Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев

Основы линейной алгебры

и её приложений в технике

Утверждено
Министерством образования и науки Украины
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений

Харьков НТУ «ХПИ» 2002

ББК.22.143
Г 27
УДК 512.64

Р е ц е н з е н т ы:
Ю.В. Гандель, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина;
В.С. Гапонов, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой деталей машин и прикладной механики Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»;
В.И. Мороз, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и проектирования машин Украинской государственной академии инженеров железнодорожного транспорта.

Гриф присвоен Министерством образования и науки Украины,
письмо № 1/11 – 2016 от 20.06.2002 г.

Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л.
Г 27 Основы линейной алгебры и её приложений в технике: Учебник.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – 542 с. – На русск. яз.

ISBN 966-593-283-7

Содержит систематическое изложение курса линейной алгебры и основ функционального линейного анализа, ориентированное на использование соответствующих методов для решения практических инженерных задач.

Предназначается для студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников технических университетов.

Містить систематичний виклад курсу лінійної алгебри і основ функціонального лінійного аналізу, орієнтований на використання відповідних математичних методів для розв’язання практичних інженерних задач.

Призначено для студентів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників технічних університетів.

Contains the systematic summary of the linear algebra course and the basis of functional linear analysis, oriented to using the corresponding mathematical methods for solving practical engineering tasks.

Intended for students, post-graduates, teachers and scientist of the technical universities

Ил. 203. Табл. 2. Библ. 34 назв.

ББК 221.143

ISBN 966-593-283-7

Оглавление

Об алгебре – с любовью...

(вместо предисловия)

В 50-ые годы XX - го столетия, когда Мировой океан ещё не был загрязнён радиоактивными отходами, и в нём во множестве водились киты, в бывшем Советском Союзе была издана новая книга, которая называлась "Справочник китобоя". Так получилось, что эта полезная книга совершенно неожиданно для её авторов получила известность не только у "героев – китобоев", но и среди математиков. Тому виной была приведенная в справочнике формула для определения массы выловленного кита. В самой формуле, кроме габаритных размеров кита, использовалась общеизвестная константа π, а далее (на всякий случай?) следовало разъяснение –

***"где π для кита равняется 3,14"*.**

Кого-то эта фраза тогда просто рассмешила, других – повергла в шок (какое кощунство!), а третьих – заставила задуматься о серьёзных вещах. Математики, как вы, наверняка, догадываетесь об этом, в основном люди очень сообразительные. И поэтому они быстро смогли понять, что место "кита" в этой фразе мог бы, например, занять инженер, или любой другой специалист, профессия которого не требует знания шестой значащей цифры ответа. А ещё то, что отсутствие абстрактного воображения - это не всегда зло, но часто – благо, поскольку позволяет быстро фокусировать внимание на главном. И что математик, работающий преподавателем в инженерном вузе, обязан учить математике именно ***будущего инженера****, а не пытаться вырастить из него новое "математическое дарование".*

Но в этой связи возникает много вопросов. Можно ли говорить о существовании особой "математики для инженеров" или, скажем, "математики для бизнесменов", "математики для военных"? И как увязать её учебный курс с теми личностными особенностями будущего специалиста, которые обеспечили выбор данной профессии и целенаправленно формируются ею? Где должна пролегать грань между доказательностью изложения и его доступностью? Каким методам доказательных рассуждений (индуктивным или дедуктивным) отдавать приоритет? Сохранять ли и далее в учебном курсе "чистоту" методов высшей математики либо сразу же учитывать реалии их численной реализации?

Если бы мы не знали ответов на эти вопросы, то никогда не решились бы публиковать эту книгу. Но для того, чтобы найти их, нам пришлось в качестве практикующих преподавателей высшей математики каждый учебный день на протяжении десятков лет открывать двери студенческих аудиторий. А ещё – наводить новые мосты между математикой и техническими науками и каждый день самим путешествовать по этим мостам, соединяющим два берега человеческого знания.

Весь этот учебник, от первой до последней его страницы, собственно говоря, и является нашим развёрнутым ответом на эти вопросы. Но для тех нетерпеливых читателей, кого смутит размер этого "ответа", спешим сообщить основополагающие принципы, которыми мы руководствовались при его подготовке.

* * *

Современный этап развития науки, техники и общества в целом требует повышения роли фундаментальных дисциплин в системе высшего образования Украины. Организационные меры решения этой проблемы, связанные с переводом многих технических вузов в ранг университетов, должны быть поддержаны изданием новых учебников. Особенностью таких учебников является углубление теоретических разделов курса при одновременном расширении фактического материала, который, с одной стороны, иллюстрирует приложения теории к практике, а с другой стороны, делает изложение доступным и интересным. Образцом для таких учебников можно считать, например, признанный во всём цивилизованном мире «Берклеевский курс физики», или, если приводить примеры математической литературы, «Курс математической физики» А.Н. Тихонова и А.А. Самарского.

Современный учебник по математике для технического университета должен не только сообщать своим читателям всю, «без утайки», сумму знаний, которая может понадобиться в их практической деятельности, но и ***учить применять математические методы при решении практических задач****.*

Он должен содержать большое число полностью рассмотренных ***примеров****, которые как раз и учат применять эти методы на практике. Примеров в такой литературе не может быть много, их всегда только мало.*

Он должен показать на многочисленных примерах силу основного математического метода – ***метода математической аналогии****, являющегося действительной основой самой математики и определяющего её главенствующее место в науке.*

Он должен помочь ***полюбить математику*** *– «царицу наук» и основу любого подлинно научного знания, а не бояться её, как это зачастую бывает со студентами и выпускниками технического вуза.*

Он должен существенно расширить общенаучный и терминологический ***кругозор*** *читателя.*

Он должен стать их ***опорой в будущей научной и практической деятельности****.*

Он не может использовать принятый ранее для математической литературы «назидательный тон» подачи материала. Автор для молодого (и не очень молодого) читателя должен быть скорее советчиком и единомышленником, но не занудной всезнайкой. Автор должен любить своего читателя и не скрывать этих чувств.

*Учебник должен быть хорошо иллюстрирован. Особенность студентов технических вузов заключается в том, что они в своей массе обладают конкретным, а не абстрактным мышлением; к тому же в процессе обучения они привыкли иметь так называемую «****зрительную опору****» – рисунок или чертёж. Эта особенность должна быть обязательно учтена при подготовке учебника по математике.*

*   *   *

Этим принципам мы и пытались следовать при подготовке данного учебника. Удалось ли нам решить эту задачу – судить вам. Заметим, что других, похожих на него учебников по линейной алгебре, в бывшем СССР и странах СНГ ранее не издавалось.

Учебник составлен в полном соответствии с программой курса высшей математики для политехнического университета Украины.

Изучение материала первых пяти глав в основном базируется на тех знаниях, которые были получены в школьном курсе математики, и только в отдельных случаях используются некоторые сведения из университетского курса математического анализа, читаемого в том же семестре параллельно или последовательно. Параграфы и примеры, отмеченные звёздочкой, при первом чтении рекомендуется пропустить.

В остальных четырёх главах книги содержится материал, который изучается на специальных курсах технического университета по программе подготовки специалистов и магистров. Эта часть книги написана не только для студентов; она должна быть полезна также аспирантам и научным сотрудникам, занимающимся математическим моделированием технических объектов. Поэтому наряду с алгеброй конечномерных пространств здесь изложены азы функционального линейного анализа.

Материал разбит на главы и параграфы, которые, как и примеры, имеют сквозную нумерацию. Формулы, на которые имеются ссылки в тексте, нумеруются в пределах главы, а при редких ссылках на формулу из другой главы используется двойная нумерация (например, запись (1.2) обозначает формулу с номером (2) из первой главы).

Выражаем благодарность профессорам Ю.В. Ганделю, В.С. Гапонову, В.И. Морозу и доценту Н.А. Чикиной, взявшим на себя труд рецензирования учебника и сделавшим много ценных замечаний по тексту. Но главные наши рецензенты – это вы, наши читатели. Если опыт покажется вам удачным, мы напишем продолжение.

Свои отзывы об учебнике просим направлять по адресу: 61002, Украина, г. Харьков, ул. Фрунзе, д.21, НТУ "Харьковский политехнический институт", редакционно-издательский отдел.

Авторы

Глава 1. Матрицы

§ 1. Основные определения и примеры

Определения. Числовой матрицей размера $m \times n$ ***называется совокупность*** $m \cdot n$ ***чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей*** m ***строк и*** n ***столбцов.*** Числа, составляющие матрицу, называются её ***элементами***. Горизонтальные и вертикальные ***ряды*** элементов образуют, соответственно, ***строки*** и ***столбцы матрицы***.

Для записи матрицы размера $m \times n$ применяется одно из следующих обозначений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Строки нумеруются в направлении сверху вниз, а столбцы – слева направо. Для краткого обозначения матрицы употребляются большие латинские буквы $(A, B, C \ldots)$ либо символы $\left[a_{ij} \right]$, где выражение a_{ij} обозначает элемент матрицы, расположенный в i-той строке и j-том столбце.

Точка отсчёта. В математике и её приложениях давно и часто используются числовые таблицы прямоугольной формы. Такую форму имеют известные вам ***тригонометрические таблицы Брадиса***, ***логарифмические таблицы Непера***. Приведём другой, менее известный пример.

В 1788 году ***младший лейтенант артиллерии Наполеоне Буонапарте*** сдаёт экзамены знаменитым французским ***математикам и механикам Лапласу и Монжу*** и с отличием оканчивает Парижскую военную школу. Выпускная работа содержала новое решение задачи внешней баллистики и разработанные на его основе таблицы для расчёта дальности полёта ядра. 17 декабря 1793 года ***капитан Буонапарте*** использует эти таблицы для выбора позиций артиллерийских батарей и при минимальных потерях со стороны осаждающих войск берёт Тулон, охваченный мятежом роялистов. На следующий день он становится ***генералом Бонапартом***, а через 10 лет – ***императором Франции Наполеоном***.

Но являются ли таблицы Брадиса, Непера или Наполеона матрицами? Формально – да, но по существу – нет. Числовую таблицу следует считать матрицей, если при каждом обращении к ней она используется или преобразуется как единое целое; поэтому в определении матрицы вместо термина «***множество элементов***» используется более узкий термин - «***совокупность элементов***». Попробуйте вспомнить задачу, для решения которой понадобилась бы, скажем, вся таблица Брадиса для синуса. Правильно, таких задач не бывает, таблица Брадиса всегда используется ***фрагментарно***.

Понимание этих различий пришло в математику примерно через сто лет после наполеоновских войн и связано с работами двух знаменитых английских учёных ***Гамильтона*** и ***Кэли***, которые и считаются основоположниками матричного исчисления.

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов (то есть $m = n$), называется ***квадратной***; число n называется ***порядком квадратной матрицы***. Квадратная матрица A ***первого порядка*** состоит только из одного элемента a_{11}.

Матрицы, не являющиеся квадратными, называются ***неквадратными***.

Неквадратная матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется, соответственно, ***вектор-строкой*** или ***вектор-столбцом***. ***Матрицы-векторы*** в линейной алгебре обладают теми же свойствами, что и обычные векторы – в векторной алгебре.

Две матрицы считаются ***равными***, если они имеют одинаковые размеры и элементы, расположенные на одинаковых местах, равны между собой.

Элементы числовой матрицы могут быть представлены в ней в виде констант, функций или алгебраических выражений, имеющих конкретные числовые значения. В приложениях математики к естественным и техническим наукам матрицы, составленные из констант, как правило, являются ***матрицами коэффициентов*** некоторой системы уравнений.

Пример 1. **Матричные шифры**. Системам ***линейных уравнений***

$$\begin{cases} x+2\cdot y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \textbf{(1)} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-0.1\cdot y+0.7\cdot z=1.6 \\ -2\cdot x+3\cdot y-0.5\cdot z=0.5 \\ 0.1\cdot x+y-2\cdot z=-0.9 \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

взаимно однозначным образом соответствуют матрицы коэффициентов

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.7 & 1.6 \\ -2 & 3 & -0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & -2 & -0.9 \end{pmatrix},$$

составленные из числовых констант, причём в рассматриваемых примерах матрица A оказалась квадратной матрицей второго порядка, а B – неквадратной матрицей размера 3×4. Ясно, что в матрицах A и B содержится в зашифрованном виде вся информация, необходимая и достаточная для решения систем (1) или (2).

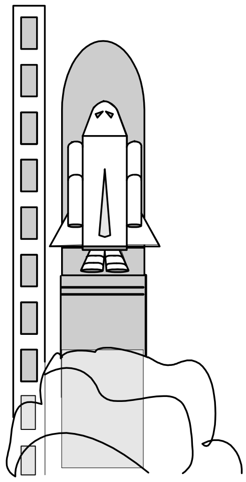


Рисунок 1

Разумеется, системы (1) и (2) настолько просты, что их можно решить без привлечения матриц. Найдите эти решения самостоятельно, используя те методы, которые учили в школе (например, метод исключения неизвестных). Решение системы (1) очевидно ($x=0$; $y=0$), но чтобы найти решение системы (2) вам придётся основательно поработать. А теперь представьте, как вы будете решать этим же методом систему, содержащую 100 уравнений и 100 неизвестных. Трудности покажутся непреодолимыми, но именно такой, приблизительно, порядок имеют системы уравнений, которые приходится решать, например, при выводе космического аппарата на заданную орбиту или принятии оптимального решения в экономике. Так, перед запуском ракетоносителя «Титан», выводящего на орбиту искусственного спутника Земли космический корабль многоразового использования «Шаттл» (рис.1), собирается и обрабатывается информация о силе и направлении ветра для нескольких десятков точек, расположенных на разгонном участке полёта ракеты. Конечно, все вычисления в этих случаях проводит ЭВМ, но информация, необходимая для работы компьютерных программ, представляется только в матричном виде.

Пример 2. **Коммутационная матрица**. Рассмотрим другой пример, в котором матрица, составленная из числовых констант, выступает в качестве удобного инструмента для записи и представления информации. На рис.2 изображён так называемый n - ***полюсник***, то есть сложная электрическая или электромеханическая схема со многими вводами и выводами (клеммами). Клеммы пронумерованы от 1 до n. Если взять любую пару клемм с номерами $i\in\overline{1,n}$ и $j\in\overline{1,n}$, то, анализируя схему, можно установить, имеется ли в данный момент времени между ними непосредственная электрическая связь или такой связи нет. Для графического представления этой информации используется квадратная матрица n-го порядка, называемая ***коммутационной матрицей*** или ***неориентированным графом связности*** G. Матрица G составляется из нулей и единиц таким образом, что при наличии связи между i-той и j-той клеммами элементы g_{ij} и g_{ji} получают значение 1, если же связи

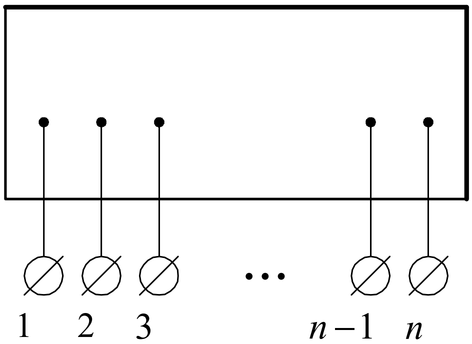


Рисунок 2

нет, то они равны 0. Так, используя это правило для пускового реле электродвигателя можно получить матрицу

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

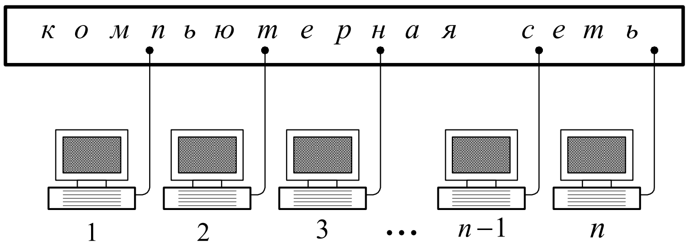


Рисунок 3

Пример 3. **Графы локальных сетей**. Аналогичным образом определяется граф связности для информационной (например, компьютерной) сети (рис.3).

Пример 4. **Матрица вращения**. На рис.4 пунктиром показан маршрут вертолёта, совершающего разведывательный полёт над морем. В точке O расположен крейсер. Положение вертолёта в данный момент времени отмечено точкой O_1.

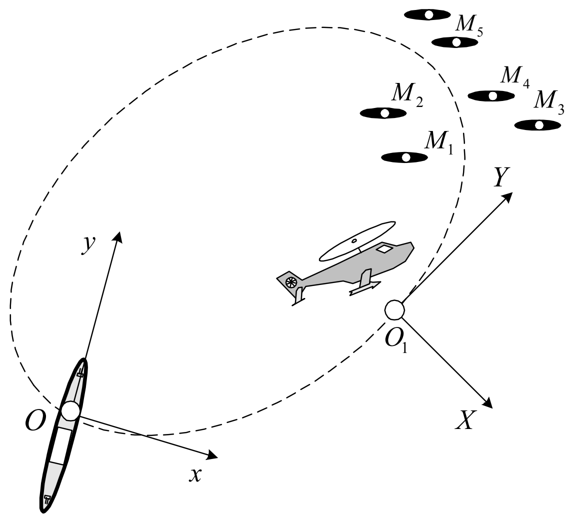


Рисунок 4

Вертолёт собирает и передаёт на крейсер информацию о большом количестве надводных и подводных целей, обозначенных точками M_i. При этом бортовая аппаратура вертолёта сначала определяет координаты всех целей (в том числе и самого крейсера) в системе координат O_1XY, движущейся вместе с вертолётом, а затем расчётным путём получает координаты этих же точек в системе координат Oxy, перемещающейся вместе с крейсером. Порядок пересчёта координат при переходе от одной декартовой прямоугольной системы (O_1XY) к другой (Oxy) проиллюстрирован на рис.5.

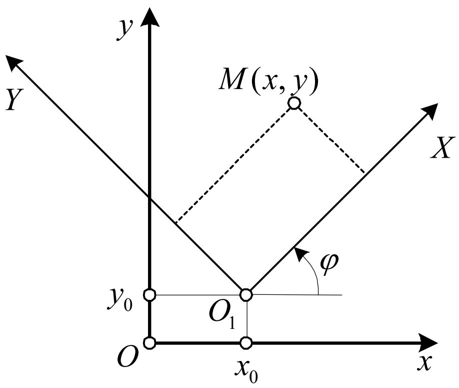


Рисунок 5

В курсе аналитической геометрии будет показано, что такой пересчёт удобнее всего производить при использовании квадратной матрицы второго или третьего порядка $U=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ или $S=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & x_0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & y_0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$, элементы которых выражаются через тригонометрические функции угла поворота φ.

Например, если преобразование системы координат сводится к одному только повороту осей, то старые и новые значения координат точки на плоскости связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot X - \sin\varphi \cdot Y \\ y = \sin\varphi \cdot X + \cos\varphi \cdot Y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y \\ Y = -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \end{cases}. \tag{3}$$

Матрица U , элементы которой служат коэффициентами пересчёта координат по формулам (3), называется ***матрицей вращения***.

Пример 5. **Матрица проводимости.** При составлении коммуникационной матрицы n - полюсника (смотри **пример 2**) мы ограничились только качественным анализом схемы, ответив на вопрос, есть электрическая связь между клеммами i и j , или такой связи нет. Гораздо больше информации о схеме содержит так называемая ***матрица проводимости***.

Обозначим величину силы тока на i - той клемме J_i , а напряжение на этой же клемме – U_i . Тогда, если все элементы схемы удовлетворяют основным законам электростатики – закону Ома и закону Кирхгофа, то зависимость токов от напряжений будет описываться равенствами следующего вида:

$$\begin{cases} J_1 = p_{11} \cdot U_1 + p_{12} \cdot U_2 + \ldots + p_{1n} \cdot U_n \\ J_2 = p_{21} \cdot U_1 + p_{22} \cdot U_2 + \ldots + p_{2n} \cdot U_n \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ J_n = p_{n1} \cdot U_1 + p_{n2} \cdot U_2 + \ldots + p_{n\,n} \cdot U_n \end{cases}.$$

Числа $p_{i\,j}$ имеют физическую размерность $[\,1/\textit{Ом}\,]$ и могут быть получены расчётным или экспериментальным путём. Эти числа и образуют матрицу проводимости $P = \left[\; p_{i\,j} \;\right]$. Матрица P , так же как и коммуникационная матрица G , является квадратной матрицей n -го порядка. Если i -тая и j -тая клеммы не связаны между собой, то $g_{i\,j} = 0$ и $p_{i\,j} = 0$, в остальных случаях $g_{i\,j} = 1$, а $p_{i\,j}$ принимает некоторое вещественное (то есть, как правило, нецелое и в половине случаев - отрицательное) значение, определяющее влияние напряжения U_j на силу тока J_i .

Пример 6. **Полезная матрица**. Приведём пример матрицы, элементы которой представлены в виде алгебраических выражений. В алгебре при доказательстве некоторых теорем используется квадратная матрица n -го порядка

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

свойства которой изучал известный голландский математик ***Вандермонд***.

При подстановке в эту матрицу конкретных значений параметров (например, $n = 4$; $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $a_3 = 5$; $a_4 = -4$) получается числовая матрица, каждый столбец которой составлен из возрастающих степеней a_i :

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 9 & 4 & 25 & 16 \\ 27 & 8 & 125 & -64 \end{pmatrix}.$$

Если матрица имеет очень большие размеры и/или включает в себя группы элементов, которые можно объединить по некоторому общему для них признаку, то вместо числовой матрицы используется специальная алгебраическая конструкция, которая называется ***блочной матрицей***.

Пример 7. **Виртуальные графы**. Попробуйте представить, какие гигантские размеры имел бы граф связности, составленный для городской телефонной сети, насчитывающей сотни тысяч абонентов (или для глобальной сети INTERNET, насчитывающей миллионы пользователей). Ясно, что при записи такой матрицы телефонные номера обязательно должны быть объединены в группы по признакам принадлежности к одной АТС, к одному направлению на данной АТС и т.п., а электронные адреса пользователей – по признакам принадлежности к региональным сетям, местным сетям и т.д. Да и сам граф связности для сетей такого размера, даже если его удастся составить, практического значения иметь не будет. Для телефонной сети, например, важна загруженность линий между отдельными АТС; на основании этой информации принимаются решения о строительстве новых или перераспределении имеющихся линий связи. При определении загруженности все элементы матрицы связности, отвечающие выделенной группе телефонных номеров, объединяются.

Определение. Матрица, у которой все элементы являются матрицами некоторых ***согласованных размеров***, называется ***блочной***, а элементы такой матрицы называются ***блоками***.

Согласование размеров означает, что все блоки, расположенные в одной строке блочной матрицы, имеют одинаковое число строк, а в одном столбце – одинаковое число столбцов. Число строк k и число столбцов l блочной матрицы размера $m \times n$ образуют её ***формат*** (или **блочный размер**) $k \times l$.

Параметры, определяющие формат и размер блочной матрицы A, связаны очевидными соотношениями:

$$k \le m; \qquad l \le n.$$

Для сокращённой записи блочной матрицы используется обозначение $A=\left[\ A_{ij}\ \right]$, где выражение A_{ij} обозначает матрицу, расположенную в i-той строке и j-том столбце блочной матрицы A.

Пример 8. **Матрица всегда должна выглядеть красиво!** Матрицу S из рассмотренного выше **примера 4** при решении некоторых задач удобно представлять в виде следующей блочной матрицы

$$S=\begin{pmatrix} U & F \\ \Theta & I \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad U=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \quad F=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \quad \Theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I=\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Блоки, как показывает этот пример, могут быть составлены из элементов любого типа – числовых констант, функций или алгебраических выражений.

Определение. Объединение элементов матрицы в блоки называется ***группировкой***, обратная операция – ***развёртыванием***.

Целью группировки является уменьшение видимых размеров матрицы и, как следствие, упрощение алгебраических действий, выполняемых с ней. **Для равенства двух блочных матриц A и B достаточно выполнения равенства $A_{ij}=B_{ij}$ для всех соответствующих блоков**. Однако одна и та же матрица может быть сгруппирована многими способами, поэтому равные матрицы могут иметь блочные матрицы разных форматов.

Рассмотрим матрицу $A_0=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. У блочных матриц $A=\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} D & C \end{pmatrix}$, где $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, форматы одинаковы, а соответствующие элементы различны, более того, матрицы $A=\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}$ и $F=\begin{pmatrix} D & D & D \end{pmatrix}$ имеют даже разный формат, но все они, как блочные матрицы, являются результатом различной группировки элементов одной и той же матрицы A_0.

Следовательно, ***для сравнения блочных матриц, имеющих несовпадающие форматы или разные размеры соответствующих блоков, их нужно предварительно развернуть***.

Пример 9. **Матричные скобки**. Процедуры группировки и развёртывания матриц во многом напоминают операции расстановки и раскрытия скобок в элементарной алгебре. Проиллюстрируем это на следующем примере:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Пример 10. **Передаточная матрица**. Для иллюстрации методов группировки матрицы обратимся к ещё одному примеру из электротехники. На рис.6 схематически изображён так называемый $2 \cdot n$ - ***полюсник***, имеющий n входных и n выходных клемм, связанных между собой посредством некоторой сложной и разветвлённой электрической цепи. Если на входные клеммы подать постоянные напряжения, а к выходным клеммам подключить нагрузку, то через время во всех элементах цепи токи и напряжения установятся на некоторых постоянных уровнях. При этом в соответствие с законами электростатики токи $J_i^{вых}$ и напряжения $U_i^{вых}$ в выходных клеммах будут связаны с токами $J_i^{вх}$ и напряжениями $U_i^{вх}$ во входных клеммах зависимостями следующего вида:

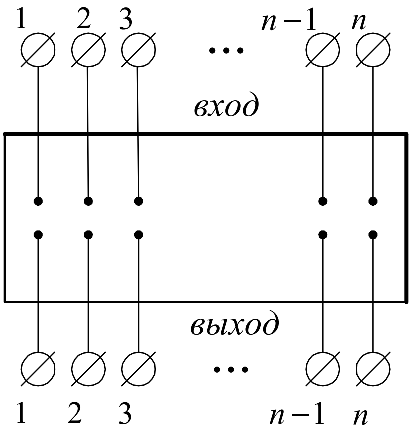


Рисунок 6

$$\begin{cases} J_1^{вых} = f_{11} \cdot J_1^{вх} + \ldots + f_{1n} \cdot J_n^{вх} + g_{11} \cdot U_1^{вх} + \ldots + g_{1n} \cdot U_n^{вх} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_n^{вых} = f_{n1} \cdot J_1^{вх} + \ldots + f_{nn} \cdot J_n^{вх} + g_{n1} \cdot U_1^{вх} + \ldots + g_{nn} \cdot U_n^{вх} \\ \\ U_1^{вых} = h_{11} \cdot J_1^{вх} + \ldots + h_{1n} \cdot J_n^{вх} + d_{11} \cdot U_1^{вх} + \ldots + d_{1n} \cdot U_n^{вх} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n^{вых} = h_{n1} \cdot J_1^{вх} + \ldots + h_{nn} \cdot J_n^{вх} + d_{n1} \cdot U_1^{вх} + \ldots + d_{nn} \cdot U_n^{вх} \end{cases} ,(4)$$

где $f_{ij}, g_{ij}, h_{ij}, d_{ij}$ – некоторые постоянные коэффициенты, которые могут быть определены для данного $2 \cdot n$ - полюсника расчётным или экспериментальным путём.

