаємо:

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \sum_{k=1}^n I_m^{(k)2}} = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(2)2} + \dots + I^{(k)2} + \dots}, \quad (4.14)$$

де $\frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}} = I^{(k)}$ – діюче значення струму гармоніки з номером « k ».

Отже, діюче значення несинусоїдної величини не залежить від початкових фаз окремих гармонік.

Аналогічно для напруги

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)2}} = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(2)2} + \dots} \quad (4.15)$$

Розглянемо приклад.

На вході двополосника несинусоїдні напруга і струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 100 + 80 \cdot \sin\left(\omega t + 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 60 \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В};$$

$$i(\omega t) = 33,3 + 17,87 \cdot \sin\left(\omega t - 18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 5,59 \cdot \sin\left(5 \cdot \omega t + 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ А}.$$

Знайдемо їхні діючі значення:

$$U = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2}} = 122,5 \text{ А}; \quad I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,87^2}{2} + \frac{5,59^2}{2}} = 35,6 \text{ В}.$$

Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначають так:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |i(\omega t)| d\omega t. \quad (4.16)$$

4.8 Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих

Несинусоїдні криві, яким відповідає певна несинусоїдна функція, характеризують такими коефіцієнтами:

– коефіцієнтом форми кривої $K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}}$, який визначається як відношення

діючого значення до середнього за модулем значення (для синусоїди

$$K_\phi = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}});$$

– коефіцієнтом амплітуди, який дорівнює відношенню максимального значення

до діючого значення несинусоїдної функції, а саме $K_a = \frac{A_{\text{max}}}{A}$ (для синусоїди

$$K_a = \sqrt{2});$$

– коефіцієнтом викривлення, який визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення усієї несинусоїдної функції,

в яку входить і перша гармоніки, а саме $K_{\epsilon} = \frac{A^{(1)}}{A}$.

Несинусоїдні струми й напруги вимірюють приладами різних систем, Так, наприклад, прилади електродинамічної та електромагнітної систем реагують на діюче значення, а прилади магнітоелектричної системи з випрямлячем – на середнє за модулем значення несинусоїдної величини.

4.9 Потужності в колах несинусоїдного струму

Активна потужність несинусоїдного струму – це середнє значення миттєвої потужності за період першої гармоніки: $P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u \cdot i) dt$. (4.17)

Зображуємо у (4.23) такі формули:

$$u(t) = U^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_u^{(k)}), \quad (4.18)$$

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_i^{(k)}), \quad (4.19)$$

Розрахувавши інтеграл (4.17), отримуємо:

$$P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \cos \varphi^{(2)} + \dots, \quad (4.20)$$

де $U^{(k)}, I^{(k)}, \varphi^{(k)}$ – відповідно діючі значення несинусоїдної напруги і струму k -ої гармоніки;

$\varphi^{(k)} = \varphi_u^{(k)} - \varphi_i^{(k)}$ – кут зсуву фаз між несинусоїдною напругою і струмом k -ої гармоніки.

Отже, активна потужність несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік.

$$\text{Аналогічно для реактивної потужності: } Q = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)}. \quad (4.21)$$

Повна потужність S дорівнює добутку діючого значення несинусоїдної напруги й діючого значення несинусоїдного струму. $S = U \cdot I$. (4.22)

Кола несинусоїдного струму також характеризують *потужністю викривлення* T , коефіцієнтом викривлення $K_T: T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$, (ВА); (4.23)

$$K_T = \frac{T}{S}. \quad (4.24)$$

4.10 Вищі гармоніки в трифазних колах

EPC всіх фаз трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна *EPC* (e_A, e_B, e_C) повторює за формою інші із зсувом на одну третину періоду ($T/3$) і може бути розкладена на гармоніки. Запишемо для гармоніки з номером « k » миттєве значення *EPC* фази *A*:

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}). \quad (4.25)$$

Оскільки *EPC* фази *B* відстає від *EPC* фази *A* на $T/3$, а *EPC* фази *C* випереджає *EPC* фази *A* на $T/3$, то для гармоніки з номером « k » *EPC* фаз *B* і *C* відповідно дорівнюють:

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right), \quad (4.26)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right). \quad (4.27)$$

$$\text{Примітка. } k \cdot \omega \cdot \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \overbrace{\frac{2 \cdot \pi}{3}}^{120^\circ}.$$

Якщо $\varphi^{(k)} = 0$, то $e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t)$,

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \quad e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами $k=1, 4, 7, 10, \dots$ становлять так звану пряму послідовність чергування фаз. Для цих гармонік *EPC* фази *B* відстає від *EPC* фази *A*, а *EPC* фази *C* випереджає *EPC* фази *A* на 120° .

Припустимо, номер гармоніки $k = 4$, тоді

$$e_A^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin(4 \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right),$$

$$e_C^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами $k=2, 5, 8, \dots$ складають так звану зворотну послідовність чергування фаз. Для цих гармонік *EPC* фази *B* випереджає *EPC* фази *A*, а *EPC* фази *C* відстає від *EPC* фази *A* на 120° .

Припустимо, номер гармоніки $k = 2$, тоді

$$e_A^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t - 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right),$$

$$e_C^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами $k = 3, 6, 9, \dots$ (кратні трьом) утворюють нульову послідовність чергування фаз, для якої початкові фази EPC всіх фаз однакові (векторна діаграма – рис. 4.14). Припустимо, номер гармоніки $k = 3$, тоді

$$e_A^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); e_B^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 120^\circ \cdot 3) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t);$$

$$e_C^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 120^\circ \cdot 3) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t).$$

4.11 Особливості роботи трифазних систем, що були викликані кратними трьом гармоніками

Розглянемо деякі особливості розрахунку трифазних кіл, пов'язаних з наявністю в гармонійному складі фазних EPC гармонік, кратних трьом.

1. Обмотки трифазного генератора з'єднані відкритим трикутником (рис. 4.11). Якщо у фазних EPC присутні кратні трьом гармоніки, то на затискачах « $n - B$ » буде напруга, діюче й миттєве значення якої:

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots}, \quad (4.28)$$

$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (4.29)$$

2. При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник (рис. 4.12) по них протікатимуть струми гармонік, кратних трьом

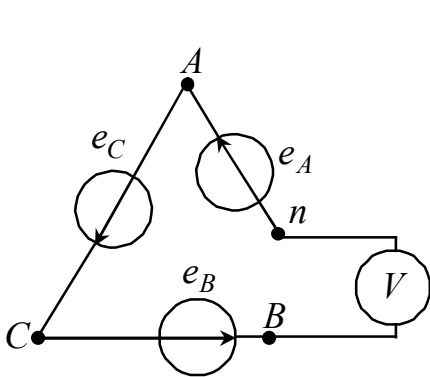


Рисунок 4.11 – Відкритий трикутник обмоток

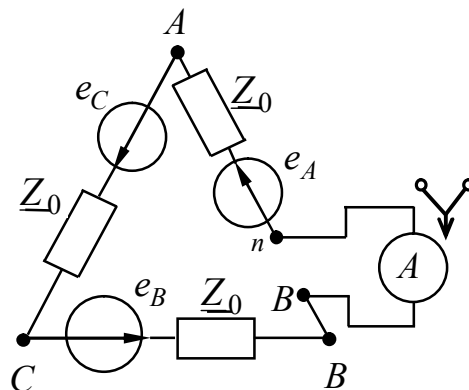


Рисунок 4.12 – Закритий трикутник обмоток

$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}^{(3k)}}, \quad (4.30)$$

де $\underline{Z}_0^{(3k)}$ – опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом,

$\underline{E}^{(3k)}$ – комплекс діючого значення гармоніки фазної EPC , кратної трьом.

$$\text{Отже, діюче значення струму } I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots}. \quad (4.31)$$

3. Якщо обмотки генератора або трансформатора з'єднані в «зірку», у лінійній напрузі відсутні гармоніки, кратні трьом, оскільки $\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0$ (аналогічно для $\underline{U}_{BC}^{(3k)}$ і $\underline{U}_{CA}^{(3k)}$).

Отже,

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(4)^2} + \dots}. \quad (4.32)$$

Діюче значення фазної напруги:

$$U_\phi = \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(3)^2} + U^{(4)^2} + \dots}. \quad (4.33)$$

Якщо у фазній напрузі присутні гармоніки, кратні трьом, то співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} < \sqrt{3}$, у протилежному разі – $\frac{U_L}{U_\phi} = \sqrt{3}$.

4. Розглянемо деякі особливості розрахунку трифазних кіл при дії трифазної симетричної несинусоїдальної системи EPC , у гармонійному складі якої є кратні трьом гармоніки.

Якщо маємо схему «зірка – зірка» без нульового проводу при симетричному навантаженні $\underline{Z}_A^{(3k)} = \underline{Z}_B^{(3k)} = \underline{Z}_C^{(3k)} = \underline{Z}_\phi^{(3k)}$ між нульовими точками діятиме напруга зсуву нейтралі, комплекс діючого значення якої та миттєве значення обумовлені гармоніками кратними трьом (рис. 4.13):

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} \cdot \underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{E}_B^{(3k)} \cdot \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{E}_C^{(3k)} \cdot \underline{Y}_C^{(3k)}}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}, \quad (4.34)$$

$$u_{010} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t) + E_m^{(9)} \cdot \sin(9 \cdot \omega t) + \dots \quad (4.35)$$

де $\underline{Y}_\phi^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}$ – провідність фази для гармоніки, кратної трьом.

$\underline{Z}_\phi^{(3k)}$ – опір фази для гармоніки, кратної трьом.

Діюче значення напруги зсуву нейтралі при цьому:

$$U_{010} = \sqrt{\frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(6)2}}{2} + \frac{E_m^{(9)2}}{2} + \dots} \quad (4.36)$$

При цьому струми гармонік, що кратні трьом, відсутні:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}} = 0. \quad (4.37)$$

При несиметричному навантаженні напруга зсуву нейтралі обумовлена усіма гармоніками, а для кратним трьом гармонік комплекс діючого значення цієї напруги:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}. \quad (4.38)$$

Лінійні струми гармонік, що кратні трьом, для симетричного навантаження:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = \frac{0}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = 0, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} = 0, \quad \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} = 0. \quad (4.39)$$

У схемі «зірка – зірка» з нульовим проводом при симетричному навантаженні й наявності опору в нульовому проводі (рис. 4.14) по нульовому проводу протікатимуть струми гармонік, що кратні трьом.

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}, \quad (4.40)$$

де $\underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_0^{(3k)}}$ – провідність опору $\underline{Z}_0^{(3k)}$ у нульовому проводі для гармоніки

кратної трьом.

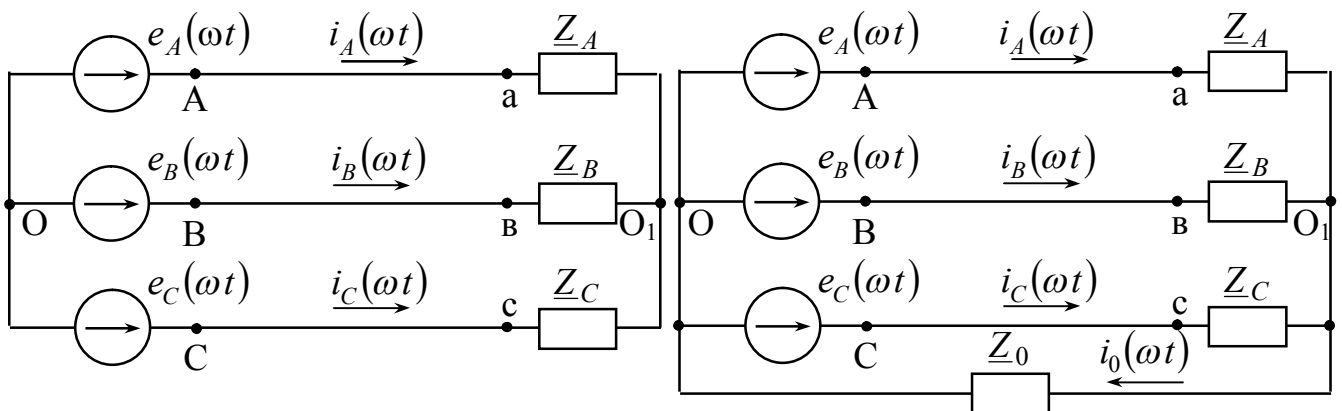


Рисунок 4.13 – «Зірка-зірка»
без нульового проводу

Рисунок 4.14 – «Зірка-зірка»
із нульовим проводом

Струм нульового проводу:

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3)}} = \underline{U}_{010}^{(3k)} \cdot \underline{Y}_0^{(3)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} \cdot \frac{1}{1/\underline{Y}_0^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_\phi^{(3)}}{3}}. \quad (4.41)$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{I}_0^{(3k)}}{3}. \quad (4.42)$$

Контрольні питання до розділу

1. Дайте визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг, вкажіть режими роботи електричних кіл, що призводять до їх виникнення.
2. Поясніть, як проводять розкладання в ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми.
3. Вкажіть особливості періодичних несинусоїдних кривих, що мають симетрію.
4. Дайте визначення середнього й діючого значень несинусоїдного струму й напруги.
5. Дайте визначення активної, реактивної, повної потужностей і потужності викривлення несинусоїдного струму.
6. Наведіть порядок розрахунку струмів і напруг у колах, де діють несинусоїдні джерела напруги або струму. Вкажіть особливості такого розрахунку.
7. Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми «зірка-зірка» без нульового проводу (симетричне та несиметричне навантаження).
8. Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми «зірка-зірка» з нульовим проводом (симетричне навантаження).

РОЗДІЛ 5 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

5.1 Визначення перехідних процесів

Перехідний процес – це процес переходу від одного до іншого режиму роботи кола, який будь-чим відрізняється від попереднього (амплітудою, фазою, частотою діючих у колі EPC , значеннями параметрів схеми). Перехідні процеси виникають унаслідок комутацій.

Комутація – це розмикання або замикання ключів. На схемах це відображається так, як зображено на рисунку 5.1.



Рисунок 5.1 – Приклади позначення ключів, що працюють на замикання й розмикання

Фізичне значення – перехід від енергетичного стану, відповідного режиму роботи кола до комутації, до енергетичного стану режиму кола після комутації. Якщо в колі є котушки індуктивності та (або) ємності, то такий перехід не може відбутися миттєво, оскільки миттєво не може змінитися енергія електричного й магнітного полів. Перехідні процеси зазвичай є швидкоплинними процесами (тривалість їх – десятки, соті, млрд. частки секунди). Але вивчення перехідних процесів є дуже важливим, оскільки дає змогу виявити можливі перевищення напруги на окремих ділянках кола, які можуть бути небезпечними для ізоляції установок; можливі збільшення амплітуд струмів, що іноді значно перевищують амплітуду струму сталого періодичного процесу.

Вивчення перехідних процесів також дає можливість встановити, як деформуються за формою й амплітудою сигнали під час проходження через підсилювачі, фільтри та інші радіотехнічні та електронні пристрої.

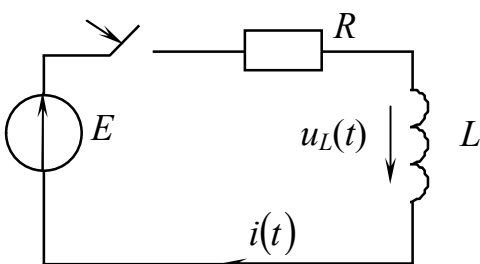


Рисунок 5.2 –
Комутація в R - L колі

Вирішити задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни $i(t)$, або $u(t)$ на окремих ділянках кола. Так, для схеми на рисунку 5.2, другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд – $i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E$. (5.1)

Методи вирішення цього рівняння, тобто знаходження такої функції, яка задовольняє рівнянню (5.1), такі:

- класичний;
- операторний;
- за допомогою інтеграла Дюамеля.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ », момент безпосередньо перед комутацією – « $t = 0-$ »; а момент безпосередньо після комутації – « $t = 0+$ ».

5.2 Закони комутації

Перший закон комутації: в індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0 +$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення – $i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$, тобто струм в індуктивному елементі стрибком змінюватися не може.

Другий закон комутації: на ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яке було безпосередньо перед комутацією та надалі починає змінюватися саме з цього значення – $u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$, тобто напруга на ємності стрибком змінюватися не може.

З енергетичного погляду неможливість миттєвої зміни струму $i_L(t)$ і напруги $u_C(t)$ пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни запасеної

енергії магнітного поля $\frac{L \cdot i^2}{2}$ в індуктивному елементі й енергії електричного поля $\frac{C \cdot u_C^2}{2}$ в ємності.

5.3 Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Рішенням лінійного неоднорідного диференційного рівняння першого порядку (далі – ЛНДР) є сума часткового рішення неоднорідного рівняння і загального рішення лінійного однорідного рівняння (ЛОДР). ЛОДР, як відомо, отримуємо з ЛНДР, якщо праву частину останнього прирівнюємо до нуля.

Згідно з цим методом закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму примусового (i_{np}) і вільного (i_{ϵ}) струму (або напруги), тобто

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}; \quad u(t) = u_{np} + u_{\epsilon}. \quad (5.2)$$

Примусова складова – це частинне вирішення неоднорідного диференційного рівняння, або, якщо говорити з погляду електротехніки, – це значення струму або напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю завершився ($t \rightarrow \infty$) і його можна не брати до уваги.

Вільна складова – загальне вирішення однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є вирішенням рівняння, вільного від примусової сили). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехід-

ному процесі, а примусова й вільна складові в сумі дають функцію струму (напруги) при комутації.

Розглянемо приклад. Для схеми на рисунку 5.2 $i_{np} = \frac{E}{R}$ ($E = const$), а рішенням ЛОДР $i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0$ є показова функція виду $A \cdot e^{pt}$.

Для цього випадку:

– $p = -\frac{R}{L}$ – так званий коефіцієнт згасання, чим він більше, тим швидше

встановлюється примусовий режим;

– $A = -\frac{E}{R}$ – так звана постійна складова (щоб знайти A , необхідно мати

значення $i(t)$ у будь-який момент часу; для цього прикладу за першим законом комутації $i(0) = 0$ А).

A , p – незалежні від часу числа.

$$\text{Отже, } i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.3)$$

Підставимо (5.3) у (5.1):

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot R + L \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right) = E - E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + L \cdot \left(-\frac{E}{R} \right) \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= E - E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = E \Rightarrow \text{рівняння (5.3) є рішенням (5.1).}$$

Висновок: класичний метод полягає в інтегруванні диференціальних рівнянь, які зв'язують струми й напруги кола, унаслідок чого з'являються постійні інтегрування, і в подальшому визначенні цих постійних за допомогою початкових умов, що впливають із законів комутації.

