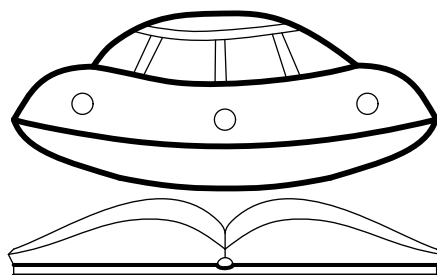


Министерство образования и науки Украины

Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»



*ФУНДАМЕНТАЛЬНА ОСВІТА  
ДЛЯ ВИСОКИХ ТЕХНОЛОГІЙ*

**Ю.Л. ГЕВОРКЯН, А.Л. ГРИГОРЬЕВ**

**СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ**  
**ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ИНЖЕНЕРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Общий курс высшей математики

В двух томах

**Том I**

Харьков НТУ «ХПИ» 2010

УДК 51 (075)  
ББК 22.1 я 7  
Г 27

Рецензенты:

**Ю.В. Гандель**, проф., д-р физ.-мат. наук, заслуженный работник образования Украины,  
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина;

**А.Г. Николаев**, проф., д-р физ.-мат. наук, Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е.Жуковского «Харьковский авиационный институт»;

**В.Г. Солодов**, проф., д-р техн. наук, Харьковский национальный  
автомобильно-дорожный университет.

*Интеллектуальная собственность авторов. Все права защищены.  
При перепечатке материалов ссылка на первоисточник обязательна.*

Серия основана в 2010 году.

Публикуется по решению редакционно-издательского Совета  
Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»,  
протокол № 1 от 02.04.09 г.

Містить систематичний виклад загального курсу вищої математики, орієнтований на використання відповідних математичних методів для розв'язання практичних інженерних задач. Призначено для студентів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників технічних університетів.

**Геворкян Ю.Л.**

Г 27 Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования: [Текст]: общий курс высшей математики : в 2-х т./ Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев – Т.1. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2010.– 652 с. – На русск. яз.

ISBN 978-966-593-801-9 (полное собр.)

ISBN 978-966-593-802-6 (том. 1)

Содержит систематическое изложение общего курса высшей математики, ориентированное на использование соответствующих методов для решения практических инженерных задач. Предназначается для студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников технических университетов.

Contains the systematic summary of the common course of the advanced mathematics, oriented to using the corresponding mathematical methods for solving practical engineering tasks. Intended for students, post-graduates, teachers and scientist of the technical universities

Ил.: 442 рис. + 137 порт. Табл. 4. Библ. 34 назв.

**УДК 51 (075)**

**ББК 22.1 я 7**

ISBN 978-966-593-801-9 (полное собр.)  
ISBN 978-966-593-802-6 (том. 1)

© Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л., 2010  
© Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», макет, 2010

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	8
<b>Глава 1. Линейная алгебра</b> .....	11
§ 1. Матрицы и определители .....	11
<i>Основные определения. Частные виды матриц. Основные действия над матрицами. Транспонирование матриц. Перестановки. Инверсия. Понятие определителя. Формулы Лапласа. Понятие линейной зависимости. Свойства определителей. Методы вычисления определителя. Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Матричные уравнения. Теорема о базисном миноре матрицы. Элементарные преобразования. Методы вычисления ранга матрицы. Нахождение обратной матрицы по алгоритму Гаусса.</i>	
§ 2. Системы линейных алгебраических уравнений .....	44
<i>Условие совместности системы линейных алгебраических уравнений. Решение квадратной системы линейных уравнений. Формулы и правило Крамера. Решения однородной системы. Решения неоднородной системы. Принципы наложения и линейной суперпозиции решений. Метод Гаусса – Жордана.</i>	
§ 3. Линейные пространства .....	63
<i>Понятие линейного пространства. Размерность и базис пространства. Изоморфизм линейных пространств. Подпространство. Плоскость и гиперплоскость. Уравнение плоскости в пространстве <math>\mathbb{R}^n</math>. Уравнение прямой в <math>\mathbb{R}^n</math>. Евклидово пространство.</i>	
§ 4. Линейные операторы .....	75
<i>Понятие линейного оператора. Основные свойства. Матрица линейного оператора. Пространство линейных операторов. Сумма и произведение операторов. Обратный линейный оператор. Ранг линейного оператора. Матрица перехода к новому базису. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Собственные значения и векторы линейного оператора. Основные свойства собственных значений и собственных векторов. Инвариантные подпространства. Линейные сопряжённые операторы в евклидовом пространстве. Самосопряжённые линейные операторы: основные свойства. Операторные уравнения.</i>	
§ 5. Матрицы как основа математических моделей .....	99
<i>Разреженные матрицы. Блочная матрица: общие определения. Классификация блочных матриц. Алгебра блочных матриц. Квадратичные формы. Положительные и отрицательные матрицы. Симметрия матриц математических моделей. Матрицы влияния. Передаточные матрицы. Матрицы обмена. Матрицы колебаний.</i>	
<b>Глава 2. Аналитическая геометрия</b> .....	125
§ 6. Векторная алгебра .....	125
<i>Определение вектора. Линейные операции над векторами. Свойства линейных операций. Декартова система координат. Угол между векторами. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Векторное произведение. Свойства векторного произведения. Векторное произведение в ортонормированном базисе. Некоторые приложения векторного произведения. Смешанное произведение трёх векторов. Смешанное произведение в ортонормированном базисе. Геометрический смысл смешанного произведения. Свойства смешанного произведения. Двойное векторное произведение.</i>	
§ 7. Преобразования прямоугольных декартовых координат .....	148
<i>Преобразования координат точек плоскости. Свойства ортогональных матриц второго и третьего порядка. Преобразования координат точек пространства.</i>	