Коэффициенты этих уравнений образуют квадратную матрицу S порядка $2 \cdot n$, называемую ***передаточной матрицей*** $2 \cdot n$ - полюсника. Эта матрица обычно записывается и используется при инженерных расчётах электрических цепей в виде блочной матрицы, состоящей из четырёх квадратных блоков n - го порядка:

$$S = \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} & g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn} & g_{n1} & \ldots & g_{nn} \\ h_{11} & \ldots & h_{1n} & d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} & d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & D \end{pmatrix},$$

где $F = \left[f_{ij} \right]; G = \left[g_{ij} \right]; H = \left[h_{ij} \right]; D = \left[d_{ij} \right]$.

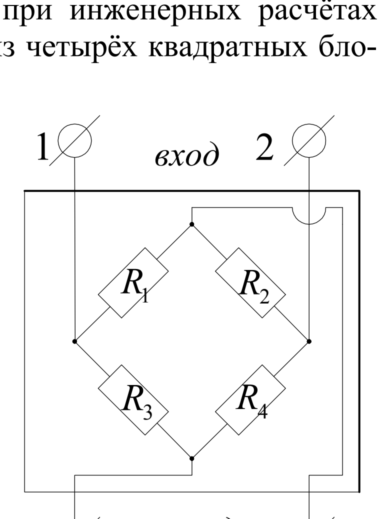


Рисунок 7

Пример 11[*] (для будущих инженеров – электриков). **Матрица из тензорезисторов**. Используя известные вам законы Ома и Кирхгофа, попытайтесь самостоятельно найти блоки передаточной матрицы для четырёхполюсника, показанного на рис.7 (тензометрический мост).

Указание. Рассмотрите отдельно следующие случаи:

1) все сопротивления одинаковые (то есть, $R_i = R$, $i \in \overline{1,4}$);

2) сопротивления пропорциональные ($R_1 : R_2 = R_3 : R_4$);

3) сопротивления непропорциональные ($R_1 : R_2 \neq R_3 : R_4$).

При помощи такой схемы, например, производится измерение механических напряжений, возникающих в деталях механизмов и машин при их работе. Для этого в цепи в качестве сопротивлений R_i используются тензорезисторы. Тензорезисторы наклеиваются на поверхность детали и деформируются вместе с ней; при этом величина их электрического сопротивления изменяется пропорционально деформации. В результате происходит изменение передаточной матрицы S, которое фиксируется при помощи осциллографа.

Определение. Пусть у матрицы F размера $m \times n$ все элементы являются числовыми функциями некоторого независимого аргумента t. Тогда матрица F называется ***матрицей – функцией*** и обозначается $F(t)$ или $\left[\, f_{ij}(t) \,\right]$.

При проведении измерений быстротекущих процессов передаточная матрица S тензометрического моста оказывается блочной матрицей – функцией $S(t)$ времени t.

Кроме числовых матриц в математике и её приложениях используются матрицы, элементами которых являются ***векторы***, а также ***логические*** и ***строчные переменные*** (***литералы***); с такими матрицами вы встретитесь при изучении векторной алгебры или в курсе информатики. В курсе линейной алгебры изучаются свойства числовых матриц, поэтому далее в этой книге ***под термином матрица будем подразумевать только числовые матрицы***.

Пример 12. **Матрицы и тензоры**. Среди матриц особое место занимают квадратные матрицы, а также матрицы – векторы, поскольку именно они чаще других встречаются в приложениях математики к естественным и техническим наукам. Выше уже говорилось о том, что обычные числа (вещественные или комплексные) можно считать частным случаем квадратных матриц (первого порядка). В свою очередь, квадратные матрицы являются частным случаем n - мерных таблиц (или числовых массивов), называемых ***тензорами***. Число измерений тензора называется его ***валентностью***, а длина горизонтального ряда – ***порядком***. На рис. 8 схематически изображены тензоры первой, второй и третьей валентности,

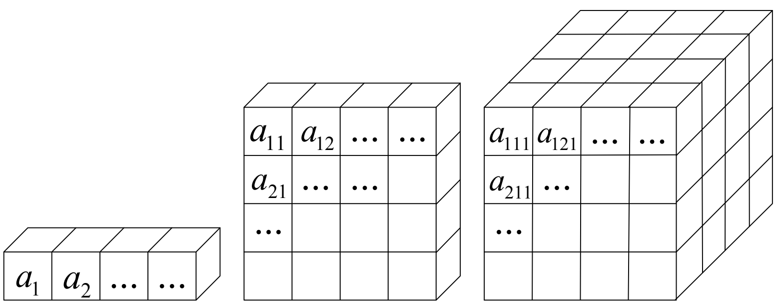


Рисунок 8

имеющие четвёртый порядок; тензоры первой и второй валентности являются матрицами. Тензоры третьей валентности используются в прикладных задачах механики твёрдого тела, четвёртой валентности – в теории относительности и связанных с ней разделах теоретической физики.

§ 2. Частные виды матриц

Определение. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется ***нулевой***. Такие матрицы обозначаются символом Θ.

Пусть задана квадратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ образуют ***побочную диагональ*** матрицы A.

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица порядка n имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица представляет собой пример так называемой ***разреженной матрицы***.

Определение. Матрица называется ***разреженной***, если в ней нулевые элементы преобладают над ненулевыми элементами.

При записи разреженных матриц используются специальные приёмы сжатия и кодирования информации, содержащейся в них. Так, для сокращённой записи диагональной матрицы используется обозначение

$$D = diag\,(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}).$$

Определение. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется ***единичной***.

За единичными матрицами в математике закреплены постоянные обозначения – I или E, то есть

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \quad E = diag\,(1, 1, \ldots, 1)\,.$$

Почему у единичной матрицы элементы, расположенные вне главной диагонали, приняты равными нулю (а не единице) станет понятно после определения правила умножения матриц.

Кроме диагональных матриц в математике и её приложениях широко применяются так называемые k***- диагональные*** и, особенно часто, ***трёхдиагональные матрицы***.

Определение. Квадратная матрица A n- го порядка называется ***k - диагональной*** (где k – некоторое положительное **нечётное** число), если

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при условии} \quad |i - j| > (k-1)/2\,.$$

Пример 13. **«Железнодорожные» колебания**. На рис.9 схематически изображена простейшая динамическая модель ***цепной механической системы***, состоящей из n масс m_i, связанных между собой пружинами с коэффициентами жёсткости c_i. При помощи такой модели изучаются, например, свободные продольные колебания, возникающие в железнодорожном составе при изменении скорости локомотива.

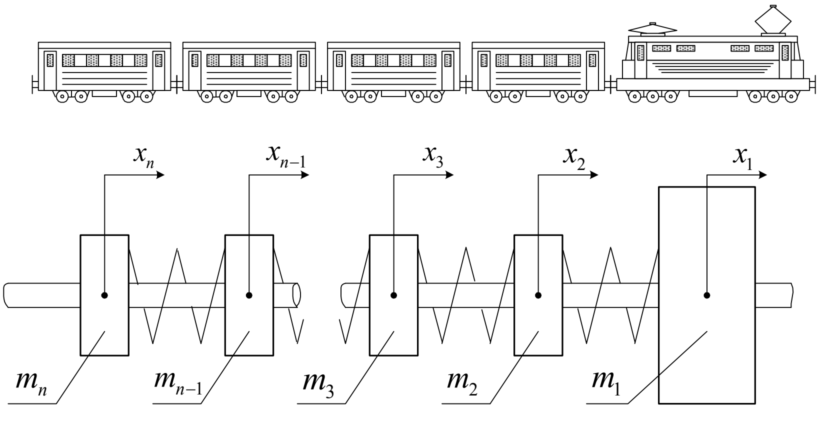


Рисунок 9

Составим математическую модель цепной механической системы. Силы F_i, возникающие в пружинах, будем предполагать пропорциональны-ми деформации пружины, то есть

$$F_i = c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)\ .$$

Ускорения a_i масс системы будем обозначать так, как это принято в механике, то есть $a_i = \ddot{x}_i$, где знак « $\cdot$ » означает дифференцирование по времени. Тогда, в соответствии со вторым законом Ньютона, уравнения движения масс системы примут вид

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot (x_1 - x_2) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 = c_1 \cdot (x_1 - x_2) - c_2 \cdot (x_2 - x_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_{n-1} \cdot \ddot{x}_{n-1} = c_{n-2} \cdot (x_{n-2} - x_{n-1}) - c_{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n) \\ m_n \cdot \ddot{x}_n = c_{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n) \end{cases}. \qquad (5)$$

Коэффициенты, стоящие при неизвестных величинах x_i в правых частях этих равенств, образуют матрицу жёсткости

$$C = \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & -c_1 - c_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 - c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-2} - c_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица C является трёхдиагональной квадратной матрицей n-го порядка. При моделировании колебаний железнодорожного состава коэффициенты жёсткости у всех сцепок предполагаются одинаковыми (то есть, $c_i = c$), и матрица C приобретает более простой вид:

$$C = \begin{pmatrix} -c & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & -2 \cdot c & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & -2 \cdot c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \cdot c & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & -c \end{pmatrix}.$$

Трёхдиагональную структуру имеет и граф связности цепной системы (составить самостоятельно!). При $n > 5$ трёхдиагональные матрицы считаются разреженными.

Определение. Матрица, у которой равны нулю все элементы, расположенные под главной диагональю или над главной диагональю, называется соответственно, ***верхнетреугольной*** или ***нижнетреугольной***.

Треугольные матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

В прикладных задачах треугольные матрицы коэффициентов имеют только те системы, которые описывают устройства простейшего типа.

Пример 14. **Шнур - удлинитель**. Составим передаточную матрицу для простейшего четырёхполюсника, электрическая схема которого показана на рис.10. В соответствии с законами Ома и Кирхгофа выходные значения токов и напряжений определяются равенствами

$$\begin{cases} J_1^{вых} = J_1^{вх} \\ J_2^{вых} = J_2^{вх} \\ U_1^{вых} = U_1^{вх} - R_1 \cdot J_1^{вх} \\ U_2^{вых} = U_2^{вх} - R_2 \cdot J_2^{вх} \end{cases},$$

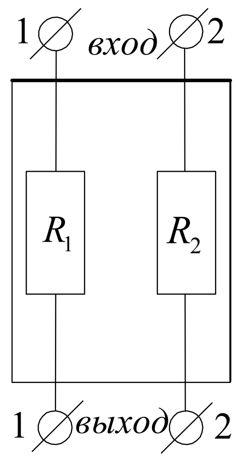


Рисунок 10

коэффициенты которых образуют передаточную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ D & I \end{pmatrix}, \text{ где } D = diag(-R_1, -R_2).$$

Матрица S является нижнетреугольной.

Определение. Блочная матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется, соответственно, ***блочной вектор-строкой*** или ***блочным вектор-столбцом***.

Пусть задана квадратная блочная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ или в сокращённой записи } \left[A_{ij} \right].$$

Матрицы $A_{11}, A_{22}, A_{33}, \ldots, A_{nn}$ образуют ***главную диагональ*** блочной матрицы A.

Определение. Квадратная блочная матрица, у которой блоки, расположенные на главной диагонали, являются квадратными матрицами, а вне главной диагонали – нулевыми матрицами, называется ***блочно - диагональной*** (или ***клеточной***).

Блочно – диагональная матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & D_{22} & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta & \Theta & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для сокращённой записи блочно - диагональной матрицы D используется следующее обозначение:

$$D = diag\,(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn}).$$

Так, единичная матрица E порядка $2 \cdot n$ может быть записана как блочно – диагональная матрица $E = diag\,(I, I)$, где I – единичная матрица n - го порядка.

Если система имеет блочно - диагональную матрицу коэффициентов, то это, как правило, означает, что она распадается на отдельные подсистемы, никак не связанные между собой.

Пример 15. **Распад местной сети**. На рис.11 схематически изображена местная компьютерная сеть частного банка. Сеть хранит и передаёт конфиденциальную информацию, поэтому она изолирована от глобальных сетей типа INTERNET, и включает в себя несколько локальных сетей подразделений и филиалов банка. Каждая локальная сеть имеет свой коммутационный узел (называемый ***сервером***), который связан с серверами других локальных сетей через центральный сервер, расположенный в главном офисе банка. При отключении центрального сервера или технических неполадках на спутнике связи все информационные обмены замыкаются внутри локальных сетей, и граф связности G местной сети приобретает вид блочно – диагональной матрицы

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & G_2 & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta & \Theta & \dots & G_n \end{pmatrix} = diag\,(G_1, G_2, \dots, G_n),$$

где G_i – графы связности локальных сетей.

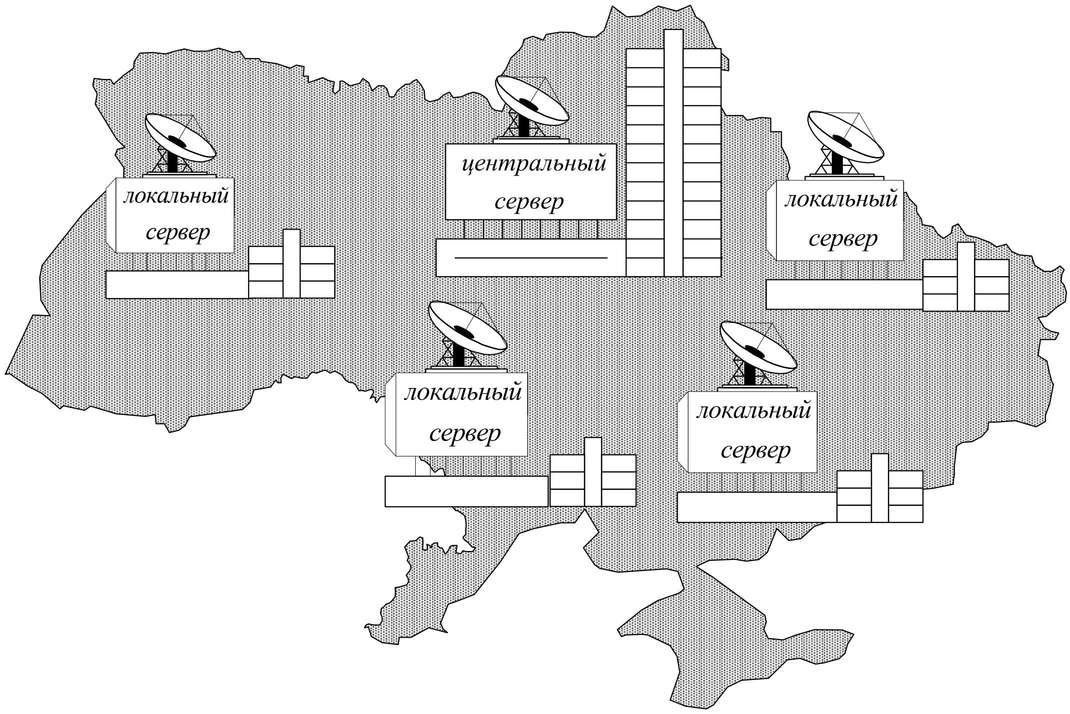


Рисунок 11

Определение. Блочная матрица A с квадратными блоками A_{ij} называется ***блочной k - диагональной*** (где k – некоторое положительное **нечётное** число) или ***ленточной***, если

$$A_{ij} = \Theta \quad \text{при условии} \quad |i-j| > (k-1)/2\,.$$

Пример 16. **Цепная передача**. В простейшей цепной механической системе, рассматриваемой ранее в **примере 13**, положение каждого элемента определялось только одной координатой – перемещением x_i локомотива или вагона вдоль рельсового пути. Железнодорожная сцепка устроена так, что остальные формы колебаний (в вертикальном и поперечном направлении, а также угловые) от вагона к вагону не передаются. На рис. 12 изображён участок так называемой цепной передачи; такая передача используется, например, в велосипедах и мотоциклах. Если колесо 1 является ведущим, а колесо 2 – ведомым, то этот участок оказывается ненагруженным внешними силами, и в нём могут развиваться интенсивные свободные колебания (которые, кстати, и являются главной причиной того, что велосипедная цепь «слетает» с шестерни). Положение i- того звена цепи определяется 6-ю координатами: тремя перемещениями центра звена относительно осей Ox, Oy, Oz, двумя углами поворота оси звена в горизонтальной и вертикальной плоскости, а также углом разворота звена вокруг его оси (смотри рис. 12).

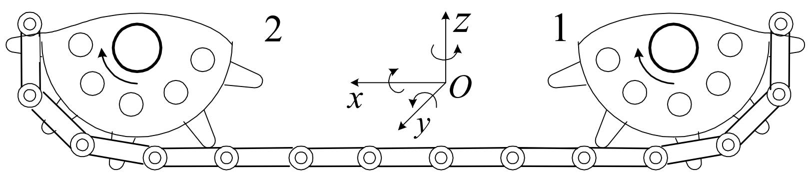


Рисунок 12

Пусть рассматриваемый горизонтальный участок цепи состоит из n звеньев. Перенумеруем координаты всех звеньев в следующем порядке: номера от 1 до 6 получат координаты первого звена, номера от 7 до 12 – такие же координаты второго звена, и так далее. В результате каждая координата получит свой номер $i \in \overline{1, (6 \cdot n)}$; обозначим её x_i. Этой координате соответствует некоторый инерционный коэффициент – масса или момент инерции; обозначим его m_i.

Предположим, что все силы и моменты сил, возникающие в соединениях цепи, пропорциональны изменениям координат. Тогда изменение i - той координаты будет удовлетворять уравнению

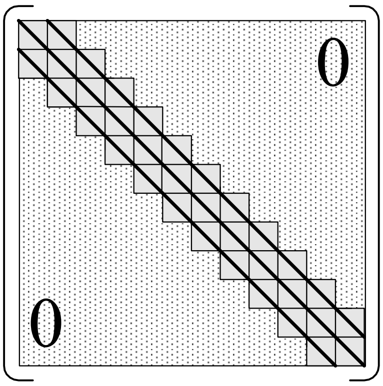


Рисунок 13

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{6 \cdot n} c_{i\,j} \cdot x_j \ ,$$

где $c_{i\,j}$ – некоторые постоянные числа.

Составим из этих чисел квадратную матрицу $C = \left[\ c_{i\,j}\ \right]$ размера $(6 \cdot n) \times (6 \cdot n)$ (так называемую ***матрицу коэффициентов жёсткости***) и изучим её структуру. Представим эту матрицу в форме блочной матрицы $C = \left[\ C_{i\,j}\ \right]$ с квадратными блоками $C_{i\,j}$ шестого порядка. Каждое звено цепи непосредственно связано только с двумя соседними звеньями – предыдущим и последующим; поэтому матрица C оказывается блочной трёхдиагональной матрицей. Если прогибом цепи допустимо пренебречь (то есть, пользуясь терминологией велосипедистов, она хорошо натянута), то колебания по каждой из шести координат происходят независимо от других координат, и это означает, что все ненулевые блоки матрицы являются диагональными. Кроме того, поскольку соединения звеньев также выполнены одинаково, то блоки $C_{i\;i+1}$ и $C_{i+1\;i}$, расположенные симметрично относительно главной диагонали, одинаковы как между собой, так и для всех номеров i. Структура матрицы C для цепной передачи показана на рис. 13.

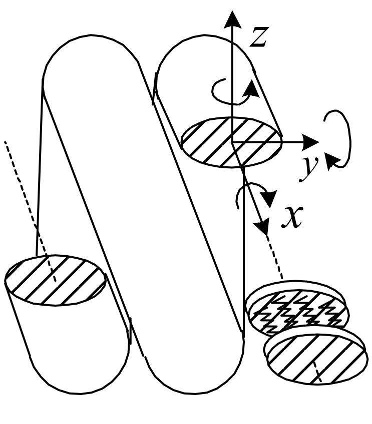


Рисунок 14

Пример 17. **Цилиндрическая пружина**. В пружине, фрагмент которой показан на рис. 14, положение поперечного сечения проволоки так же, как и в цепной передаче, определяется 6-тью координатами, но здесь ось проволоки изогнута, поэтому колебания координат оказывают влияние друг на друга. Если представить пружину в виде объединения большого числа тонких колец, связанных между собой посредством упругого невесомого соединения (в механике такие соединения называются ***идеальными***, смотри рис. 14), то мы получим ещё один пример цепной механической системы. Матрица C коэффициентов жёсткости этой системы также оказывается блочной трёхдиагональной матрицей, но здесь её ненулевые блоки не являются диагональными матрицами. Кроме того, блоки $C_{i\;i+1}$ и $C_{i+1\;i}$, расположенные выше и ниже главной диагонали, в этой системе не равны между собой, но связаны условиями симметрии, о которых будет сказано позже.

Определение. Квадратная блочная матрица, у которой блоки, расположенные на главной диагонали, являются квадратными матрицами, а под главной диагональю или над главной диагональю – нулевыми матрицами, называется соответственно, ***блочной верхнетреугольной*** или ***блочной нижнетреугольной***.

Блочные треугольные матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \Theta & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta & \Theta & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \Theta & \cdots & \Theta \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & \Theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

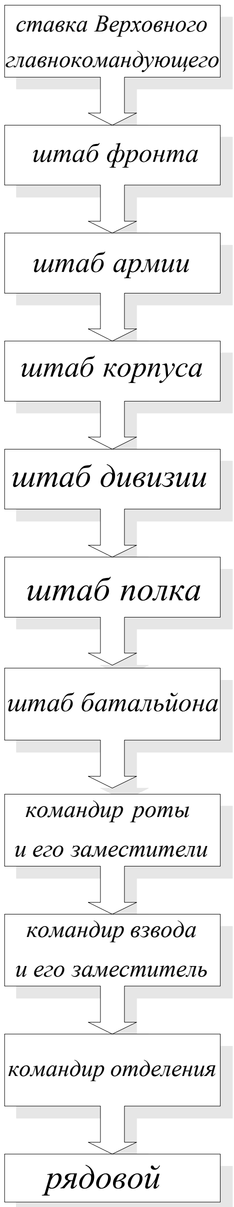


Рисунок 15

Пример 18. **Армейский порядок**. На рис. 15 изображена ***схема управления*** сухопутными войсками во время ведения войны, принятая в настоящее время в большинстве крупных государств. Каждый ***уровень управления*** включает в себя определённое число командиров и начальников, подчинённость которых друг другу и должностным лицам вышестоящих уровней строго регламентируется уставами. Например, командир полка подчиняется командиру своей дивизии и некоторым его заместителям (но не всем), командиру корпуса и большинству его заместителей, командиру армии и всем его заместителям и т.д. Если говорить языком математики, армейские начальники образуют ***частично упорядоченное множество***. Разобраться во всей этой системе отношений помогает ***матрица субординации***, которая строится следующим образом. Сначала составляется вектор – строка, в которой за каждым уровнем управления закрепляется столько элементов, сколько должностных лиц он содержит, причём размещение этих элементов производится слева направо в порядке субординации уровней. В результате каждый командир или начальник в этой строке получает свой номер. Далее составляется квадратная матрица, элементы a_{ij} которой получают только одно из двух значений: *1* – если командир, имеющий i-тый номер подчиняется командиру, имеющему j-тый номер, или *0* – если не подчиняется. Поскольку командиров и начальников в армии много, то получающаяся при этом матрица субординации имеет очень большие размеры, и её удобно представлять в виде блочной матрицы $\left[G_{ij} \right]$, где блок G_{ij} является матрицей субординации между i-тым и j-тым уровнями управления. Командиры нижестоящих уровней управления не имеют право отдавать приказания должностным лицам вышестоящих уровней, поэтому все блоки G_{ij} при $i > j$ являются нулевыми, и матрица субординации оказывается блочной нижнетреугольной матрицей.

В современной армии строго регламентируется не только порядок отдачи приказаний, но и порядок информирования об их выполнении. Вспомните известную сцену из кинофильма режиссёра Юрия Озерова “Последний штурм”, где показано, как “шёл” к Сталину доклад о взятии Рейхстага. Доклады и рапорты подаются по команде от нижестоящих уровней управления к вышестоящим, и эти информационные обмены описываются так называемой ***матрицей донесений***, которая, как несложно это понять, оказывается блочной верхнетреугольной. Матрицы субординации и донесений представляют собой примеры ***ориентированных графов***.

Пример 19. **«Главная матрица» университета**. Попробуйте самостоятельно составить матрицу субординации для университета, в котором вы учитесь. За недостающей информацией можно обратиться к куратору группы.

§ 3. Основные действия над матрицами

Умножение матрицы на число.

Определение*. *Результатом умножения матрицы A ***на число*** λ называется матрица C того же размера, что и матрица A, с элементами

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} .$$

Результат умножения обозначается следующим образом: $C = \lambda \cdot A$.

Из определения следует простое **правило умножения матрицы на число**.