5.4 Незалежні й залежні початкові умови

Під початковими умовами розуміють значення величин струмів і напруг в момент $t = 0$.

Незалежні початкові умови (далі – НПУ) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації й стрибком змінюватися не можуть (відповідно до законів комутації). Значення інших струмів і напруг називають *залежними початковими умовами*. Крім того, початкові умови можуть бути нульовими й ненульовими.

У схемі нульові початкові спостерігаються, якщо на початку перехідного

процесу всі струми й напруги на пасивних елементах схеми дорівнюють нулю (для схем на рисунках 5.2 – 5.3).

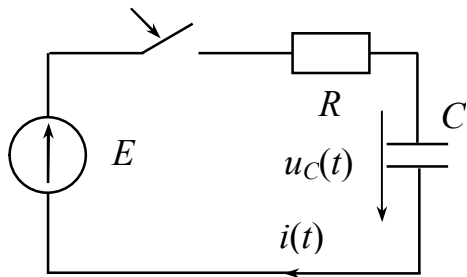


Рисунок 5.3 –
Комутація в R-C колі

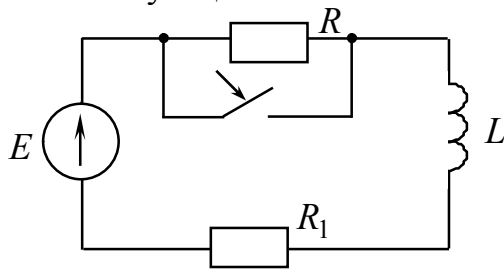


Рисунок 5.4 – Приклад ненульових початкових умов

$$-i(0) = 0 \text{ A}; u_C(0) = 0 \text{ B}.$$

Приклад ненульових початкових умов – схема на рисунку 5.4, а саме незалежна початкова умова в цьому разі – $i_L(0) = \frac{E}{R + R_1}$.

Залежні початкові умови (далі – ЗПУ) знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації та моменту часу $t = 0$. Для схеми рисунка 5.4: $i_L(0) \cdot R_1 + u_L(0) = E \Rightarrow u_L(0) = E - \frac{E}{R + R_1} \cdot R_1$ – це і є залежна початкова умова.

Висновок: після вивчення розділів 5.1–5.4 відомо, як знаходять залежні й незалежні

початкові умови і як визначають примусові складові. Отже, тепер потрібно розглянути, як у класичному методі знаходять вільні складові струмів і напруг. Для цього, як побачимо далі, необхідно скласти характеристичне рівняння.

5.5 Метод вхідного опору для складання характеристичного рівняння

Загалом існує два методи складання характеристичного рівняння: метод головного визначника і вхідного опору. Метод вхідного опору – легший шлях отримання характеристичного рівняння.

За цим методом складають вираз для вхідного опору кола $Z_{ex}(j\omega)$ після комутації відносно вітки з джерелом ЕРС припускаючи, що в колі діє саме

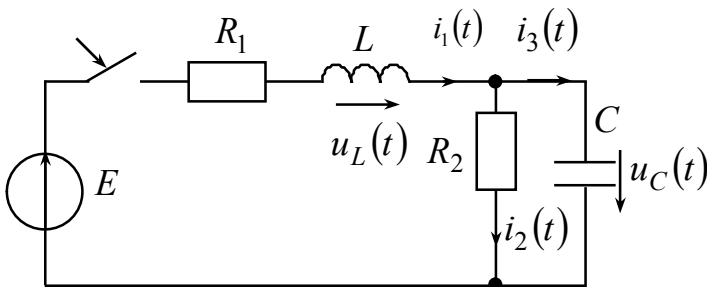


Рисунок 5.5 – Комутація в розгалуженому колі другого порядку

синусоїдна ЕРС. При цьому інші джерела ЕРС закорочують, а джерела струму – розривають. Для схеми рисунка 5.5:

$$Z_{ex}(j\omega) = R_1 + j \cdot \omega \cdot L + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

Потім у виразі для $Z_{ex}(j\omega)$

замінюють $j\omega$ на p і дорівнюють отриманий у такий спосіб вираз $Z_{\text{ex}}(p)$ до нуля:

$$\frac{(R_1 + p \cdot L) \cdot (R_2 \cdot p \cdot C + 1) + R_2}{(R_2 \cdot p \cdot C + 1)} = 0 \Rightarrow \underline{p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 + p \cdot (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) + R_1 + R_2 = 0} -$$

характеристичне рівняння.

Якщо схема містить декілька джерел ЕРС, то вираз для вхідного опору складають відносно будь-якого джерела, інші закорочують (джерела струму розривають).

5.6 Визначення ступеня характеристичного рівняння

Ступінь характеристичного рівняння необхідно вміти оцінювати до безпосереднього розрахунку схеми, в якій досліджується перехідний процес, що дає можливість визначити трудомісткість подальших обчислень і допомагає виявленню помилки, якщо вона виникає у процесі складання характеристичного рівняння.

Ступінь характеристичного рівняння дорівнює кількості основних незалежних початкових умов після можливого спрощення схеми після комутації та не залежить від різновиду діючої в схемі ЕРС.

Спрощення полягає в тому, що паралельно з'єднані ємності й послідовно з'єднані індуктивності замінюються однією еквівалентною ємністю ($C_{\text{екв}} = C_1 + C_2$) й індуктивністю ($L_{\text{екв}} = L_1 + L_2$).

Ступінь характеристичного рівняння не залежить від того, чи існує магнітний зв'язок між індуктивностями схеми, або він відсутній.

5.7 Властивості коренів характеристичного рівняння

1. Число коренів характеристичного рівняння дорівнює ступеню цього рівняння.
2. Всі дійсні корені характеристичного рівняння завжди від'ємні, оскільки вільний процес проходить за відсутності примусової сили, тому не може відбуватися нескінченно довго, а для цього процес повинен бути затухаючим, тобто $p < 0$.
3. Рівняння другого ступеня може мати:
 - два дійсні нерівні від'ємні корені;
 - два дійсні рівні від'ємні корені;
 - два комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.
4. Рівняння третього ступеня може мати:
 - три дійсні нерівні від'ємні корені;
 - три дійсні від'ємні корені, з яких два однакові;
 - три дійсні рівні від'ємні корені;
 - один дійсний від'ємний корінь і два комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

5.8 Характер вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння

1. Характеристичне рівняння першого ступеня, тобто має один корінь \Rightarrow вільна складова має вигляд $i_g = A \cdot e^{p \cdot t}$, (5.4)

де p – коефіцієнт згасання;

A – постійна інтегрування (залежить від параметрів кола, ЕРС, моменту включення).

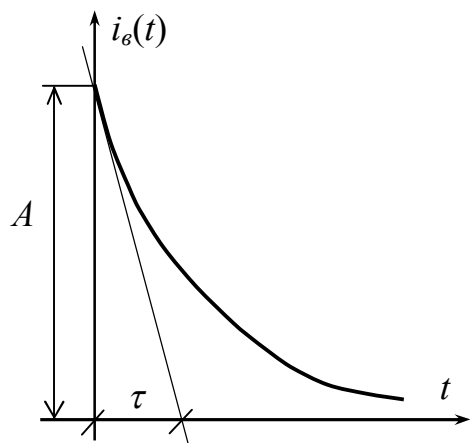


Рисунок 5.6 – Графік $i_g(t)$ одного кореня характеристичного рівняння

Особливості зміни i_g при $A > 0$ наведено на рисунку 5.6.

Величину $\tau = \frac{1}{|p|}$ називають *сталюю*

часу кола, тобто це час, за який вільна складова i_g зменшується в $e = 2,71$ разів; τ залежить від різновиду схеми та її параметрів.

2. Характеристичне рівняння другого ступеня, тобто має два корені.

При цьому можливі три випадки.

2.1. Дійсні нерівні корені $p_1 = -a$;

$p_2 = -b$ (припустимо $b > a$, тобто $|p_1| < |p_2|$, $\tau_1 > \tau_2$). Тоді:

$$i_g = A_1 \cdot e^{-a \cdot t} + A_2 \cdot e^{-b \cdot t} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_1 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (5.5)$$

Особливості зміни вільного процесу (два варіанти) при різних за величиною і знаком постійних інтегрування A_1 та A_2 подані на рисунках 5.7–5.8, де позначено: «1» – крива $A_1 \cdot e^{-a \cdot t}$; «2» – крива $A_2 \cdot e^{-b \cdot t}$; «3» – результуюча крива, яка була отримана шляхом складання кривих «1» і «2»;

2.2. Корені дійсні й рівні $p_1 = p_2 = p$. Тоді вираз для $i_{ce}(t)$ має вигляд:

$$i_g = A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t} = e^{p \cdot t} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t). \quad (5.6)$$

На рисунку 5.9 подано п'ять кривих, що показують можливі особливості зміни функції $e^{p \cdot t} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$ у разі різних знаків сталих інтегрування A_1 і A_2 .

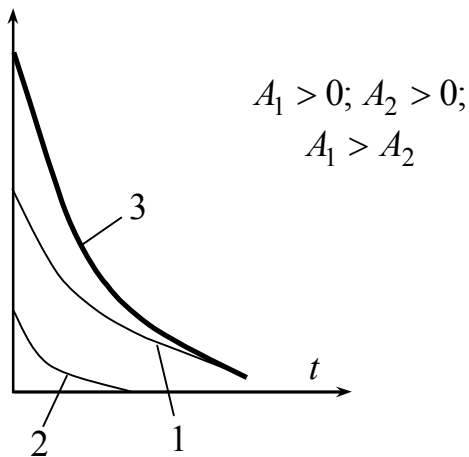


Рисунок 5.7 – $i_g(t)$

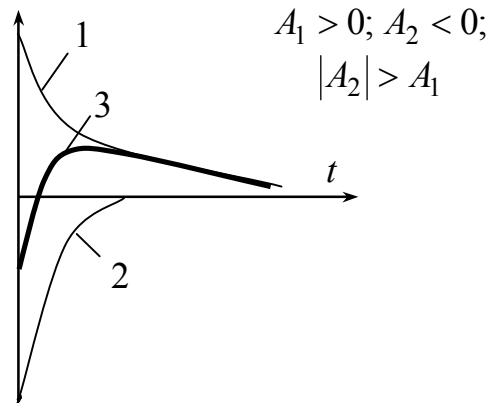


Рисунок 5.8 – $i_g(t)$

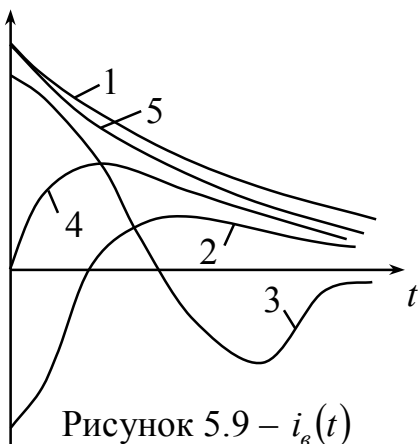


Рисунок 5.9 – $i_g(t)$

- крива «1» – $A_1 > 0; A_2 > 0;$
- крива «2» – $A_1 < 0; A_2 > 0;$
- крива «3» – $A_1 > 0; A_2 < 0;$
- крива «4» – $A_1 = 0; A_2 > 0;$
- крива «5» – $A_1 > 0; A_2 = 0.$

2.3. Корені комплексно спряжені, тобто $p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$. (5.7)

Тоді вираз для $i_g(t)$ має вигляд:

$$i_g = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi). \quad (5.8)$$

Формула (5.8) – це синусоїдне коливання, що згасає з кутовою частотою ω_0 і початковою фазою φ (рис. 5.10).

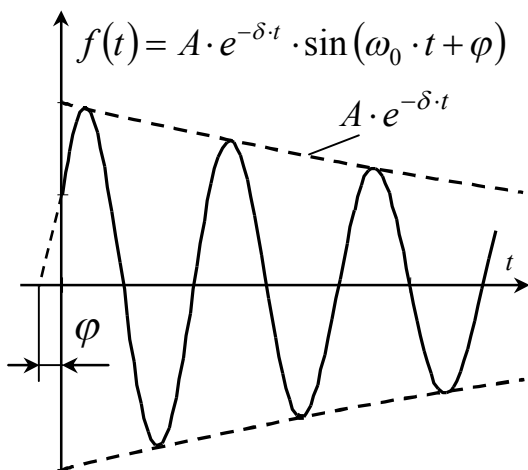


Рисунок 5.10 – Графік $i_g(t)$

Обвідна коливання визначається кривими $A \cdot e^{-\delta \cdot t}$ та $-A \cdot e^{-\delta \cdot t}$. Чим більше коефіцієнт згасання δ , тим швидше згасає коливальний процес. Кутова частота вільних коливань ω_0 і коефіцієнт згасання δ залежать тільки від параметрів кола після комутації. A і φ визначаються значеннями параметрів схеми, початковими умовами та величиною ЕРС джерела.

5.9. Визначення постійних інтегрування у класичному методі

1. Характеристичне рівняння першого ступеня.

Вільна складова струму – $i_g = A \cdot e^{pt} \Rightarrow i(t) = i_{np}(t) + A \cdot e^{pt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow i(0) = i_{np}(0) + A \cdot e^{p \cdot 0} = i_{np}(0) + A \Rightarrow \underline{A = i(0) - i_{np}(0)} \quad (5.9)$$

2. Характеристичне рівняння другого ступеня.

2.1. Корені рівняння дійсні нерівні числа ($p_1 \neq p_2$).

Вільна складова струму – $i_g = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \Rightarrow$ (5.10)

$$\Rightarrow i(t) = i_{np}(t) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (5.11)$$

Для визначення постійних інтегрування A_1 і A_2 необхідно мати значення струму $i(t)$ і значення $\frac{di}{dt}$ у нульовий момент часу, тобто $i(0)$ та $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$.

У момент $t=0$:

$$i(0) = i_{np}(0) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot 0} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot 0} \Rightarrow \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{np}(0) + A_1 + A_2. \quad (5.13)$$

Похідна виразу (5.11) має вигляд

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{np}(t) + A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (5.14)$$

$$\text{Отже, } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{np}(0) + A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2. \quad (5.15)$$

Спільний розв'язок (5.13) і (5.15) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ дає значення A_1 і A_2 .

2.2. Корені рівняння дійсні рівні числа ($p_1 = p_2 = p$), тобто

$$i_g = A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (5.16)$$

$$i(t) = i_{np}(t) + A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (5.17)$$

$$i(0) = i_{np}(0) + A_1, \quad (5.18)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{np}(t) + A_1 \cdot p \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot p \cdot e^{p \cdot t}, \quad (5.19)$$

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = i'_{np}(0) + A_1 \cdot p + A_2, \quad (5.20)$$

Спільний розв'язок (5.18) і (5.20) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ дає значення A_1 і A_2 .

2.3. Корені рівняння комплексно-спряжені числа ($p_{12} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$), тобто:

$$i_e = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (5.21)$$

$$i(t) = i_{np}(t) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (5.22)$$

$$i(0) = i_{np}(0) + A \cdot \sin \alpha, \quad (5.23)$$

$$\frac{di}{dt} = i'_{np}(t) + A \cdot (-\delta) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (5.24)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{np}(0) + A \cdot (-\delta) \cdot \sin \alpha + A \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha. \quad (5.25)$$

Спільний розв'язок (5.23) і (5.25) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ дає значення A і α .

5.10 Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

1. Довільно вибираємо напрями струмів (напруг) у вітках кола.
2. Записуємо рішення для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми примусових і вільних складових: $i(t) = i_{i\delta}(t) + i_a(t)$, $u(t) = u_{np}(t) + u_e(t)$.
3. Визначаємо незалежні початкові умови (шляхом розрахунку схеми до комутації) і залежні початкові умови (шляхом складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для моменту часу $t = 0$).
5. Вважаючи, що перехідний процес повністю завершився, для схеми після комутації визначаємо примусові складові струмів і напруг.
6. Для схеми після комутації складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його рішення та визначаємо вигляд вільних складових струмів і напруг (розділ 5.8).
7. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначаємо постійні інтегрування (розділ 5.9).
8. Остаточно записуємо закони струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ при перехідному процесі.

5.11 Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Операторний метод полягає у використанні поняття про зображення функцій часу. В операторному методі кожній функції часу відповідає функція нової змінної, яка позначається буквою p , і навпаки – функції змінної p відповідає певна функція часу. Функцію часу (струм, напруга, заряд, EPC) позначають $f(t)$ і називають оригіналом. Їй відповідає функція, що називається зображенням $F(p)$. Перехід від функції часу t до функції змінної p здійснюють за допомогою прямого перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt, \quad (5.26)$$

де $F(p)$ – функція, що називається зображенням;

$f(t)$ – оригінал (функція часу);

p – комплексне число вигляду $p = a + j \cdot b$.

Отже, операторний метод розрахунку перехідних процесів є методом розрахунку, заснованим на перетворенні Лапласа і дає змогу звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення на p .

Відповідність між функціями $F(p)$ і $f(t)$ записують так: $F(p) \doteq f(t)$.

Знак « \doteq » називають знаком відповідності.

5.12 Зображення деяких простих функцій

1. Зображення постійної $f(t) = A$.

Підставимо A замість $f(t)$ в інтеграл (5.26).

$$F(p) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-p \cdot t} dt = A \cdot \left(-\frac{1}{p} \right) \cdot \int_0^{\infty} d(e^{-p \cdot t}) = \frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p} \Rightarrow A \doteq \frac{A}{p}. \quad (5.27)$$

2. Зображення показової функції $e^{\alpha \cdot t}$.

Підставимо замість $f(t)$ в інтеграл (5.26) функцію $e^{\alpha \cdot t}$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t \cdot (p - \alpha)} dt = \left(-\frac{1}{p - \alpha} \right) \cdot \int_0^{\infty} e^{-t \cdot (p - \alpha)} d[-t \cdot (p - \alpha)] = \\ &= -\frac{1}{p - \alpha} \cdot e^{-t \cdot (p - \alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p - \alpha}. \end{aligned}$$

Отже,

$$e^{\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p - \alpha} \quad (5.28)$$

Висновки формули (5.28):

а) зображення оператора обертання $e^{j \cdot \omega t} \doteq \frac{1}{p - j \cdot \omega}$; (5.29)

б) зображення комплексу синусоїдного струму $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, який відповідно до формули Ейлера може бути подане у вигляді $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)} = \underline{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega t}$.