§ 8. Плоскость в геометрическом пространстве $R^3$ .....	154
<i>Нормальное уравнение плоскости. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.</i>	
§ 9. Прямая в пространстве .....	163
<i>Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.</i>	
§ 10. Прямая и плоскость в пространстве .....	167
<i>Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.</i>	
§ 11. Прямая на плоскости .....	172
<i>Общее уравнение прямой на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.</i>	
§ 12. Кривые второго порядка .....	177
<i>Алгебраические кривые. Окружность. Эллипс. Гипербола. Асимптоты гиперболы. Парабола. Исследование общего уравнения второй степени. Эллиптические и гиперболические орбиты. Уравнение кривой, проходящей через заданные точки.</i>	
§ 13. Поверхности второго порядка .....	202
<i>Алгебраические поверхности. Поверхности вращения. Линейчатые поверхности. Классификация поверхностей второго порядка. Асимптотические конусы гиперboloидов. Исследование общего уравнения поверхности второго порядка. Уравнение поверхности, проходящей через заданные точки.</i>	
<b>Глава 3. Теория пределов и непрерывность функции</b> .....	<b>218</b>
§ 14. Алгебра и начала анализа: выравнивающий курс. ....	218
<i>Кванторы. Методы доказательств. Математическая индукция. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Основные множества и подмножества. Операции над множествами. Мощность множества. Парадоксы теории множеств. Абсолютная величина действительного числа. Метрика числовой оси. Корень из отрицательного числа. Формула Кардано. Определение и геометрическая интерпретация комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы представления комплексных чисел. Арифметика комплексных чисел. Алгебра комплексных чисел. Формулы Муавра. Сопряжённые корни вещественных уравнений. Матричная факторизация комплексных чисел.</i>	
§ 15. Числовые последовательности .....	243
<i>Общие понятия. Предел числовой последовательности.</i>	
§ 16. Понятие функции одной переменной.....	254
<i>Основные определения. Способы задания функции. Параметрические уравнения некоторых замечательных кривых. Обратная и сложная функции. Элементарные функции.</i>	
§ 17. Предел функции .....	262
<i>Определения предела. Левый и правый пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах. Сравнение бесконечно малых величин. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Третий замечательный предел. Формула Стирлинга.</i>	