Чтобы умножить матрицу A на число λ, нужно умножить на λ все элементы матрицы A, то есть

$$C = \lambda \cdot A \underset{def}{=} \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Знак « def » означает, что данное ***равенство является определением***.

<u>Следствие.</u> Если матрица A является блочной матрицей $\left[A_{ij} \right]$, то для её умножения на число λ достаточно каждый блок A_{ij} умножить на λ:

$$\lambda \cdot \left[A_{ij} \right] = \left[\lambda \cdot A_{ij} \right].$$

Определение. Матрица $(-A) \underset{def}{=} (-1) \cdot A$ называется ***противоположной*** матрице A.

Сложение и вычитание матриц.

Определение. Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Сумма двух матриц обозначается следующим образом: $C = A + B$.

Из определения следует простое **правило сложения двух матриц**.

Чтобы сложить две матрицы нужно убедиться, что они имеют одинаковые размеры, после чего к каждому элементу одной матрицы прибавляется значение соответствующего элемента второй матрицы.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

тогда

$$C = A + B \underset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Следствие. Если матрицы A и B являются блочными и их соответствующие блоки A_{ij} и B_{ij} имеют одинаковые размеры, то для сложения этих матриц достаточно к блокам одной матрицы прибавить соответствующие блоки другой матрицы:

$$\left[\, A_{ij} \,\right] + \left[\, B_{ij} \,\right] = \left[\, A_{ij} + B_{ij} \,\right].$$

<u>Примечание</u>. Если матрицы имеют разные размеры, то операция их сложения выполнена быть не может и объявляется ***некорректной***. Возникновение такой ситуации в прикладных задачах означает наличие ***грубых ошибок в их математической постановке***, аналогичных попыткам суммирования величин, имеющих разную физическую размерность.

Пример 20. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить $4 \cdot A + 3 \cdot B$.

<u>Решение</u>. Матрицы A и B имеют одинаковые размеры, поэтому операция их суммирования корректна.

Вычислим: $4 \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 0 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$, $3 \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 9 \\ -6 & 21 & 3 \end{pmatrix}$,

<u>Ответ</u>. $4 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 24 & -8 & 9 \\ -2 & 29 & -9 \end{pmatrix}$.

Определение. Умножение матрицы на число и сложение матриц называются ***линейными операциями над матрицами***.

Приведём свойства линейных операций. Непосредственно из их определения вытекают следующие соотношения:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + (-A) = \Theta$;
4. $A + \Theta = A$;
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;
6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
7. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
8. $1 \cdot A = A$,

где A, B, C – матрицы одинакового размера; α, β, λ – числа.

Определение. ***Разностью*** двух матриц A и B одинакового размера (или ***результатом вычитания*** матрицы B из матрицы A) называется матрица C того же размера, которая обозначается $A - B$ и определяется по следующему правилу:

$$C = A - B \underset{def}{=} A + (-1) \cdot B\,.$$

*Пример 21**. **Матричные окрестности.** Имея операции сложения и вычитания матриц, а также умножения матрицы на число, можно дать разумные и, главное, полезные для практики определения ***предела*** и ***непрерывности матрицы – функции***. При этом ключевое место занимает понятие ***окрестности***. Именно попадание изменяющейся величины $X(t)$ в некоторую малую окрестность постоянной величины X_0 означает, что эти величины уже близки, а в пределе первая величина может совпасть со второй. Вы уже знаете, что такое окрестность обычного вещественного числа. Покажем, каким образом вводится понятие окрестности матрицы.

Определение. ***ε - окрестностью матрицы*** $A = \left[\ a_{ij}\ \right]$ размера $m \times n$ называется множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$, состоящее из матриц $B = \left[\ b_{ij}\ \right]$ того же размера, элементы которых удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - b_{ij})^2 < \varepsilon^2\,.$$

Матрица A называется ***центром окрестности***, а число ε - ***радиусом окрестности***. ***Проколотой ε - окрестностью матрицы*** A называется множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$, из которого удалён центр. Все матрицы B из проколотой ε - окрестности матрицы A при достаточно малых значениях ε называются ***близкими к матрице*** A.

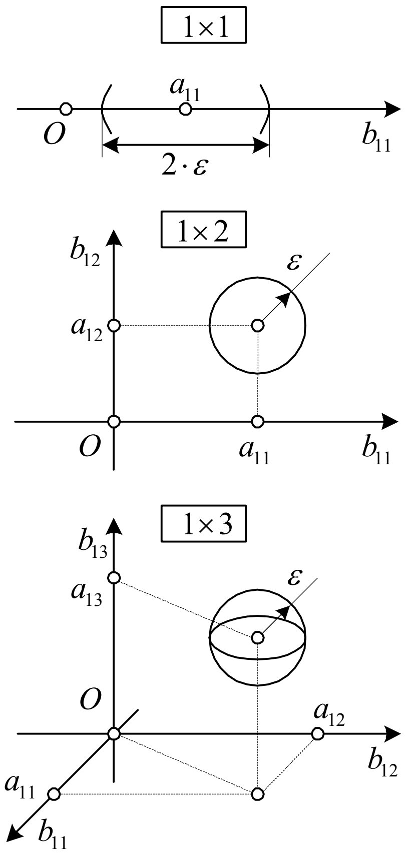


Рисунок 16

На рис. 16 дано графическое представление матричной окрестности для вектор - строки A, состоящей из одного, двух или трёх элементов. Элементы b_{ij} матрицы B, принадлежащей этому множеству, лежат внутри отрезка, окружности или сферы радиусом ε. К сожалению, дать геометрическое изображение окрестности квадратной матрицы, даже второго порядка, не возможно. Но если воспользоваться терминологией многомерных линейных пространств, которые мы будем изучать в этом курсе позже, то можно утверждать, что матричная ε - окрестность матрицы A размера $m \times n$ представляет собой шар радиуса ε с числом измерений $m \cdot n$.

Каждая матрица B из множества $\mathfrak{M}_\varepsilon$ входит в это множество вместе с некоторой своей δ - окрестностью $\mathfrak{M}_\delta$, где $\delta < \varepsilon$. Поэтому матричная окрестность (проколотая или не проколотая) является ***открытым множеством***.

Математики говорят, что после построения в некотором множестве системы окрестностей это множество становится ***топологическим***, сама эта система окрестностей называется при этом ***топологией***. Поэтому после введения понятия матричной окрестности множество матриц одного размера стало топологическим. Если матрица B попадает в ε - окрестность матрицы A, то это эквивалентно тому, что матрица $B - A$ попадает в ε - окрестность нулевой матрицы Θ. Это означает, что любую матричную окрестность можно трактовать как результат переноса окрестности нулевой матрицы Θ в новый центр. Топологии, обладающие таким свойством, называются ***однородными***.

Переходим к определению понятия предела.

Пусть в некоторой окрестности точки a определена матрица-функция $F(t)$ размера $m\times n$. Найдём разность между матрицами $F(a+\Delta t)$ и $F(a)$, которую обозначим ΔF; ясно, что эта матрица будет определять изменение матрицы-функции $F(t)$ в данной точке.

Определение. Матрица-функция $\Delta F(t)=F(t)-F(a)$ называется ***приращением матрицы-функции*** $F(t)$ в точке $t=a$.

В качестве примера найдём приращение матрицы вращения $U(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ в точке $\varphi=0$. Изменение независимого аргумента φ в этом случае будем обозначать $\Delta\varphi$:

$$\Delta U(\Delta\varphi)=U(\Delta\varphi)-U(0)=\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi-1 & -\sin\Delta\varphi\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi-1\end{pmatrix}.$$

Первое определение предела. Матрица A называется ***пределом матрицы-функции*** $F(t)$ при $t\to a$ и обозначается $\lim\limits_{t\to a}F(t)$, если

$$\lim_{t\to a}f_{ij}(t)=a_{ij}\quad \text{для всех}\quad i\in\overline{1,m};\quad j\in\overline{1,n}.$$

В краткой записи это определение выглядит так:

$$\lim_{t\to a}\Big[\ f_{ij}(t)\ \Big]=\Big[\ \lim_{t\to a}f_{ij}(t)\ \Big],$$

то есть **п р е д е л м а т р и ц ы р а в е н м а т р и ц е п р е д е л о в .**

Например, пределом матрицы вращения $U(\varphi)$ при $\varphi\to 0$ является единичная матрица $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, а пределом её приращения $\Delta U(\Delta\varphi)$ при $\Delta\varphi\to 0$ – нулевая матрица Θ.

Вам предоставляется возможность внимательно проанализировать определение предела и убедиться в том, что оно эквивалентно другому, так называемому ***топологическому определению предела*** матрицы-функции.

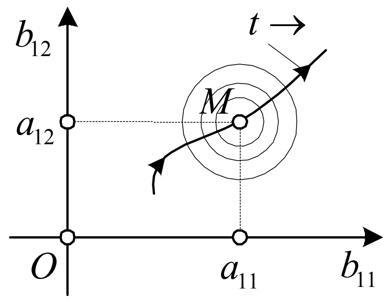


Рисунок 17

Второе определение предела. Матрица A называется ***пределом матрицы-функции*** $F(t)$ при $t\to a$, если для любой проколотой ε - окрестности матрицы A существует такая проколотая δ- окрестность точки a, что при всех значениях t из этой δ-окрестности матрица $F(t)$ попадает в ε - окрестность.

Нельзя не согласиться с тем, что топологическое определение предела выглядит очень красиво. Кроме того, оно не только разумно, но и понятно. Посмотрите на рис. 17, где показано изменение элементов некоторой матрицы – функции $F(t)$ размера 1×2. Для любой, сколь угодно малой окружности с центом в точке $M(a_{11}, a_{12})$ найдётся такой промежуток $(a-\delta, a+\delta)$, что при всех t из этого промежутка (кроме, возможно, значения $t=a$, где матрица-функция может быть вообще не задана) кривая находится внутри этой окружности. Однако, на практике всё же удобнее пользоваться первым, так называемым ***поэлементным определением предела*** матрицы-функции.

Определение. ***Матрица-функция*** $F(t)$ ***называется непрерывной*** при $t=a$, если все её элементы $f_{ij}(t)$ непрерывны при $t=a$, то есть $\lim\limits_{t\to a}\left[\ f_{ij}(t)\ \right]=\left[\ f_{ij}(a)\ \right]$.

Непрерывность матрицы-функции $F(t)$ при $t=a$ эквивалентна выполнению условия $\lim\limits_{t\to a}\Delta F(t)=\Theta$.

Например, матрица вращения $U(\varphi)$ непрерывна при любом значении φ. Матрица S пересчёта координат целей (**пример 4** про разведывательный вертолёт) и передаточная матрица S тензометрического моста (**пример 11**) являются непрерывными функциями времени t.

Коммутационные матрицы G электрической цепи или информационной сети не являются непрерывными, поскольку в отдельные моменты времени элементы этих матриц изменяются скачком. Это примеры ***кусочно–постоянных разрывных матриц-функций***.

Умножение матриц.

Определение. Пусть заданы две матрицы A и B, причём число столбцов первой из них равно числу строк второй:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A ***на матрицу*** B называется матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} \underset{def}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum\limits_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}\ \left(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,k\right).$

Матрица C имеет размер $m\times k$. Для обозначения результата произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C=A\cdot B$.

Примечание. При записи этих сумм многие физики, следуя примеру ***А. Эйнштейна***, сам знак суммирования Σ не пишут, договорившись ***под произведением*** $a_{ip} \cdot b_{pj}$ ***понимать результат суммирования всех таких произведений, получающихся при изменении повторяющегося индекса*** (в данном случае индекса p).

В обозначениях Эйнштейна результат перемножения матриц выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1p} \cdot b_{p1} & a_{1p} \cdot b_{p2} & \dots & a_{1p} \cdot b_{pk} \\ a_{2p} \cdot b_{p1} & a_{2p} \cdot b_{p2} & \dots & a_{2p} \cdot b_{pk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mp} \cdot b_{p1} & a_{mp} \cdot b_{p2} & \dots & a_{mp} \cdot b_{pk} \end{pmatrix},$$

или в сокращённой записи:

$$\left[\, a_{ij} \,\right] \cdot \left[\, b_{ij} \,\right] = \left[\, a_{ip} \cdot b_{pj} \,\right].$$

Из определения результата умножения матрицы на матрицу следует **п р а в и л о   п е р е м н о ж е н и я   д в у х   м а т р и ц**. Сформулируем его.

Для умножения матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $l \times k$ необходимо выполнить следующее.

1. Разместить эти матрицы на одном листе бумаги рядом одну от другой в заданном порядке.

2. Убедиться в том, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то есть $n = l$ и ***операция корректна***.

3. Выбрать некоторую (i-тую) строку первой матрицы и некоторый (j-тый) столбец второй матрицы; если операция перемножения корректна, то они содержат одинаковое число элементов.

4. Двигаясь с одинаковой скоростью по выбранной строке слева направо и, одновременно, по выбранному столбцу сверху вниз, считывать и перемножать соответствующие элементы строки и столбца.

5. Все полученные произведения сложить и результат – элемент c_{ij} – поместить в i-тую строку и j-тый столбец матрицы C.

6. Пункты 3, 4, 5 повторить для каждого $i \in \overline{1,m}$ и каждого $j \in \overline{1,k}$.

Примечание. Если для перемножаемых матриц условие $n = l$ не соблюдается, то операция не может быть выполнена и является ***некорректной***. В прикладных задачах это означает, что при математической постановке или в ходе решения были допущены грубые ошибки.

Пример 22. Вычислить $C = A \cdot B$,

где
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 - 2\cdot 4 + 1\cdot 5 & -3\cdot 2 - 2\cdot 1 + 1\cdot 6 \\ 4\cdot 3 + 0\cdot 4 + 5\cdot 5 & -2\cdot 4 + 0\cdot 1 + 5\cdot 6 \\ 7\cdot 3 - 2\cdot 4 + 1\cdot 5 & -7\cdot 2 - 2\cdot 1 + 1\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 37 & 22 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 37 & 22 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$.

Замечание. Сформулированное выше правило перемножения матриц не является тривиальным обобщением правила перемножения обычных чисел, к тому же выглядит очень сложным и поэтому требует обоснования. Казалось бы, куда более логичным и, главное, простым делом было бы перемножать одинаковые элементы матриц, по аналогии с правилом их сложения. Получаемая при этом ***матричная арифметика*** была бы действительно очень простой, но для решения большинства практических задач совершенно **б е с п о л е з н о й !**

Проиллюстрируем это утверждение примерами.

Пример 23. **Матричное уравнение системы**. Вернёмся к решениям систем линейных уравнений, рассматриваемых в **примере 1**, и покажем, каким образом эти системы можно записать в виде одного уравнения, содержащего матричные коэффициенты.

Рассмотрим систему (1) $\begin{cases} x+2\cdot y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$,

из коэффициентов которой можно образовать квадратную матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

а из неизвестных – вектор - столбец $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ или вектор - строку $Y=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

В левых частях уравнений (1) содержатся произведения элементов матриц A и X или Y, поэтому для достижения поставленной цели попробуем перемножить эти матрицы во всех допустимых сочетаниях:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2\cdot y \\ x-y \end{pmatrix}; \qquad X\cdot A \text{ – операция не корректна;}$$

$$A\cdot Y \text{ – операция не корректна;} \qquad Y\cdot A=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & 2\cdot x-y \end{pmatrix}.$$

Анализируя получившиеся результаты, несложно заметить, что уравнение

$$A\cdot X=\Theta, \qquad \text{где} \qquad \Theta=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

эквивалентно системе однородных линейных уравнений (1).

Равенство, содержащее неизвестную матрицу, называется ***матричным уравнением***.

Запишем матричное уравнение, эквивалентное системе неоднородных линейных уравнений (2)

$$\begin{cases} x-0.1\cdot y+0.7\cdot z=1.6 \\ -2\cdot x+3\cdot y-0.5\cdot z=0.5 \\ 0.1\cdot x+y-2\cdot z=-0.9 \end{cases}.$$

В этом случае мы можем воспользоваться опытом решения предыдущей задачи и действовать наверняка.

Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных величинах, вектор - столбец X из этих неизвестных и перемножим их:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.7 \\ -2 & 3 & -0.5 \\ 0.1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.7 \\ -2 & 3 & -0.5 \\ 0.1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-0.1\cdot y+0.7\cdot z \\ -2\cdot x+3\cdot y-0.5\cdot z \\ 0.1\cdot x+y-2\cdot z \end{pmatrix}.$$

Сравнивая этот результат с уравнениями системы (2) замечаем, что система может быть переписана в следующем эквивалентном виде:

$$A\cdot X=F, \tag{7}$$

где $F = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.5 \\ -0.9 \end{pmatrix}$ – так называемый ***столбец правых частей***.

Матричные уравнения вида (6) или (7) могут быть составлены для систем, содержащих любое число уравнений и неизвестных. Единообразие записи всех этих систем позволяет, как вы увидите это в дальнейшем, предложить универсальные методы их решения.

Пример 24. **Матрица для торпедоносца**. Продолжим анализ, начатый в **примере 4**, и покажем, как изменяются матрицы пересчёта координат точки плоскости при последовательных преобразованиях системы координат. На театре боевых действий кроме вертолёта и крейсера (рис.4) появился ещё и самолёт - торпедоносец (рис.18). Ему и предназначена та информация о целях, которую собирает вертолёт и передаёт на крейсер. Дальше все координаты должны быть снова пересчитаны применительно к системе координат, движущейся вместе с самолётом. Если целей много, то для ускорения этого процесса и уменьшения возникающих погрешностей вместо двух пересчётов можно делать только один, но для этого предварительно нужно вычислить матрицу из коэффициентов, используемых при этом пересчёте (**матрицу для торпедоносца**). Чтобы не утомлять вас техническими подробностями, далее мы ограничимся только тем случаем, когда вертолёт, крейсер и торпедоносец находятся над одной точкой поверхности моря, но движутся разными курсами. С точки зрения математики это означает, что изменение системы координат связано только с поворотом осей координат вокруг точки O.

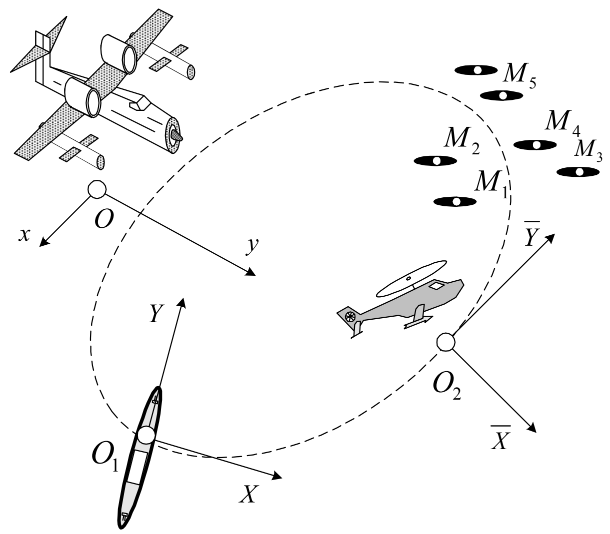


Рисунок 18

Пусть выполнены два поворота осей на углы α и β, соответственно (рис.19). Каждому повороту соответствуют свои формулы пересчёта координат:

$$\begin{cases} x = a_{11} \cdot X + a_{12} \cdot Y \\ y = a_{21} \cdot X + a_{22} \cdot Y \end{cases}, \qquad \text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} X = b_{11} \cdot \overline{X} + b_{12} \cdot \overline{Y} \\ Y = b_{21} \cdot \overline{X} + b_{22} \cdot \overline{Y} \end{cases}, \qquad \text{где } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad (9).$$

Используя те же методы, которые применялись в **примере 23**, эти формулы можно записать в виде матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \textbf{(10)} \qquad \text{и} \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(11)}$$

Подставим формулы (9) в равенства (8):

$$\begin{cases} x = a_{11}\cdot(b_{11}\cdot\overline{X} + b_{12}\cdot\overline{Y}) + a_{12}\cdot(b_{21}\cdot\overline{X} + b_{22}\cdot\overline{Y}) = (a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21})\cdot\overline{X} + (a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22})\cdot\overline{Y} \\ y = a_{21}\cdot(b_{11}\cdot\overline{X} + b_{12}\cdot\overline{Y}) + a_{22}\cdot(b_{21}\cdot\overline{X} + b_{22}\cdot\overline{Y}) = (a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21})\cdot\overline{X} + (a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22})\cdot\overline{Y} \end{cases}.$$

Полученные соотношения можно переписать так:

$$\begin{cases} x = c_{11}\cdot\overline{X} + c_{12}\cdot\overline{Y} \\ y = c_{21}\cdot\overline{X} + c_{22}\cdot\overline{Y} \end{cases}, \text{ где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Вам ничего не напомнили формулы (12)? Если вы ещё сами об этом не догадались, то попробуйте умножить матрицу A на матрицу B по сформулированному выше правилу, и вы получите матрицу C.

Теперь выполним подстановку в матричных равенствах (10) и (11):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\cdot(B\cdot\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}) = C\cdot\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ***матрица пересчёта координат для результирующего преобразования равна произведению матриц отдельных преобразований***

$$C = A\cdot B, \quad (13)$$

причём перемножение матриц выполняется по сформулированному выше правилу.

Формула (13) была получена для произвольных матриц A и B, а значит, справедлива для любых преобразований координат; тем не менее, имеет смысл убедиться в этом ещё раз на примере последовательного поворота осей. В этом случае произведение матриц A и B имеет следующий вид:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) & (-\cos\alpha\cdot\sin\beta - \sin\alpha\cdot\cos\beta) \\ (\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta) & (\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

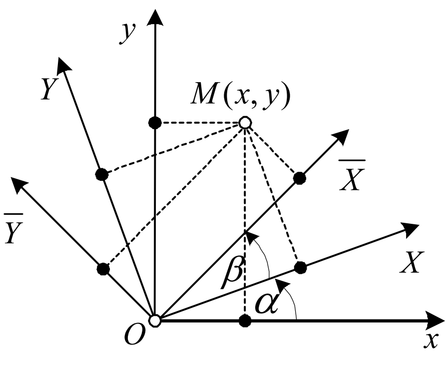


Рисунок 19

Полученный результат на самом деле относится к разряду очевидных, поскольку два последовательных поворота осей на углы α и β можно действительно заменить одним поворотом на суммарный угол $\gamma = \alpha + \beta$ (рис.19).

*Пример 25**. **Дифференциальное матричное уравнение**. Получим матричное уравнение для цепной механической системы, рассматриваемой в **примере 13**. Для этого сначала составим из масс m_i, а также координат x_i и ускорений $\ddot{x}_i$, диагональную матрицу n - го порядка

$$M = diag(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

и два вектора - столбца высотой n:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ldots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix}.$$

После этого, используя трёхдиагональную матрицу коэффициентов C и правило умножения матриц, соотношения (5) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$M \cdot Y = C \cdot X\,. \qquad (14)$$

Матричное уравнение (14) содержит два неизвестных вектора – столбца - X и Y. Покажем, что вектор-столбец Y, составленный из вторых производных, на самом деле является второй производной вектор - столбца X. Для этого мы должны сформулировать определение производной матрицы-функции.

Пусть в некоторой окрестности точки a определена и непрерывна матрица-функция $F(t)$ размера $m \times n$. По аналогии с определением производной числовой функции, составим следующее выражение из приращений матрицы-функции и её аргумента:

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot [F\left(a+\Delta t\right) - F(a)].$$

Если переменная t обозначает время, то данное выражение при малых значениях $\Delta t \to 0$ характеризует скорость изменения матрицы-функции в момент времени $t = a$. Вычислим предел этого выражения при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot [F\left(a+\Delta t\right) - F(a)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot [f_{ij}\left(a+\Delta t\right) - f_{ij}\left(a\right)] = [\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_{ij}\left(a+\Delta t\right) - f_{ij}\left(a\right)}{\Delta t}] = [f_{ij}'(a)],$$

в предположении, что все производные $f_{ij}'(a)$ существуют.

Определение*. *Матрица-функция* $F(t)$ *называется дифференцируемой при $t = a$, если все её элементы дифференцируемы при $t = a$. Матрица, составленная из производных $f_{ij}'(t)$ элементов матрицы-функции $F(t)$, называется ***производной этой матрицы - функции*** и обозначается $F'(t)$.

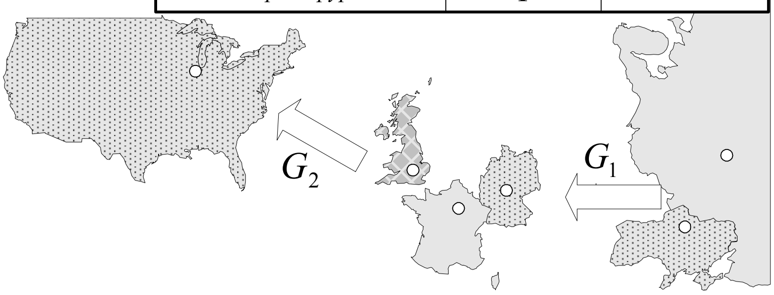
В краткой записи эти определения выглядят так:

$$F'(t) \underset{def}{=} \left[\ f_{ij}'(t)\ \right],$$

т. е. **производная от матрицы равна матрице из производных,** и наоборот**, матрица из производных равна производной от матрицы.**

Например, $U'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (\cos\varphi)' & (-\sin\varphi)' \\ (\sin\varphi)' & (\cos\varphi)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}.$

Матрица G_1	*"Борисполь", Киев*	*"Шереметьево", Москва*
"Гетвик", Лондон	1	1
"Орли", Париж	0	1
"Франкфурт"	1	2



Матрица G_2	*"Хитроу", Лондон*	*"Шарль де Голль", Париж*	*"Франкфурт"*
"О' Хара", Чикаго	2	1	4

Рисунок 20

Аналогичное правило справедливо для производной любого порядка, поэтому вместо вектора – столбца Y мы имеем право записать вторую производную от вектора – столбца X, то есть $\ddot{X}$. В результате такой замены уравнение (14) принимает следующий вид:

$$M \cdot \ddot{X} = C \cdot X\,. \qquad (15)$$

Матричное уравнение (15) содержит производные и поэтому называется ***дифференциальным матричным уравнением***; с методами решения таких уравнений вы познакомитесь в нашем курсе высшей математики примерно через год. Тем не менее, сравнивая систему соотношений (5) с лаконичной формой уравнения (15), можно уже сейчас согласиться с тем, что использование матриц вообще, а сформулированного правила их перемножения - в особенности, и в этом случае оказалось полезным.