Зрозуміло, що відповідно до формули (5.28): $\underline{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega t} \doteq \frac{\underline{I}_m}{p - j \cdot \omega}$; (5.30)

в) зображення функції $e^{-\alpha \cdot t}$:

$$e^{-\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p + \alpha}. \quad (5.31)$$

3. Зображення першої похідної функції $f(t)$, тобто зображення $\frac{df(t)}{dt}$,

якщо відомо, що значення функції $f(t)$ при $t=0$ дорівнює $f(0)$. Скористаємося перетворенням Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} d[f(t)]. \quad (5.32)$$

Застосуємо інтегрування за частинами: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$,

де $e^{-p \cdot t} = u$; $v = f(t)$; $d[f(t)] = dv$; $de^{-p \cdot t} = -p \cdot e^{-p \cdot t} dt = du$.

Остаточно отримуємо: $\frac{df(t)}{dt} \doteq p \cdot F(p) - f(0)$. (5.33)

Розглянемо висновок формули (5.33), а саме зображення напруги на індуктивності $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, якщо $I(p) \doteq i(t)$, а $i(0)$ – значення функції $i(t)$ у момент

часу $t=0$. За формулою (5.33) – $\frac{di}{dt} \doteq p \cdot I(p) - i(0)$. Отже,

$$L \cdot \frac{di}{dt} \doteq p \cdot L \cdot F(p) - L \cdot i(0), \quad (5.34)$$

де $L \cdot i(0)$ – внутрішня ЕРС, що обумовлена запасом енергії магнітного поля в індуктивності внаслідок протікання через неї струму $i(0)$ безпосередньо перед комутацією.

4. Зображення інтеграла $\int_0^t f(t) dt$.

Нехай $f(t)$ – оригінал; а $F(p)$ – зображення функції $f(t)$. Скористаємося перетворенням Лапласа::

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] \cdot e^{-p \cdot t} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d e^{-p \cdot t}. \quad (5.35)$$

Інтеграл беремо за частинами, а саме $-\int u dv = u \cdot v - \int v du$,

де $u = \int_0^t f(t) dt$; $v = e^{-p \cdot t}$; $d(e^{-p \cdot t}) = dv$, $du = d \left[\int_0^t f(t) dt \right] = f(t) dt$.

Отже, отримуємо:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (5.36)$$

Розглянемо висновок формули (5.36), а саме зображення напруги на ємності:

$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$. Врахуємо, що напруга на ємності визначається не тільки струмом, що протікає через неї, але й тією напругою, яка була на ній при $t = 0$.

Відповідно до формул (5.36) та (5.27) зображення $\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt$ дорівнює

$\frac{I(p)}{C \cdot p}$, а зображення постійної $u_C(0)$ дорівнює $\frac{u_C(0)}{p}$, тобто:

$$u_C(t) \doteq \frac{I(p)}{C \cdot p} + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (5.37)$$

Доданок $\frac{u_C(0)}{p}$ – внутрішня ЕРС, обумовлена запасом енергії електричного поля в конденсаторі до комутації внаслідок напруги на ній $u_C(0)$ безпосередньо перед комутацією.

Інші найпростіші операторні співвідношення наведено в довідниках.

5.13 Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі

Запишемо другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі для схеми синусоїдного струму (рис. 5.11), режим після комутації:

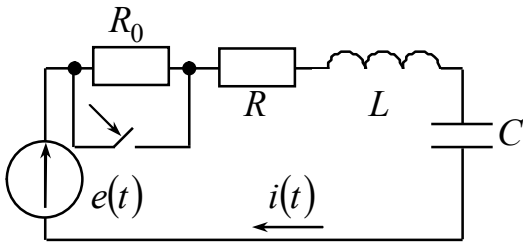


Рисунок 5.11 – Схема для пояснення законів кіл в операторній формі

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + u_C(0) = e(t) \quad (5.38)$$

Замінімо оригінали відповідними зображеннями за умови, що $I(p) \leftrightarrow i(t)$:

$$I(p) \cdot R + L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0) + I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{E_m}{p - j \cdot \omega} = E(p). \quad (5.39)$$

Вираз (5.39) – другий закон Кірхгофа в операторній формі для кола після комутації схеми рисунка 5.11.

У загальному вигляді другий закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum \pm I_K(p) \cdot Z_K(p) = \sum \pm E_K(p), \quad (5.40)$$

де $I_K(p) \cdot Z_K(p)$ – операторне падіння напруги на деякій ділянці контуру;

$E_K(p)$ – операторна ЕРС.

З формули (5.40) операторний струм $I(p)$:

$$I(p) = \frac{E(p) + L \cdot i(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}} = \frac{E(p) + L \cdot i(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)}, \quad (5.41)$$

де $Z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}$ – операторний опір ділянки кола. (5.42)

Вираз (5.41) – це закон Ома в операторній схемі для ділянки кола.

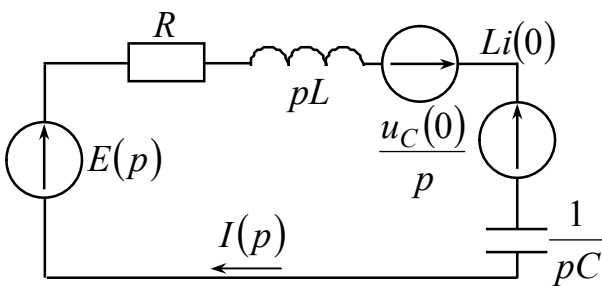


Рисунок 5.12 – Операторна схема заміщення

Операторна схема заміщення відповідно до формули (5.41) зображена на рисунку 5.12.

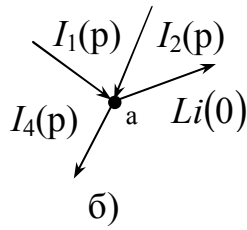
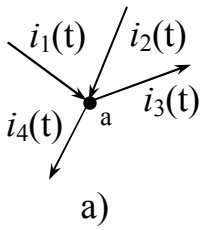
Розглянемо перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів для деякого вузла «а» (рис. 5.13, а):

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0. \quad (5.43)$$

Якщо застосувати перетворення Лапласа і скористатися тим, що зображення суми дорівнює сумі зображень, то отримаємо перший закон Кірхгофа в операторній формі для вузла «а» (рис. 5.13, б):

$$I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) - I_4(p) = 0. \quad (5.44)$$

У загальному вигляді перший закон Кірхгофа в операторній формі:



$$\sum \pm I_k(p) = 0. \quad (5.45)$$

Рисунок 5.13 – Пояснення до першого закону Кірхгофа в операторній формі

Висновок: операторні струми і напруги можна розраховувати будь-яким методом, оскільки операторні схеми заміщення підкоряються законам Ома і Кірхгофа в операторній формі.

5.14 Послідовність розрахунку операторним методом

1. Складають рівняння для кола після комутації за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі.
2. Здійснюють заміну оригіналів відповідними зображеннями.
3. Складають операторну схему заміщення.
4. Використовують будь-який метод розрахунку і визначають операторні струми і напруги.
5. Здійснюють перехід від операторних струмів і напруг до струмів і напруг функції часу (перехід від зображень до оригіналів) за допомогою формул відповідності або за допомогою формули розкладання.

5.15 Формула розкладання

У результаті розрахунку операторний струм $I(p)$ може являти собою співвідношення двох поліномів, тобто

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}, \quad (5.46)$$

де n – ступінь полінома чисельника;

m – ступінь полінома знаменника.

Якщо $n < m$, що справедливо для всіх фізично існуючих електричних кіл, а також якщо рівняння $M(p)=0$ не має кратних коренів, то дріб (5.46) може бути поданий у вигляді:

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \cdot \frac{1}{p - p_K} = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \cdot \frac{1}{p - p_K}, \quad (5.47)$$

де p_1, p_2, \dots, p_K – корені рівняння $M(p)=0$.

Отже, перехід від зображення $\frac{N(p)}{M(p)}$ до оригіналу (функції часу) виконують

за допомогою формули розкладання, беручи до уваги, що $e^{p_k \cdot t} = \frac{1}{p - p_k}$

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t} \quad (5.48)$$

Важливо зробити деякі зауваження до формули (5.48):

1. Формулу розкладання застосовують за будь-яких початкових умов і при будь-яких формах напруги, що діє у схемі.

2. Якщо початкові умови не нульові, то до складу полінома $N(p)$ ввійдуть внутрішні *ЕРС*.

3. Якщо зображення струму має вигляд $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, а рівняння другого

ступеня $M(p) = 0$ має комплексно-спряженні корені, то складники, відповідні їм в правій частині формули (5.48), будуть також комплексно спряженими і в сумі дадуть дійсне число. Оригінал струму знаходять так (струм не має примусового складника):

$$i(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t}, \quad (5.49)$$

де $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_0$.

4. Якщо зображення струму має вигляд $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)}{p \cdot M_1(p)}$, а рівняння другого ступеня $M_1(p) = 0$ має комплексно-спряженні корені, то оригінал струму знаходять за формулою

$$i(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + 2 \cdot \operatorname{Re} \frac{N(p_1)}{p_1 \cdot M_1(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t}, \quad (5.50)$$

де $i_{i\delta} = \frac{N(0)}{M_1(0)}$ – примусова складова струму.

5. Якщо у схемі діє синусоїдна *ЕРС*, і зображення її має вигляд $\frac{\underline{E}_m}{p - j \cdot \omega}$

($\underline{E}_m = E_m \cdot e^{j \cdot \varphi}$), то при використанні формули розкладання з правої її частини для переходу від комплексу до миттєвого значення береться коефіцієнт при j (уявна частина). Відповідно до цього внутрішні *ЕРС*, які з'являються в правій частині формули розкладання за ненульових початкових умов у синусоїдних колах, повинні бути помножені на коефіцієнт « j », тобто будемо мати внутрішні *ЕРС* такого вигляду – « $j \cdot L \cdot i(0)$ » і « $j \cdot \frac{U_C(0)}{p}$ ».

У колах з постійною EPC внутрішні EPC на « j » не помножаться.

6. Якщо EPC , що діє у схемі, синусоїдна, то примусовий складник рішення входить до числа доданків $\sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$ і визначається коренем $p = j\omega$,

тобто $i_{np} = \frac{N(j\omega)}{M'(j\omega)} \cdot e^{j\omega \cdot t}$.

5.16 Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів

Яким методом користуватися цілком залежить від навички і звички. Як класичний, так і операторний методи можна застосовувати для вирішення задач будь-якої складності. Але зробимо деякі зауваження:

- якщо порядок характеристичного рівняння більше двох, то доцільно застосовувати операторний метод;
- класичний метод більш фізично «прозорий» (якщо характеристичне рівняння має ступінь менше трьох, то застосовують саме його);
- операторний метод потребує достатньої математичної підготовки.
- основною областю застосування інтеграла Дюамеля є випадки, коли напруга, що впливає на електричне коло, змінюється в часі за складним законом.

Контрольні питання до розділу

1. Дайте визначення перехідних процесів і сформулюйте закони комутації.
2. Дайте визначення класичного методу розрахунку перехідних процесів.
3. Дайте визначення примусових і вільних складників струмів і напруг; незалежних і залежних, нульових і ненульових початкових умов.
4. Охарактеризуйте один із методів складання характеристичного рівняння – метод вхідного опору.
5. Поясніть, як залежать особливості вільного процесу від кількості та різновиду коренів характеристичного рівняння.
6. Поясніть, як визначають сталі інтегрування у класичному методі.
7. Наведіть порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом.
8. Дайте визначення операторного методу.
9. Наведіть зображення постійної величини й показової функції.
10. Наведіть зображення першої похідної та напруги на індуктивності.
11. Наведіть зображення інтеграла та напруги на ємності.
12. Отримайте закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.
13. Поясніть особливості застосування формули розкладання для визначення оригіналу струму (напруги) при перехідному процесі.
14. Наведіть порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом.
15. Порівняйте різні методи розрахунку перехідних процесів.

РОЗДІЛ 6 МЕТОДИ АНАЛІЗУ СТАНУ НЕЛІНІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

6.1 Загальні відомості і класифікація нелінійних елементів

Раніше розглядалися лінійні кола, що містили тільки лінійні елементи, для яких залежність між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокозчепленнями) виражають лінійними функціями, що виглядають так:

$$u = R \cdot i, \quad \psi = L \cdot i, \quad q = C \cdot u. \quad (6.1)$$

Нелінійні електричні (далі – НЕ) кола містять принаймні один нелінійний елемент (далі – *НЕ*), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів.

У цьому разі залежність (6.1) має вигляд:

$$u = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad \psi = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad q = f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (6.2)$$

тобто загалом спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежності (6.2) – це нелінійна вольт-амперна характеристика (далі – ВАХ) $u = f(i)$, вебер-амперна характеристика $\psi = f(i)$ і кулон-вольтна характеристика $q = f(u)$.

Нелінійні елементи поділяють на нелінійні опори, нелінійні індуктивності та ємності. При постійних струмах як нелінійні можуть розглядатися тільки кола з резистивними елементами, ВАХ яких не є прямою.

Поділяються нелінійні елементи на дві групи.

1. Некеровані *НЕ* (лампа розжарювання, електрична дуга, нелінійні напівпровідникові опори, баретер, тиритові та вілітові опори). Вони мають одну симетричну ВАХ (ВАХ лампи розжарювання на рисунку 6.1) або несиметричну ВАХ (ВАХ діоду на рисунку 6.2).

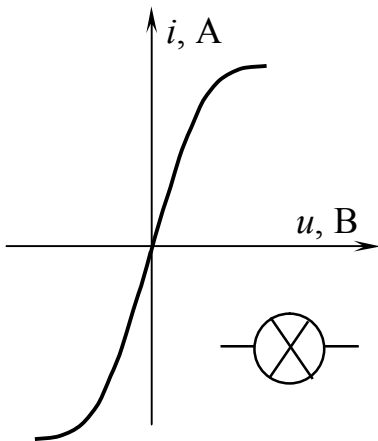


Рисунок 6.1 – ВАХ ЛН

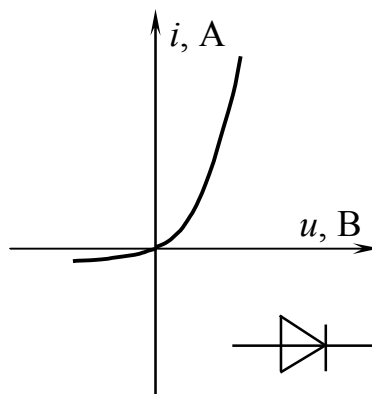


Рисунок 6.2 – ВАХ діоду

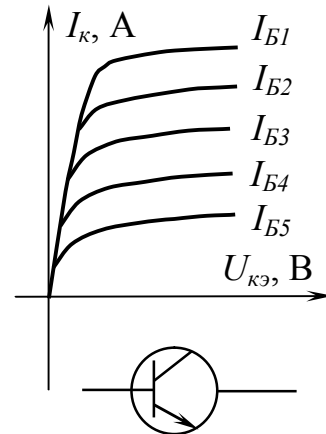
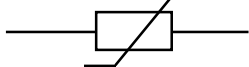


Рисунок 6.3 – ВАХ керованого *НЕ*

2. Керовані *HE* (транзистори, тиристори) мають декілька ВАХ (сім'я ВАХ), тобто окрім основного кола, також є керуюче коло, напруга або струм якого є керуючими для ВАХ основного кола (див. рис. 6.3 – вихідні статичні ВАХ біполярного транзистора для схеми із спільним емітером).

Узагальнене позначення нелінійного елемента на схемах – 

6.2 Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

З методів, які розглядалися раніше, для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

Для проведення розрахунку, зазвичай, графічного, повинні бути відомі ВАХ нелінійних елементів, що входять у схему.

6.3 Послідовне з'єднання нелінійних елементів

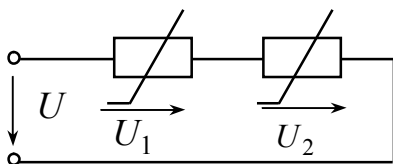


Рисунок 6.4 – Послідовне з'єднання *HE*

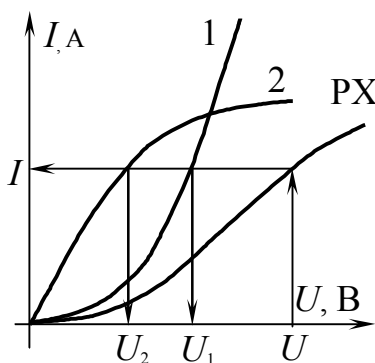


Рисунок 6.5 – Результуюча ВАХ (PX)

Розрахунок (схема на рисунку 6.4) базується на другому законі Кірхгофа: $U = U_1 + U_2$. Один із параметрів, а саме напруга на вході кола U або струм I , повинен бути заданим для визначення струму I (або напруги U), а також напруг на елементах U_1 і U_2 . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є струм. Довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напруги на нелінійних елементах при кожному певному значенні струму, тобто будуюмо результуючу ВАХ (PX) – (рис. 6.5).

Розглянемо окремий випадок, коли послідовно з'єднані активний опір і нелінійний елемент. Тоді немає необхідності будувати результуючу характеристику, отже, $I = f(U_{HC} + I \cdot R)$.

У цьому разі розглядають рівняння в режимі холостого ходу ($I = 0, U_{HЭ} = E$) і в режимі короткого замикання ($U_{HЭ} = 0, I = \frac{E}{R}$). Потім будують пряму, що сполучає ці точки та перетинає ВАХ нелінійного елемента – рисунок 6.6, а (n – точка, визначає значення струму I).

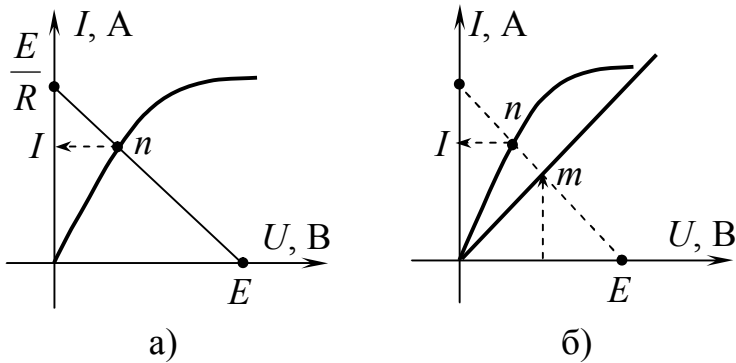


Рисунок 6.6 – Окремі випадки графічного розрахунку послідовного з'єднання

Можна застосувати також такий спосіб (рис. 6.6, б):

- побудувати ВАХ лінійного елемента за двома точками;
- відкласти за осями напруг значення EPC E ;
- із середини величини E відновити перпендикуляр до його перетину з ВАХ лінійного елемента (точка m);

– провести допоміжну пряму через точки E і m , яка перетне ВАХ нелінійного елемента (n – шукана точка, що визначає значення струму I).