§ 18. Непрерывность функции.....	283
<i>Определение непрерывности. Точки разрыва. Свойства функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке. Теорема Вейерштрасса. Метод золотого сечения. Теоремы Больцано – Коши. Метод дихотомии. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора. Теоремы о неподвижной точке и сжимающем отображении. Метод простой итерации.</i>	
<b>Глава 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной</b>	<b>298</b>
§ 19. Производная и некоторые её приложения.....	299
<i>Определение производной. Вычисление скорости движущейся точки, теплоёмкости тела, силы тока. Уравнения касательной и нормали. Связь между понятиями непрерывности и дифференцируемости.</i>	
§ 20. Основные правила дифференцирования.....	304
§ 21. Производные основных элементарных функций .....	306
<i>Производные показательной, логарифмической и степенной функции. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций.</i>	
§ 22. Дифференцирование гиперболических функций. Правило логарифмического дифференцирования .....	309
<i>Гиперболические функции и их простейшие свойства. Производные гиперболических функций. Логарифмическое дифференцирование.</i>	
§ 23. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически..	312
<i>Производная функции, заданной неявно. Дифференцирование функции, заданной параметрически.</i>	
§ 24. Дифференциал функции .....	314
<i>Определение дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила вычисления дифференциалов.</i>	
§ 25. Производные и дифференциалы высших порядков.....	317
<i>Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков. Производная второго порядка от функции, заданной параметрически.</i>	
§ 26. Основные теоремы дифференциального исчисления.....	321
<i>Теорема Ролля. Теорема и формула Коши. Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений. Формулы Тейлора и Маклорена.</i>	
§ 27. Правило Лопиталю.....	333
<i>Раскрытие неопределённости <math>\ 0/0\ </math>. Неопределённость <math>\ \infty/\infty\ </math>. Неопределённости вида <math>\ 0 \cdot \infty\ </math>, <math>\ \infty - \infty\ </math>, <math>\ 1^\infty\ </math>, <math>\ 0^0\ </math>, <math>\ \infty^0\ </math>.</i>	
§ 28. Исследование функции с помощью производных.....	337
<i>Интервалы монотонности. Точки экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема исследования функции и построения её графика. Некоторые приложения дифференциального исчисления: простейшие задачи геометрии плоских кривых, задачи нахождения скорости изменения параметров процесса, задачи оптимизации, интерполяционные и экстраполяционные задачи.</i>	
§ 29. Геометрия плоской дифференцируемой кривой.....	359
<i>Гладкие и особые точки кривой. Точки возврата. Соприкасающаяся окружность и кривизна кривой. Нормальный вектор и кривизна кривой, заданной параметрически. Кривая в полярных координатах. Профили и спирали. Угол подъёма и кривизна профиля. Выпуклые профили. Условие Геронимуса. Эвольвента и эволюта. Эвольвента окружности. Дифференцирование плоской вектор – функции.</i>	

<b>Глава 5. Неопределённый интеграл .....</b>	<b>382</b>
§ 30. Определение и свойства первообразной и интеграла .....	382
<i>Первообразная и её геометрический смысл. Неопределённый интеграл. Таблица основных интегралов. Свойства неопределённого интеграла. Обратные задачи дифференциального исчисления.</i>	
§ 31. Основные методы интегрирования.....	392
<i>Метод подстановки. Интегрирование путём замены переменной. Интегралы от функций, содержащих квадратный трёхчлен. Интегрирование по частям.</i>	
§ 32. Интегрирование рациональных функций.....	404
<i>Разложение многочлена на множители. Разложение рациональной функции на простейшие дроби. Интегралы от рациональных функций.</i>	
§ 33. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.....	419
<i>Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Понятие об интегралах, не выражающихся через элементарные функции.</i>	
<b>Глава 6. Определённые и несобственные интегралы.....</b>	<b>432</b>
§ 34. Определённый интеграл как предел интегральных сумм.....	432
<i>Суммы Дарбу и их свойства. Определение интеграла. Классы интегрируемых функций.</i>	
§ 35. Свойства определённого интеграла .....	439
§ 36. Интеграл с переменным пределом. Формула Ньютона – Лейбница.....	446
<i>Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница.</i>	
§ 37. Методы вычисления определённого интеграла.....	450
<i>Интегрирование по частям. Замена переменной в определённом интеграле. Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному промежутку.</i>	
§ 38. Приложения определённого интеграла.....	458
<i>Вычисление площади плоских фигур в прямоугольных координатах. Вычисление площади в полярной системе координат. Вычисление длины дуги плоской кривой. Натуральная параметризация кривой. Вычисление объёмов тел по площадям параллельных сечений. Объём тела вращения. Приложения интегралов к решению физических задач.</i>	
§ 39. Приближённое вычисление определённых интегралов.....	480
<i>Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Погрешность квадратурных формул.</i>	
§ 40. Несобственные интегралы .....	486
<i>Несобственные интегралы первого рода: определение и свойства. Признаки сходимости интеграла от неотрицательной функции. Абсолютная и условная сходимость интегралов. Несобственные интегралы второго рода. Приложения несобственных интегралов.</i>	
<b>Глава 7. Пределы и дифференцирование функции нескольких переменных ..</b>	<b>513</b>
§ 41. Основные понятия функции двух или нескольких переменных и методы её графического изображения .....	514
<i>Определение функции двух переменных и её график. Линии уровня. Функция трёх переменных. Поверхности уровня. Абстрактное геометрическое пространство <math>R^n</math>. Функция <math>n</math> вещественных переменных. «Проклятие размерности». Элементарные и не элементарные функции нескольких переменных.</i>	
§ 42. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.....	525
<i>Некоторые определения теории геометрических множеств. Компактификация плоскости и пространства. Предел функции в точке и по направлению. Непрерывность функции в</i>	