Пример 26. **Полёт в Чикаго**. На этом примере мы намерены объяснить вам, какую пользу можно извлечь из перемножения графов. Предположим, что вам нужно срочно вылететь из Харькова в Чикаго, но в ближайшие 48 часов прямых рейсов из Киева и Москвы в расписании нет. Учитывая стоимость билетов и условия оформления транзитных виз, вы решили лететь с пересадкой в Лондоне, Париже или Франкфурте - на - Майне. Схема перелёта показана на рис.20. Там же в матричном виде приведена информация о числе рейсов между указанными аэропортами на следующие календарные сутки, причём для аэропортов транзита учтены только те рейсы, которые хорошо стыкуются с временем прилёта самолета. Перемножим матрицы:

$$G = G_2 \cdot G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Что означает полученный результат? Элементы матрицы G в точности равны (в чём вы можете убедиться самостоятельно) числу маршрутов между Харьковом и Чикаго, проходящих, соответственно, через Киев и через Москву. Сравнение этих элементов показывает, что если билет ещё не куплен, то вернее будет ехать в Москву, а не в Киев.

Разумеется, с этой задачей каждый из вас легко справился бы без использования матриц. Но, как показывает этот пример, в сходных, но технически более сложных ситуациях, именно матрицы помогут сделать правильный выбор.

§ 4. Правила умножения для матриц частного вида

Сформулируем несколько правил, упрощающих вычисление произведения матриц для тех случаев, когда в число сомножителей входят матрицы рассмотренных выше частных видов. Во всех случаях предполагается, что операция умножения является корректной.

1. **Правило умножения диагональных матриц.**

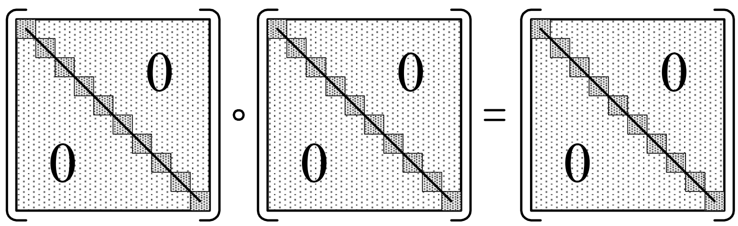


Рисунок 21

В результате умножения двух диагональных матриц A и B получается диагональная матрица C (рис. 21), причём диагональные элементы произведения равны произведению диагональных элементов сомножителей:

$$diag\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \cdot diag\,(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}) = diag\,(a_{11} \cdot b_{11}, a_{22} \cdot b_{22}, \dots, a_{nn} \cdot b_{nn})\,.$$

2. **Правила умножения матрицы на диагональную**.

Правило А. Результат умножения диагональной матрицы D на матрицу A сводится к умножению каждой i - той строки матрицы A на диагональный элемент d_{ii} матрицы D:

$$diag\,(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \cdot a_{11} & \dots & d_{11} \cdot a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{nn} \cdot a_{n1} & \dots & d_{nn} \cdot a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Правило Б. Результат умножения матрицы A на диагональную матрицу D сводится к умножению каждого i - того столбца матрицы A на диагональный элемент d_{ii} матрицы D:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot diag\,(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}) = \begin{pmatrix} d_{11} \cdot a_{11} & \dots & d_{nn} \cdot a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{11} \cdot a_{n1} & \dots & d_{nn} \cdot a_{nm} \end{pmatrix}.$$

<u>Следствие</u>. В результате умножения матрицы A на единичную матрицу I слева или справа получается матрица A:

$$I \cdot A = A \qquad \text{или} \qquad A \cdot I = A\,.$$

Этот результат объясняет, почему матрица

$$I = diag\,(1, 1, \dots, 1)$$

была названа **единичной**.

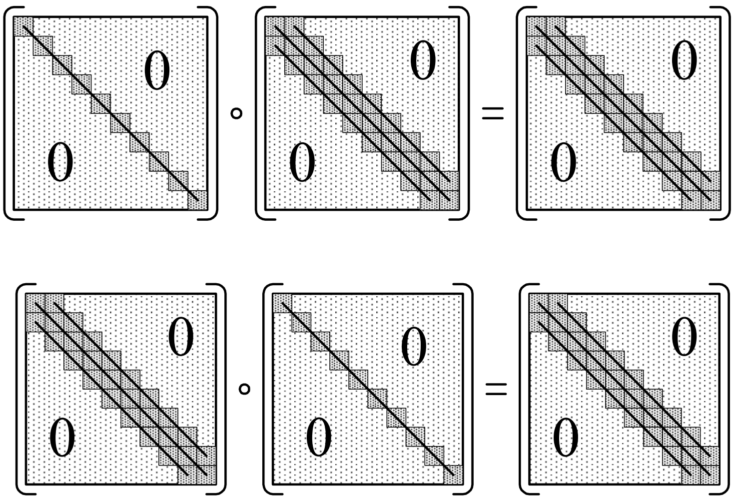


Рисунок 22

3. **Правила умножения разреженных матриц.**

В результате умножение k - диагональной матрицы A на l - диагональную матрицу B получается r - диагональная матрица C, где

$$r = k + l - 1.$$

В частности:

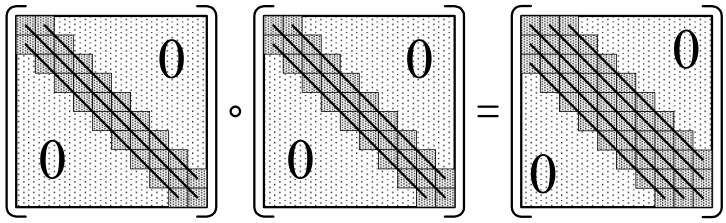


Рисунок 23

при умножении диагональной матрицы A на трёхдиагональную матрицу B получается трёхдиагональная матрица C (рис. 22);

при умножении трёхдиагональной матрицы A на трёхдиагональную матрицу B получается пятидиагональная матрица C (рис. 23), и так далее.

4. **Правила умножения треугольных матриц**.

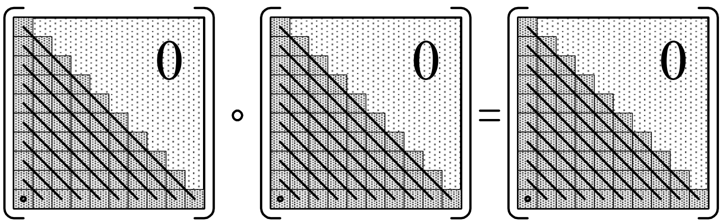


Рисунок 24

Правило А. В результате перемножения двух нижнетреугольных матриц A и B получается нижнетреугольная матрица C (рис.24).

Правило Б. В результате перемножения двух верхнетреугольных матриц A и B получается верхнетреугольная матрица C (рис.25).

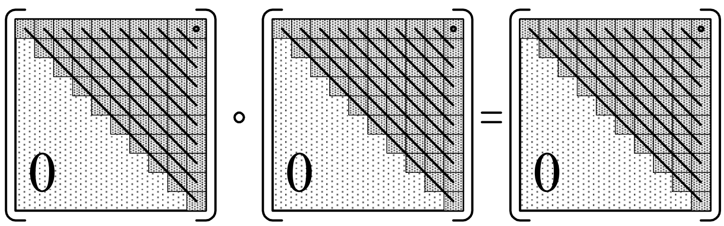


Рисунок 25

Примечание. Результат умножения нижнетреугольной и верхнетреугольной матриц не является треугольной матрицей (рис.26). Более того, абсолютное большинство квадратных матриц может быть получено как результат такого умножения. Условия, при выполнении которых квадратная матрица может быть представлена в виде произведения треугольных матриц, изучались великим немецким математиком ***Карлом Гауссом***, и поэтому в его честь такое представление матрицы называется ***гауссовым представлением***. Формулировка соответствующей **теоремы о гауссовом представлении матрицы** будет приведена позже, когда вы познакомитесь с необходимой для этого терминологией. Но уже сейчас можно сформулировать **следствие** из этой теоремы.

В любой, сколь угодно малой ε - окрестности квадратной матрицы C найдутся такие матрицы D, которые могут быть представлены в виде произведений

$$D = A \cdot B \quad \textbf{и} \quad D = F \cdot G,$$

где A, G – некоторые нижнетреугольные, а B, F – некоторые верхнетреугольные матрицы, причём эти матрицы D образуют открытое множество.

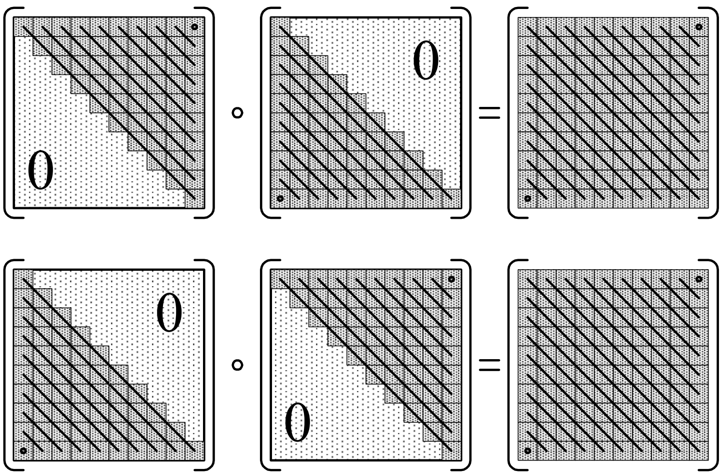


Рисунок 26

Приведенная выше формулировка содержит два утверждения. Во – первых, любая квадратная матрица может быть с любой степенью точности приближена произведением двух треугольных матриц. Во – вторых, если некоторая квадратная матрица может быть представлена в виде произведения двух треугольных матриц, то в таком же виде могут быть представлены все близкие к ней матрицы.

Доказательство этого следствия, как и самой теоремы о гауссовом представлении матрицы, в нашем курсе приводится позже. Но вы уже сейчас без особого труда сможете проверить это утверждения для матриц второго порядка. Кстати, для тех, кто поленится это сделать самостоятельно, укажем так называемый **контр пример**, который не позволяет обобщить эту теорему на все квадратные матрицы.

Матрица $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, именуемая ***матрицей перестановки строк***, не может быть представлена в виде произведения двух треугольных матриц.

5. **Правила умножения матрицы на вектор**.

Правило А. В результате умножения матрицы A на вектор - столбец B (рис.27) получается вектор - столбец

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} \end{pmatrix}.$$

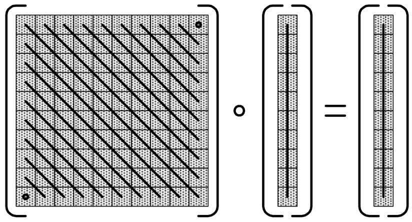


Рисунок 27

Правило Б. В результате умножения вектор - строки A на матрицу B (рис.28) получается вектор - строка

$$C = A \cdot B = \left(a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} \quad \ldots \quad a_{11} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{nm} \right).$$

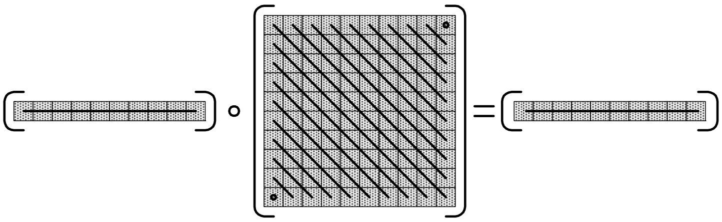


Рисунок 28

$$C = A \cdot B = [\ a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1}\ ].$$

Правило В. В результате умножения вектор - строки A на вектор - столбец B (рис.29) получается матрица первого порядка

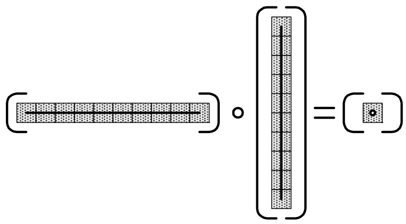


Рисунок 29

Правило Г. В результате умножения вектор - столбца A на вектор - строку B (рис.30) получается блочная вектор - строка

$$C = A \cdot B = [b_{11} \cdot A \quad b_{12} \cdot A \quad \ldots \quad b_{1n} \cdot A].$$

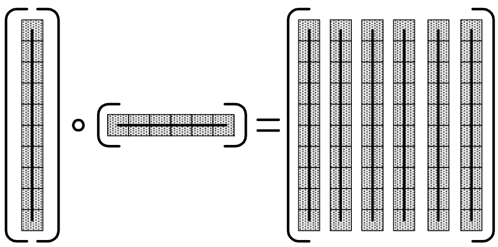


Рисунок 30

6. **Правила перемножения блочных матриц.**

Правило А. В результате умножения блочной матрицы A формата $m \times n$ на блочную матрицу B формата $n \times k$ **с согласованными размерами блоков** получается блочная матрица C формата $m \times k$, элементы которой находятся по формулам:

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{in} \cdot B_{nj} = \sum_{p=1}^{n} A_{ip} \cdot B_{pj} .$$

Согласованность между размерами блоков означает, что все перемножения матриц, используемые в этих формулах, корректны.

При использовании обозначений Эйнштейна правило перемножения блочных матриц сводится к следующей лаконичной формуле:

$$\left[A_{ij} \right] \cdot \left[B_{ij} \right] = \left[A_{ip} \cdot B_{pj} \right].$$

Примечание. Если согласованности между размерами блоков нет, то блочные матрицы нужно развернуть и сгруппировать другим способом. При решении прикладных задач в блоки, как правило, объединяются коэффициенты, имеющие одинаковую физическую размерность, например, элементы одного блока описывают массы, второго – коэффициенты жёсткости пружин, третьего – ускорения и т.д. Поэтому **условие согласованности размеров блоков при правильной математической постановке и верном ходе решения задачи выполняется автоматически**.

Правило Б. В результате перемножения двух блочно - диагональных матриц A и B получается блочно - диагональная матрица C (рис.21), причём диагональные элементы произведения равны произведению диагональных элементов сомножителей:

$$diag(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}) \cdot diag(B_{11}, B_{22}, \dots, B_{nn}) = diag(A_{11} \cdot B_{11}, A_{22} \cdot B_{22}, \dots, A_{nn} \cdot B_{nn}) .$$

Правило В. В результате перемножения двух нижнетреугольных или двух верхнетреугольных блочных матриц A и B получается, соответственно, нижнетреугольная (рис.24) или верхнетреугольная (рис.25) блочная матрица C.

Правило Г. В результате умножения блочной матрицы A на блочный вектор - столбец B (рис.26) получается блочный вектор - столбец

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + \dots + A_{1n} \cdot B_{n1} \\ \dots \\ A_{m1} \cdot B_{11} + \dots + A_{mn} \cdot B_{n1} \end{pmatrix}.$$

Правило Д. В результате умножения блочной вектор - строки A на блочную матрицу B (рис. 26) получается блочная вектор - строка

$$C = A \cdot B = \left(A_{11} \cdot B_{11} + ... + A_{1n} \cdot B_{n1} \quad ... \quad A_{11} \cdot B_{1m} + ... + A_{1n} \cdot B_{nm} \right).$$

Правило Е. В результате умножения блочной вектор - строки A на блочный вектор - столбец B (рис.29) получается матрица

$$C = A \cdot B = A_{11} \cdot B_{11} + ... + A_{1n} \cdot B_{n1}.$$

Правило Ж. В результате умножения матрицы A на блочную вектор - строку B (рис.31) получается блочная вектор - строка

$$C = A \cdot B = A \cdot \left(B_{11} \quad B_{12} \quad ... \quad B_{1n} \right) = \left(A \cdot B_{11} \quad A \cdot B_{12} \quad ... \quad A \cdot B_{1n} \right).$$

Правило З. В результате умножения блочного вектор - столбца B на матрицу A (рис.32) получается блочный вектор - столбец

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ ... \\ B_{n1} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} B_{11} \cdot A \\ B_{21} \cdot A \\ ... \\ B_{n1} \cdot A \end{pmatrix}.$$

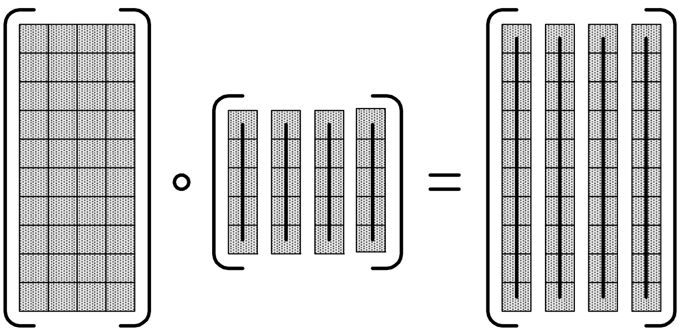


Рисунок 31

<u>Замечание</u>. Последние два правила фактически определяют операцию умножения так называемого ***матричного коэффициента*** A на блочный вектор B. В отличие от правила умножения матрицы на скалярный множитель (то есть обычное число λ) при этой операции сомножители не перестановочны. Кроме того, размер матричного коэффициента часто превышает размер отдельного элемента блочного вектора.

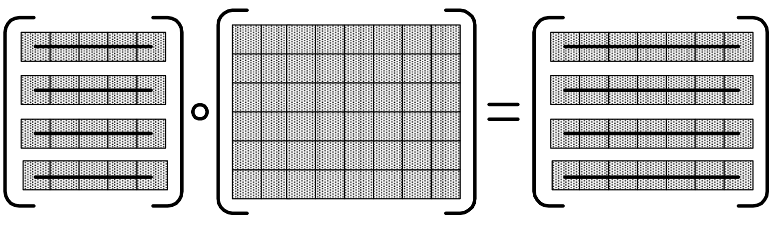


Рисунок 32

Пример 27. **Матричный процессор.** Операция перемножения двух квадратных матриц n- го порядка включает в себя, как несложно подсчитать, n^3 операций умножения и $n^2 \cdot (n-1)$ операций сложения обычных чисел. Если в ходе решения некоторой задачи приходится выполнять многократное перемножение матриц, имеющих, например 100-ый порядок, то эта операция существенно замедляет решение. Поэтому в 80-ые годы XX – го века в СССР были разработаны и выпускались серийно для ЭВМ серии ЕС так называемые ***матричные процессоры***, специализированные для решения таких задач. В одном из вариантов матричный процессор представлял собой объединение 64 процессоров, работающих параллельно. Каждый процессор **независимо от других** вычисляет один определённый элемент квадратной матрицы 8-го порядка, в результате чего **арифметические действия** над такими матрицами (сложение и умножение) **ускоряются в 64 – ре раза**. Для использования таких возможностей матричного процессора квадратные матрицы n-го порядка записываются в виде блочных матриц с блоками размера 8×8, а дальше применяются правила сложения и умножения блочных матриц. Если порядок матриц не кратен 8 - ми (например, $n = 30$), то матрицы дополняются справа и снизу необходимым количеством нулевых столбцов и строк (рис.33). Вам предоставляется возможность внимательно проанализировать правила сложения и умножения матриц и убедиться в том, что, несмотря на такое изменение матриц, элементы с индексами $i, j \le n$ вычисляются правильно, а остальные элементы равны нулю.

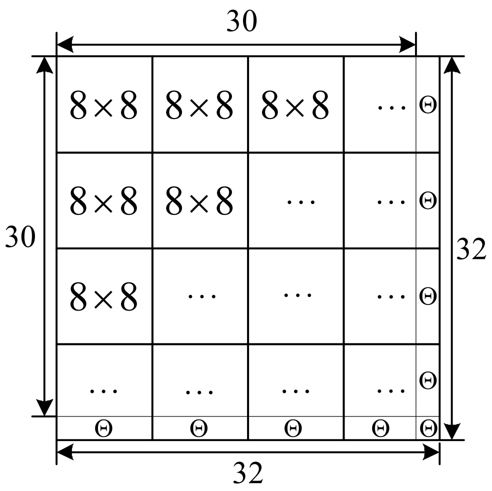


Рисунок 33

Пример 28. **Матричные аналогии**. Получим матричное уравнение $2 \cdot n$- полюсника, рассматриваемого в **примере 10**. Для этого сначала составим из токов и напряжений на входных и выходных клеммах четыре вектора – столбца высотой n:

$$J^{вх} = \begin{pmatrix} J_1^{вх} \\ \dots \\ J_n^{вх} \end{pmatrix}, \quad U^{вх} = \begin{pmatrix} U_1^{вх} \\ \dots \\ U_n^{вх} \end{pmatrix}, \quad J^{вых} = \begin{pmatrix} J_1^{вых} \\ \dots \\ J_n^{вых} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U^{вых} = \begin{pmatrix} U_1^{вых} \\ \dots \\ U_n^{вых} \end{pmatrix},$$

после чего, образуем из них два блочных вектора - столбца $\begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix}$.

Теперь, используя передаточную блочную матрицу S с квадратными блоками F, G, H, D и правило умножения матриц, соотношения (4) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \cdot J^{вх} + G \cdot U^{вх} \\ H \cdot J^{вх} + D \cdot U^{вх} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Уравнение (15) является полным аналогом уравнений (10) или (11) для пересчёта координат. Воспользуемся этой аналогией и, не повторяя те выкладки, которые были выполнены при выводе формулы (12) для последовательного преобразования координат, запишем матричное уравнение для последовательного соединения $2 \cdot n$ - полюсников (рис.34).

Пусть первому и второму многополюснику отвечают уравнения

$$\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix},$$

где $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ – передаточные матрицы с квадратными блоками B_{ij} и A_{ij}.

Тогда матричное уравнение их последовательного соединения имеет вид

$$\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix},$$

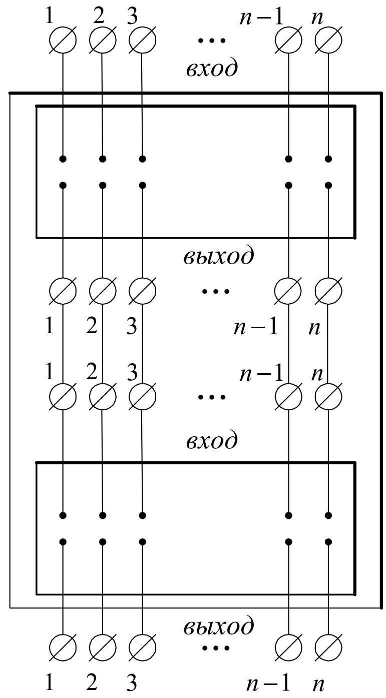


Рисунок 34

где
$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ***передаточная матрица для последовательного соединения многополюсников равна произведению передаточных матриц отдельных многополюсников***, причём перемножение матриц выполняется по сформулированному выше правилу.

В качестве примера, иллюстрирующего это свойство передаточной матрицы, найдём такую матрицу для последовательного соединения двух шнуров-удлинителей из **примера 14**. Передаточные матрицы A и B шнуров определяются следующими выражениями:

$$A = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ D_a & I \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ D_b & I \end{pmatrix},$$

где $D_a = diag(-R_{a.1}, -R_{a.2})$; $D_b = diag(-R_{b.1}, -R_{b.2})$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$R_{a.1}, R_{a.2}, R_{b.1}, R_{b.2}$ – сопротивления отдельных проводов из первого и второго шнура.

Вычислим передаточную матрицу C последовательного соединения:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ D_a & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & \Theta \\ D_b & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \cdot I + \Theta \cdot D_b & I \cdot \Theta + \Theta \cdot I \\ D_a \cdot I + I \cdot D_b & D_a \cdot \Theta + I \cdot I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ D_a + D_b & I \end{pmatrix}.$$

Найдём сумму диагональных матриц D_a и D_b:

$$D_a + D_b = \begin{pmatrix} -R_{a.1} & 0 \\ 0 & -R_{a.2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_{b.1} & 0 \\ 0 & -R_{b.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{a.1} - R_{b.1} & 0 \\ 0 & -R_{a.2} - R_{b.2} \end{pmatrix} = D_c,$$

где $D_c = diag(-(R_{a.1} + R_{b.1}), -(R_{a.1} + R_{b.1}))$.

Полученный результат находится в полном соответствии с известным правилом суммирования сопротивлений при их последовательном соединении.

Пример 29. **Уравнение свободных колебаний цепной системы**. Такое уравнение для простейшей цепной механической системы, имеющей только одну степень свободы, было получено в **примере 25**. Здесь мы намерены показать, что этот же результат может быть обобщён на цепные системы с 6-тью степенями свободы (смотри **пример 16** про цепную передачу и **пример 17** про цилиндрическую пружину).

Для каждого i - того элемента цепной системы составим две матрицы:

диагональную матрицу шестого порядка из инерционных коэффициентов (то есть из массы m_i и из моментов инерции $j_{x\,i}, j_{y\,i}, j_{z\,i}$ относительно трёх осей)

$$M_i = diag(m_i, m_i, m_i, j_{x\,i}, j_{y\,i}, j_{z\,i}),$$

и вектор – столбец X_i размера 6×1 из трёх координат и трёх углов поворота.

Далее матрицы M_i объединяются в блочно – диагональную матрицу

$$M = diag(M_1, M_2, \ldots, M_n),$$

а матрицы X_i - в блочный вектор – столбец X, после чего практически дословно повторяется тот вывод, который был проведен в **примере 25**. В результате мы получаем то же самое уравнение свободных колебаний (15)

$$M \cdot \ddot{X} = C \cdot X,$$

но матрица коэффициентов жёсткости C, используемая в этом уравнении, теперь является не трёхдиагональной, а **блочной** трёхдиагональной матрицей с квадратными блоками шестого порядка.

§ 5. Свойства операции умножения матриц

Свойства операции умножения можно условно разделить на две группы.