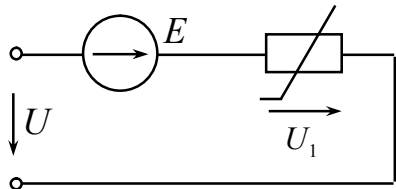


Рис. 6.7 – Послідовне з'єднання EPC та HE

Якщо з HE послідовно включено джерело постійної EPC (рис. 6.7), то для отримання характеристики $I = f(U)$ необхідно змістити ВАХ нелінійного елемента $I = f(U_1)$ на величину E вліво при вказаному на рисунку 6.7 напрямі EPC (рис. 6.8).

Отже, здійснюємо перехід до схеми на рисунку 6.9 у такий спосіб:

$$U_1 - U = E \Rightarrow U = U_1 - E. \tag{6.3}$$

6.4 Паралельне з'єднання нелінійних елементів

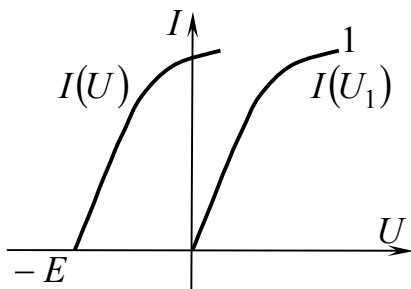


Рисунок 6.8 – Зміщення ВАХ

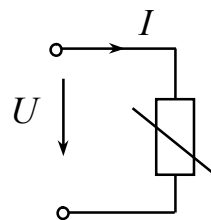


Рисунок 6.9 – Еквівалентна схема

При паралельному з'єднанні елементів (рис. 6.10) загальним параметром є напруга. Тому результуючу ВАХ ($U = f(I_1 + I_2)$) будують за першим законом Кірхгофа, а саме $I = I_1 + I_2$ – рисунок 6.11. Якщо була задана напруга U , а струми в паралельних вітках невідомі, то за напругою на вході кола U за ВАХ нелінійних елементів визначають струми I_1, I_2 , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм $I = I_1 + I_2$.

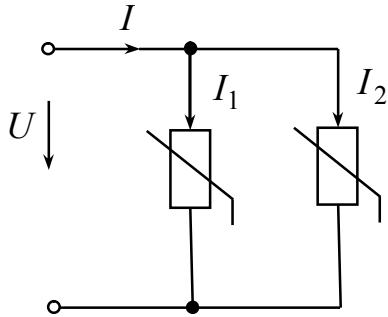


Рисунок 6.10 – Паралельне з'єднання HE

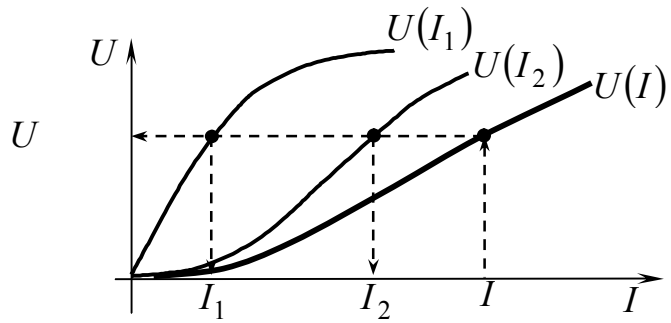


Рисунок 6.11 – Результуюча ВАХ $U(I)$

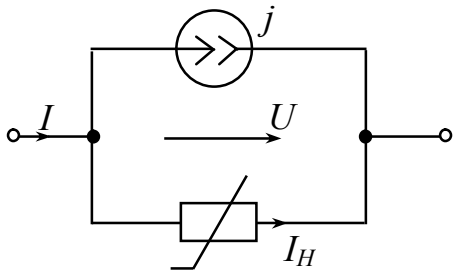


Рисунок 6.12 – Паралельне з'єднання HE та джерела j

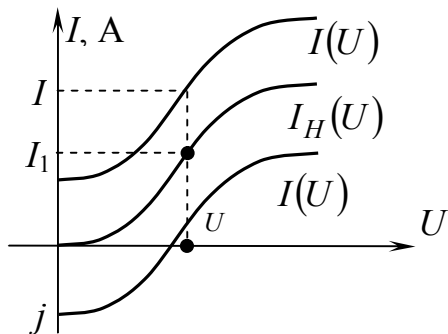


Рисунок 6.13 – Результуюча ВАХ $I(U)$

Розглянемо окремий випадок – паралельно з нелінійним елементом включено джерело постійного струму j . У цьому випадку ВАХ ділянки кола, яке містить нелінійний елемент і джерело струму, знаходять зсувом характеристики нелінійного елемента $I_H(U)$ на величину струму джерела j у бік додатних (для схеми на рисунку 6.12) або від'ємних значень струму залежно від полярності джерела струму j – дивись графіки на рисунку 6.13:

$$I = I_H + j, \quad (6.4)$$

$$I = I_H - j. \quad (6.5)$$

6.5 Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів

Для схеми на рисунку 6.14, а після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2 – 3» одержуємо послідовне з'єднання елементів «1» і «2 – 3» (схема на рисунку 6.14, б). При цьому повинна бути побудована результуюча ВАХ умовного HE «2 – 3».

Подальший розрахунок схеми на рисунку 6.14, б, якщо задана напруга U , проводимо так:

– будуємо результуючу ВАХ послідовно з'єднаних елементів «1» і «2 – 3» (тобто отримуємо схему рисунка 6.14, в);

– визначаємо струм I_1 , а також напругу U_1 на першому HE і напругу на паралельних вітках U_{23} ;

– за напругою U_{23} і заданим ВАХ елементів «2» і «3» визначаємо струми в паралельних вітках I_2 і I_3 ;

– за першим законом Кірхгофа визначаємо струм $I = I_1 + I_2$.

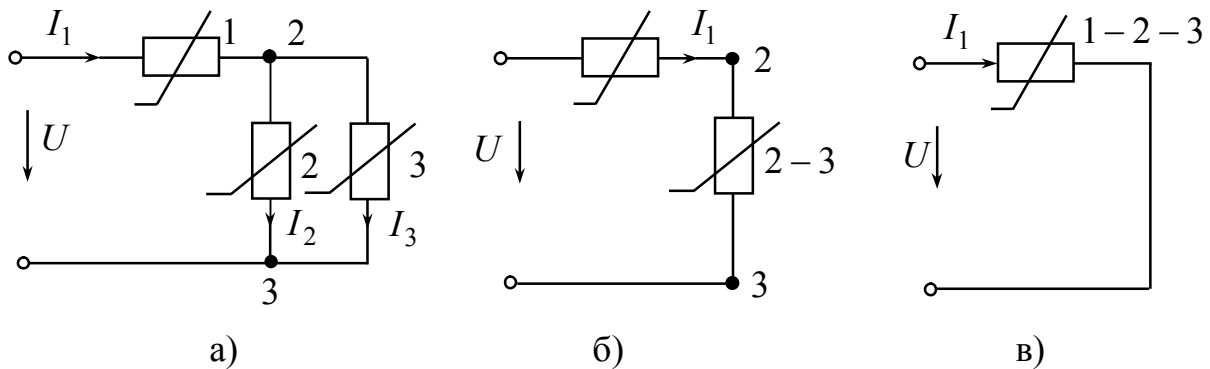


Рисунок 6.14 – Графічний розрахунок змішаного НЕ

6.6 Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами

Для схеми на рисунку 6.15 задані значення E_1, E_2, E_3 і ВАХ усіх НЕ.

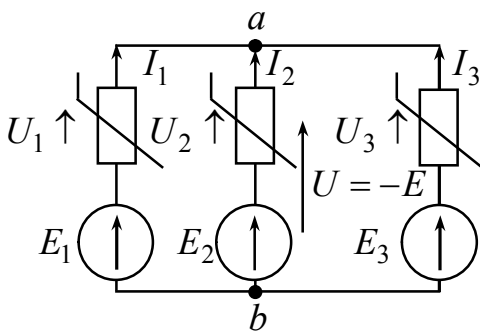


Рисунок 6.15 – Схема з двома вузлами

Потрібно визначити I_1, I_2, I_3 .

Існує два способи вирішення:

- 1) графічний;
- 2) чисельний.

Графічний складається з декількох етапів та потребує значної точності виконання побудов.

Чисельний метод дає можливість вирішити задачу при побудові тільки одного графіка, а саме графіка залежності $U_{ab} = f(\sum I)$.

Розглянемо порядок розрахунку.

1. Довільно задаємося значеннями напруги $U_{ab} = E^I; E^{II}; \dots$.

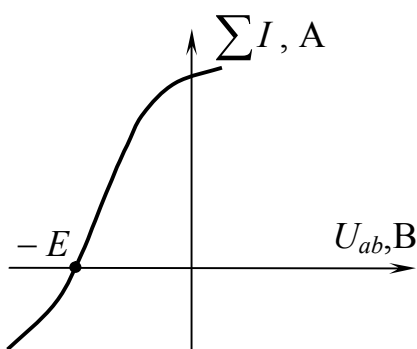


Рисунок 6.16 – Графік $\sum I = f(U_{ab})$

2. Знаходимо значення напруг U_1, U_2, U_3 на НЕ при певному довільному значенні U_{ab} за формулами

$$U_1 = E_1 - E^I; U_2 = E_2 - E^I; U_3 = E_3 - E^I.$$

3. Визначаємо значення струмів $I_1 \div I_3$ за ВАХ НЕ.

4. Будуємо графік залежності $\sum I = f(U_{ab})$.

Шукане (дійсне) значення для схеми на рисунку 6.15 значення $U_{ab} = E$ відповідає точці $\sum I = 0$.

5. Визначаємо напруги на нелінійних елементах початкової схеми U_1, U_2, U_3 за формулами

$$U_1 = E_1 - U_{ab}, U_2 = E_2 - U_{ab}, U_3 = E_3 - U_{ab}.$$

6. За ВАХ кожного нелінійного елемента визначаємо струми I_1, I_2, I_3 .

Розрахунок, який зручно вести за допомогою таблиці, проводимо до тих пір, доки величина суми струмів $\sum I$ не змінить знак.

Таблиця 6.1 – Зведена таблиця розрахунку чисельним методом

$U_{ab} = E$	$U_1 = E_1 - E$	I_1	$U_2 = E_2 - E$	I_2	$U_3 = E_3 - E$	I_3	$\sum I$
$U_{ab} = E'$							
$U_{ab} = E''$							
...							

6.7 Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора

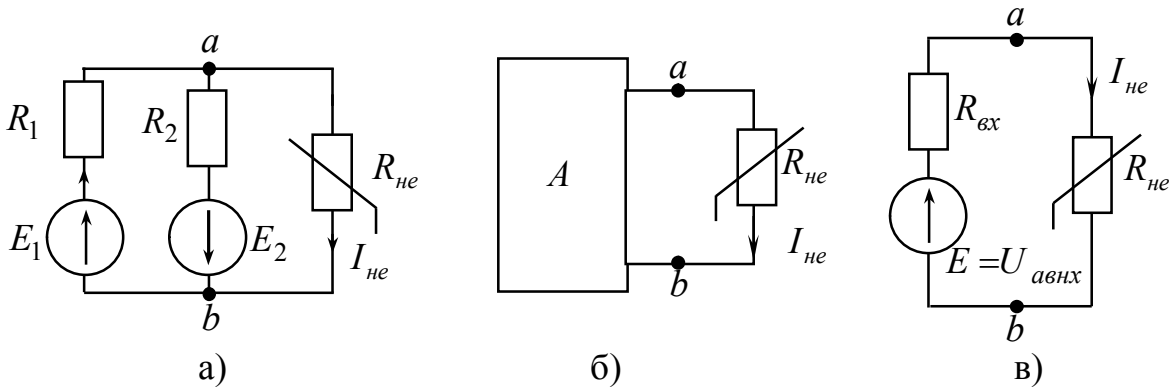


Рисунок 6.17 – Розрахунок методом еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі (рис. 6.17, а) є тільки одна вітка, що містить HE (його ВАХ відома), то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою виділяємо вітку з HE , а всю решту частину схеми розглядаємо як активний двополюсник (рис. 6.17, б). Для еквівалентної схеми рисунку 6.17, в знаходимо так звану напругу неробочого ходу: $U_{нх} = E_1 - I_{нх} \cdot R_1$, (6.7)

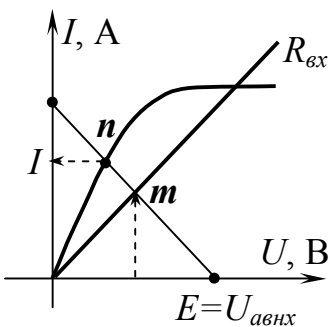


Рисунок 6.18 – Графічне визначення I

де $I_{нх} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$ – струм неробочого ходу, якщо в схемі рисунку 6.17, а вилучити $R_{не}$.

Також знаходимо так званий вхідний опір $R_{вх} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ (на схемі рисунку 6.17, а вилучаємо $R_{не}$ та закорочуємо всі EPC).

За значенням опору $R_{вх}$ будуємо його лінійну характеристику, а струм HE визначаємо графічним способом (рис. 6.18).

6.8 Статичний і диференційний опори

Властивості HE можуть бути описані за допомогою його ВАХ, а також статичними і диференційними опорами.

Статичний опір (R_{cm}) характеризує поведінку HE в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина R_{cm} змінюється.

Під *статичним* опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 6.20):

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.8)$$

де $m_R = \frac{m_U}{m_i}$ – масштаб за опором. β_1

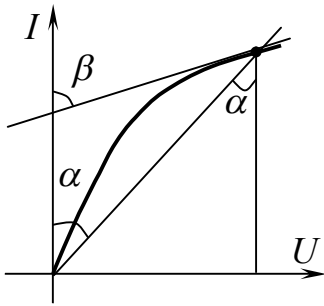


Рисунок 6.25 –
Визначення R_{cm} та R_D

Під диференційним опором (R_D) розуміють величину $R_D = \frac{dU}{dI}$, (6.9)

яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від певної точки нелінійної характеристики (рис. 6.25).

$$\text{З рисунку 6.25 видно, що } R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (6.10)$$

Отже, величина R_D пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною до ВАХ у певній точці й віссю струму I .

При послідовному з'єднанні декількох HE диференційний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференційних опорів HE при цьому самому струмі.

6.9 Заміна нелінійного елемента лінійним опором і ЕРС

Припустимо, діапазон роботи за напругою HE в колі на рисунку 6.26, а не виходить за межі такої ділянки його ВАХ, яка з певною мірою наближення може бути замінена прямою лінією (рис. 6.26, б). Будучи продовженою, ця пряма перетинає вісь абсцис у точці E_1 або в точці E_2 . Тоді HE може бути замінений джерелом постійної ЕРС і лінійним опором $R_{D1} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_1$ (або $R_{D2} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_2$), що дорівнює диференційному опору HE на прямолінійній ділянці. Після заміни коло (рис. 6.26, в або рис. 6.26, г) розглядають як лінійне.

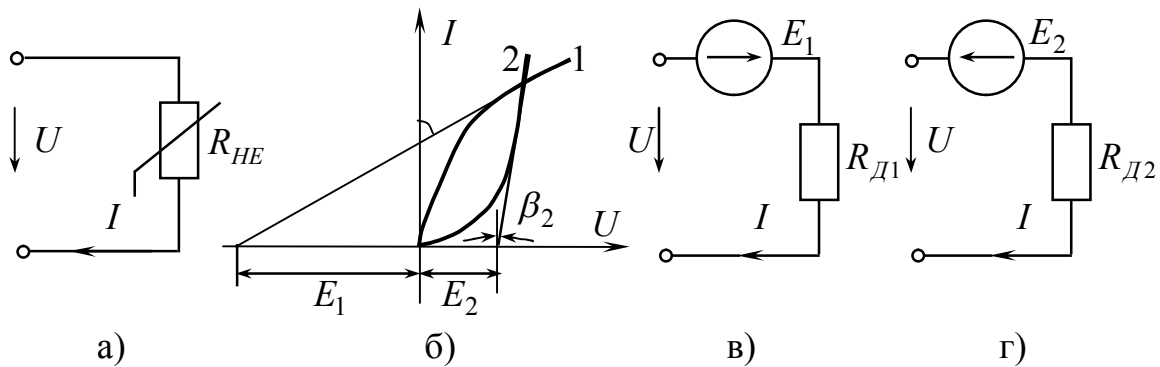


Рисунок 6.26 – Еквівалентна заміна HE лінійним елементом та EPC

6.10 Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму

Нелінійні елементи у низці випадків додають електричним колам властивості принципово недосяжні в лінійних колах, такі, наприклад, як стабілізація струму, стабілізація напруги, посилення постійного струму та інші.

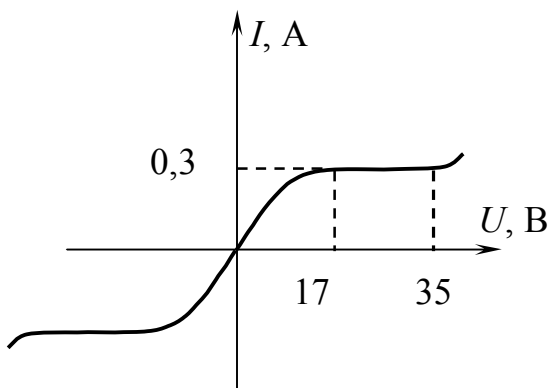


Рисунок 6.27 – ВАХ баретера 0,3_Б_17-35

1. *Стабілізатор струму* (баретер) – це пристрій, який здатний підтримувати в навантаженні незмінний струм при зміні опору навантаження і при зміні напруги на вході схеми. Баретер є спіраллю,

виконаною зі сталевого дроту. Дріт знаходиться у скляній колбі, яка заповнена воднем при тиску 80 мм. рт. ст.

ВАХ баретера зображена на рисунку 6.27 і в певному діапазоні зміни напруги майже горизонтальна. Баретер застосовували для стабілізації струму розжарювання електронних ламп при зміні напруги живлення.

Приклад маркіровки цього пристрою – 0,3 Б 17-35:

0,3 – струм (А), який баретер здатний підтримувати постійним;

17-35 – ділянка зміни напруги (В) на ділянці баретування.