точке плоскости или пространства. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность на компакте. Метод координатного спуска. Свойства функции, непрерывной в замкнутой области.

§ 43. Дифференциальное исчисление функции двух переменных.....	544
<i>Частные производные. Геометрический смысл частной производной. Полный дифференциал функции. Применение полного дифференциала к приближённым вычислениям. Дифференцирование сложной функции. Матрица Якоби. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференцирование функций, заданных неявно. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Производные по направлению и градиент. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.</i>	
§ 44. Минимизация дифференцируемой функции двух переменных.....	568
<i>Определения локального и глобального экстремумов. Необходимые условия существования экстремума функции. Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Решение задачи минимизации методами наискорейшего спуска. Условный экстремум. Метод исключения неизвестной. Метод неопределённых множителей Лагранжа.</i>	
§ 45. Геометрические приложения дифференциального исчисления.....	586
<i>Уравнения огибающей линии или поверхности. Виды уравнения поверхности и пространственной кривой. Трёхгранник Френе. Кривизна и кручение кривой. Кривизна поверхности.</i>	
§ 46. Минимизация и аппроксимация дифференцируемой функции многих переменных.....	604
<i>Экстремум и условный экстремум функции нескольких переменных. Минимизация линейных функций. Симплекс - метод. Минимизация нелинейных функций. Методы сканирования. Компромиссные решения и паретовские множества. Аппроксимация функции по методу дифференциалов и наименьших квадратов. Матрица Грама. Принцип Лежандра. Классификация и векторная идентификация математических моделей.</i>	
<b>Краткий именной указатель .....</b>	<b>634</b>
<b>Список дополнительной литературы .....</b>	<b>635</b>
<b>Алфавитный указатель терминов.....</b>	<b>636</b>

## Предисловие

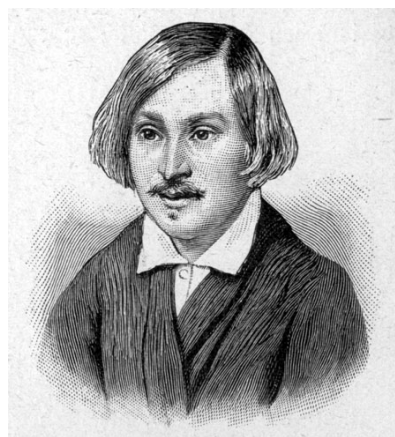
*«Что проку в этой книжке, – подумала Алиса,  
– Нет в ней ни картинок, ни разговоров»*

*Льюис Кэрролл, «Удивительные приключения  
Алисы в стране чудес»*

Жизненный опыт подтверждает, что Алиса права, и поэтому на первой же странице своего учебника с удовольствием помещаем портрет нашего земляка, великого писателя Николая Гоголя, двухсотлетний юбилей которого отметили в этом году. Гоголь мечтал о том, что его книги смогут изменить мир к лучшему; поэтому он вкладывал в них не только свой непревзойдённый талант, полученный от Бога, но и саму душу. К сожалению, эти надежды не оправдались, что привело к творческому кризису и безвременной кончине гения. Общеизвестно, что незадолго до смерти Гоголь сжёг второй том своей поэмы «Мёртвые души».