Первая группа свойств описывает те преобразования, которые можно выполнять с любыми матрицами. Пользуясь правилами умножения и сложения матриц можно доказать следующие **свойства**:

1. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$;

2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

где A, B, C – произвольные матрицы согласованных размеров; α – произвольное число.

Свойства 1 и **2** непосредственно следуют из определения операций и в дополнительных пояснениях не нуждаются. **Свойство 3** имеет громоздкое доказательство, приводить которое в этой книге нет необходимости. Вместо этого для подтверждения справедливости данного свойства обратимся к следующему примеру.

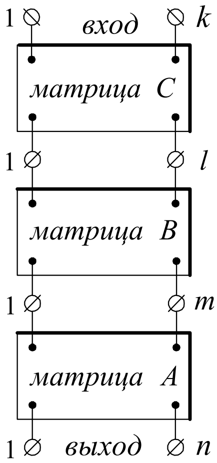


Рисунок 35

Пример 30. **«Электрические» доказательства**. На рис.35 изображена электрическая схема, образованная при последовательном соединении трёх многополюсников. Для получения результата в максимально общей форме, будем считать, что многополюсники выполнены по схеме $n+m$, а не $2\cdot n$, то есть могут иметь разное число входных и выходных клемм. В соответствии с этим обобщением, передаточные матрицы этих многополюсников могут иметь неквадратные блоки. Пусть эти многополюсники имеют передаточные матрицы C, B и A, соответственно; передаточную матрицу всей схемы обозначим буквой S.

Получим формулу для матрицы S. Для этого представим схему в виде соединения двух (а не трёх) многополюсников, для чего **мысленно** объединим два крайних устройства в одно. Такое объединение можно выполнить двумя способами (рис.36).

Для первого способа передаточная матрица объединения двух многополюсников (как это было показано при решении **примера**

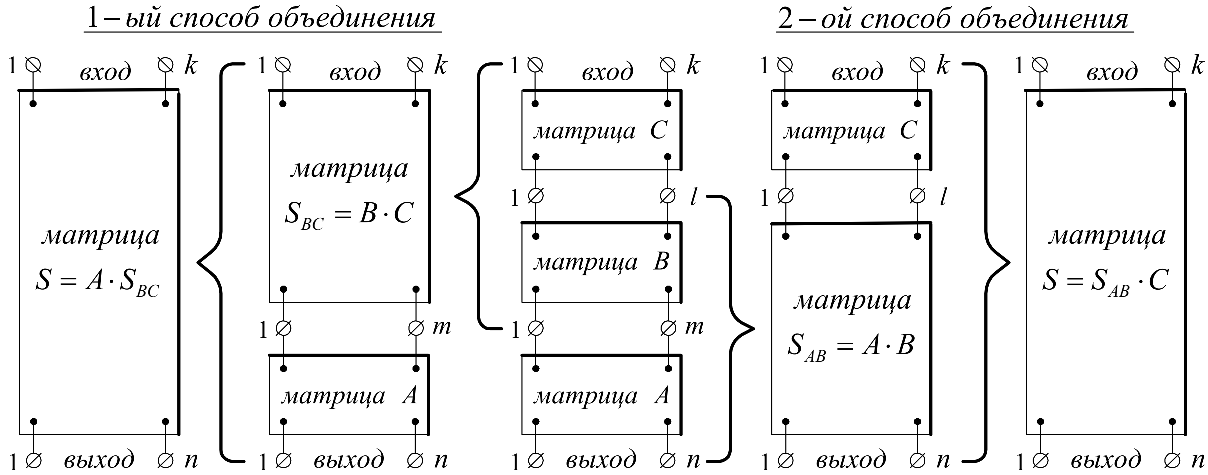


Рисунок 36

28) находится по формуле

$$S_{BC} = B\cdot C,$$

для второго способа – по формуле

$$S_{AB} = A\cdot B.$$

Теперь, используя тот же результат, можно найти передаточную матрицу S:

$$S = A\cdot S_{BC} = A\cdot(B\cdot C)$$

при первом способе объединения;

$$S = S_{AB}\cdot C = (A\cdot B)\cdot C$$

при втором способе объединения.

От выбора способа мысленного объединения устройство не становится другим, следовательно, матрица S в обоих случаях одна и

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C).$$

Примечание. К сожалению, то, что вы прочли выше, является хорошим образцом правдоподобных рассуждений, но не доказательством. И дело не в том, что вместо математической терминологии используется терминология электрических цепей. Математики, особенно на стадии, так называемой, черновой работы, при доказательствах достаточно часто пользуются ***методами аналогии*** (механической, акустической, электрической и пр.). Хрестоматийный пример на эту тему можно найти у великого немецкого математика *Римана*, который доказательство одной теоремы из раздела математики "***Векторный анализ***" (теорема о существования ***потенциала*** некоторого ***векторного поля***) проводил так: "*Выполним эту поверхность из проводящего материала.... Провода закрепим здесь и здесь.... Электрический ток всё равно пройдёт, и заряды распределятся по некоторому закону.... Что и доказывает теорему.*"

Но у Римана теорема действительно была **доказана**, а решённый **пример 30 свойство 3 не доказывает, поскольку содержит логический изъян.** Попробуйте найти этот изъян самостоятельно; далее в книге мы ещё вернёмся к этому примеру и дадим нужные пояснения.

Вторая группа свойств описывает те случаи, при которых допускается изменять порядок следования сомножителей, и когда это делать нельзя.

Из определения произведения матриц видно, что матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ не всегда одновременно существуют, а если существуют, то не всегда совпадают. Для того чтобы обе операции перемножения были корректны, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B были квадратными матрицами одного порядка, поэтому далее в этом параграфе будут рассматриваться только такие матрицы.

Пример 31. **Матрицы перестановок**. Даны две квадратные блочные матрицы $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & V \end{pmatrix}$ и $J = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ I & \Theta \end{pmatrix}$, где X, Y, Z, V – некоторые квадратные матрицы n - го порядка, Θ, I – нулевая и единичная матрицы того же порядка.

Вычислим произведения $B = A \cdot J$ и $C = J \cdot A$.

$$B = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Theta & I \\ I & \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cdot \Theta + Y \cdot I & X \cdot I + Y \cdot \Theta \\ Z \cdot \Theta + V \cdot I & Z \cdot I + V \cdot \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta + Y & X + \Theta \\ \Theta + V & Z + \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & X \\ V & Z \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ I & \Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \cdot X + I \cdot Z & \Theta \cdot Y + I \cdot V \\ I \cdot X + \Theta \cdot Z & I \cdot Y + \Theta \cdot V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta + Z & \Theta + V \\ X + \Theta & Y + \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & V \\ X & Y \end{pmatrix}.$$

Проанализируем и сравним результаты.

Умножение на матрицу J справа привело к перестановке столбцов, а слева – к перестановке строк блочной матрицы A; поэтому матрица J называется ***матрицей блочной перестановки***. Далее в книге мы покажем, что эта матрица занимает важное место в технических приложениях матричного исчисления.

Если блоки матрицы A таковы, что $Y \neq Z$ или $X \neq V$, то $B \neq C$, и ***результат перемножения матриц A и J зависит от порядка следования сомножителей.***

Определение. Две матрицы A и B называются ***перестановочными***, если

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Выше мы уже встречались с такими матрицами; в **примере 24** была фактически доказана формула

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U(\alpha + \beta),$$

откуда перестановочность матриц вращения $U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ следует автоматически.

Приведём другие примеры пар перестановочных матриц. Заметим, что для любой квадратной матрицы A имеет место равенство:

$$A \cdot I = I \cdot A = A,$$

где I – единичная матрица одинакового порядка с матрицей A.

Кроме единичной матрицы с матрицей A будут перестановочны матрицы $B_1 = A; B_2 = A \cdot A; B_3 = A \cdot (A \cdot A)$ и так далее.

Определения.

1. Матрица $B_k = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$, где число сомножителей в правой части равно k, называется k ***- той степенью квадратной матрицы*** A и обозначается A^k.

2. ***Нулевой степенью квадратной матрицы*** A n - го порядка считается единичная матрица I того же порядка.

3. Матрица B, k - тая степень которой равна матрице A, то есть

$$B^k = A \quad ,$$

называется ***алгебраическим корнем*** k ***- той степени из матрицы*** A и обозначается $\sqrt[k]{A}$.

Степени и корни матрицы обладают теми же свойствами, что и степени и корни обычных чисел, а именно:

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m}; \quad (A^n)^k = A^{n \cdot k}; \quad (\sqrt[k]{A})^n = \sqrt[k]{A^n} \quad \text{и т. д.}$$

Определение. Многочленом k- той степени от ***квадратной матрицы*** A называется матрица

$$B = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \ldots + a_k \cdot A^k,$$

где a_i, $i \in \overline{0,k}$ – некоторые числа, причём $a_k \neq 0$.

Многочлен k- той степени от матрицы A, по аналогии с многочленами $P_k(x)$ вещественного аргумента, обозначается $P_k(A)$. Так же, как степень и корень, многочлен является примером нового и очень важного понятия – ***функции от матрицы.***

Очевидно следующее утверждение: **матрица A и любой её многочлен $P_k(A)$ перестановочны между собой**.

Более того, **д л я б о л ь ш и н с т в а м а т р и ц** справедливо обратное утверждение: ***если квадратные матрицы A и B перестановочны, то одна из них (а чаще – каждая из них) является многочленом от другой, причём степень многочлена меньше, чем порядок этих матриц***.

*П р и м е р 32**. **Т р и в и а л ь н а я м а т р и ч н а я а л г е б р а.** Аккуратная формулировка соответствующей теоремы, с указанием исключений из этого правила, будет приведена позже, когда вы познакомитесь с необходимой для этого терминологией. Но разобраться в тех причинах, которые приводят к справедливости этого правила или к исключениям из него, можно уже сейчас на материале данного примера.

Если матрицы A и B являются диагональными, то они перестановочны между собой. Это утверждение прямо следует из правила их перемножения и в доказательстве не нуждается. Докажем обратное утверждение, которое звучит так:

если диагональная матрица A не имеет одинаковых диагональных элементов и перестановочна с матрицей B, то матрица B также диагональная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, и $A \cdot B = B \cdot A$. Предположим, что у матрицы B есть недиагональный элемент $b_{ij} \neq 0$. Воспользуемся правилами умножения квадратной матрицы на диагональную (см. § 4). В матрице $A \cdot B$ элемент с таким же индексом будет равен $a_{ii} \cdot b_{ij}$, а в матрице $B \cdot A$ - $a_{jj} \cdot b_{ij}$. Из равенства матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ следует равенство соответствующих элементов, то есть

$$a_{ii} \cdot b_{ij} = a_{jj} \cdot b_{ij}.$$

Поскольку по сделанному предположению $b_{ij} \neq 0$, то на эту величину можно сократить обе части равенства, и мы получим соотношение $a_{ii} = a_{jj}$, которое противоречит условию теоремы.

Следовательно, **у т в е р ж д е н и е д о к а з а н о**.

Примечание. Если у матрицы A есть одинаковые диагональные элементы, то перестановочная с ней матрица B может быть не диагональной. Например, если $A = \alpha \cdot I$, где α – произвольное число, то матрица B может быть любой квадратной матрицей того же порядка, что и единичная матрица I. Нетривиальный пример на ту же тему даёт пара матриц

$$A = diag\,(1,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

вам предоставляется возможность самостоятельно убедиться в том, что они перестановочны.

Диагональные матрицы n - го порядка перестановочны и по сложению, и по умножению, поэтому ***алгебра таких матриц является тривиальным обобщением алгебры обычных чисел***. Покажем, например, как просто в этой алгебре вычисляются степени и многочлены матрицы.

Пусть $A = diag\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Тогда имеют место формулы:

$$A^k = diag\,(a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k)\ ; \qquad P_k(A) = diag\,(P_k(a_{11}), P_k(a_{22}), \dots, P_k(a_{nn}))\ . \tag{17}$$

Из этих формул в частности следует, что недиагональная матрица B не может быть многочленом от матрицы $A = diag\,(1,1,2)$, и, тем не менее, перестановочна с ней. Это как раз то исключение из правила, о котором говорилось выше.

Давайте сформулируем это правило применительно к диагональным матрицам A и B n - го порядка. Поскольку диагональные матрицы всегда перестановочны, то должны выполняться равенства

$$B = P_k(A) \text{ и } A = Q_k(B), \tag{18}$$

где $P_k(x), Q_k(x)$ – некоторые многочлены степени $k < n$.

Условия (18) с учётом формул (17) оказываются эквивалентны системам уравнений

$$\{\ b_{ii} = P_k(a_{ii}),\ \ i \in \overline{1,n} \qquad \text{и} \qquad \{\ a_{ii} = Q_k(b_{ii}),\ \ i \in \overline{1,n}, \tag{19}$$

линейных относительно неизвестных коэффициентов многочленов $P_k(x), Q_k(x)$.

В этих системах число уравнений и число неизвестных одинаково (равно n), поэтому **в общем случае они обязаны иметь решение**. К сожалению, мы пока вынуждены ограничиться этим замечанием, и отложить решение систем (19) до того момента, когда вы сможете понять его.

Пример 33. **Каскадный преобразователь**. Этот пример из области радиотехники. Радиотехнические схемы, как правило, изготавливаются из стандартных деталей и узлов, имеющих узкую номенклатуру изделий. Поэтому, например, для получения необходимого уровня выходного сигнала в схеме иногда устанавливают последовательно два и более одинаковых преобразователя, образуя из них так называемый ***каскад***. Если мы передаточную матрицу одного преобразователя обозначим буквой A, а число преобразователей – буквой k, то передаточная матрица S каскадного преобразователя выражается формулой

$$S = A^k.$$

Пример 34. **Передаточная матрица цепной системы.** Выше уже говорилось о применении передаточных матриц при статических расчётах линейных электрических цепей. В механике аналогом таких цепей являются цепные системы, описанные в **примерах 13, 16** и **17**. Если для одного из крайних элементов цепной системы задать полный набор координат x_i и полный набор сил или моментов сил q_i, то в соответствии с законами механики тем самым будут однозначно определены значения этих величин для всех остальных элементов цепи, в том числе и для другого крайнего элемента.

Составим из значений координат x_i и обобщённых сил q_i на левом и правом концах цепи четыре вектор – столбца $X^{лев}, Q^{лев}, X^{прав}, Q^{прав}$. Высота этих столбцов равна числу k степеней свободы элемента цепи. Тогда в линейной механической системе значения этих векторов оказываются связанными равенством

$$\begin{pmatrix} X^{прав} \\ Q^{прав} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} X^{лев} \\ Q^{лев} \end{pmatrix},$$

где квадратная матрица S имеет порядок $2 \cdot k$ и называется ***передаточной матрицей цепной системы***.

В инженерных расчётах эта матрица обычно используется в форме блочной матрицы $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ с квадратными блоками k - го порядка.

Передаточная матрица может быть составлена не только для всей цепи, но и для любой её части, в том числе и для пары соседних звеньев. Обозначим передаточную матрицу между i - тым и $i+1$ - ым звеном цепи буквой S_i. Тогда передаточная матрица для всей цепи из n элементов находится по формуле

$$S = S_{n-1} \cdot S_{n-2} \cdot \ldots \cdot S_2 \cdot S_1 .$$

Если все соединения между звеньями цепи одинаковы, то эта формула принимает следующий простой вид:

$$S = (S_1)^{n-1} .$$

Так для железнодорожного состава из **примера 13** передаточная функция S_1 для двух соседних вагонов определяется формулой

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где c – коэффициент жёсткости сцепки. Тогда передаточная матрица S для состава, включающего локомотив и n вагонов, вычисляется так:

$$S = (S_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{n}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При выполнении этих вычислений мы воспользовались формулами

$$\begin{pmatrix} I & A \\ \Theta & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & B \\ \Theta & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A+B \\ \Theta & I \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} I & A \\ \Theta & I \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} I & n \cdot A \\ \Theta & I \end{pmatrix},$$

в справедливости которых вам предоставляется возможность убедиться самостоятельно.

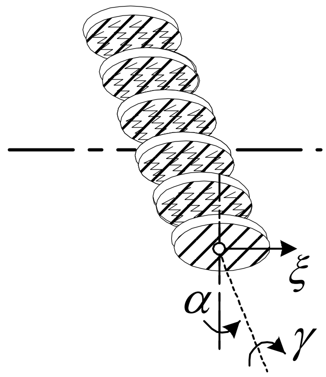


Рисунок 37

При статической деформации цилиндрической пружины обычно учитывается три степени свободы её поперечного сечения – перемещение ξ этого сечения вдоль оси пружины, угол α изгиба сечения относительно упругой оси проволоки и угол γ разворота этого сечения вокруг упругой оси (рис. 37). Представим пружину в виде последовательного соединения n элементов – поперечных сечений проволоки (смотри **пример 17**). Два соседних сечения пружины связывает квадратная передаточная матрица S_1 шестого порядка, которая имеет следующий вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{pmatrix} + \Delta l \cdot \begin{pmatrix} A & D \\ \Theta & B \end{pmatrix},$$

где $I = diag(1,1,1)$; $D = diag(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

Δl – расстояние между центрами соседних сечений; a, b, c – коэффициенты жёсткости проволоки при сжатии, изгибе и кручении; r – радиус кривизны витка.

Матрица S_1 для этого случая является блочной верхнетреугольной матрицей. Такой же вид будет иметь передаточная матрица для всей пружины, вычисляемая по формуле $S = (S_1)^{n-1}$.

Пример 35. **Экономичный раскрой пружины.** При моделировании железнодорожного состава (**пример 13**) или цепной передачи (**пример 16**) число n звеньев механической цепи определено условиями задачи. Для цилиндрической пружины это число может быть произвольным; ясно, что чем больше сечений выбрано, тем точнее используемая нами физическая модель системы с сосредоточенными параметрами описывает пружину, которая на самом деле является системой с равномерно распределёнными параметрами. Однако, чтобы вычислить передаточную матрицу S всей пружины приходится выполнять $(n-1)$ перемножение матриц S_1 шестого порядка, что при больших значениях n достаточно трудоёмко. Этих трудностей можно избежать, если число участков при разбиении пружины выбирать в соответствие с формулой

$$n = 2^p + 1,$$

где p – некоторое натуральное число, значение которого обычно лежит в диапазоне $\overline{10, 20}$.

При таком выборе числа n показатель степени равен 2^p. Возведение матрицы A в такую степень производится по следующему алгоритму.

1. Умножаем матрицу A саму на себя (то есть, получаем матрицу $B = A \cdot A$) и **результат умножения обозначаем той же буквой** A (то есть, после умножения принимаем, что $A = B$).

2. Предыдущий пункт алгоритма выполняем ровно p раз.

В результате выполнения указанных действий **фактически** получается следующая последовательность матриц:

$$A \cdot A = A^2 = A^{2^1};\ (A^2) \cdot (A^2) = A^4 = A^{2^2};\ (A^4) \cdot (A^4) = A^8 = A^{2^3}$$, и так далее.

После выполнения p таких ***рекуррентных*** умножений действительно, как вы в этом уже убедились, получится матрица A^{2^p}. Если $p=10$, то число операций при использовании данного алгоритма снижается в $1024:10 \approx 100$ раз!

Пример 36[*]**. Матричные корни из нуля и единицы**. Выше уже говорилось, что квадратные матрицы являются обобщением обычных чисел, а диагональные матрицы – тривиальным обобщением обычных чисел. Из школьного курса алгебры вам известно, что квадратное уравнение $x^2=a$ при $a=1$ имеет два решения $x_{1,2}=\pm 1$, при $a=0$ - одно решение и при $a=-1$ - ни одного решения; скоро вы узнаете о существовании комплексных чисел и тогда случаю $a=-1$ будет также соответствовать два решения, но не вещественных, а комплексных.

Рассмотрим ***матричное квадратное уравнение***
$$X^2 = a\cdot I, \qquad (20)$$
где a принимает значения 0 или 1 , а единичная матрица I имеет второй порядок.

Квадратные матрицы X, являющиеся решениями этого уравнения, имеют также второй порядок и называются ***алгебраическими корнями второй степени*** из нулевой и из единичной матрицы, соответственно.

Если ограничиться только диагональными матрицами, то решения уравнения (20) очевидны:

при $a=0$ – единственное решение $X=\Theta$;

при $a=1$ – четыре решения

$$X_1 = I = diag\,(1,1); \quad X_2 = -I = diag\,(-1,-1); \quad X_3 = diag\,(1,-1); \quad X_4 = diag\,(-1,1).$$

Однако, уравнение (20) имеет и не диагональные корни. Так, несложно проверить, что матрицы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix}$$, где p – любое число,

являются решением уравнения $Y^2=\Theta$, а матрицы

$$Y_1 = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = -J \ – \ \text{уравнения } Y^2 = I.$$

Этот пример показывает, что алгебра квадратных матриц (даже второго порядка) является значительно сложнее алгебры обычных чисел.

§ 6. Транспонирование и симметрия матриц

Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определения. Матрица B, полученная из матрицы A заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, ***транспонированной*** по отношению к данной, и обозначается A^T, то есть

$$B = A^T \underset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Переход от матрицы A к матрице A^T называется ***операцией транспонирования*** (или просто ***транспонированием***).

Если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $n \times m$. В частности, если матрица A является вектор-столбцом, то матрица A^T является вектор-строкой, и, наоборот, в результате транспонирования вектора-строки A получается вектор-столбец A^T.

Транспонирование квадратной матрицы A приводит к квадратной матрице A^T того же порядка, причём здесь процедуру транспонирования матрицы удобно трактовать как результат её разворота на 180^0 относительно главной диагонали (рис. 38).

Перечислим основные свойства операции транспонирования.

1. $\left(A^T\right)^T = A$; 2. $A = B \iff A^T = B^T$; 3. $\left[A_{ij}\right]^T = \left[B_{ij}\right]$, $B_{ij} = A^T_{ji}$;

4. $(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^T = \alpha \cdot A^T + \beta \cdot B^T$; 5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,

где A и B – любые матрицы согласованного размера; α, β – произвольные числа.

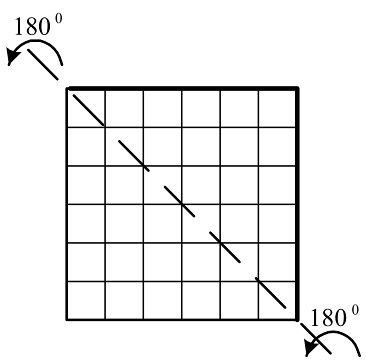


Рисунок 38

Свойства 1 – 3 прямо следуют из определения операции. **Свойство 4** является тривиальным следствием соответствующих свойств операций сложения матриц и умножения матрицы на число; наличие такого свойства позволяет отнести операцию транспонирования к числу линейных операций над матрицами. **Свойство 5** имеет несложное, но чисто техническое доказательство, поэтому для его обоснования обратимся к следующему примеру.

Пример 37. **Две формы записи матричных уравнений**. В **примере 23** при составлении матричного уравнения для системы (1) $\begin{cases} x+2\cdot y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ было использовано два способа объединения неизвестных:

1) объединение в форме вектора - столбца $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
2) объединение в форме вектора - строки $Y=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

Первый способ привёл к успеху, и мы получили искомое матричное уравнение

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} x+2\cdot y \\ x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\Theta \qquad (6).$$

Второй способ в том виде, как он применялся в **примере 23**, к успеху не привёл, поскольку получаемое на этом пути матричное уравнение

$$Y\cdot A=\Theta$$

не эквивалентно системе уравнений (1). Попробуем исправить положение. Заметим, что $Y=X^T$. Транспонируем матрицу A и вычислим произведение $Y\cdot A^T$:

$$Y\cdot A^T=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2\cdot y & x-y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, систему уравнений (1) можно представить в форме матричного уравнения

$$Y\cdot A^T=\Theta^T, \text{ где } \quad \Theta^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

причём уравнение (21) фактически может быть получено в результате транспонирования левой и правой части уравнения (6) и использования формулы

$$(A\cdot X)^T=X^T\cdot A^T. \qquad (22)$$

Вам предоставляется возможность выполнить аналогичные преобразования для системы (2) из **примера 23** и убедиться в том, что кроме уравнения

$$A\cdot X=F \qquad (7)$$

она может быть записана в виде ещё одного матричного уравнения

$$X^T\cdot A^T=F^T, \qquad (23)$$

причём и для этих матриц справедлива формула (22).

Уравнения (21) и (23) называются ***строчной формой записи*** системы, а уравнения (6) и (7) – ***столбцевой формой записи***. Обе формы записи совершенно равноправны, но в силу сложившейся привычки столбцевая запись матричного уравнения системы используется значительно чаще строчной.

Определение. Матрица A называется ***симметричной***, если $A^T=A$, и ***кососимметричной***, если $A^T=-A$.

Из определения операции транспонирования следует, что симметричные и кососимметричные матрицы являются квадратными матрицами. У симметричной матрицы A элементы a_{ij} и a_{ji}, расположенные симметрично относительно главной диагонали, одинаковы:

$$a_{ij} = a_{ji};$$

у кососимметричной матрицы они имеют противоположные значения:

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Следствие. У кососимметричной матрицы все элементы главной диагонали нулевые: $a_{ii} = 0$.

Выше мы уже встречались с симметричными матрицами. Например, все коммутационные матрицы G симметричны, симметричной оказалась матрица C коэффициентов жёсткости цепной механической системы (в том числе и блочная матрица из **примера 17**), симметричны все диагональные матрицы. Пример кососимметричной матрицы даёт матрица вращения $U(\varphi)$ при значении угла поворота $\varphi = 90^0$:

$$U(90^0) = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.1. Любая квадратная матрица может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц, причём такое представление единственно.

Доказательство. Формулировка теоремы включает два утверждения: ***о существовании*** такого представления и ***об его единственности***. Докажем существование.