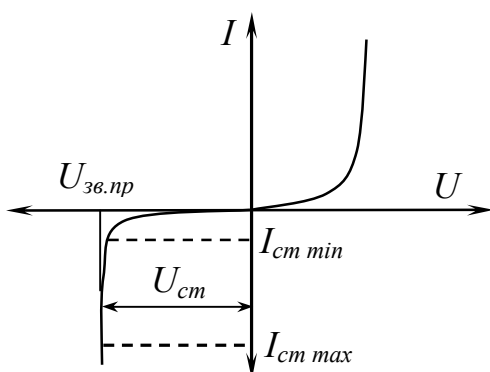


Рисунок 6.28 – ВАХ стабілітрону

2. *Стабілізатор напруги* (стабілітрон) – пристрій, напруга на виході якого підтримується постійною при зміні опору навантаження R_H або величини напруги на вході пристрою.

Коли зворотна напруга U_{36} (ВАХ пристрою зображена на рисунку 6.28) на стабілітроні досягає величини напруги пробою $U_{зв.пр.}$

у пристрої відбувається лавинний пробій електронно-діркового р-п переходу. При цьому зворотний струм різко зростає при майже незмінній зворотній напрузі. Зворотний струм не повинен перевищувати струм $I_{cm\max}$, щоб стан електричного пробою не приводив до виходу з ладу пристрою.

Параметри стабілітрона:

– U_{cm} – напруга стабілізації;

– $I_{cm\min}$ – мінімальний струм, за якого пристрій гарантовано знаходиться в режимі стабілізації;

– $I_{cm\max}$ – максимально допустимий струм через прилад.

3. Підсилювач постійного струму – пристрій, величина приросту напруги на виході якого значно більше величини приросту напруги на вході. До складу підсилювача входять так звані активні (нелінійні) елементи – біполярні і польові транзистори.

6.11 Нелінійні електричні кола змінного струму.

Властивості нелінійних елементів при змінному струмі:

– при переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статистичні й диференційні опори не залишаються постійними та загалом не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ;

– нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (тобто нелінійний елемент має вентильні властивості);

Нелінійні елементи бувають інерційними та безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це *інерційний* нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори). Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність $i(u)$ лінійна, а нелінійність характеристик $I(U)$ деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору

внаслідок нагрівання їх струмом (рис. 6.29).

У разі, коли обидві залежності $i(u)$ і $I(U)$ нелінійні – то це безінерційний елемент. *Безінерційний НЕ* має

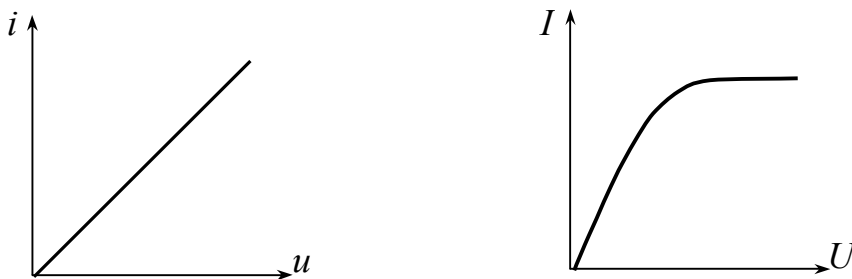


Рисунок 6.29 – ВАХ інерційних НЕ

здатність перетворювати спектр коливань, що впливають на нього. Тобто, якщо до

НЕ підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки – при проходженні через НЕ синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

6.12 Апроксимація нелінійних характеристик

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дає змогу досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійні елементи не є абсолютно стабільними та залежать від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик.

Розглянемо три способи апроксимації:

1. Апроксимація ступеневим поліномом.

Якщо функція $i(u)$ безперервна і має похідні $i'(u_0)$, $i''(u_0)$ тощо, де u_0 – значення функції $u(t)$ при $t = 0$, то вона може бути подана рядом Тейлора:

$$i(u) = i(u_0) + \frac{u-u_0}{1!} \cdot i'(u_0) + \frac{(u-u_0)^2}{2!} \cdot i''(u_0) + \frac{(u-u_0)^3}{3!} \cdot i'''(u_0) + \dots = a_0 + a_1 \cdot (u-u_0) + \quad (6.11)$$

$$+ a_2 \cdot (u-u_0)^2 + a_3 \cdot (u-u_0)^3 + \dots, \text{ де } a_0 = i(u_0); a_1 = \frac{i'(u_0)}{1!}, a_2 = \frac{i''(u_0)}{2!} \text{ і т.д.}$$

Якщо $u_0 = 0$, то функція $i(u)$ відповідає ряду Маклорена:

$$i(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + a_4 \cdot u^4 + \dots \quad (6.12)$$

Розглянемо приклад.

На вхід кола, що містить тільки один нелінійний елемент, подана синусоїдна напруга $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$. ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді

аналітичної функції:
$$i = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{3/2}.$$

Потрібно знайти закон зміни струму в колі.

Оскільки $u_0 = 0$, скористаємося рядом Маклорена:

$$i(u) = \left[i(0) + i'(0) \cdot u + \frac{i''(0)}{2!} \cdot u^2 + \frac{i'''(0)}{3!} \cdot u^3 + \dots \right]. \text{ Обмежимося трьома членами ряду.}$$

$$i(0) = 1; \quad i'(u) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{a}; \quad i'(0) = \frac{3}{2 \cdot a}; \quad i''(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{a};$$

$$i''(0) = \frac{3}{4 \cdot a^2}. \text{ Отже,}$$

$$i(u) = 1 + \frac{3}{2 \cdot a} \cdot u + \frac{3}{4 \cdot a^2 \cdot 2!} \cdot u^2 = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega \cdot t + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin^2 \omega t.$$

Скористаємося тригонометричним співвідношенням $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t)$

і отримаємо:

$$\begin{aligned} i(t) &= 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega t + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) \right) - \dots = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega t + \\ &+ \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2} - \overbrace{\frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2}}^{I_m^{(2)}} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) - \dots = \overbrace{\left(1 + \frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \right)}^{I^{(0)}} + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{i^{(1)}} - \\ &- \overbrace{\frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin \left(2 \omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right)}^{i^{(2)}} - \dots, \text{ А.} \end{aligned}$$

2. Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат.

Цим методом користуються, якщо ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді графіка. За допомогою ВАХ нелінійного елемента $i(u)$ і графіка прикладеної напруги $u(\omega t)$ будемо графік $i(\omega t)$, який є функцією часу (рис. 6.30). Побудований графік $i(\omega t)$ симетричний щодо осі абсцис, тому при розкладанні такої кривої у ряд Фур'є буде присутня нульова гармоніка і косинусні складові гармонік: $i(\omega t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \cdot \cos \omega t + I_m^{(2)} \cdot \cos 2 \cdot \omega t + \dots$ (6.13)

Невідомі величини $I^{(0)}$; $I_m^{(1)}$; $I_m^{(2)}$ знаходять за трьома ординатами характеристики $i(\omega t)$, які відповідають фазам прикладеної напруги (див. рис. 6.30).

$$\omega t = 0; \quad \omega t = \pi/2; \quad \omega t = \pi.$$

$$\text{Отже, якщо } \omega t = 0, \text{ то } i_1 = I^{(0)} + I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (6.14)$$

$$\text{якщо } \omega t = \frac{\pi}{2}, \text{ то } i_2 = I^{(0)} - I_m^{(2)}; \quad (6.15)$$

$$\text{якщо } \omega t = \pi, \text{ то } i_3 = I^{(0)} - I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (6.16)$$

де i_1 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «1»,

i_2 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «2»,

i_3 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «3».

Розв'язуючи спільно рівняння (6.14), (6.15) і (6.16) знаходимо $I^{(0)}$; $I_m^{(1)}$; $I_m^{(2)}$:

$$I^{(0)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot [i_1 - i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] - \frac{1}{2} \cdot i_2 \quad (6.17)$$

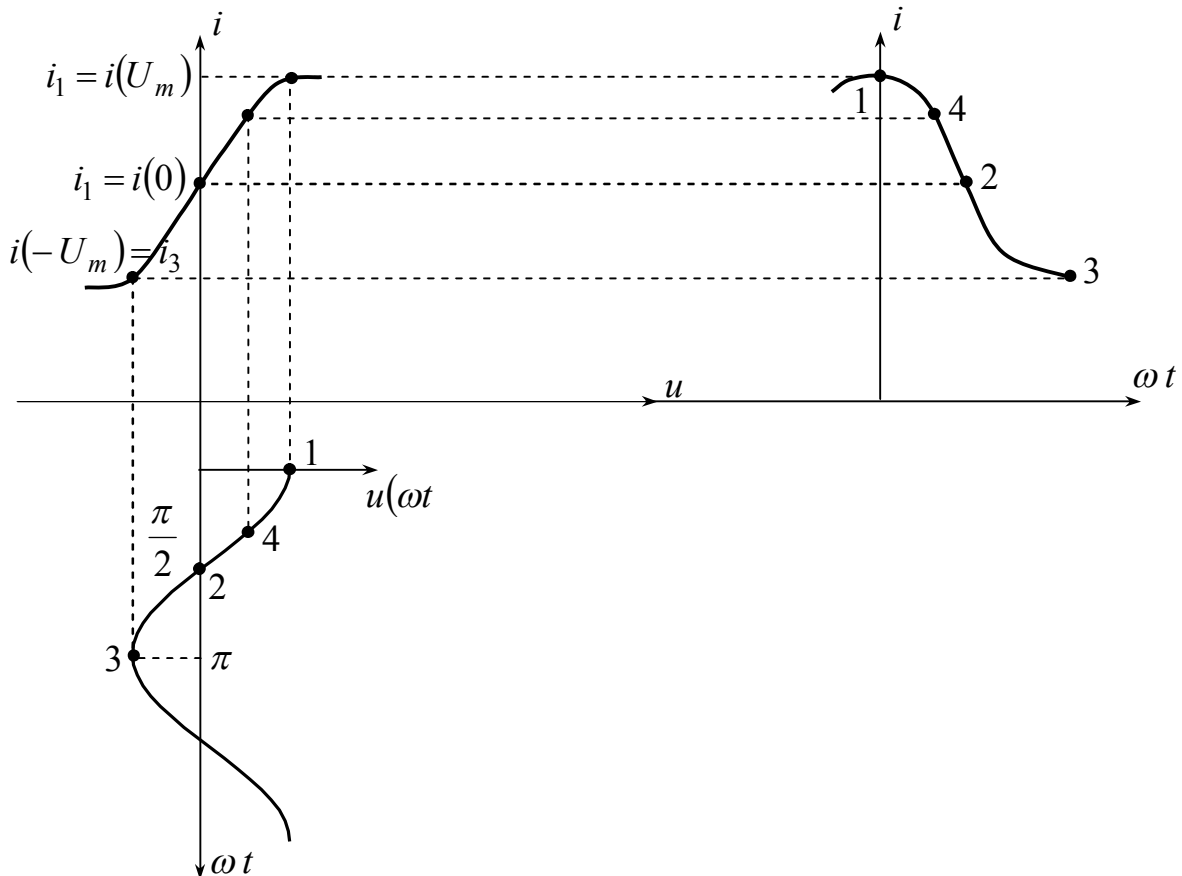


Рисунок 6.30 – Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат

3. Кусково-лінійна апроксимація.

Метод полягає у заміні заданої нелінійної характеристики ломаною прямою, яка має одну або декілька точок зламу. Така заміна дає змогу проводити розрахунок аналітично за допомогою лінійних рівнянь.

Якщо нелінійність характеристики незначна та задана ділянка роботи нелінійного опору, то така характеристика може бути замінена прямою без злому, а нелінійний елемент – джерелом постійної ЕРС і лінійним опором, рівним диференційному опору нелінійного елемента.

Розглянемо приклад.

Схему електричного кола показана на рисунку 6.31, ВАХ нелінійного елемента – на рисунку 6.32. Діапазон роботи нелінійного елемента за струмом такий: $a < i(u) < b$. До входу кола прикладена синусоїдна напруга $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t$.

Проведемо заміну нелінійного елемента джерелом постійної ЕРС E і лінійним

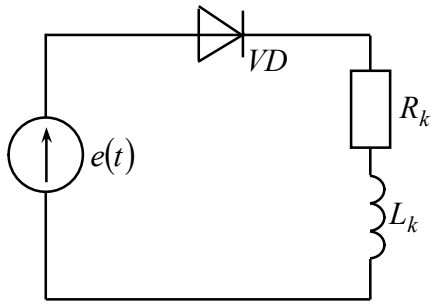


Рисунок 6.31 –
Схема кола

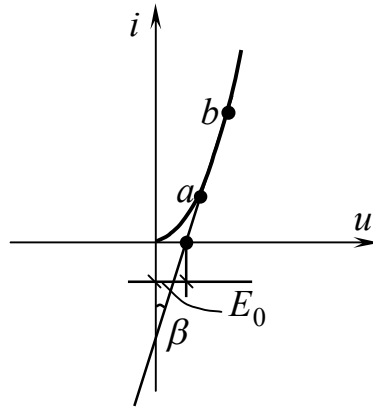


Рисунок 6.32 – ВАХ діоду

опором R_D , що дорівнює

$$R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta;$$

$$m_R = \frac{m_U}{m_I} \quad (\text{рис. 6.32}).$$

Складаємо схему заміщення яка наведена на рисунку 6.33.

За методом накладання визначаємо струми у схемі від дії

кожного джерела ЕРС. Потім підсумовуємо у вигляді функцій струми, знайдені на кожному етапі методу накладання і знаходимо несинусоїдний закон (ряд Фур'є) для струму.

$$\text{Від дії ЕРС } E^{(0)} \text{ струм дорівнює: } I' = I^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R_D + R_k}.$$

Від дії ЕРС $e(t)$ комплексна амплітуда струму дорівнює:

$$\underline{I}_m'' = \frac{E_m}{\sqrt{(R_D + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot e^{-j\varphi},$$

де $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{X_k}{R_D + R_k} \right)$ – кут зсуву фаз між ЕРС

та струмом $i''(t)$;

$X_k = \omega \cdot L_k$ – реактивний опір котушки;

R_k, L_k – активний опір та індуктивність котушки відповідно.

Потрібно врахувати, що струм $i''(t)$ відстає від напруги $e(t)$, а струм $I^{(0)}$ не співпадає зі струмом $i(t)$ за напрямком.

Записуємо ряд Фур'є для струму:

$$i(t) = -I^{(0)} + i''(t) = -\frac{E^{(0)}}{R_D + R_k} + \frac{E_m}{\sqrt{(R_D + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot \sin \left(\omega \cdot t - \operatorname{arctg} \frac{X_k}{R_D + R_k} \right).$$

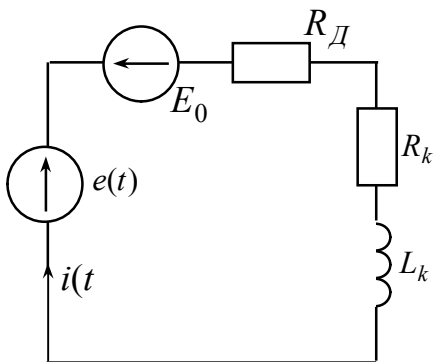


Рисунок 6.33 –
Схема заміщення

Контрольні питання до розділу

1. Наведіть основні властивості нелінійних електричних кіл постійного струму.
2. Поясніть застосування графоаналітичного методу розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму: при послідовному, при паралельному і змішаному з'єднанні елементів.
3. Поясніть порядок розрахунку нелінійного кола постійного струму з двома вузлами.
4. Дайте визначення статичного й диференційного опорів HE .
5. Поясніть, як проводять заміну HE лінійним опором і EPC .
6. Наведіть приклади практичного застосування HE постійного струму в електротехніці.
7. Наведіть деякі загальні властивості HE при змінному струмі.
8. Поясніть, як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ графоаналітичним методом трьох ординат при розрахунку нелінійних кіл змінного струму.
9. Поясніть, як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ ступеневим поліномом.
10. Поясніть, як здійснюють кусково-лінійну апроксимацію нелінійної ВАХ.

РОЗДІЛ 7 МАГНІТНІ КОЛА: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ, ЗАКОНИ

7.1. Основні поняття і закони магнітних кіл

Основними величинами, що характеризують магнітне поле, є:

– магнітна індукція \vec{B} ($T_n = (B \cdot c)/m^2 = B\text{б}/m^2$) – векторна величина, яка визначається за силовою дією магнітного поля на струм;

– намагніченість магнітного поля \vec{J} – магнітний момент одиниці об'єму речовини (А/м);

– напруженість магнітного поля H (А/м).

Зв'язок між \vec{B} , \vec{H} , \vec{J} :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad (7.1)$$

де μ_0 – стала, що характеризує магнітні властивості вакууму (Гн/м),

μ – відносна магнітна проникність,

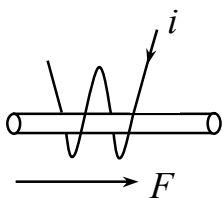
$\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ – абсолютна магнітна проникність (Гн/м).

– магнітний потік Φ ($B\text{б} = B \cdot c$), який є потоком вектора магнітної індукції крізь поверхню: $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, (7.2)

де dS – елемент поверхні S .

Магнітне коло – сукупність магніторушійних сил (*МРС*), феромагнітних тіл або будь-яких інших тіл або середовищ, за якими замикається магнітний потік.

Магніторушійна сила (далі – *МРС*) викликає магнітний потік у магнітному колі подібно до того, як *ЕРС* викликає струм в електричному колі:



$$F = I \cdot w, \quad (7.3)$$

де w – кількість витків котушки;

I – струм, що протікає по котушці.

Рисунок 7.1 – Визначення напрямку F

МРС є величиною спрямованою. Додатний напрямок *МРС* визначається за таким мнемонічним

правилом – якщо осердя охопити правою рукою, розташувавши пальці за струмом в обмотці, то відігнутий великий палець вкаже на напрямок *МРС* F (рис. 7.1).

Якщо значення вектора магнітної індукції \vec{B} є однаковим для всіх точок поперечного перетину S ділянки магнітного кола з номером k , а сам вектор \vec{B} перпендикулярний до цього перетину, то $\Phi_k = B_k \cdot S_k$.