Разумеется, авторам новой книги в их писательских способностях далеко до Гоголя, да и жанр учебника по математике призывает к сдержанности. Однако побудительные мотивы к её написанию оказались теми же, что и у великого земляка. Многие из того, что происходит в последние годы в сфере преподавания математики в технических университетах, вызывает удивление. Все видят, как быстро изменяется мир, стремительно усложняется техника, буквально на наших глазах рождаются новые материалы и технологии. Мы знаем, что в фундаменте современного развития лежат успехи математической науки, и гордимся этим. И, в то же время, мы видим, как за срок службы одного преподавательского поколения существенно сокращается и выхолащивается учебный курс высшей математики. Снижение требований закрепляется изданием соответствующих учебных пособий, которые теперь составляет каждый соискатель доцентского звания. Прочитаешь иное произведение, и невольно улыбнёшься – «святая простота». Но становится не до веселья, когда видишь, что этой конъюнктурой вынуждены заменять классические учебники по математике. Ситуация усугубляется форсированием нормативно-терминологической реформы, которую подчас ведут теми же методами, которыми большевики проводили коллективизацию украинского крестьянства. Мы сами ратуем за реформу, поэтому не вправе выступать против других реформ. Но когда-то этому учили даже в школе, что для успеха любой реформы нужно правильно выбрать место и время её проведения. Создаётся впечатление, что «зло» опять одолевает «добро», и в этом противостоянии мы волею обстоятельств оказываемся там же, где когда-то стоял Гоголь, – на светлой стороне.

Согласитесь, что в таких серьёзных вещах полагаться только лишь на воспитательную силу новых учебников было бы наивно. Убеждены, что тесная взаимосвязь между уровнем математической подготовки инженеров и объективными потребностями научно-технического прогресса и без нашего участия развернёт вектор администрирования в правильную сторону и всё расставит по своим местам (вспомните финальную сцену гоголевского «Ревизора»). Однако для преодоления возникших проблем понадобится ещё некоторое время, и об этом потерянном времени как раз и стоит сожалеть.



**Гоголь Николай Васильевич  
(1809-1853)**



Мы уже имели опыт составления полноформатного учебника по линейной алгебре для технических университетов и считали, что для жизни одного человека этого труда вполне достаточно, а так необходимые современные учебники по математическому анализу и другим разделам высшей математики напишут наши коллеги. Однако за прошедшие семь лет эта проблема решена не была и ещё более обострилась. Библиотеки, по причине изношенности книг, перестали выдавать студентам известные учебники Н.С.Пискунова и других авторов, которые на протяжении десятилетий поддерживали общепризнанный

### **математический стандарт классического инженерного образования.**

Кроме того, и сам стандарт нуждался в модернизации в соответствии с требованием времени.

Пусть это звучит банально, но за много лет работы в вузе лектор привыкает к мысли, что он несёт личную ответственность за математическую подготовку своих студентов. Поэтому мы не стали дожидаться министерских благословлений и, многократно повторяя поговорку про обжигание горшков, составили свой полноформатный учебник по высшей математике, издание которого частично оплатили из собственных средств. А через год, когда наши теперешние первокурсники повзрослеют, издадим для них второй том данного учебника (сжигать его мы не будем и другим этого сделать не позволим).

На страницах нового учебника мы стремились познакомить будущих инженеров с теми возможностями, которые предоставляет современная математика для овладения не только азами, но и вершинами технических профессий. Объективное состояние дел в этом вопросе за последнее время улучшилось настолько, что избавляло от необходимости лукавить. При этом мы не ограничивали изложения рамками бакалаврской программы общего курса высшей математики, принятой в большинстве технических университетов страны; отбиралось то, что действительно важно.

Название учебника соответствует традиции, которая успела сложиться в высшей школе США и некоторых других стран. Подобно тому, как наши школьники отдельно изучают алгебру и геометрию, и курс высшей математики там делят на две части – «Скалярный анализ» и «Векторный анализ». 14-ть глав нашего учебника также можно условно разбить на две группы в соответствии с таблицей:

Скалярный анализ	Векторный анализ
Теория пределов и непрерывность функции	Линейная алгебра
Дифференциальное исчисление	Аналитическая геометрия
Неопределённый интеграл	Функции нескольких переменных
Определённые и несобственные интегралы	Кратные и криволинейные интегралы по мере
Обыкновенные дифференциальные уравнения	Теория поля
Ряды	Теория функций комплексной переменной
Интегральные преобразования	Уравнения с частными производными

Параллельное чтение двух математических курсов, если оно когда-нибудь будет принято, позволит повысить качество преподавания. Разделение математиков на алгебраистов и геометров – это объективный общепризнанный факт, и то обстоятельство, что в высшей технической школе оно игнорируется, столь же неправильно, как не признавать различий между мужчиной и женщиной. Но, учитывая отечественные реалии, в данном учебнике полного разделения материала на две части ещё не произведено, и принята та последовательность глав, которая наилучшим образом отвечает логике единого курса.