Пусть задана произвольная квадратная матрица A. Образуем две новые квадратные матрицы:

$$A_C = 0.5 \cdot (A + A^T) \text{ и } A_K = 0.5 \cdot (A - A^T).$$

Транспонируем эти матрицы:

$$A_C^T = 0.5 \cdot (A + A^T)^T = 0.5 \cdot (A^T + (A^T)^T) = 0.5 \cdot (A^T + A) = A_C;$$
$$A_K^T = 0.5 \cdot (A - A^T)^T = 0.5 \cdot (A^T - (A^T)^T) = 0.5 \cdot (A^T - A) = -A_K.$$

Оказалось, что матрица A_C является симметричной, а матрица A_K – кососимметричной. Найдём сумму этих матриц:

$$A_C + A_K = 0.5\cdot(A + A^T) + 0.5\cdot(A - A^T) = 0.5\cdot A + 0.5\cdot A^T + 0.5\cdot A - 0.5\cdot A^T = A,$$

то есть
$$A = A_C + A_K. \qquad (24)$$

Таким образом, утверждение теоремы о существовании такого представления доказано. Докажем, что это представление единственно.

Пусть для некоторой матрицы A имеются два представления:

$$A = A_{C.1} + A_{K.1} \ \textbf{(25)} \qquad \text{и} \qquad A = A_{C.2} + A_{K.2} \ \textbf{(26)},$$

где $A_{C.1}$, $A_{C.2}$ – симметричные, $A_{K.1}$, $A_{K.2}$ – кососимметричные матрицы.

Приравняем правые части равенств (25) и (26), после чего у полученного равенства

$$A_{C.1} + A_{K.1} = A_{C.2} + A_{K.2}, \qquad (27)$$

одновременно транспонируем левую и правую части:

$$(A_{C.1} + A_{K.1})^T = (A_{C.2} + A_{K.2})^T,$$

то есть
$$A_{C.1} - A_{K.1} = A_{C.2} - A_{K.2}. \qquad (28)$$

Складывая правые и левые части равенства (27) и (28), получаем $A_{C.1} = A_{C.2}$, вычитая, получаем $A_{K.1} = A_{K.2}$, то есть представление единственно.

Теорема доказана.

Представление матрицы в виде суммы (24) используется, например, в разделе математики “Теория поля”.

Пример 38. **Неотрицательные матрицы.** В задачах из технических приложений особенно часто встречаются матрицы, которые представлены (или могут быть представлены) в виде произведения $A^T \cdot A$, где A – некоторая матрица размера $m \times n$. Заметим, что число столбцов матрицы A^T равно числу строк матрицы A, поэтому операция их перемножения всегда корректна. В результате перемножения получается квадратная матрица n - го порядка; обозначим её B, то есть $B = A^T \cdot A$. Изучим свойства матрицы B.

Транспонируем эту матрицу:

$$B^T = (A^T \cdot A)^T = (A)^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A = B,$$

следовательно, матрица B – симметричная.

Пусть X – произвольный вектор-столбец высотой n, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда произведение $X^T \cdot B \cdot X$ является матрицей первого порядка. Покажем, что единственный элемент этой матрицы является неотрицательным числом. Для этого выполним следующее преобразование:

$$X^T \cdot B \cdot X = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X = (A \cdot X)^T \cdot (A \cdot X) = Y^T \cdot Y,$$

где произведение $Y = A \cdot X$ является вектор - столбцом высоты m, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$.

Продолжим преобразование:

$$Y^T \cdot Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \left[y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 \right], \qquad \text{и} \qquad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 \geq 0\,,$$

что и требовалось показать.

Если некоторая квадратная матрица C имеет первый порядок и её единственный элемент удовлетворяет условию $c_{11} \geq 0$, то такие матрицы естественно называть ***неотрицательными*** и отмечать это следующим образом:

$$C \geq 0\,.$$

Теперь это определение можно распространить на квадратные матрицы любого порядка.

Определение. Симметричная матрица B, которая при произвольном векторе – столбце X удовлетворяет условию $X^T \cdot B \cdot X \geq 0$, называется ***неотрицательной***, что обозначается так:

$$B \geq 0\,.$$

Выше было показано, что матрицы $A^T \cdot A$ являются неотрицательными, то есть

$$A^T \cdot A \geq 0\,.$$

Справедливо и обратное утверждение, а именно: **любая неотрицательная матрица B может быть представлена в виде $B = A^T \cdot A$.**

Доказательство обратного утверждения будет приведено в третьей главе.

Диагональная матрица $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ является неотрицательной, если все $d_{ii} \geq 0$; здесь в качестве матрицы A можно использовать один из диагональных алгебраических корней второй степени из матрицы D, например

$$A = diag(\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \dots, \sqrt{d_{nn}})\,.$$

У симметричной недиагональной матрицы $\left[\, a_{ij} \,\right]$ утверждение "все диагональные элементы $a_{ii} \geq 0$" является необходимым условием, но не является достаточным условием для того, чтобы она была неотрицательной. Так, симметричная матрица перестановки $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не является неотрицательной матрицей, поскольку, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0\,.$$

Определение. Матрица $C = -B$, противоположная к неотрицательной матрице B, называется ***неположительной***, что обозначается так:

$$C \leq 0\,.$$

Для неположительной матрицы C справедливо представление: $C = -A^T \cdot A$.

Для иллюстрации таких представлений вернёмся к **примеру 13** о колебаниях цепной механической системы. Уравнение (15)

$$M \cdot \ddot{X} = C \cdot X\,,$$

описывающее эти колебания, содержит две матрицы – неотрицательную диагональную матрицу $M = diag\,(m_1, m_2, \dots, m_n) \geq 0$ и симметричную матрицу C, которая имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} -c & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & -2\cdot c & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & -2\cdot c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2\cdot c & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & -c \end{pmatrix}.$$

Матрица C может быть представлена также и в следующем виде:

$$C=-A^T\cdot A, \quad \text{где матрица} \quad A=\sqrt{c}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и является неположительной. Вам предоставляется возможность убедиться в этом самостоятельно, составив матрицы M, C и A для железнодорожного состава, показанного на рис.9 (то есть содержащего локомотив и четыре вагона).

*Пример 39**. **Матричные неравенства в электротехнике.** Вернёмся к задачам об электрических цепях и покажем, что передаточная матрица $S=\begin{pmatrix} F & G \\ H & D \end{pmatrix}$ для $2\cdot n$-полюсника не может состоять из произвольных блоков, а должна удовлетворять условию, имеющему вид ***матричного неравенства***.

Из курса физики вам хорошо известна формула для мощности электрического тока: $W=U\cdot J$, где U – напряжение, а J – сила тока. Используя эту формулу для всех входных, а затем всех выходных клемм, суммарную входную и выходную мощности можно представить в следующей форме:

$$W_{вх}=U_1^{вх}\cdot J_1^{вх}+\dots+U_n^{вх}\cdot J_n^{вх}=(U^{вх})^T\cdot J^{вх};$$

$$W_{вых}=U_1^{вых}\cdot J_1^{вых}+\dots+U_n^{вых}\cdot J_n^{вых}=(U^{вых})^T\cdot J^{вых}.$$

Используем матрицу блочной перестановки $J=\begin{pmatrix} \Theta & I \\ I & \Theta \end{pmatrix}$ (смотри **пример 31**) и перепишем эти формулы в следующем симметричном виде:

$$W_{вх}=(U^{вх})^T\cdot J^{вх}=0.5\cdot\begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} U^{вх} \\ J^{вх} \end{pmatrix}=0.5\cdot\begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix}^T\cdot J\cdot\begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix},$$

$$W_{вых}=(U^{вых})^T\cdot J^{вых}=0.5\cdot\begin{pmatrix} J^{вых} & U^{вых} \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} U^{вых} \\ J^{вых} \end{pmatrix}=0.5\cdot\begin{pmatrix} J^{вых} & U^{вых} \end{pmatrix}^T\cdot J\cdot\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix}.$$

Блочные вектора-столбцы $\begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix}$ связаны между собой передаточной матрицей S –

$$\begin{pmatrix} J^{вых} \\ U^{вых} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} J^{вых} & U^{вых} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix} \cdot S^{T},$$

поэтому формулу для выходной мощности можно записать так:

$$W_{вых} = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix}^{T} \cdot S^{T} \cdot J \cdot S \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix}.$$

Если многополюсник не имеет дополнительных источников питания (как это бывает, например, в усилителях), то

$$W_{вых} \le W_{вх},$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix}^{T} \cdot S^{T} \cdot J \cdot S \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix}^{T} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Перепишем неравенство (29) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} J^{вх} & U^{вх} \end{pmatrix}^{T} \cdot (S^{T} \cdot J \cdot S - J) \cdot \begin{pmatrix} J^{вх} \\ U^{вх} \end{pmatrix} \le 0. \tag{30}$$

Условие (30) выполняется при любых значениях входных токов и напряжений, поэтому оно означает, что матрица $S^{T} \cdot J \cdot S - J$ является неположительной, то есть

$$S^{T} \cdot J \cdot S - J \le 0. \tag{31}$$

Условие (31) даёт пример так называемого ***матричного неравенства***. Часто его записывают в такой эквивалентной форме:

$$S^{T} \cdot J \cdot S \le J. \tag{32}$$

Матричные неравенства $A \le B$ или $A \ge B$ в линейной алгебре понимаются в том смысле, что $A - B \le 0$ или $A - B \ge 0$, соответственно.

В правой и левой части неравенства (32) стоят симметричные матрицы. Ясно, что условие (32) ограничивает сверху значения элементов матрицы S, поэтому, но и не только поэтому, "электрическое доказательство", приведенное в **примере 30,** не является корректным.

Пример 40. **Симметрия механических систем**. Уравнения движения механических систем обладают особой формой симметрии, которая является следствием симметрии основных законов динамики. Проиллюстрируем это на примере простейшей динамической модели ***тепловой импульсной машины*** (рис.39). При помощи такой модели, например, исследуют основные закономерности тех процессов, которые происходят в стволе артиллерийского орудия во время выстрела, то есть решают задачу ***внутренней баллистики***. Модель учитывает изменение давления и объёма пороховых газов, силы, оказывающие сопротивление движению снаряда, откат ствола и ряд других влияющих факторов.

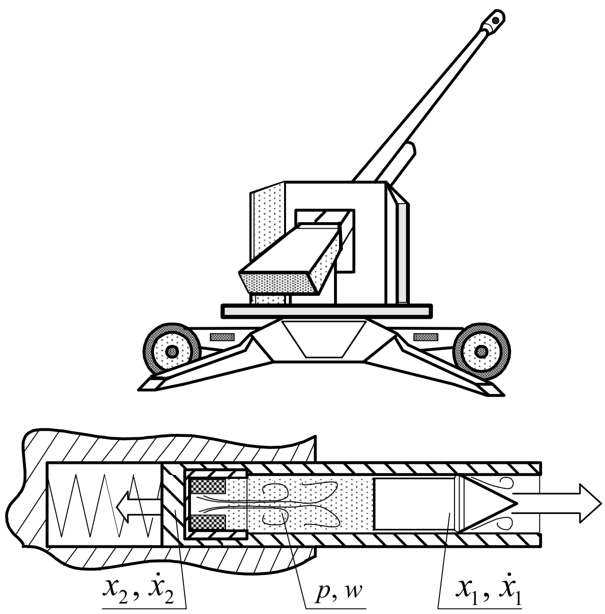


Рисунок 39

Соответствующая математическая модель включает уравнения движения снаряда и ствола:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = f \cdot p - k_{ств} \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{воз} \cdot \dot{x}_1 ;$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = f \cdot p - k_{ств} \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_{ам} \cdot \dot{x}_2 ,$$

и уравнение сжимаемости пороховых газов в затворной камере

$$\alpha \cdot w \cdot \dot{p} = q_{газ}(t) - f \cdot (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - k_{ут} \cdot p ,$$

где m_1, m_2 – массы снаряда и ствола; $\dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_2$ – скорости и ускорения снаряда и ствола; f – площадь поперечного сечения снаряда; $k_{ств}$ – коэффициент в формуле для силы трения между запорным пояском снаряда и стволом; $k_{воз}$ – коэффициент, учитывающий сопротивление выталкиваемого воздуха; $k_{ам}$ – коэффициент в формуле для силы сопротивления амортизаторов отката ствола; $k_{ут}$ – коэффициент, учитывающий прорыв части пороховых газов в обгон снаряда; p, w – давление пороховых газов и занимаемый ими объём; α – коэффициент сжимаемости газов; $q_{газ}$ – объёмная скорость выделения газов при горении порохового заряда; t – время.

Уравнения математической модели запишем в матричной форме. Для этого образуем диагональную матрицу D из коэффициентов при производных, вектор-столбец X из так называемых динамических параметров системы и вектор-столбец Q, учитывающий влияние внешних факторов:

$$D = diag(m_1, m_2, \alpha \cdot w) ; \qquad X = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ p \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{газ}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений можно заменить одним уравнением следующего вида:

$$D \cdot \dot{X} = A \cdot X + Q(t) , \tag{33}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -(k_{ств} + k_{воз}) & k_{ств} & f \\ k_{ств} & -(k_{ств} + k_{ам}) & f \\ -f & -f & -k_{ут} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу A третьего порядка можно представить в виде блочной матрицы формата 2×2

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ -F^T & Z \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$B = \begin{pmatrix} -(k_{ств} + k_{воз}) & k_{ств} \\ k_{ств} & -(k_{ств} + k_{ам}) \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -k_{ут} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}.$$

Матрицы B и Z являются симметричными и как это несложно проверить (выполнить самостоятельно!) неположительными матрицами, но сама матрица A симметричной не является, так как блоки, расположенные на побочной диагонали, удовлетворяют условию косой симметрии. Матрица A не является и кососимметричной, если диагональные блоки B и Z ненулевые (то есть когда система теряет часть механической энергии на преодоление сил трения и при утечках массы). Проявившаяся здесь особая форма симметрии матрицы называется ***симметрией механических систем***. Замечательным является то, что если уравнения динамики любой механической системы записаны в форме матричного уравнения (33), то матрица A всегда может быть представлена в виде блочной матрицы (34), причём матрицы B и Z являются симметричными и $B \le 0, Z \le 0$.

Другими словами, **матричное представление (34) является математическим эквивалентом основных законов механики и следствием их симметрии.**

Использование матричных уравнений вместо систем уравнений позволяет в наиболее наглядной форме выявить симметрию, присутствующую в этих системах, и избегать грубых ошибок при составлении математических моделей для сложных динамических объектов.

Замечание. Если уравнения динамики записаны в форме дифференциального матричного уравнения второго порядка

$$D \cdot \ddot{X} = A \cdot \dot{X} + B \cdot X + Q(t),$$

где D – диагональная неотрицательная матрица, то матрицы A и B обязаны быть симметричными и неположительными матрицами (смотри, например, уравнение (15)) .

Глава 2. Определители и обратные матрицы

§ 7. Факториал. Перестановки. Инверсия

Определение*. *Факториалом натурального числа n называется произведение $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Факториал числа n обозначается $n!$, то есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$. В частности,

$$1! = 1; \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24; \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

и так далее.

Факториал числа 0 считается равным 1 (то есть $0! = 1$) ; факториалы отрицательных целых чисел пока не определены; позже вы узнаете, что их можно считать равными бесконечности.

Факториалы двух соседних чисел удовлетворяют следующему очевидному соотношению:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!, \tag{1}$$

формулы такого вида в математике называются ***рекуррентными***.

Рекуррентная формула (1) позволяет последовательно переходить от одного факториала к другому, не выполняя все вычисления заново. Так на основе этой формулы может быть легко получена следующая таблица значений факториала (табл. 1).

Таблица 1 – **Значения факториала**.

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720	11	39916800	16	20922789888000
2	2	7	5040	12	479001600	17	355687428096000
3	6	8	40320	13	6227020800	18	6402373705728000
4	24	9	362880	14	87178291200	19	121645100408832000
5	120	10	3628800	15	1307674368000	20	2432902008176640000

Как видно из приведенных данных, факториал с увеличением числа n очень быстро возрастает и при $n > 15$ выходит в область астрономических чисел.

Определение. Пусть даны n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Любое расположение этих чисел в определённом порядке называется их ***перестановкой***.

Теорема 2.1. Число перестановок, которое можно образовать из n чисел, равно $n!$.

Доказательство. Подсчитаем число вариантов. На первое место в перестановке можно поставить любое число из имеющихся n, что даёт n вариантов. Тогда число претендентов занять второе место в перестановке уменьшится на единицу и составит $n-1$, а число различных вариантов для первых двух позиций составит $n \cdot (n-1)$. Аналогично, на третье место можно поставить одно число из оставшихся $(n-2)$ чисел, на четвёртое – одно из $(n-3)$ чисел и так далее, пока не останется одна незаполненная позиция и единственное неиспользованное число .

Теорема доказана.

Два числа в перестановке образуют ***инверсию***, если большее число расположено перед меньшим числом. Количество инверсий множества чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ обозначается символом: $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Чтобы подсчитать число инверсий в произвольной перестановке чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ поступают таким образом:

сосчитаем количество инверсий k_1, образованное числом a_1 с остальными числами в перестановке;

затем, зачёркивая число a_1, вычисляем количество инверсий k_2, образованное элементом a_2 с оставшимися числами перестановки,

и так далее.

Тогда число $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$ даёт число инверсий в перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Пример 41. Вычислить количество инверсий в перестановке 2, 4, 3, 5, 1, 7.

Решение. Число 2 образует инверсию с 1, т.е. $k_1 = 1$. Вычеркивая число 2, получаем перестановку 4, 3, 5, 1, 7.

Число 4 образует инверсию с числами 3 и 1, следовательно $k_2 = 2$. Зачеркивая 4, получаем перестановку 3, 5, 1, 7.

Число 3 образует перестановку с 1, поэтому $k_3 = 1$.

Аналогично показываем, что $k_4 = 1, k_5 = 0$.

Ответ: [2, 4, 3, 5, 1, 7] = 1+2+1+1+0=5.

Определения.

1. Перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется ***чётной*** (или ***нечётной***), если соответственно чётно (или нечётно) число инверсий в перестановке.

2. Операция перемены местами каких-либо двух чисел в перестановке называется ***транспозицией*** этих чисел.

Теорема 2.2. Всякая транспозиция меняет чётность перестановки.

Доказательство. Пусть задана перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Рассмотрим сначала случай, когда транспонируемые числа a_i и a_{i+1} стоят рядом:

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n . \tag{2}$$

Переставляя местами числа a_i и a_{i+1}, получим следующую перестановку

$$a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n . \tag{3}$$

Очевидно, что все числа перестановки (кроме чисел a_i, a_{i+1}) не изменили своего положения относительно друг друга, а также относительно чисел a_i и a_{i+1}. Если числа a_i и a_{i+1} в перестановке (2) образуют инверсию, то в перестановке (3) они инверсии не образуют; и, наоборот, если в перестановке (2) числа a_i и a_{i+1} не образуют инверсии, то в перестановке (3) они образуют инверсию. В обоих случаях количество инверсий меняется на единицу, следовательно, меняется четность перестановки.

Пусть теперь между транспонируемыми числами a_i и a_j, расположено s элементов, т.е. перестановка имеет вид:

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{i+s}, a_j, \ldots, a_n .$$

Очевидно, транспозицию чисел a_i и a_j можно осуществить в результате последовательного выполнения $(2s+1)$ транспозиций соседних элементов. Таким образом, мы нечётное число раз меняем чётность перестановки и в итоге она изменится на противоположную.

Теорема доказана.

§ 8. Понятие определителя

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A порядка n. Сопоставим матрице A число $\det A$ по следующему правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{def}{=} \sum (-1)^r \, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}\,, \qquad (4)$$

где сумма берётся по всевозможным перестановкам чисел

$$i_1, i_2, \ldots, i_n; \quad r = [\, i_1, i_2, \ldots, i_n \,].$$

Определение. Число $\det A$, вычисляемое по формуле (4), называется ***определителем матрицы*** A n***-го порядка***, или просто ***определителем*** n***-го порядка***.

Выражение $\det A$ читается «детерминант матрицы A», где термин ***детерминант*** переводится с французского языка на русский как ***определитель***.

Число перестановок равно $n!$, поэтому определитель n-го порядка равен сумме из $n!$ слагаемых, причём каждое слагаемое является произведением n элементов, взятых из разных строк и столбцов.

Определителем матрицы первого порядка, образованной числом a_{11}, называется само это число, то есть:

$$\det \left[\, a_{11} \,\right] = a_{11}.$$

Пользуясь определением, вычислим определители второго и третьего порядков.

Определитель матрицы второго порядка содержит два слагаемых: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot (-1)^{[1,2]}$ и $a_{21} \cdot a_{12} \cdot (-1)^{[2,1]}$; первое произведение получает знак плюс, второе – знак минус, то есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{5}$$

Определитель матрицы третьего порядка содержит 6 слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} (-1)^{[1,2,3]} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} (-1)^{[3,1,2]} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} (-1)^{[2,3,1]} +$$
$$+ a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} (-1)^{[3,2,1]} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} (-1)^{[1,3,2]} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} (-1)^{[2,1,3]},$$

и здесь, если подсчитать число инверсий, получаем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}. \tag{6}$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться **правилом треугольников**, которое символически можно записать так, как показано на рис. 40.

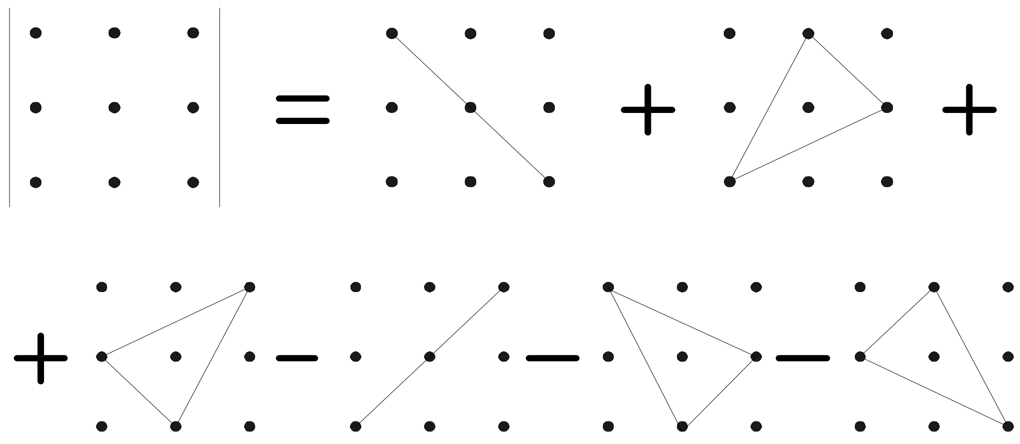


Рисунок 40

Пример 42. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 4 =$$

$$= 16 + 6 - 6 - 18 - 8 + 4 = -6$$

<u>Ответ</u>: определитель матрицы равен – 6.

Формула (4) для определителя 4-го порядка содержит 24, а определителя 5-го порядка - 120 слагаемых, поэтому эта формула при $n > 3$ используется только для отдельных типов матриц; несколько примеров такого рода вычислений вы найдёте в конце этого параграфа. Вместо неё для вычисления определителей используются так называемые ***формулы Лапласа*** или ***метод Гаусса***.

Пример 43. **Что «определяет» определитель матрицы?** Попытаемся найти ответ на этот так называемый «детский» вопрос на примере решения систем линейных уравнений. Вы уже знаете (смотри **примеры 1 и 23**), что систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y = f_1 \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y = f_2 \end{cases}, \qquad (7)$$

можно записать в виде матричного уравнения $A\cdot X = F$,

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Найдём решения системы (7), используя метод исключения неизвестного:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y = f_1 \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22}\cdot a_{11}\cdot x + a_{22}\cdot a_{12}\cdot y = a_{22}\cdot f_1 \\ a_{12}\cdot a_{21}\cdot x + a_{12}\cdot a_{22}\cdot y = a_{12}\cdot f_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{22}\cdot a_{11} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot x = a_{22}\cdot f_1 - a_{12}\cdot f_2;$$

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y = f_1 \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21}\cdot a_{11}\cdot x + a_{21}\cdot a_{12}\cdot y = a_{21}\cdot f_1 \\ a_{11}\cdot a_{21}\cdot x + a_{11}\cdot a_{22}\cdot y = a_{11}\cdot f_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{21}\cdot a_{12} - a_{11}\cdot a_{22})\cdot y = a_{21}\cdot f_1 - a_{11}\cdot f_2.$$

Воспользуемся формулой (5) для определителя второго порядка и перепишем полученные равенства в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot x = \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} \\ f_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot y = \begin{vmatrix} a_{11} & f_1 \\ a_{21} & f_2 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Теперь можно сделать некоторые выводы. Во-первых, если $\det A = 0$, а по крайней мере один из определителей, записанных в правых частях равенств (8), не равен нулю, то система (7) не имеет решения, то есть **определитель матрицы коэффициентов A «определяет» условие существования решения системы**. Во- вторых, если $\det A \neq 0$, то можно сразу указать единственное решение системы (7):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} f_1 & a_{12} \\ f_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A}; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & f_1 \\ a_{21} & f_2 \end{vmatrix}}{\det A}, \tag{9}$$

то есть **определители позволяют «определить» значения неизвестных для того случая, когда решение системы единственно**.

Формулы (9) являются частным случаем формул для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, которые были получены немецким математиком ***Крамером*** и носят его имя. Далее в этой книге на эту тему будет доказана соответствующая теорема. Надеемся, что вам понятна закономерность, которой подчиняются определители, используемые в числителях ***формул Крамера***. Поэтому, имея целью продолжить упражнения в методах вычисления определителей, покажем, как используются определители при решениях систем третьего порядка.