Закон повного струму – циркуляція вектора напруженості H магнітного поля за замкнутим контуром дорівнює алгебраїчній сумі струмів ($\sum I$), охоп-

$$\oint H dl = \sum I, \quad (7.4)$$

Якщо контур інтегрування охоплює w витків котушки із струмом I , то

$$I \cdot w = F = \oint H dl. \quad (7.5)$$

Контур інтегрування зазвичай на практиці вибирають так, щоб він співпадав з лінією вектора \vec{H} , тоді інтеграл заміняють сумою добутків $H_k \cdot l_k$, (індекс k – номер ділянки, уздовж якої величини H і μ приймаються незмінними). У цьому випадку одержуємо *другий закон Кірхгофа* для магнітного кола: у будь-якому замкнутому магнітному колі алгебраїчна сума *MPC* дорівнює алгебраїчній сумі магнітних падінь на окремих ділянках:

$$F = \sum_{k=1}^n H_k l_k = U_{M1} + U_{M2} + \dots = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots \quad (7.6)$$

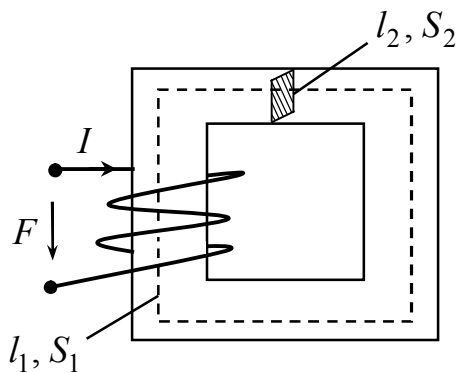


Рисунок 7.2 –
Нерозгалужене
магнітне коло

Розглянемо закон повного струму для нерозгалуженого кола (рис. 7.2):

$$\sum F = (H_1 l_1 + H_2 l_2) \cdot 2 = I \cdot w. \quad (7.7)$$

Напруженість та індукція на першій ділянці:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_a}. \quad (7.8)$$

Напруженість і індукція на другій ділянці:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_a}. \quad (7.9)$$

$$\text{Отже, } F = \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_1}{S_1 \cdot \mu_a}}_{R_{M1}} + \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_2}{S_2 \cdot \mu_a}}_{R_{M2}}, \quad (7.10)$$

де R_{M1} і R_{M2} – магнітні опори першої та другої ділянок.

$$\text{Отже, } F = \Phi \cdot R_{M1} + \Phi \cdot R_{M2} = U_{M1} + U_{M2}. \quad (7.11)$$

Визначимо з формули (7.11) магнітний потік і отримаємо *закон Ома* для магнітного кола (зв'язок між магнітною напругою та магнітним потоком):

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}}. \quad (7.12)$$

Перший закон Кірхгофа для магнітного кола: в будь-якому магнітному

$$\text{вузлі алгебраїчна сума магнітних потоків дорівнює нулю: } \sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (7.13)$$

7.2 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

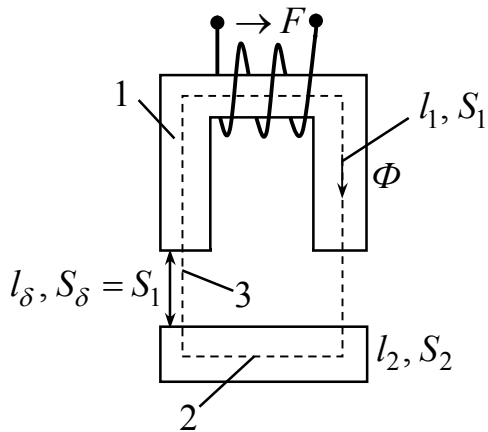


Рисунок 7.3 –
Нерозгалужене
магнітне коло

Для розрахунку мають бути відомими конфігурація і геометричні розміри магнітного кола (рис. 7.3), крива намагнічування феромагнітного матеріалу, а також магнітний потік Φ (або індукція B). На всіх ділянках – той самий магнітний потік Φ .

Розглянемо дві задачі.

1. *Пряма задача* – заданий магнітний потік Φ . Необхідно визначити МРС F .

Розбиваємо магнітне коло на ділянки з постійним перетином і визначаємо довжини за середньою силовою лінією (l_k) і площі

поперечного перетину (S) цих ділянок. Далі знаходимо:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{\Phi}{S_1} = B_1. \quad (7.14)$$

За кривими намагнічування знаходимо значення напруженості для ділянок магнітного кола ($B_1 \rightarrow H_1; B_2 \rightarrow H_2$).

Напруженість магнітного поля повітряного зазору:

$$H_\delta = \frac{B_1}{\mu_0} \quad (\mu = 1). \quad (7.15)$$

$$\text{Тоді за другим законом Кірхгофа: } F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta. \quad (7.16)$$

2. *Зворотна задача* – задані геометричні розміри магнітного кола, криві намагнічування і МРС $F = I \cdot w$. Необхідно визначити магнітний потік та індукцію.

Розглянемо два способи розв'язання.

2.1. Довільно задаємося значенням магнітної індукції в повітряному зазорі B_δ , рівними 0,5; 1,1; 1,2; 1,3 Тл. Для кожного з цих значень підраховуємо значення $\sum H_K \cdot l_K$ (як для прямої задачі):

$$B_\delta = B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \Rightarrow \Phi = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_2 = \frac{\Phi}{S_2}. \quad (7.17)$$

Далі за кривими намагнічування і значенням B_1 і B_2 визначаємо H_1 і H_2 .

Отже, враховуючи, що $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$, за другим законом Кірхгофа значення МРС для

кожної довільно заданої B_δ : $F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta$.

Будуємо залежність $\Phi = f(F = \sum H_K l_K)$ та за заданим значенням F знаходимо потік Φ (рис. 7.4). Розрахунок зручно вести за допомогою таблиці.

Таблиця 7.1 – Для розрахунку зворотної задачі

$B_\delta, \text{Тл}$	Значення магнітної індукції				
	0,5	1,1	1,2	1,3	1,4
$B_1 = B_\delta, \text{Тл}$					
$\Phi = B_1 S_1, \text{Вб}$					
$B_2 = \frac{\Phi}{S_2}, \text{Тл}$					
$H_1, \frac{\text{А}}{\text{м}}$					
$H_2, \frac{\text{А}}{\text{м}}$					
$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}, \frac{\text{А}}{\text{м}}$					
$\sum H_K \cdot l_K, \text{А}$					

2.2. Для того самого магнітного кола (рис. 7.3) складаємо схему заміщення (рисунок 7.5).

За характеристиками $B(H)$, наведеними у довідниках, будуємо нелінійні характеристики $\Phi(F)$ для кожної ділянки магнітного кола, тобто помножуємо значення абсциси (H) і ординати (B) кривих намагнічування відповідно на довжину (l) і площу поперечного перетину (S) ділянки:
$$\begin{cases} B_1 \cdot S_1 = \Phi_1, & H_1 \cdot l_1 = F_1, \\ B_2 \cdot S_2 = \Phi_2, & H_2 \cdot l_2 = F_2. \end{cases}$$

Потім будуємо лінійну характеристику $\Phi(F)$ для повітряного зазору, напруженість магнітного поля якого $H = \frac{B}{\mu_0} \approx 0,8 \cdot 10^{-6} \cdot B$; підсумовуємо за віссю магнітного потоку Φ усі три характеристики і за значенням F знаходимо потік Φ (рис. 7.6).

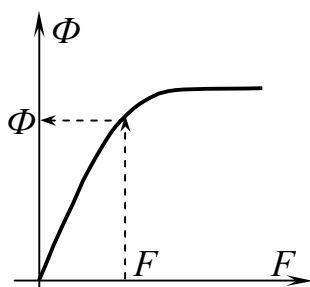


Рисунок 7.4 – Залежність $\Phi(F)$

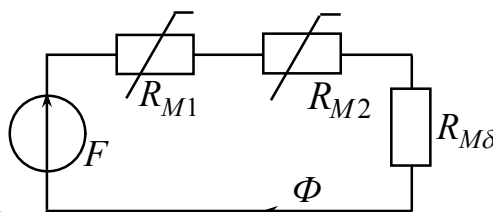


Рисунок 7.5 – Схема заміщення

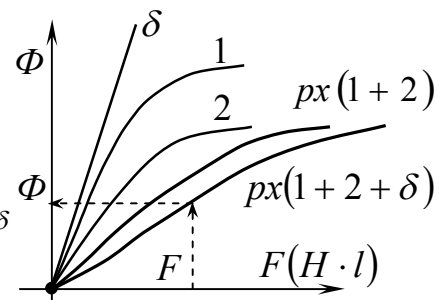


Рисунок 7.6 – Побудова $px(1+2+\delta)$ для схеми заміщення

7.3 Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму

У розгалуженому магнітному колі існує декілька магнітних потоків, які додаються і віднімаються на певних ділянках. Для розрахунку таких кіл застосовують усі методи, які розглядалися раніше. Розглянемо пряму і зворотну задачі для магнітного кола на рисунку 7.7.

1. *Пряма задача* – заданий магнітний потік на одній із ділянок кола, припустимо Φ_3 (ділянка з перетином S_3). Необхідно визначити F, Φ_1, Φ_2 . За допомогою формули

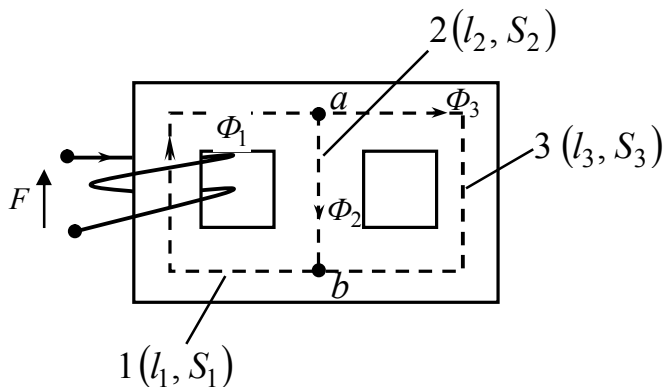


Рисунок 7.7 – Розгалужене магнітне коло

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$$

визначаємо значення напруженості на третій ділянці H_3 . Тоді магнітна напруга між точками «а» і «в»:
 $U_{mab} = H_3 \cdot l_3 = H_2 \cdot l_2$. Далі визначаємо за кривою намагнічування напруженість на другій ділянці:

$$H_2 = \frac{U_{mab}}{l_2}, \text{ а отже, і значення}$$

індукції B_2 і магнітного потоку на цій ділянці: $\Phi_2 = B_2 \cdot S_2$.

Потік на першій ділянці за першим законом Кірхгофа – $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$. Для визначення МРС F достатньо розглянути будь-який замкнутий контур, в який входить перша ділянка. Якщо $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$, то за кривою намагнічування визначаємо

мо H_1 , а після за другим законом Кірхгофа – значення МРС: $F = H_1 \cdot l_1 + U_{mab}$.

2. Розглянемо *зворотну задачу*, коли задано значення F і необхідно /визначити Φ . Розглянемо два способи розв'язання.

2.1. Довільно задаємося значеннями Φ_3 на ділянці кола і знаходимо відповідні значення F за методикою прямої задачі (7 – 8 значень). За отриманими даними будуюмо графік $\Phi(F)$ та за заданим значенням F знаходимо значення Φ .

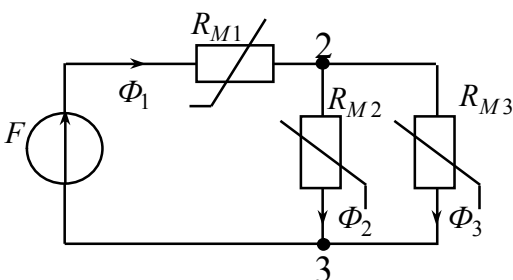


Рисунок 7.8 –
Схема заміщення

2.2. Складаємо схему заміщення (рис. 7.8). Для цієї схеми будуюмо результуючу характеристику, а саме:

– спочатку переходимо від характеристик $B(H)$ для окремих ділянок магнітного кола до характеристик $\Phi(F)$;

– складаємо нелінійні характеристики ділянок «2» і «3» за віссю F і отримуємо результуючу характеристику для паралельних віток ($\Phi_{23}(F_{23})$);

– остаточно за віссю Φ додаємо характеристику $\Phi_1(F_1)$ до результуючої характеристики $\Phi_{23}(F_{ab})$ та отримуємо характеристику $\Phi(F)$. Отримана характеристика дає змогу за заданим значенням F знаходити значення потоку Φ .

Примітка. індекси потоків Φ та $MPC F$ означають номери ділянок із відповідним магнітним опором.

Контрольні питання до розділу

1. Наведіть основні поняття магнітних кіл (B , F , H , Φ) та охарактеризуйте зв'язок між ними.
2. Наведіть основні закони магнітних кіл: закони повного струму, закони Ома та Кірхгофа.
3. Наведіть формальну аналогію між магнітними й електричними колами.
4. Поясніть порядок розрахунку нерозгалуженого магнітного кола при постійному струмі: пряма задача.
5. Поясніть порядок розрахунку нерозгалуженого магнітного кола при постійному струмі: зворотна задача.
6. Поясніть порядок розрахунку розгалуженого магнітного кола при постійному струмі: пряма задача.
7. Поясніть порядок розрахунку розгалуженого магнітного кола при постійному струмі: зворотна задача.

РОЗДІЛ 8 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1 Основні визначення

Електричними колами (лініями) з розподіленими параметрами називають такі кола, у яких струм і напруга безперервно змінюються при переході від однієї точки (перетину) лінії до іншої, сусідньої точки.

Коли говорять про лінії з розподіленими параметрами, то зазвичай цей термін зв'язують з потужними лініями передачі електричної енергії на великі відстані, з телефонними й телеграфними повітряними та кабельними лініями, із рейковими лініями автоблокування на залізничному транспорті, з антенами в радіотехніці і тощо. Але і звичайна індуктивна котушка практично становить лінію з розподіленими параметрами на частотах порядку декількох мегагерц. Між кожними двома сусідніми витками котушки є ємність. Крім того, між кожним витком і корпусом приладу (землею) є ємність. Якщо по котушці протікає змінний струм, то через ємність між витками та ємність на землю також потече струм. Струм через ємності прямо пропорційний частоті змінного струму. При низькій частоті струм ємності несумірний порівняно зі струмами через витки котушки.

У лініях електропередачі невеликої довжини при частоті 50 Гц і напругах до 35 кВ можна знехтувати струмами, обумовленими ємністю між проводами (струмами зсуву) і провідністю ізоляції (струмами витоку через гірлянди ізоляторів і струмами, обумовленими коронними електричними розрядами поблизу поверхні проводів). При великих напругах, що зустрічаються в електроенергетиці, і при великих частотах, з якими має справу електрозв'язок, а також при значній довжині ліній зневажати струмами зсуву і витоку не можна. Отже, струм у проводах не однаковий у різних перетинах лінії.

Струм у проводах лінії спричиняє падіння напруги в активному опорі проводів і створює змінне магнітне поле, що наводить уздовж усієї лінії *ЕРС* самоіндукції. Тому напруга між проводами також не залишається постійною вздовж лінії. Щоб врахувати зміну струму і напруги вздовж лінії, вважають, що кожен який завгодно малий елемент лінії має опір і індуктивність, а між проводами – провідність і ємність, тобто розглядають лінію як коло з розподіленими параметрами.

Будемо вважати, що опір, індуктивність, провідність і ємність рівномірно розподілені вздовж лінії, що є деякою ідеалізацією дійсних умов. Таку лінію умовимося називати однорідною.

8.2 Диференціальні рівняння однорідної двохпроводної лінії

Складемо диференціальні рівняння, яким задовольняють напруги і струми в будь-якому перетині двохпроводної лінії.

Умовимося називати верхній провід двохпроводної лінії прямим, а нижній провід – зворотним. Виберемо додатні напрямки струму і напруги.

Первинними параметрами однорідної лінії є:

R_0 – активний опір одиниці довжини прямого і зворотного проводів;

L_0 – індуктивність одиниці довжини петлі, утвореної прямим і зворотним проводом;

G_0 – провідність (витік) на одиницю довжини між проводами;

C_0 – ємність на одиницю довжини між проводами.

Розіб'ємо лінію (рис. 8.1) на ділянки завдовжки dx , де x – відстань від початку лінії. На довжині dx активний опір дорівнює $R_0 dx$, індуктивність – $L_0 dx$, провідність витіку – $G_0 dx$ і ємність – $C_0 dx$. Позначимо струм на початку виділеної ділянки лінії через i , а напругу між проводами на початку ділянки через u . Опір $R_0 dx$ і індуктивність $L_0 dx$ будемо вважати включеними в один провід. Струм і напруга є загалом функціями відстані вздовж лінії x і часу t . Тому в рівняннях використані частинні похідні від u і від i за часом t і за відстанню x .

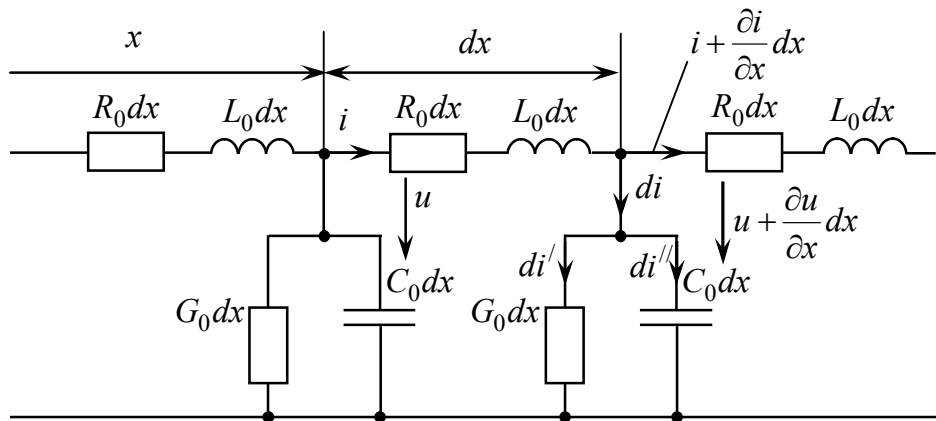


Рисунок 8.1 – Схема ділянки лінії з розподіленими параметрами

Позначимо для деякого моменту t струм на початку ділянки i , а наприкінці ділянки струм для того самого моменту часу позначимо $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, де $\frac{\partial i}{\partial x}$ – швидкість зміни струму в напрямку x ; $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ – збільшення струму на шляху dx .

Аналогічно, позначимо напругу на початку ділянки u , а наприкінці ділянки для того самого моменту часу – $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Складемо:

– рівняння за другим законом Кірхгофа для замкнутого контуру, утвореного ділянкою лінії завдовжки dx , обійшовши його за годинниковою стрілкою;

– рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла 2 (рис. 8.1) з урахуванням

напруги $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ наприкінці ділянки:

$$u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = R_0 \cdot dx i + L_0 \cdot dx \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (8.1)$$

$$i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \cdot G_0 \cdot dx + C_0 \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} \cdot (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx).$$

Приводячи подібні члени, зневажаючи величинами другого порядку малості й скорочуючи на dx , одержуємо диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (8.2)$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь у частинних похідних при визначених початкових і граничних умовах дає можливість визначити струм і напругу як функції відстані від початку лінії та часу. Ці рівняння справедливі при будь-яких змінах струму і напруги у часі.