Мы знаем, что студенты обычно не читают предисловий, поэтому используем его для откровенного разговора со своими молодыми коллегами. Все мы помним своих университетских профессоров и благодарны им за науку. Становясь преподавателями математики в техническом вузе, мы на первых порах пытаемся во всём копировать их, но при этом допускаем серьёзную ошибку.

**Наши учителя были нацелены на подготовку профессиональных математиков,  
а мы должны вести подготовку высококлассных инженеров.**

Надеемся, что наша новая книга в этом деле сможет оказать вам существенную помощь. Большой объём фактического материала, собранный на её страницах, даст возможность подготовить добротный курс лекций, опирающийся на приложения. Кроме того, мы начинаем решать эту задачу уже с предисловия, раздавая, с высоты своего опыта, добрые советы.

Включайте в лекции как можно больше материала; не идите на поводу у большинства; помните, что в любом потоке за вашей работой внимательно наблюдают те студенты, которые понимают каждое ваше слово; на них и ориентируйтесь, остальные подтянутся. Не увлекайтесь формальными доказательствами; целесообразно показывать те, которые наглядно иллюстрируют красоту и силу математических методов; по поводу остальных – отсылайте любопытных к нашему учебнику; ради этой экономии времени, в том числе, мы его и составляли. Везде, где это только возможно, заменяйте доказательства теорем их геометрической интерпретацией. Освободившееся время посвящайте иллюстрации методов решения задач; показывайте разные методы; если это возможно – то все, которые известны. При контроле знаний основное внимание уделяйте практике; на экзамене по математике разрешайте использование учебных пособий; поощряйте своевременное приобретение и умелое использование студентами справочников.

Кто-то решит, что эти советы вредны, но мы так не считаем. Более того, это не наши советы, а кредо немецкой технической школы, которая, как известно, является лучшей в мире. Поэтому теорема о пользе этих советов доказана самой жизнью, и нам всем остаётся разобраться с её следствиями.

Впрочем, мы давно уже не живём в Стране Советов, скорее – в стране чудес из сказки Кэрролла, и поэтому следовать им или игнорировать – решать вам и вашей администрации. Если будет интересовать результат, а не сам процесс или место в нём, то победа здравого смысла окажется полной и быстрой.

\* \* \*

Данная книга продолжает серию учебной и научной литературы «Фундаментальное образование для высоких технологий», начатую учебником «Основы линейной алгебры и её приложений в технике» тех же авторов; призываем коллег правильно оценить нашу позицию и поддержать этот почин.

Выражаем благодарность профессорам Ю.В. Ганделю, А.Г. Николаеву и В.Г. Солодову, взявшим на себя труд рецензирования учебника, а также нашему постоянному издателю Л.Д. Черкашину, который сумел достичь органического единства между формой и содержанием этой книги.

Свои отзывы об учебнике просим направлять по адресу: 61002, Украина, г. Харьков, ул. Фрунзе, д. 21, НТУ «Харьковский политехнический институт», редакционно-издательский отдел.

*Авторы*

*Город Харьков, 12 апреля 2009 года*

# Глава 1. Линейная алгебра

Современная математика является единой наукой, которая быстро развивается во многих направлениях. Границы между отдельными её разделами размыты, подвижны, и, расширяясь, рождают новые разделы. Поэтому выбор порядка изложения материала в рамках общего курса высшей математики представляет собой сложную задачу, не имеющую единственного решения. Показательно, что в технических вузах первым рассматривается один из самых «молодых» разделов математики, сформировавшийся в конце 19-го и первой половине 20-го веков. Алгебра матриц и линейных операторов, созданная для



**Гамильтон Уильям Роуан  
(1805 – 1865)**



**Кэли Артур  
(1821 – 1895)**

решения актуальных проблем квантовой механики, нашла многочисленные приложения в других разделах физики и широко используется в инженерных расчётах сложных технических устройств.

Основателями матричного исчисления являются английские математики Гамильтон и Кэли. Теория определителей появилась раньше понятия матриц (в трудах Крамера, Лапласа, Кронекера и Гаусса) и использовалась только для решения систем линейных уравнений. Теория линейных пространств и линейных операторов была создана Гильбертом, Эрмитом, Жорданом, Фредгольмом и знаменитым львовским математиком Банахом.

## § 1. Матрицы и определители

### 1.1. Основные определения

**Матрицей размера  $m \times n$**  называется совокупность  $m \cdot n$  чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов.

В дальнейшем для записи такой матрицы будет применяться одно из следующих обозначений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$