Найдём решение системы (1.2) $\begin{cases} x-0.1\cdot y+0.7\cdot z=1.6 \\ -2\cdot x+3\cdot y-0.5\cdot z=0.5 \\ 0.1\cdot x+y-2\cdot z=-0.9 \end{cases}$ из **примера 1**. Для этого составим и вычислим четыре определителя третьего порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -0.1 & 0.7 \\ -2 & 3 & -0.5 \\ 0.1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-6+0.005-1.4-0.21+0.4+0.5=-6.705;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & a_{13} \\ f_2 & a_{22} & a_{23} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1.6 & -0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 3 & -0.5 \\ -0.9 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-9.6-0.045+0.35+1.89-0.1+0.8=-6.705;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & f_1 & a_{13} \\ a_{21} & f_2 & a_{23} \\ a_{31} & f_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1.6 & 0.7 \\ -2 & 0.5 & -0.5 \\ 0.1 & -0.9 & -2 \end{vmatrix}=-1-0.08+1.26-0.035-6.4-0.45=-6.705;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & f_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -0.1 & 1.6 \\ -2 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & -0.9 \end{vmatrix}=-2.7-0.005-3.2-0.48+0.18-0.5=-6.705.$$

Теперь вычислим значения неизвестных по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-6.705}{-6.705}=1; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-6.705}{-6.705}=1; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-6.705}{-6.705}=1 .$$

Если найденные значения подставить в уравнения системы (1.2), то все уравнения превратятся в точные равенства. Следовательно, использование определителей третьего порядка позволило найти решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 44. **Геометрический смысл определителя.** В предыдущем примере мы ответили на поставленный вопрос только частично, объяснив, что «определяет» определитель матрицы в линейной алгебре. Покажем, что «определяет» определитель в геометрии.

Рассмотрим произвольную матрицу второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и отметим на координатной плоскости Oxy (рис.41) точки $M_1(a_{11}, a_{12})$ и $M_2(a_{21}, a_{22})$. Построим параллелограмм OM_1PM_2 и найдём его площадь S:

$$S = OM_1 \cdot OM_2 \cdot \sin\varphi .$$

Преобразуем эту формулу, используя равенство $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ и соотношения между сторонами прямоугольных треугольников OK_1M_1 и OK_2M_2:

$$\begin{aligned} S &= OM_1 \cdot OM_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = OM_1 \cdot OM_2 \cdot (\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2) = \\ &= (OM_1 \cdot \cos\varphi_1) \cdot (OM_2 \cdot \sin\varphi_2) - (OM_1 \cdot \sin\varphi_1) \cdot (OM_2 \cdot \cos\varphi_2) = \\ &= OK_1 \cdot K_2M_2 - K_1M_1 \cdot OK_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det A \end{aligned} .$$

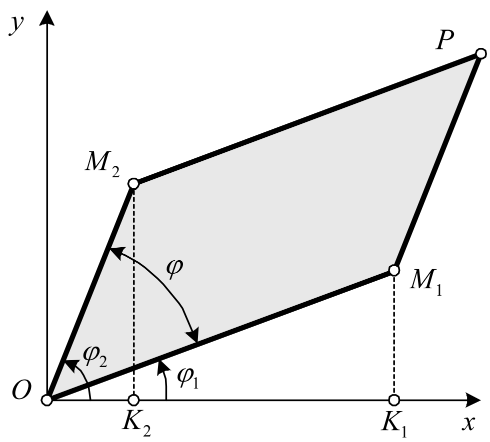


Рисунок 41

Таким образом, определитель оказался равен площади параллелограмма.

Если поменять местами строки матрицы A, то площадь параллелограмма не изменится, но значение определителя изменится на противоположное (проверить самостоятельно!). Поэтому в общем случае можно утверждать, что **абсолютная величина определителя равна площади параллелограмма OM_1PM_2.**

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и построим (рис. 42) параллелепипед $OM_1P_1M_2P_2M_3P_3P$, в котором три вершины имеют следующие координаты:

$$M_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}); \quad M_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}); \quad M_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}) \quad .$$

В курсе аналитической геометрии доказывается, что **объём этого параллелепипеда в точности равен абсолютной величине определителя матрицы** A.

Пример 45. **ЭВМ против определителя: раунд первый.** Оценим число операций, которое требуется для вычисления определителя квадратной матрицы n-го порядка по формуле (4). Предполагается, что все элементы матрицы отличны от нуля, то есть она является не ***разреженной***, а ***заполненной***. Будем учитывать то, что на большинстве ЭВМ операция умножения двух чисел выполняется примерно в 2 раза дольше, чем операции сложения. Тогда, для

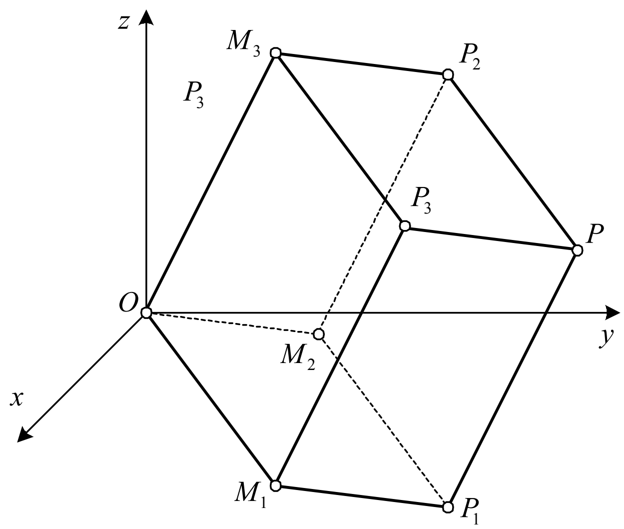


Рисунок 42

того, чтобы получить все $n!$ слагаемых формулы (4) (без определения их знака !) и найти их сумму потребуется выполнить

$$N_1 = 3 \cdot (n-1) \cdot n!$$

операций сложения. Воспользуемся данными таблицы значений факториала и выясним, что для определителя 20 - го порядка число N составляет приблизительно 12×10^{20}. Если использовать рекордную по быстродействию ***суперЭВМ Marc – IV*** (приблизительно 1 млрд. операций сложения в секунду), то на вычисление этих слагаемых для одного такого определителя понадобится приблизительно 30 тысяч лет! Но ведь ещё нужно считать инверсии. **Первый раунд ЭВМ проиграла**, что и отражено на рис. 43.

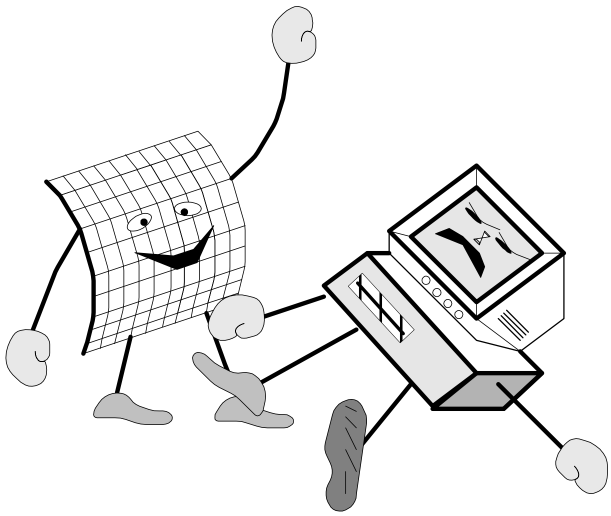


Рисунок 43

Пример 46. **Определитель треугольной матрицы.** Пусть матрица A_Δ является нижнетреугольной матрицей n - го порядка, то есть

$$A_\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда в формуле (4) будут отличны от нуля только те слагаемые

$$(-1)^r \cdot a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot ... \cdot a_{i_n n}\ , \quad \text{у которых все } i_j \geq j. \tag{10}$$

Поскольку числа i_j различны, то условию (10) удовлетворяет только одна перестановка, в которой все $i_j = j$; соответственно этому в формуле (4) останется только одно слагаемое $(-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$. Число инверсий r для этой перестановки равно нулю. В результате, мы пришли к очень простому правилу: **определитель нижнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов,** то есть

$$\det A_\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}. \tag{11}$$

Аналогичное правило выполняется для верхнетреугольной матрицы, в чём вам предлагается убедиться самостоятельно. Диагональная матрица является частным случаем треугольной, поэтому и здесь

$$\det\left[diag\,(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn})\right] = d_{11} \cdot d_{22} \cdot ... \cdot d_{nn}. \tag{12}$$

Следствие. Определитель единичной матрицы любого порядка равен 1, то есть

$$\det I = 1. \tag{13}$$

Пример 47[*]. **Определитель блочно-диагональной матрицы**. Пусть квадратная матрица D N - го порядка является блочно-диагональной матрицей с квадратными блоками D_{ii} порядка l_i, то есть

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & D_{22} & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta & \Theta & \dots & D_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \qquad l_1+l_2+\dots+l_n=N\,.$$

Если записать для определителя этой матрицы формулу (4) и отбросить в ней заведомо нулевые члены, то в этой формуле останется K слагаемых вида

$$(-1)^r\cdot d_{i_1 1}\cdot d_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot d_{i_N N}\,, \qquad \text{где} \qquad K=(l_1\,!)\cdot(l_2\,!)\cdot\ldots\cdot(l_n\,!)\,.$$

К сожалению, число K обычно велико. Например, при значениях $l_1, l_2, l_3, n=3$ (то есть для не очень большой блочно-диагональной матрицы 9-го порядка) $K=216$. Поэтому находить при вычислении определителя сумму такого большого числа слагаемых практически невозможно. Однако в этом нет необходимости, поскольку для этих слагаемых все перестановки номеров строк оказываются ограничены пределами отдельных блоков D_{ii} (или, как говорят математики, **перестановки локализованы в блоках**). Поэтому, если применить формулу (4) для каждого блока D_{ii}, а затем перемножить все n сумм между собой, то получится формула (4) для определителя матрицы D со всеми её K слагаемыми.

Разумеется, для практики важно то, что это преобразование можно провести в прямо противоположную сторону. В результате мы приходим к следующему правилу: **определитель блочно-диагональной матрицы равен произведению определителей диагональных блоков, то есть**

$$\det\left[diag\,(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})\right]=\det D_{11}\cdot\det D_{22}\cdot\ldots\cdot\det D_{nn}\,. \tag{14}$$

Обобщение. Аналогичное правило имеет место для определителя блочно – треугольной матрицы. Вам предоставляется возможность сформулировать и доказать его самостоятельно.

Пример 48[*]. **Матрица из определителей.** Вычислим определитель матрицы блочной перестановки $J=\begin{pmatrix}\Theta & I \\ I & \Theta\end{pmatrix}$, где I, Θ – единичная и нулевая матрицы n - го порядка. При использовании для этой матрицы формулы (4) сумма будет содержать только одно ненулевое слагаемое, равное $(-1)^r$, где

$$r=\left[(n+1),\quad (n+2),\quad \dots\quad, (2\cdot n),\quad 1,\quad 2,\quad \dots\quad, n\right].$$

Определим число инверсий в этой перестановке. Каждое число из второй группы (то есть, числа 1, 2, …, n) образуют с числами первой группы n инверсий, следовательно, общее число инверсий $r=n^2$. В результате оказывается, что

$$\det J=1 \text{ при чётном } n \qquad \text{и} \qquad \det J=-1 \text{ при нечётном } n\,.$$

<u>Замечание</u>. Решённый пример позволяет избавиться от одной довольно распространённой иллюзии, которая может возникнуть у внимательного читателя после знакомства с результатами предыдущих **примеров 46 и 47**. Справедлива ли формула

$$\det\left[A_{ij}\right]=\det\left[\det A_{ij}\right]\ ?$$

Формула красива, и это, как всегда бывает в математике, важный аргумент в её пользу. Кроме того, для блочно – диагональных и блочно – треугольных матриц она соблюдается. Проверим её на примере матрицы блочной перестановки J.

Слева: $\det J=(-1)^n$. Справа: $\det\begin{pmatrix}\det\Theta & \det I\\ \det I & \det\Theta\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0\cdot 0-1\cdot 1=-1$.

Таким образом, при чётном n равенства нет, следовательно, найден так называемый ***контр пример***, который показывает, что эту формулу для общего случая доказывать не зачем, поскольку здесь она не может быть верна. А жаль, неправда ли? Формула для вычисления определителя блочной матрицы нужна для практики, и поэтому позже мы обязательно вернёмся к этому вопросу.

§ 9. Формулы Лапласа

Рассмотрим определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

***Определение**. Минором элемента* a_{ik} называется определитель $(n-1)$-ого порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием i-той строки и k-того столбца.

Минор элемента a_{ik} обозначается M_{ik}.

Пример 49. Пусть дан определитель

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 5 & -7 & 8\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}.$$

Минор M_{32} элемента $a_{32}=1$, стоящего в третьей строке и втором столбце, равен:

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 8\end{vmatrix}=-4\,.$$

Определение**. Алгебраическим дополнением* A_{ik} ***элемента a_{ik} называется минор этого элемента, взятый с определенным знаком, а именно:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Рисунок 44

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}. \tag{15}$$

Знаки при движении по строке или по столбцу матрицы чередуются, причём миноры всех элементов главной диагонали используются в формуле (15) со знаком « + » (рис. 44).

Замечание. Внимательный читатель уже заметил, что раньше мы использовали обозначение A_{ij} для записи элементов блочной матрицы. Такая ситуация называется в математике ***коллизией обозначений***. Мы, конечно, могли бы избежать этой коллизии, изменив обозначения на менее удобные и непривычные, но не стали этого делать. Блоки матрицы и алгебраические дополнения её элементов обычно не соседствуют друг с другом в одной задаче; в этом или других учебниках по линейной алгебре вы не найдете таких страниц, на которых использовалось бы и то, и другое понятие. Что касается смысла обозначения A_{ij}, то он всегда ясен из контекста решаемой задачи.

Теорема 2.3 (**формулы Лапласа**). Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения, то есть:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} \quad , \text{где } i \in \overline{1, n}; \tag{16}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} \quad , \text{где } k \in \overline{1, n}. \tag{17}$$

Доказательство. Докажем формулу (17) для случая, когда $k = 1$ (то есть, для первого столбца). Заметим, что каждое слагаемое из суммы (4) содержит некоторый, причём единственный, элемент a_{i1} из первого столбца матрицы A. Каждый элемент a_{i1} содержится в $(n-1)!$ слагаемых этой суммы, которые можно записать в виде отдельной группы. Если из каждой группы вынести элемент a_{i1} за скобки, то формула (4) примет такой вид:

$$\det A = a_{11}\cdot S_{11} + a_{21}\cdot S_{21} + \ldots + a_{n1}\cdot S_{n1}, \qquad \text{где } S_{i1} = \sum (-1)^r \cdot a_{i_2 2}\cdot a_{i_3 3}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n},$$

а сумма берётся по всевозможным перестановкам чисел

$$i_2,\ldots,i_n;\quad i_j\in\overline{1,n};\quad i_j\neq i;\quad r=\left[i\,,i_2,\ldots,i_n\right].$$

Число инверсий r в соответствии с методом его вычислений, описанном в § 7, удовлетворяет такой формуле:

$$r = (i-1) + r_1,$$

где выражение $(i-1)$ определяет число инверсий номера i с остальными числами перестановки $i\,,i_2,\ldots,i_n$; а $r_1 = \left[i_2,\ldots,i_n\right]$.

Заметим, что $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$, поэтому

$$S_{i1} = (-1)^{i+1}\cdot\sum(-1)^{r_1}\cdot a_{i_2 2}\cdot a_{i_3 3}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n} = (-1)^{i+1}\cdot M_{i1}.$$

Следовательно, $S_{i1} = A_{i1}$, и **формула (17) для случая, когда $k=1$, доказана**. Для остальных столбцов теорема доказывается аналогично. Формула (16) будет доказана как следствие формулы (17) после изучения свойств определителя.

Применение формул (16) или (17) называется ***раскрытием определителя по элементам i-той строки или k-того столбца***, соответственно.

Указание. Раскрытие определителя целесообразно проводить по той строке или по тому столбцу, которые содержат максимальное число нулевых элементов.

Пример 50. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&0&0&0\\3&0&5&0\\4&0&0&6\end{pmatrix}$.

Решение. Вторая строка матрицы содержит три нуля, поэтому раскроем определитель по элементам этой строки:

$$\det A = 2\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 0\cdot A_{24} = 2\cdot(-1)\cdot M_{21} = -2\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\0&5&0\\0&0&6\end{vmatrix} = -2\cdot2\cdot5\cdot6 = -120.$$

Определитель третьего порядка вычислялся как определитель треугольной матрицы.

Ответ: $\det A = -120$.

Пример 51. **ЭВМ против определителя: раунд второй.** Оценим число операций, которое потребуется для вычисления определителя заполненной матрицы n-го порядка по формулам Лапласа. Учтём, как и ранее в **примере 45**, что операция умножения по длительности эквивалентна двум операциям сложения. Тогда раскрытие определителя n- го порядка по элементам первой строки потребует примерно $3 \cdot n$ операций сложения. Если раскрыть все миноры по элементам их первой строки, то на это потребуется ещё $n \cdot (3 \cdot (n-1))$ операций. Продолжая указанным образом понижать порядки миноров, мы можем вычислить определитель, потратив на это время, которое примерно эквивалентно выполнению

$$N_2 = 3 \cdot n!$$

операций сложения. Число N_2 оказалось меньшим числа N_1, но для определителей порядка $n \geq 20$ оно всё ещё чрезвычайно велико (время счёта - тысячи лет!). И поэтому **второй раунд ЭВМ тоже проиграла** (рис. 43).

*Пример 52**. **Определитель цепной системы.** Пусть дана трёхдиагональная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & d_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим определитель этой матрицы x_n, где индекс n отвечает его порядку. Раскроем этот определитель по элементам нижней строки:

$$x_n = c_{n-1} \cdot A_{n\,n-1} + d_n \cdot A_{n\,n} = -c_{n-1} \cdot M_{n\,n-1} + d_n \cdot M_{n\,n}. \tag{18}$$

Выпишем используемые миноры:

$$M_{n\,n-1} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & d_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix}; \qquad M_{n\,n} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & d_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & d_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Минор $M_{n\,n}$ аналогичен определителю матрицы A, но имеет порядок $n-1$, поэтому его можно обозначить x_{n-1}. Минор $M_{n\,n-1}$ можно раскрыть по элементам $n-1$ - го столбца, в котором имеется только один элемент, отличный от нуля:

$$M_{n\,n-1} = b_{n-1} \cdot x_{n-2},$$

где величина x_{n-2} обозначает определитель $n-2$ - го порядка, который получается из определителя матрицы A после вычёркивания двух последних строк и столбцов.

После выполненных преобразований уравнение (18) принимает следующий вид:

$$x_n = d_n \cdot x_{n-1} - (b_{n-1} \cdot c_{n-1}) \cdot x_{n-2}.$$

Аналогичное соотношение выполняется для определителей, имеющих порядок $k \leq n$:

$$x_k = d_k \cdot x_{k-1} - (b_{k-1} \cdot c_{k-1}) \cdot x_{k-2} \qquad k \in \overline{3, n}. \tag{19}$$

Формула (19) даёт ещё один пример рекуррентных зависимостей. Для её практического использования необходимо найти значения двух определителей: x_1 и x_2.

Составим и вычислим эти определители:

$$x_1 = \det\left[d_1\right] = d_1; \quad x_2 = \det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ c_1 & d_2 \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 - b_1 \cdot c_1. \tag{20}$$

Теперь можно найти определитель x_3:

$$x_3 = d_3 \cdot x_2 - (b_2 \cdot c_2) \cdot x_1 \ ;$$

затем – определитель x_4:

$$x_4 = d_4 \cdot x_3 - (b_3 \cdot c_3) \cdot x_2,$$

и так далее.

В рассмотренном выше **общем случае** после использования рекуррентных формул может быть получено конкретное числовое значение определителя n - го порядка. Рассмотрим **частный случай**, когда все коэффициенты, стоящие вдоль диагонали, принимают одинаковое значение (то есть все $d_i = d$, все $b_i = b$ и все $c_i = c$), и получим аналитическую формулу для определителя.

Пусть, например, требуется вычислить определитель симметричной матрицы 10 - го порядка следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 2 & -5 & 2 & ... & 0 \\ 0 & 2 & -5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -5 \end{pmatrix},$$

то есть при конкретных числовых значениях параметров $d = -5; \quad b, c = 2; \quad n = 10$.

Для этого случая равенства (19) и (20) примут следующий вид:

$$x_k = d \cdot x_{k-1} - (b \cdot c) \cdot x_{k-2} \qquad \text{или} \qquad x_k = -5 \cdot x_{k-1} - 4 \cdot x_{k-2}; \tag{21}$$

$$x_1 = d; \quad x_2 = d^2 - b \cdot c \qquad \text{или} \qquad x_1 = -5; \quad x_2 = 21. \tag{22}$$

Уравнения вида (21) относится к классу так называемых ***разностных линейных уравнений с постоянными коэффициентами***. Математики давно нашли аналитический метод решения таких уравнений. В соответствие с этим методом будем искать решение в виде $x_k = y^k$, где y - некоторое неизвестное пока постоянное число. Подстановка этого решения в уравнения (21) приводит к равенствам

$$y^k = d \cdot y^{k-1} - (b \cdot c) \cdot y^{k-2} \qquad \text{или} \qquad y^k = 5 \cdot y^{k-1} - 4 \cdot y^{k-2},$$

которые после сокращения на степень $y^{k-2} \neq 0$ оказываются эквивалентными квадратным уравнениям

$$y^2 - d\cdot y + (b\cdot c) = 0 \qquad \text{или} \qquad y^2 + 5\cdot y + 4 = 0 . \tag{23}$$

Уравнение (23) называется ***характеристическим***. Найдём корни этого уравнения – $y_1 = -4$, $y_2 = -1$ – и составим из них следующую сумму:

$$x_k = C_1 \cdot y_1^k + C_2 \cdot y_2^k , \qquad \text{то есть} \qquad x_k = C_1 \cdot (-4)^k + C_2 \cdot (-1)^k \tag{24}$$

где C_1, C_2 – некоторые числа.

Нетрудно проверить, что величина x_k, определяемая равенством (24), является решением уравнения (21) при любых значениях C_1, C_2. В теории разностных линейных уравнений доказано, что если квадратное характеристическое уравнение имеет пару различных корней y_1, y_2, то любое решение уравнения (21) может быть записано в форме (24), то есть **это равенство даёт *общее решение* уравнения**. В случае кратного корня (то есть, когда $y_1 = y_2$) общее решение уравнения (21) имеет вид

$$x_k = C_1 \cdot y_1^k + C_2 \cdot y_1^k \cdot k .$$

Рассмотренной выше последовательности определителей будет отвечать ***частное решение*** этого уравнения, удовлетворяющее ***начальным условиям*** (22).

Частное решение получается из общего после определения конкретных значений для чисел C_1, C_2. Найдём эти значения, для чего подставим формулу (24) в равенства (22):

$$x_1 = C_1 \cdot (-4) + C_2 \cdot (-1) = -5; \quad x_2 = C_1 \cdot (-4)^2 + C_2 \cdot (-1)^2 = 21, \text{ то есть } \begin{cases} 4\cdot C_1 + C_2 = 5 \\ 16\cdot C_1 + C_2 = 21 \end{cases} . \tag{25}$$

Решая систему (25), получаем: $C_1 = \frac{4}{3}$; $C_2 = -\frac{1}{3}$. Следовательно, определителю n - го порядка отвечает формула

$$x_n = \frac{4}{3}\cdot(-4)^n - \frac{1}{3}\cdot(-1)^n ,$$

а определителю 10 – го порядка – число

$$x_{10} = (4^{11} - 1)/3 = 1398101 .$$

<u>**Примечание**</u>. Матрица C цепной механической системы (**пример 13**) отличается от рассмотренного здесь частного случая тем, что в ней крайние элементы главной диагонали не равны остальным элементам. Поэтому здесь формулы (21) справедливы не для всех $k \in \overline{3, n}$, а только для случая, когда $k \in \overline{4, n-1}$, и чтобы воспользоваться ими, нужно в качестве начальных условий взять пару значений x_2, x_3. После нахождения определителя x_{n-1}, искомый определитель n - го порядка вычисляется по формуле (19), полученной для общего случая. Вам предлагается самостоятельно воспользоваться этими рекомендациями и найти определитель матрицы C из **примера 13** для значений $c = 1$; $n = 16$ (то есть для железнодорожного состава из локомотива и 16-ти вагонов).

§ 10. Понятие линейной зависимости

Пусть задана ***совокупность*** (то есть, здесь и далее, конечное множество) k векторов-столбцов одинакового размера:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Нулевой столбец того же размера будем обозначать, как и ранее, Θ.

Определение. Выражение вида

$$\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \dots + \alpha_k \cdot A_k$$

называется ***линейной комбинацией*** столбцов, а скалярные множители $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называются ***коэффициентами линейной комбинации***. Линейная комбинация, у которой все коэффициенты равны нулю, называется ***тривиальной***; в противном случае комбинация называется ***нетривиальной***.

Очевидно, что линейная комбинация столбцов есть некоторый столбец того же размера. Тривиальная линейная комбинация любой совокупности столбцов равна Θ.

Определение. Совокупность столбцов $A_1, A_2, \dots, A_k$ называется ***линейно независимой***, если из равенства

$$\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \dots + \alpha_k \cdot A_k = \Theta \text{ следует } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0,$$

то есть **не существует их нетривиальных комбинаций, равных нулю.** Совокупность столбцов называется ***линейно зависимой***, если **существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю**.

Каждый столбец A_i высоты n может быть представлен в виде следующей линейной комбинации:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{1i} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2i} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{3i} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{ni} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = a_{1\,i} \cdot E_1 + a_{2\,i} \cdot E_2 + a_{3\,i} \cdot E_3 + \dots + a_{n\,i} \cdot E_n ,$$

где каждый столбец $E_i = \left[\, e_{j1} \,\right]$ устроен так, что все его элементы e_{j1} равны 0 при $j \neq i$ и равны 1 при $j = i$.

Определение. Совокупность столбцов $E_1, E_2, \dots, E_n$ называется ***канонической совокупностью***.

Каноническая совокупность линейно независима, что очевидно.

Теорема 2.4. Совокупность столбцов $A_1, A_2, \dots, A_k$ линейно зависима в том и только в том случае, когда хотя бы один из столбцов является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть совокупность столбцов $A_1, A_2, \dots, A_k$ линейно зависима. Покажем, что один из столбцов есть линейная комбинация остальных. Составим линейную комбинацию столбцов и приравняем её к нулю

$$\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \dots + \alpha_k \cdot A_k = \Theta \qquad (26)$$

В силу линейной зависимости столбцов, хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Преобразуем равенство (26), разделив его на коэффициент α_1:

$$A_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot A_2 + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot A_k = 0,$$

откуда

$$A_1 = \beta_2 \cdot A_2 + \dots + \beta_k \cdot A_k, \text{где } \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

то есть столбец A_1 есть линейная комбинация остальных столбцов.