8.3 Рівняння однорідної лінії при усталеному синусоїдному процесі

Розглянемо усталений режим в однорідній лінії при синусоїдному джерелі живлення. Рівняння (8.2) для стаціонарного гармонічного струму можна записати в комплексній формі:

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = (R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot \underline{I} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}; \\ -\frac{dI}{dx} = (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0) \cdot \underline{U} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}, \end{cases} \quad (8.3)$$

де $\underline{Z}_0 = R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0$ – комплексний опір одиниці довжини лінії (погонний опір);

$\underline{Y}_0 = G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0$ – комплексна провідність одиниці довжини лінії (погонна провідність).

Диференціюємо рівняння (8.3) за змінною x :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \frac{dI}{dx}; \\ -\frac{d^2 I}{dx^2} = \underline{Y}_0 \cdot \frac{dU}{dx}. \end{cases} \quad (8.4)$$

Замість $\frac{dI}{dx}$ і $\frac{dU}{dx}$ у правій частині підставимо їх значення з рівнянь (8.3):

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0 \cdot U; \\ \frac{d^2 I}{dx^2} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{Z}_0 \cdot I. \end{cases} \quad (8.5)$$

Ці рівняння, що визначають зміни комплексних напруг і струмів уздовж лінії, мають однаковий вигляд. Тому достатньо знайти, наприклад, закон зміни напруги \underline{U} , а струм одержати з рівнянь (8.3).

Розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку для комплексної напруги \underline{U} має вигляд:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot x}, \quad (8.6)$$

де \underline{A}_1 , \underline{A}_2 – комплексні сталі інтегрування;

$\underline{\gamma}$ – комплексна величина, яка називається *коефіцієнтом поширення лінії*:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \alpha + j \cdot \beta; \quad (8.7)$$

де α – коефіцієнт загасання;

β – коефіцієнт фази.

Струм відповідно до рівняння (8.3)

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{dU}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} \cdot (\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}) = \frac{\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}}{\sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}}. \quad (8.8)$$

Знаменник, що має розмірність опору, називається хвильовим опором лінії та означається $\underline{Z}_{x\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$. Розглядаючи однорідну лінію як чотиріполюсник, легко показати, що хвильовий опір лінії збігається з характеристичним опором чотиріполюсника. Тому надалі хвильовий опір будемо позначати \underline{Z}_c .

$$\underline{Z}_{x\theta} = \underline{Z}_c = Z_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \cdot e^{j\theta}, \quad (8.9)$$

$$\text{де } \theta = \frac{1}{2} \cdot \arctg \frac{\omega \cdot (G_0 \cdot L_0 - R_0 \cdot C_0)}{R_0 \cdot G_0 + \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0} \text{ – аргумент хвильового опору.} \quad (8.10)$$

Хвильовий опір $\underline{Z}_{x\theta}$ і коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ називаються вторинними параметрами однорідної лінії.

Підставивши \underline{Z}_c у рівняння для струму (8.8), запишемо:

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot x}; \quad (8.11)$$

$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j \cdot \psi_1}$ і $\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j \cdot \psi_2}$, тому миттєві значення напруги та струму:

$$u = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \psi_1) + \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot x + \psi_2); \quad (8.12)$$

$$i = \frac{\sqrt{2} \cdot A_1}{Z_c} \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \psi_1 - \theta) - \frac{\sqrt{2} \cdot A_2}{Z_c} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot x + \psi_2 - \theta). \quad (8.13)$$

Кожне з доданків правої частини двох останніх рівнянь можна розглядати як хвилю, що *біжить* у напрямку зростання або убування координати x і загасаючу в напрямку руху.

Основними характеристиками хвилі, що біжить, є фазова швидкість і довжина хвилі.

Фазовою швидкістю хвилі c називається швидкість переміщення фази коливання, що у перебігу часу t і зі збільшенням відстані x , пройденого хвилею, залишається постійною, тобто

$$\omega \cdot t - \beta \cdot x + \psi_1 = const, \text{ звідки } \frac{d}{dt}(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \psi_1) = 0, \quad \omega - \beta \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{і}$$

$$\frac{dx}{dt} = c = \omega / \beta. \quad (8.14)$$

Для правого доданка рівняння (8.12) значення фазової швидкості таке саме, але зі зворотним знаком. Отже, ці доданки можуть розглядатися як хвилі, що рухаються в протилежних напрямках.

Довжиною хвилі λ називається відстань між найближчими двома точками, узятя в напрямку поширення хвилі, фази коливання, в яких відрізняються на 2π . Отже, для першого доданка одержимо

$$\omega \cdot t - \beta \cdot (x + \lambda) + \psi_1 = \omega \cdot t - \beta \cdot x + \psi_1 - 2 \cdot \pi,$$

$$\text{звідки } \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \text{і} \quad c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}, \quad (8.15)$$

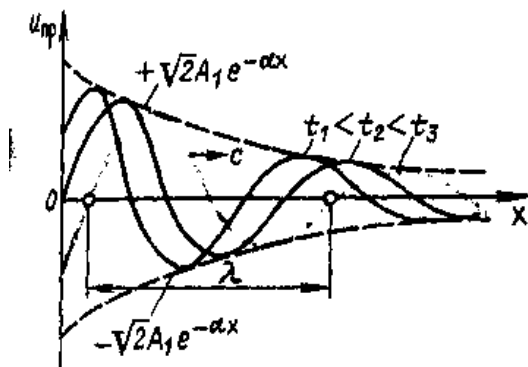


Рисунок 8.2 – Загасаюча пряма хвиля

тобто за період T хвиля пробігає відстань, що дорівнює довжині хвилі.

Умовимося хвилю, що рухається від початку лінії, називати прямою, а що рухається від кінця лінії – зворотною.

Загасаюча пряма хвиля надана на рисунку 8.2.

Виберемо додатні напрямки напруг і струмів окремих хвиль від прямого проводу до зворотного.

З (8.12) і (8.13) випливає, що напруга \underline{U} є сума напруг прямої та зворотної хвиль, а струм \underline{I} – різниця струмів прямої та зворотної хвиль, тоді

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} + \underline{U}_{звор}; \quad \underline{I} = \underline{I}_{np} - \underline{I}_{звор}, \quad (8.16)$$

$$\text{де } \underline{U}_{np} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x}; \quad \underline{U}_{звор} = \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{I}_{np} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma \cdot x}; \quad \underline{I}_{звор} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x}. \quad (8.17)$$

Струми та напруги як прямої, так і зворотної хвилі зв'язані між собою

$$\text{законом Ома: } \underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_c}; \quad \underline{I}_{звор} = \frac{\underline{U}_{звор}}{\underline{Z}_c}. \quad (8.18)$$

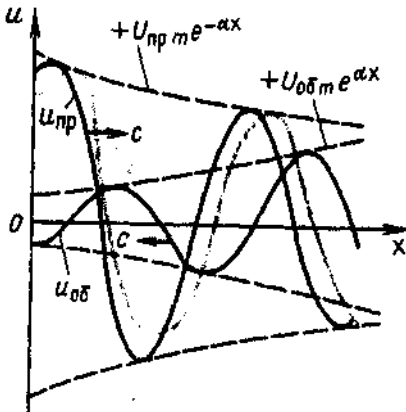


Рисунок 8.3 –
Хвилеподібний характер
миттєвих значень
напруг і струмів

Варто мати на увазі, що фізично існують тільки результуючі струм \underline{I} і напруга \underline{U} , а розкладання їх на прямі та зворотні хвилі є тільки зручним прийомом.

Криві розподілу миттєвих значень напруг і струмів також відрізняються хвилеподібністю (рис. 8.3).

Одержимо вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії через напругу і струм на початку лінії.

Перепишемо рівняння (8.6) і (8.8):

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad (8.19)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}}{\underline{Z}_c}. \quad (8.20)$$

Припускаючи, що на початку лінії ($x = 0$) напруга $\underline{U} = \underline{U}_1$ і струм $\underline{I} = \underline{I}_1$, із рівнянь (8.20) знайдемо сталі інтегрування \underline{A}_1 і \underline{A}_2 .

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_1 = \underline{A}_1 - \underline{A}_2; \quad (8.21)$$

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c); \quad (8.22)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c).$$

З урахуванням (8.22) рівняння (8.6) і (8.8) для струмів і напруг у будь-якій точці лінії ($x \neq 0$) можна записати так:

$$\underline{U} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma \cdot x};$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot x}. \quad (8.23)$$

У подібний спосіб одержимо вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії через напругу і струм наприкінці лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma \cdot x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot x}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

8.4 Характеристики однорідної лінії

До характеристик однорідної лінії належать коефіцієнт поширення γ , коефіцієнт згасання α , коефіцієнт фази β , хвильовий опір \underline{Z}_c , фазова швидкість хвилі c .

Коефіцієнт γ характеризує зміну прямої та відбитої хвиль у лінії за амплітудою і фазою.

Коефіцієнт α характеризує зміну амплітуди хвилі, його визначають у децибелах (або неперах) на одиницю довжини.

Коефіцієнт β характеризує зміну фази, його визначають у радіанах на одиницю довжини.

Спадання амплітуди хвилі вздовж лінії обумовлюється наявністю втрат у лінії, а зміна фази – кінцевою швидкістю поширення хвиль.

З рівняння (8.7) можна одержати такі формули для визначення α і β :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (Z_0 \cdot Y_0 + R_0 \cdot G_0 - \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0)}; \quad (8.25)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (Z_0 \cdot Y_0 - R_0 \cdot G_0 + \omega^2 \cdot L_0 \cdot C_0)}. \quad (8.26)$$

Для лінії постійного струму ($\omega = 0$) $\alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0}$, $\beta = 0$, а для лінії без втрат ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) або лінії, що працює на високих частотах ($\omega \rightarrow \infty$) $\alpha = 0$, $\beta = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}$.

З (8.18) випливає, що опір \underline{Z}_c зв'язує струми прямої та зворотної хвиль із відповідними напругами:

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{I}_{np}}; \quad \underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_{звор}}{\underline{I}_{звор}}. \quad (8.27)$$

У будь-якій точці лінії відношення напруги до струму прямої або зворотної хвилі становить *хвильовий опір \underline{Z}_c* . Хвильовий опір лінії з втратами:

$$\underline{Z}_c = Z_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \cdot e^{j\theta} \quad (8.28)$$

Для лінії постійного струму ($\omega = 0$) $Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$, а при дуже високих частотах ($\omega \rightarrow \infty$) – $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

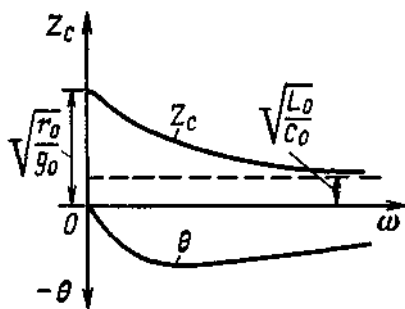


Рисунок 8.4 – Частотна та фазочастотна характеристики однорідної лінії

Для повітряних ліній середнє значення модуля \underline{Z}_c становить 300–400 Ом, а для кабелів – 60–80 Ом. У кабелів ємність C_0 значно більше, а індуктивність L_0 менше, ніж у повітряних ліній, оскільки провали кабелю розташовані ближче один до одного. Тому Z_c кабелю в 6–8 разів менше, ніж у повітряних ліній.

На рисунку 8.4 наведені частотні характеристики однорідної лінії (АЧХ і ФЧХ), побудовані за рівняннями (8.9) і (8.10).

Фазова швидкість хвилі в лінії на даній частоті визначається коефіцієнтом фази β (8.13). Для ліній без спотворень ($R_0/G_0 = L_0/C_0$) і для ліній без втрат ($R_0 = 0, G_0 = 0$);

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} \quad (8.29)$$

де c_0 – швидкість світла у вакуумі;

ϵ_r і μ_r – відносні діелектрична і магнітна проникності діелектрика, що оточує провали.



Рисунок 8.5 – Залежність фазової швидкості від частоти

У повітряних ліній $\epsilon_r \approx 1, \mu_r \approx 1$ і у разі відсутності втрат швидкість хвилі c практично дорівнює c_0 .

У кабелях із $\epsilon_r \approx 4-5$ швидкість хвиль у 2–2,5 рази менше c_0 .

На рисунку 8.5 зображені залежності фазової швидкості від частоти для однорідних повітряних і кабельних ліній зв'язку.

У повітряних ЛЕП, для яких фазова швидкість близька до c_0 при

$f = 50$ Гц, а довжина хвилі становить $\lambda = c \cdot T \approx \frac{c_0}{f} = 6000$ км, навіть при довжині лінії 1000 км не можна спостерігати хвилеподібної зміни струму або напруги, а можна спостерігати тільки їхню монотонну зміну.

Хвилеподібну зміну напруги і струму уздовж лінії можна спостерігати в пристроях зв'язку. Для передавачів, що працюють у діапазоні коротких хвиль, довжина лінії може бути в багато разів більше за довжину хвилі.

8.5 Рівняння однорідної лінії в гіперболічній формі

У рівняннях (8.23) і (8.24) уведемо гіперболічні синус і косинус:

$$\frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma \cdot x} + e^{-\gamma \cdot x}) = ch \gamma x; \quad \frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma \cdot x} - e^{-\gamma \cdot x}) = sh \gamma x. \quad (8.30)$$

Тоді струм і напруга в будь-якій точці лінії можуть бути записаними за їхніми значеннями на початку лінії

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot ch \gamma x - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh \gamma x \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \cdot sh \gamma x + \underline{I}_1 \cdot ch \gamma x \end{aligned} \right\}. \quad (8.31)$$

Струм і напруга в будь-якій точці лінії за їх значеннями наприкінці лінії

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot ch \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh \gamma x \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh \gamma x + \underline{I}_2 \cdot ch \gamma x \end{aligned} \right. \quad (8.32)$$

8.6 Вхідний опір лінії

Під *вхідним опором лінії* $\underline{Z}_{\text{вх}}$ розуміють опір двополюсника, яким можна замінити лінію разом із приймачем на її кінці при розрахунку режиму на початку лінії.

Використовуючи формули (1.32), для лінії довжиною l одержимо:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cdot ch \gamma l + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh \gamma l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh \gamma l + \underline{I}_2 \cdot ch \gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c \cdot th \gamma l}{\underline{Z}_n \cdot th \gamma l + \underline{Z}_c}. \quad (8.33)$$

Вхідний опір лінії при неробочому ході ($\underline{I}_2 = 0$):

$$\underline{Z}_x = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{U}_2 \cdot ch \gamma l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh \gamma l} = \underline{Z}_c \cdot cth \gamma l = \frac{\underline{Z}_c}{th \gamma l}. \quad (8.34)$$

Вхідний опір лінії при короткому замиканні ($\underline{U}_2 = 0$):

$$\underline{Z}_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{I_2 \cdot \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma l}{I_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \operatorname{th} \gamma l. \quad (8.35)$$

Вхідний опір можна записати через опори неробочого ходу \underline{Z}_x і короткого замикання \underline{Z}_k : $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_x \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_x} = \underline{Z}_{\text{вх}} \cdot e^{j\varphi_{\text{вх}}}$. (8.36)

Аналіз показує, що $\underline{Z}_{\text{вх}}$ і $\varphi_{\text{вх}}$ змінюються хвилеподібно як при зміні довжини лінії l , так і при зміні частоти f .

8.7 Коефіцієнт відбиття хвилі

Коефіцієнт відбиття хвилі – це відношення комплексів напруг або струмів зворотної (відбитої) і прямої хвиль у будь-якій точці лінії:

$$\underline{K}_U = \frac{U_{\text{звор}}}{U_{\text{пр}}} = \frac{\underline{U}_2 - I_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{U}_2 + I_2 \cdot \underline{Z}_c} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot x} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot x};$$

$$\underline{K}_I = \frac{I_{\text{звор}}}{I_{\text{пр}}} = \frac{I_2 - \underline{U}_2 / \underline{Z}_c}{I_2 + \underline{U}_2 / \underline{Z}_c} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot x} = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_n}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot x}. \quad (8.37)$$

Коефіцієнт відбиття хвилі зазвичай визначається в точках кінця або початку лінії ($x = 0$), тоді

$$\underline{K}_U = \frac{U_{\text{звор}}}{U_{\text{пр}}} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c}; \quad \underline{K}_I = \frac{I_{\text{звор}}}{I_{\text{пр}}} = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_n}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c}. \quad (8.38)$$

Модуль коефіцієнта відбиття не може бути більше ніж 1, оскільки амплітуда зворотної хвилі завжди менше за амплітуду прямої хвилі.

При розімкнутій лінії ($\underline{Z}_n = \infty$) коефіцієнти відбиття $\underline{K}_U = 1$; $\underline{K}_I = -1$.

Це означає, що хвиля напруги відбивається без зміни, а хвиля струму зі зміною знака. Для випадку короткого замикання на кінці лінії ($\underline{Z}_n = 0$) коефіцієнт відбиття $\underline{K}_U = -1$; $\underline{K}_I = 1$, тобто хвиля напруги відбивається зі зміною, а хвиля струму без зміни знака.

Якщо замкнути лінію опором, що дорівнює хвильовому ($\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$), то $\underline{K}_U = 0$; $\underline{K}_I = 0$, тобто в лінії будуть відсутні зворотні хвилі.

Відсутність зворотної хвилі має ту перевагу, що вся потужність, яка переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. У разі наявності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається до джерела. Тому потужність в опорі навантаження буде менше, якщо вважати, що потужність джерела залишається незмінною.

8.8 Узгоджене навантаження лінії

Якщо наприкінці лінії включений опір навантаження, який дорівнює хвильовому опорі: $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c = \frac{U_2}{I_2}$, то відбитої хвилі не виникає. Таке навантаження

називають узгодженим навантаженням. При цьому коефіцієнт відбиття $\underline{K} = 0$.

Для узгодженого навантаження

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{U}_{звор} = 0; \quad (8.39)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x} = \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{I}_{звор} = 0. \quad (8.40)$$

$$\text{Відкіля випливає} \quad \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_c. \quad (8.41)$$

Це співвідношення зберігається для будь-якої точки лінії. Тому режим роботи генератора, що живить таку лінію, не зміниться, якщо в будь-якому перетині лінії її розрізати та замість відрізаної частини лінії увімкнути хвильовий опір.

З (8.33) випливає, що для узгодженої лінії ($\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$) вхідний опір $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_c$.

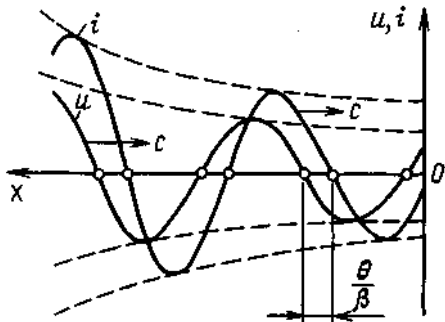


Рисунок 8.6 – Зміна напруги і струму у різних точках лінії за амплітудою та фазою

Нехай початкова фаза напруги наприкінці узгодженої лінії дорівнює нулю. На підставі (8.39) і (8.40) запишемо миттєві значення напруги і струму в будь-якій точці лінії:

$$\begin{aligned} u &= \underline{U}_{2m} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x); \\ i &= \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x - \theta). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Отже, напруга і струм у різних точках лінії розрізняються не тільки за амплітудою, але і за фазою (рис. 8.6).

Миттєві значення струму і напруги в будь-який момент часу в будь-якій точці становлять хвилі, що біжать у напрямку від початку лінії до кінця лінії.

Для повітряних ліній передач $\underline{Z}_c = Z_c$, тобто є чисто активним опором, $\theta = 0$. Тому напруга u і струм i будуть збігатися між собою за фазою, а при малих втратах у лінії ($\alpha = 0$) їхні амплітуди будуть незмінними.

Режим хвилі, що біжить, є ідеальним з погляду економічності та технічної зручності передачі енергії по лінії.

Потужність у будь-якому перетині лінії залежить від U_2^2 , тобто чим більше напруга, тим більше передана потужність:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_c} \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot \cos \theta. \quad (8.43)$$

Ця потужність зменшується із віддаленням від початку, оскільки на кожному елементі довжини лінії спостерігаються втрати потужності

$$dP = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{U_2^2}{Z_c} \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot \cos \theta \, dx = (R_0 \cdot I^2 + G_0 \cdot U^2) \, dx \quad (8.44)$$

Отже, потужність втрат дорівнює сумі втрат в опорі й у провідності ізоляції на елементі довжини лінії dx .

Потужність, яка передається по узгодженій лінії, називається *природною* або *натуральною*. Режим передачі природної потужності може спостерігатися в лініях, якщо опір навантаження дорівнює хвильовому опорі. Середні значення природної потужності для ліній 500, 400, 220, 110 і 35 кВ відповідно становлять 600, 360, 120, 30 і 3 МВт.

Потужність на вході лінії:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta, \quad (8.45)$$

а потужність наприкінці лінії:

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \theta. \quad (8.46)$$

На підставі (8.39) і (8.40) можна зв'язати потужність на вході й виході лінії довжиною l :

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta = U_2 \cdot I_2 \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot l} \cdot \cos \theta = P_2 \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot l}. \quad (8.47)$$

$$\text{КПД лінії } - \eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2 \cdot \alpha \cdot l}. \quad (8.48)$$

Узгодження параметрів лінії та навантаження широко застосовується в пристроях зв'язку, оскільки ця умова дозволяє передавати максимально можливу потужність.

8.9 Лінія без спотворень

У слабкострумових лініях зв'язку здійснюється передача енергії як періодичних, так і неперіодичних сигналів різної форми. Дуже важливо, щоб форма цих сигналів на початку і наприкінці лінії була б однаковою, тобто сигнал передавався без спотворень. Крім того, необхідно, щоб величина цих сигналів наприкінці лінії була достатньою для їхнього прийому. У реальних лініях хвильовий опір і коефіцієнт поширення залежать від частоти (8.7), (8.9). У зв'язку з цим при проходженні лінії сигнали різної частоти будуть мати загасання по амплітуді, та змінюватися за фазою неоднаково. Крім того, умова узгодження лінії з навантаженням для одержання максимального ККД лінії для різних частот буде різною.

Відзначимо деякі особливості ліній зв'язку. У кабельних лініях зв'язку через близьке розташування проводів відносно один одного індуктивний опір $x_0 = \omega \cdot L_0$ малий порівняно з активним R_0 , отже їм у першому наближенні можна знехтувати. Так само активною провідністю G_0 між проводами можна знехтувати порівняно з реактивною провідністю $B_0 = \omega \cdot C_0$. Тому при $L_0 = 0$ і $G_0 = 0$, а також, $Z_0 = R_0$; $Y_0 = j \cdot \omega \cdot C_0$ з формул (8.9) і (8.26) одержимо:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot \omega \cdot C_0};$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0}{j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{\omega \cdot C_0}} \cdot e^{-j \cdot \pi/4}. \quad (8.49)$$

З цих співвідношень видно, що коефіцієнт згасання α і коефіцієнт фази β пропорційні квадратному кореневі з частоти. Тому гармоніки більш високих частот загасають сильніше, що призводить до спотворення мови, музики й інших сигналів, тобто до так званих амплітудних спотворень. Фазова швидкість також залежить від частоти. Залежність фазової швидкості від частоти призводить до зміни форми кривих струмів і напруг наприкінці лінії порівняно з їхньою формою на початку лінії. Ці спотворення називаються фазовими. Амплітудні спотворення також змінюють форму кривих. Підкреслимо, що при високих частотах $R_0 \ll \omega \cdot L_0$, $G_0 \ll \omega \cdot C_0$, тоді відповідно до виразу (8.19):

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (8.50)$$

Тому фазова швидкість (8.14) не залежить від частоти та фазові спотворення відсутні, отже, $c = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0 \cdot C_0}$. (8.51)

Далі відзначимо, що через амплітудні й фазові спотворення кабельні лінії зв'язку без особливих пристосувань непридатні для передачі мови, музики й інших сигналів на великі відстані.

Повітряна або кабельна лінія зв'язку, не забезпечена спеціальними підсилювачами, придатна для передачі сигналів, якщо коефіцієнт згасання α не залежить від частоти і є невеликим. Збереження тембру звуку, розбірливості мови та форми сигналу визначається вищими гармоніками, тому дослідження виразу для α на мінімум як для кабельних, так і для повітряних ліній зв'язку потрібно проводити, якщо вважати частоту ω достатньо великою, а отже, вирази $\frac{R_0}{\omega \cdot L_0}$ і $\frac{G_0}{\omega \cdot C_0}$ достатньо малими.

При цих умовах після деяких перетворень будемо мати:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot (R_0 \cdot \sqrt{C_0/L_0} + G_0 \cdot \sqrt{L_0/C_0}). \quad (8.52)$$

Коефіцієнт загасання α є функцією відносини $z = L_0/C_0$, тому знайдемо мінімум α , дорівнявши $\frac{d\alpha}{dz} = 0$. Звідси одержимо значення z , при якому α мінімально: $L_0/C_0 = R_0/G_0$.

$$(8.53)$$

Ця умова була отримана Хевісайдом у 1893 р.

З (8.26) з урахуванням (8.53) знайдемо:

$$\alpha_{\min} = \sqrt{R_0 \cdot G_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (8.54)$$

Лінію, що задовольняє умові (8.25), у якій коефіцієнт загасання не залежить від частоти є мінімальним, називають лінією без спотворень.

При цих умовах хвильовий опір:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{L_0/C_0} = \sqrt{R_0/G_0}; \quad \theta = 0. \quad (8.55)$$

Хвильовий опір лінії без спотворень не залежить від частоти та є активним. Фазова швидкість також не залежить від частоти

$$c = \omega/\beta = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \quad (8.56)$$

8.10 Неробочий хід і коротке замикання лінії з втратами

Розглянемо неробочий хід лінії ($I_2 = 0$). Змінивши напругу на початку лінії так, щоб напруга наприкінці лінії залишилося рівною \underline{U}_2 , із рівнянь (8.32)

$$\text{одержимо: } \underline{U}_x = \underline{U}_2 \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x; \quad \underline{I}_x = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x. \quad (8.57)$$

Якщо в лінії при короткому замиканні ($\underline{U}_2 = 0$) змінити напругу на початку лінії так, щоб струм наприкінці лінії дорівнював \underline{I}_2 , одержимо:

$$\underline{U}_\kappa = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x; \quad \underline{I}_\kappa = \underline{I}_2 \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x. \quad (8.58)$$

$$\text{З (8.32), (8.57) і (8.58) можна одержати: } \underline{U} = \underline{U}_x + \underline{U}_\kappa; \quad \underline{I} = \underline{I}_x + \underline{I}_\kappa. \quad (8.59)$$

Цими формулами зручно користуватися при розрахунках.

8.11 Лінії без втрат

Якщо опір проводів лінії ($R_0 = 0$) і провідність витoku між проводами ($G_0 = 0$) прийняти такими, що дорівнюють нулю, то одержимо так звану лінію без втрат – ідеалізацію реальної довгої лінії.

У радіотехніці дуже часто розглядають двохпровідні повітряні лінії та коаксіальні кабелі як лінії без втрат.

Для такої лінії маємо:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \underline{Z}_c = \sqrt{L_0 / C_0} = z_c; \quad \theta = 0; \quad (8.60)$$

$$c = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \lambda = 2 \cdot \pi / \beta$$

У лінії без втрат немає згасання хвиль, а хвильовий опір чисто активний і не залежить від частоти, а фазову швидкість можна записати у вигляді:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}}, \quad (8.61)$$

де ε_a , μ_a – абсолютні діелектрична і магнітна проникність середовища.

З огляду на те, що швидкість світла у вакуумі $c_0 = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$, фазова швидкість $c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}$.

Для повітряних ліній $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ і фазова швидкість у вакуумі збігається зі швидкістю світла. Для кабельних ліній $\varepsilon_r > 1$ і $c < c_0$. У лініях без втрат $\theta = 0$, тобто струми прямої та зворотних хвиль збігаються за фазою з напругами.

Рівняння довгої лінії з гіперболічними функціями від комплексного аргументу переходять у рівняння з круговими функціями від дійсного аргументу, тобто:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_1 \cdot \cos \beta x - j \cdot \underline{I}_1 \cdot z_c \cdot \sin \beta x \\ \underline{I} = -j \cdot \frac{\underline{U}_1}{z_c} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_1 \cdot \cos \beta x \end{cases} \quad (8.62)$$

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x + j \cdot \underline{I}_2 \cdot z_c \cdot \sin \beta x \\ \underline{I} = j \cdot \frac{\underline{U}_2}{z_c} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x \end{cases} \quad (8.63)$$

$$\text{Вхідний опір лінії без втрат: } \underline{Z}_{\text{вх}} = Z_c \cdot \frac{\underline{Z}_H + j \cdot z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l}{\underline{Z}_H \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l + z_c} \quad (8.64)$$

Миттєві значення при $\underline{U}_2 = \underline{U}_2$ і $\underline{I}_2 = \underline{I}_2 \cdot e^{-j\varphi_2}$:

$$\begin{aligned} u &= U_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin \omega t + I_{2m} \cdot z_c \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_2); \\ i &= \frac{U_{2m}}{z_c} \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + I_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.65)$$

Розглянемо властивості лінії без втрат довжиною у чверть і в половину довжини хвилі.

При $l = \frac{\lambda}{4}$, $\beta l = (2\pi/\lambda) \cdot \lambda/4 = \pi/2$, тоді з (8.63) випливає

$$\underline{U}_1 = j \cdot \underline{I}_2 \cdot z_c; \quad \underline{I}_1 = j \cdot \underline{U}_2 / z_c, \quad (8.66)$$

тобто напруга (струм) на початку лінії пропорційна струму (напрузі) наприкінці лінії і випереджає його за фазою на кут 90° .

При $l = \frac{\lambda}{2}$, $\beta \cdot l = \pi$ і $\underline{U}_1 = -\underline{U}_2$; $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$, тобто напруга і струм на початку лінії дорівнюють за абсолютним значенням і протилежні за фазою напрузі та струмові наприкінці лінії.

8.12 Застосування ліній без втрат

Лінії без втрат завдовжки у чверть хвилі застосовуються як елемент, що узгоджує, лінію без втрат і приймач з резистивним опором на її кінці $\underline{Z}_H = R_H$, який відрізняється від хвильового опору лінії. Наприклад, за допомогою чвертьхвильової лінії можна узгодити лінію (без втрат), що живить антену, із самою антенною, вхідний опір якої є чисто активним.

Знайдемо вхідний опір чвертьхвильової лінії ($l = \lambda/4$), навантаженої на антену опором $\underline{Z}_H = R_H$. На підставі виразу (8.64)

$$\underline{Z}_{ex} = z_c \frac{R_H + j \cdot z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}}{R_H \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} + z_c}. \quad (8.69)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty, \text{ тому } \underline{Z}_{ex} = \frac{z_c^2}{R_H}. \quad (8.70)$$

Для узгодження лінії живлення з антенною необхідно, щоб $\underline{Z}_{ex} = Z_{c1}$, де Z_{c1} – хвильовий опір лінії живлення. Звідси отримаємо необхідне значення хвильового опору: $Z_c = \sqrt{Z_{c1} \cdot R_H}$. (8.71)

У цьому разі чвертьхвильова лінія без втрат називається чвертьхвильовим трансформатором.

8.13 Стоячі хвилі

Режими, при яких активна потужність наприкінці лінії без втрат дорівнює нулю – це режими неробочого ходу, короткого замикання та чисто реактивного навантаження.

При неробочому ході з (8.63) випливає:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x; \quad \underline{I} = j \cdot \frac{\underline{U}_2}{z_c} \cdot \sin \beta x. \quad (8.67)$$

При $\underline{U}_2 = U_2$ миттєві значення напруги і струму становлять рівняння стоячих і хвиль мають вигляд:

$$u = U_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin \omega t;$$

$$i = \frac{U_{2m}}{z_c} \cdot \sin \beta x \cdot \cos \omega t, \quad (8.68)$$

Стоячою хвилею називається процес, що виходить від накладення прямої та зворотної хвиль з однаковими амплітудами. При неробочому ході на кінці лінії ($x = 0$) і в точках, що знаходяться від кінця на відстанях $x = k \cdot \pi / \beta = k \cdot \lambda / 2$, де k – ціле число, маємо в будь-який момент часу максимуми напруги, які називають пучностями, і нулі струму, які називають вузлами (рис. 8.7).

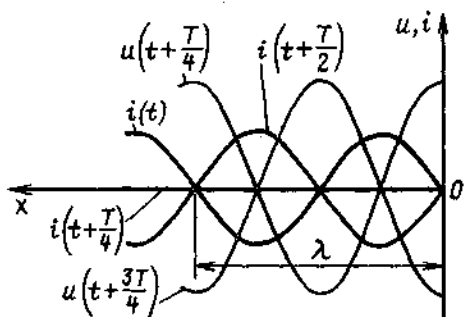


Рисунок 8.7 –
Стоячі хвилі

На відстанях від кінця лінії $x = (2 \cdot k \cdot \pi + 1) / 2 \cdot \beta = (2 \cdot k + 1) \cdot \lambda / 4$ спостерігаються вузли напруги і пучності струму. Вузли і пучності струму і напруги нерухомі. Вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки.

При виникненні стоячих хвиль електромагнітна енергія від початку до кінця лінії не передається. Однак на кожному відрізьку лінії, який дорівнює чверті довжини хвилі, запасена деяка електромагнітна енергія. Ця енергія періодично переходить з енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки. У моменти часу, коли струм уздовж усієї лінії виявляється таким, що дорівнює нулю, енергія переходить в енергію електричного поля. У моменти часу, коли напруга вздовж усієї лінії дорівнює нулю, а струм досягає максимального значення, вся енергія переходить в енергію магнітного поля.

Картина стоячої хвилі напруги (струму) при короткому замиканні на кінці лінії якісно повторює картину стоячої хвилі струму (напруги) при неробочому ході лінії.

Контрольні питання до розділу

1. Охарактеризуйте первинні параметри електричного кола з розподіленими параметрами.
2. Наведіть рівняння однорідної двохпровідної лінії з розподіленими параметрами в часткових похідних.
3. Наведіть рівняння однорідної двохпровідної з розподіленими параметрами лінії при усталеному синусоїдному процесі.
4. Охарактеризуйте вторинні параметри і характеристики однорідної двохпровідної з розподіленими параметрами: коефіцієнт розповсюдження, коефіцієнт загасання, коефіцієнт фази, хвильовий опір, фазова швидкість та довжина хвилі.
5. Поясняйте, яким чином визначається напруга та струм в будь-якій точці лінії при відомих напрузі та струмі на початку лінії (рівняння в гіперболічній формі).
6. Поясняйте, яким чином визначається напруга та струм в будь-якій точці лінії при відомих напрузі та струмі на кінці лінії (рівняння в гіперболічній формі).
7. Дайте визначення вхідного опору лінії та коефіцієнта відбиття хвилі.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Рибалко М. П. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола : підручник / М. П. Рибалко, В. О. Есауленко, В. І. Костенко. – Донецьк : Новий світ, 2003. – 513 с.
2. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л. А. Бессонов. – М. : Гардарики, 2002. – 640 с.
3. Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, Н. Н. Нетушил, П. И. Страхов. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
4. Воробкевіч А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : навч. посібник. / А. Ю. Воробкевіч, О. І. Шегедін. – Київ : «Магнолія плюс», 2004. ч. 1. – 224 с.
5. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл. : навч. посібник / А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2009. – 398 с.
6. Основи теорії кіл : підручник для студентів вищих навчальних закладів / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін. – Харків : Компанія СМІТ, 2008. – 432 с.

ПІСЛЯМОВА

Отже Ви, шановний студенте, закінчили ознайомлення з нашим текстом лекцій з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл». У ньому були розглянуті наступні теми:

- 1) основні закони та методи аналізу лінійних електричних кіл постійного струму;*
- 2) властивості і методи розрахунку лінійних електричних кіл однофазного синусоїдного струму;*
- 3) трифазні електричні кола змінного синусоїдного струму;*
- 4) аналіз кіл з несинусоїдними періодичними струмами та напругами;*
- 5) перехідні процеси в лінійних електричних колах;*
- 6) методи аналізу стану нелінійного електричного кола;*
- 7) магнітні кола: основні поняття, визначення, закони*
- 8) лінійні електричні кола з розподіленими параметрами.*

При цьому автори намагалися забезпечити доступність викладення матеріалу і дружність тексту до читача.

Звісно, текст лекцій не претендує на вичерпність у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки. Але ми сподіваємося, він сповна відповідає поставленій меті – забезпечити набуття знань, які в майбутньому повинні допомогти при вирішенні конкретних технічних завдань. Особливо корисним текст лекцій буде для студентів заочної форми навчання.

Виробничо-практичне видання

**ФОРКУН Яна Борисівна,
ГЛЄБОВА Марина Леонідівна**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу

«ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ»

*(для студентів усіх форм навчання спеціальності
151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології)*

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*

Редактор *В. І. Шалда*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2017, поз. 285 Л

Підп. до друку 07.09.2017. Формат 60 * 84/16

Друк на різнографі Ум. друк. арк. 7,4

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.