Теперь предположим, что один из столбцов есть линейная комбинация остальных, и докажем их линейную зависимость. Пусть этот столбец имеет номер i, то есть

$$A_i = j_1 \cdot A_1 + j_2 \cdot A_2 + \dots + j_{i-1} \cdot A_{i-1} + j_{i+1} \cdot A_{i+1} + \dots + j_k \cdot A_k .$$

Тогда

$$j_1 \cdot A_1 + j_2 \cdot A_2 + \dots + j_{i-1} \cdot A_{i-1} + j_i \cdot A_i + j_{i+1} \cdot A_{i+1} + \dots + j_k \cdot A_k = \Theta, \quad (27)$$

где $j_i = -1$.

Равенство (27) означает, что столбцы $A_1, A_2, \dots, A_k$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствие. Если один из столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ нулевой, то совокупность столбцов линейно зависима.

Действительно, нулевой столбец является тривиальной линейной комбинацией остальных столбцов.

Теорема 2.5. Если в совокупности столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ каждый столбец представляет собой линейную комбинацию одних и тех же столбцов $B_1, B_2, ..., B_k$ и $n > k$, то столбцы этой совокупности линейно зависимы.

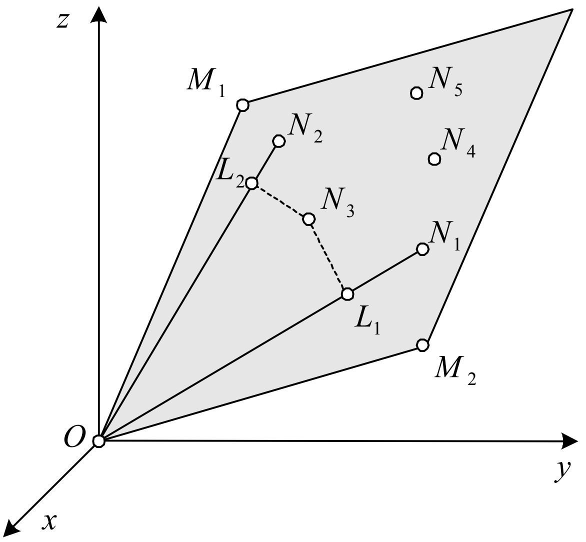


Рисунок 45

Доказательство этой теоремы будет приведено в этой книге позже. Здесь же мы дадим ей геометрическую интерпретацию. Пусть $k = 2$, а столбцы B_1 и B_2 имеют следующий вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим на рис. 45 точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$; если столбцы B_1, B_2 линейно независимы, то они не пропорциональны друг другу, и прямые OM_1, OM_2 не сливаются в одну общую линию. Проведём через эти точки и начало координат плоскость OM_1M_2, при условии линейной независимости столбцов такая плоскость единственная.

Образуем линейную комбинацию A_i столбцов B_1, B_2, используя для этого произвольные числовые коэффициенты α_i, β_i:

$$A_i = \alpha_i \cdot B_1 + \beta_i \cdot B_2 = \alpha_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta_i \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \cdot x_1 + \beta_i \cdot x_2 \\ \alpha_i \cdot y_1 + \beta_i \cdot y_2 \\ \alpha_i \cdot z_1 + \beta_i \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

В курсе аналитической геометрии доказывается, что при любых значениях коэффициентов α_i, β_i точка $N(x, y, z)$ также принадлежит этой плоскости OM_1M_2.

Пусть линейным комбинациям $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на рис.45 соответствуют точки $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Если все эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пропорциональны друг другу, а, значит, линейно зависимы.

На рис. 45 изображён другой случай, когда точки N_1, N_2 не лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Тогда любой столбец A_i, например столбец A_3, может быть представлен в виде следующей линейной комбинации:

$$A_3 = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2,$$

где коэффициенты α, β определяются формулами

$$\alpha = \frac{OL_1}{ON_1}; \quad \beta = \frac{OL_2}{ON_2}.$$

Теперь осталось привести формальное обоснование линейной зависимости всей совокупности строк $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для этого составим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 - A_3 + 0 \cdot A_4 + \dots + 0 \cdot A_n = \Theta.$$

Коэффициент перед столбцом A_3 не равен нулю, следовательно, данная линейная комбинация является нетривиальной, и столбцы $A_1, A_2, \dots, A_n$ линейно зависимы.

Следствие. В любой неквадратной матрице A размера $m \times n$, у которой число строк m меньше числа столбцов n, совокупность столбцов линейна зависима.

Действительно, каждый из n столбцов A_i этой матрицы представляет собой линейную комбинацию столбцов E_i из канонической совокупности $E_1, E_2, \dots, E_m$, причём в данном случае выполняется условие $n > m$.

Примечание. Определения и утверждения, приведённые выше для матриц-столбцов, имеют место и для матриц-строк. В частности, справедливо следующее утверждение: **в любой неквадратной матрице A размера $m \times n$, у которой число строк m больше числа столбцов n, совокупность строк линейна зависима**.

Пример 53. **Главная загадка линейной алгебры**. Посмотрите внимательно на квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix};$$

в ней третья строчка равна сумме первых двух строк, следовательно, строки этой матрицы линейно зависимы. Это утверждение очевидно, по правде говоря, сама матрица A составлялась так, чтобы её строки были линейно зависимы. Спрашивается, будут ли линейно зависимы столбцы этой матрицы? Ответ не очевиден, но после нескольких неудачных попыток нам всё же удалось подобрать коэффициенты для такого равенства:

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\Theta,$$

то есть столбцы оказались тоже линейно зависимы. Далее в нашем курсе вы узнаете, что это совпадение не случайно, а закономерно, причём будет предложено несколько доказательств этой закономерности. Парадокс заключается в том, что все эти доказательства являются формальными, и **никто до сих пор не дал простого объяснения тому факту, почему у квадратной матрицы порядка $n \geq 3$ линейная зависимость строк обязательно сопровождается линейной зависимостью столбцов**.

§ 11. Свойства определителей

Свойство 1. Для любой квадратной матрицы A $\det A = \det A^T$**,**

то есть, **определители взаимно транспонированных матриц одинаковы.**

Доказательство. Выпишем в развёрнутом виде $\det A$ и $\det A^T$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \det A^{\,T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство проведём методом **математической индукции**. Кратко объясним (или напомним) суть этого метода. ***Индукцией*** в ***математической логике*** называется переход от анализа частных случаев к формулировке и доказательству общей закономерности. Пусть требуется доказать справедливость некоторого утверждения, зависящего от значений натурального числа n, причём известно, что для некоторого начального значения n_0 числа n (например, при $n=1$) это утверждение верно. Число n_0 называется ***базой индукции***. Далее выполняется так называемый ***шаг индукции***, то есть делается предположение, что данное утверждение справедливо при всех значениях $n \in \overline{n_0, k}$ (***предположение индукции***), и на основе этого предпринимается попытка доказательства этого утверждения для значения $n = k+1$. Если такая попытка оказывается удачной, то данное утверждение считается доказанным для всех $n \geq n_0$, что очевидно.

Для определителей первого и второго порядков (**база индукции**) это свойство легко проверить непосредственно (смотри формулу (5)):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A^{\,T}.$$

Выполним шаг индукции. Пусть утверждение верно для определителей всех порядков до $(k-1)$-ого порядка включительно. Покажем, что это утверждение верно для определителя матрицы A k - го порядка.

Раскроем $\det A$ по первой строке, а $\det A^T$ по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot A_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{1i}\,; \tag{28}$$

$$\det A^T = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot A^T_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M^T_{1i}\,. \tag{29}$$

Миноры M_{1i} и M^T_{1i} являются определителями $(k-1)$-го порядка для пары взаимно транспонированных матриц, поэтому, по предположению индукции $M_{1i} = M^T_{1i}$. Сравнивая равенства (28), (29), получаем:

$$\det A = \det A^T\,.$$

Следовательно, **свойство 1** **доказано** для матриц любого порядка n.

Следствие. Вернёмся к доказательству формул Лапласа и покажем, что формула (16) является следствием формулы (17). Используя формулу (17), раскроем определитель матрицы A^T по элементам i - того столбца:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A^T_{i1} + a_{i2} \cdot A^T_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A^T_{in}\,. \tag{30}$$

Если в левой и правой части равенства (30) выполнить замены:

$$\det A^T = \det A; \quad A^T_{ik} = A_{ik}\,,$$

то это равенство совпадёт с формулой (16).

Замечание. Доказанное **свойство 1** означает, что все результаты, полученные для столбцов определителя, справедливы и для его строк.

Свойство 2. Если каждый элемент i-того столбца представить в виде суммы двух слагаемых, то имеет место следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Раскроем исходный определитель по i-тому столбцу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ki}+b_{ki}\right)\cdot A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot A_{ki} + \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\cdot A_{ki} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2 доказано.

Примечание. Доказанное **свойство 2** не означает (как это кому-то может показаться), что $\det(A+B)=\det A+\det B$. Такое равенство для матриц порядка $n\geq 2$ выполняется редко и является исключением из правила, которое выглядит так:

$$\det(A+B)\neq \det A+\det B\,.$$

Свойство 3. При умножении строки или столбца матрицы на число λ определитель матрицы также умножается на это число.

Доказательство. По **теореме 2.3** имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik}\,.$$

Умножим i-тую строку матрицы A на число λ и вычислим полученный определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\cdot a_{i1} & \lambda\cdot a_{i2} & \cdots & \lambda\cdot a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda\cdot a_{ik}\cdot A_{ik} = \lambda\cdot\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik} = \lambda\cdot\det A\,.$$

Свойство 3 доказано.

Свойство 3 можно сформулировать следующим образом: постоянный множитель из строки или столбца матрицы можно выносить за знак определителя. Из **свойства 3** следует очевидное равенство:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A, \quad \text{где } n - \text{порядок матрицы } A.$$

Свойство 4. При перестановке двух любых строк или столбцов матрицы знак её определителя меняется на противоположный, а его абсолютная величина остаётся неизменной.

Доказательство. По определению

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \cdots & a_{i_k n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_j 1} & a_{i_j 2} & \cdots & a_{i_j n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_j, \ldots, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}, \qquad (31)$$

где сумма берётся по всевозможным перестановкам чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Переставим строки с номерами i_k и i_j (но оставим все остальные без изменения) и вычислим полученный определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_j 1} & a_{i_j 2} & \cdots & a_{i_j n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \cdots & a_{i_k n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_j, \ldots, i_k, \ldots, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}, \qquad (32)$$

В силу **теоремы 2.2** слагаемые суммы (32) отличаются от соответствующих слагаемых суммы (31) только знаком, **откуда и следуют оба утверждения свойства 4**.

Свойство 5. Если в матрице A имеются две одинаковые строки либо столбца, то $\det A = 0$.

Доказательство. Действительно, переставив одинаковые строки, по свойству 4 получаем:

$$\det A = -\det A\,,$$

откуда

$$\det A = 0\,.$$

Свойство 5 доказано.

Свойство 6. Если один из столбцов матрицы A является линейной комбинацией остальных столбцов, то $\det A = 0$.

Доказательство. Введём обозначения:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix};\ \ldots;\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть столбец A_k является линейной комбинацией остальных столбцов, т.е.

$$A_k = \alpha_1 \cdot A_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \cdot A_{k-1} + \alpha_{k+1} \cdot A_{k+1} + \ldots + \alpha_n \cdot A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot A_i \qquad i \neq k\,.$$

По **свойству 2** разложим $\det A$ в сумму $n-1$ определителей. Вынесем из столбцов полученных определителей коэффициенты линейной комбинации и будем в каждом определителе иметь по два равных столбца. Откуда следует, что $\det A = 0$.

Свойство 6 доказано.

Примечание. Напомним (смотри **теорему 2.4**), что представление одного столбца матрицы в виде линейной комбинации остальных столбцов означает, что столбцы этой матрицы линейно зависимы. Поэтому, а так же учитывая **свойство 1**, **свойство 6** может быть сформулировано в следующем эквивалентном виде: **если в матрице совокупность строк (или совокупность столбцов) линейно зависима, то определитель этой матрицы равен нулю**.

Свойство 7. Определитель матрицы A не изменится, если к какой-либо из строк прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Доказательство. Действительно, по **свойству 2** полученный определитель можно представить в виде суммы исходного определителя и определителя, одна из строк которого является линейной комбинацией остальных. По **свойству 6** второй определитель равен нулю.

Свойство 7 доказано.

<u>Свойство 8</u>. Если квадратная матрица A представлена в виде произведения $A = B \cdot C$, причём строки матрицы B или / и столбцы матрицы C линейно зависимы, то $\det A = 0$.

<u>**Доказательство**</u>. Пусть столбцы C_i матрицы C линейно независимы. Представим эту матрицу в виде блочного вектора – строки: $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$. Тогда в соответствие с правилами перемножения блочных матриц мы можем выполнить следующее преобразование:

$$A = B \cdot C = B \cdot \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot C_1 & B \cdot C_2 & \dots & B \cdot C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

где $A_i = B \cdot C_i$ – столбцы матрицы A.

Покажем, что эти столбцы линейно зависимы. Действительно, из линейной зависимости столбцов C_i вытекает существование их нетривиальной линейной комбинации

$$\alpha_1 \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot C_2 + \ldots + \alpha_n \cdot C_n = \Theta .$$

Умножим это равенство слева на матрицу B:

$$\alpha_1 \cdot B \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot B \cdot C_2 + \ldots + \alpha_n \cdot B \cdot C_n = B \cdot \Theta ,$$

то есть

$$\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \ldots + \alpha_n \cdot A_n = \Theta .$$

Таким образом, столбцы матрицы A оказались линейно зависимы, и по <u>**свойству 6**</u> $\det A = 0$.

Если матрица B имеет линейно зависимые строки, то для доказательства этого свойства достаточно транспонировать обе части равенства $A = B \cdot C$:

$$A^T = C^T \cdot B^T .$$

Теперь матрица B^T имеет линейно зависимые столбцы, а это означает, что $\det A^T = 0$. Отсюда, по <u>**свойству 1**</u>, $\det A = 0$.

<u>**Свойство 8**</u> **доказано**.

<u>Свойство 9</u>. Сумма произведений элементов какого-либо ряда (строки или столбца) на алгебраические дополнения элементов **другого** параллельного ряда равна нулю, то есть:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0, \text{ если } i \neq j, \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = 0, \text{ если } i \neq j. \tag{33}$$

<u>**Доказательство**</u>. Заменим в матрице A все элементы j-той строки на соответствующие элементы i-той строки; в результате получим новую матрицу B с двумя одинаковыми строками. Определитель этой матрицы B по <u>**свойству 5**</u> равен нулю. Используя формулу Лапласа (16), раскроем этот нулевой определитель по элементам j-той строки:

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot B_{jk} = 0 . \tag{34}$$

Учтём, что $b_{jk} = a_{ik}$, и поскольку остальные строки у матриц A и B одинаковые, то $B_{jk} = A_{jk}$. После таких замен равенство (34) совпадёт с первой формулой (33). Вторая формула (33) доказывается аналогично.

Свойство 9 доказано.

Примечание. Многим внимательным читателям может показаться, что **свойство 9** попало в перечень основных свойств определителя по ошибке, поскольку и само это свойство можно трактовать как ошибку при применении формул Лапласа (то есть, взяли не ту строку или не тот столбец, “что нужно”). Однако скоро вы узнаете, что это свойство будет играть ключевую роль при выводе формул Крамера и определении фундаментального понятия линейной алгебры – так называемой ***обратной матрицы***.

Свойство 10. Для любых квадратных матриц A и B одинакового порядка имеет место равенство

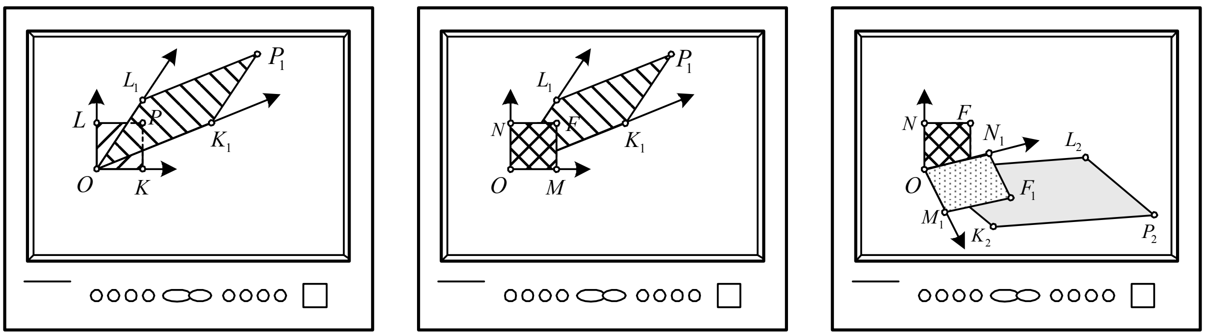
$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Следствие. Матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$, вообще говоря, не равны между собой, но их определители одинаковы.

Действительно, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$.

Свойство 10 имеет технически сложное доказательство. Поэтому ограничимся рассмотрением примера, содержащего геометрическое обоснование этого свойства.

Пример 54. **Перемножение определителей на дисплее “*Пентиума*”**.Пусть даны две квадратные матрицы второго порядка A, B и требуется вы-



а *б* *в*

Рисунок 46

числить определитель их произведения $A \cdot B$. Для решения этой задачи воспользуемся услугами графического редактора “***VISIO***”, входящего в пакет стандартного математического обеспечения персональной ЭВМ. Построим на дисплее квадрат *OKPL* (рис. 46 *а*), сторону которого будем считать равной единице. Соблюдая масштаб, поставим на экран точки $K_1(b_{11}, b_{12})$ и $L_1(b_{21}, b_{22})$, где координаты b_{ij} являются элементами матрицы

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Далее сгруппируем объект «квадрат – оси координат», дублируем его и, используя доступные в этом редакторе средства трансформации изображения (деформацию, масштабирование, перенос), совместим на дубле точки K, L с точками K_1, L_1, соответственно. При этом квадрат $OKPL$ трансформируется в параллелограмм $OK_1P_1L_1$, причём, как показано в **п р и м е р е 44**, отношение площадей параллелограмма S_1 и квадрата S_0 будет в точности равно модулю определителя матрицы B, то есть

$$\frac{S_1}{S_0}=\left|\det B\right| \text{ или } S_1=S_0\cdot\left|\det B\right|=\left|\det B\right|.$$

Здесь важно подчеркнуть следующее. С точки зрения старой системы координат (которая в результате трансформации из прямоугольной превратилась в косоугольную) все координаты точек квадрата остались прежними, и его площадь не изменилась. На самом деле мы видим, что она изменилась, причём можем учесть это изменение путём введения соответствующего коэффициента.

Определение. Коэффициенты изменения площади (или объёма), связанного с изменением системы координат, в математике называются ***якобианами*** в честь знаменитого математика ***Якоби*** и обозначаются буквами j.

Таким образом, для выполненного преобразования якобиан $j_1=\left|\det B\right|$.

Теперь сгруппируем получившийся параллелограмм вместе с новым единичным квадратом $OMFN$ (рис. 46 *б*). Соблюдая масштаб, поставим на экран точки $M_1(a_{11}, a_{12})$ и $N_1(a_{21}, a_{22})$, где координаты a_{ij} являются элементами матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, и используя графические трансформации, совместим точки M, N с точками M_1, N_1 , соответственно (рис. 46 *в*). При этом квадрат $OMFN$ трансформируется в параллелограмм $OM_1F_1N_1$, причём, отношение площадей параллелограмма S_2 и квадрата S_0 будет в точности равно модулю определителя матрицы A, то есть

$$\frac{S_2}{S_0}=j_2=\left|\det A\right| \text{ или } S_2=S_0\cdot\left|\det A\right|=\left|\det A\right|.$$

Поскольку объект был сгруппирован, то одновременно с этим параллелограмм $OK_1P_1L_1$ трансформировался в параллелограмм $OK_2P_2L_2$, причём, как это следует из результатов **п р и м е р а 24**, координаты точек K_2 и L_2 являются, соответственно, элементами первой и второй строки матрицы $C=A\cdot B$. Поэтому, площадь S_3 параллелограмма $OK_2P_2L_2$ удовлетворяет аналогичному равенству:

$$\frac{S_3}{S_0}=j_3=\left|\det C\right| \text{ или } S_3=S_0\cdot\left|\det C\right|=\left|\det C\right|.$$

С другой стороны, **при трансформациях площади всех объектов изменяются одинаково**, поэтому

$$\frac{S_3}{S_1}=\frac{S_2}{S_0} \text{ или } \frac{\left|\det C\right|}{\left|\det B\right|}=\left|\det A\right|, \text{ то есть } \left|\det (A\cdot B)\right|=\left|\det A\right|\cdot\left|\det B\right| .$$

Покажем, что модули в этом равенстве можно убрать. При переходе от рис. 46 *б* к рис. 46 *в* все трансформации выполнялись так, что изображение на дисплее изменялось непрерывным образом (перевороты относительно осей симметрии не использовались). Следовательно, матрица этой трансформации является непрерывной матрицей - функцией $F(t)$ времени t, изменяющейся от начального значения $F(0) = I$ до конечного значения $F(T) = A$, где T - продолжительность деформации, причём в каждый момент времени выполняется равенство

$$\left|\det\,(F(t)\cdot B)\right| = \left|\det F(t)\right|\cdot\left|\det B\right|.$$

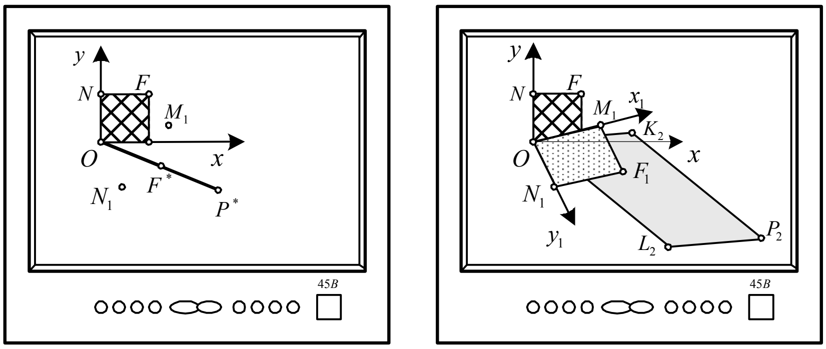
Перепишем это равенство для якобианов в следующей форме:

$$\det\,(F(t)\cdot B) = \pm\det F(t)\cdot\det B$$

и определим правильный знак для его правой части.

При значении $t = 0$ оно принимает вид $\det B = \pm 1\cdot\det B$, значит здесь нужно использовать знак плюс. Трансформация выполнялась так, что деформируемый квадрат $OMFN$ не вырождался в отрезок, поэтому определитель матрицы $F(t)$ не обращается в нуль ни при каком значении t. Следовательно, **знак в этом равенстве измениться не может**, и мы имеем

$$\det\,(A\cdot B) = \det A\cdot\det B.$$



а *б*

Рисунок 47

Если точки M_1 и N_1 поменять местами, то в процессе деформации возникнет такой момент времени t^*, при котором деформируемый квадрат $OMFN$ вырodится в отрезок OF^* (рис. 47 *а*). Но при этом и деформируемый параллелограмм $OK_1P_1L_1$ вырождится в отрезок OP^*.

При дальнейшей деформации **оси косоугольной системы координат изменят свою ориентацию** (рис. 47 *б*), а в равенстве

$$\det\,(F(t)\cdot B) = \det F(t)\cdot\det B$$

левая и правая часть одновременно изменят свой знак на противоположный.

Ясно, что такое же обоснование можно выполнить для определителей третьего порядка, но для его графической интерпретации понадобится другой редактор.

*Пример 55**. **Транспонирование якобиана.** Опираясь на ход решения и результаты **примеров 44 и 54**, попытайтесь найти простое геометрическое обоснование **свойства 1** для определителей (то есть, доказать, что равенство $\det A = \det A^T$ выполняется потому, что равны площади или объёмы соответствующих фигур или тел). Если матрица A имеет второй порядок, то вы без особого труда сможете найти такое обоснование. Но мы обязаны предупредить о том, что **для матрицы третьего порядка этого не удалось сделать ещё никому**.

Пример 56. **Расщепление определителя цепной системы**. Если квадратную матрицу C удалось представить в виде произведения двух треугольных матриц A и B (смотри § 4), то её определитель в силу **свойства 9** может быть найден по следующей простой формуле:

$$\det C = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn})\cdot(b_{11}\cdot b_{22}\cdot\ldots\cdot b_{nn}).$$

Используем этот приём для вычисления определителя матрицы коэффициентов C цепной механической системы. В **примере 38** для этой матрицы было получено представление

$$C = -A^T\cdot A,$$

где A, A^T – верхнее- или нижнетреугольная матрица, имеющая одинаковые диагональные элементы, равные $\sqrt{c}$.

Таким образом,

$$\det C = \det(-A^T)\cdot\det A = (-1)^n\cdot\det A^T\cdot\det A = (-1)^n\cdot(\det A)^2 = (-1)^n\cdot((\sqrt{c})^n)^2 = (-1)^n\cdot c^n.$$

Сравните этот результат с тем, который вы получили при решении **примера 52**. Обращаем внимание на любопытную закономерность: **все определители чётного порядка положительны, нечётного порядка – отрицательны**. Попробуйте обосновать эту закономерность для произвольной неположительной матрицы n - го порядка.

§ 12. Вычисление определителя по методу Гаусса

Выше уже говорилось о том, что вычисление определителей высокого порядка ($n \ge 4$), как правило, проводится по методу Гаусса. Метод Гаусса включает в себя два этапа.

1. Используя свойства определителя, приводим матрицу к верхнетреугольному виду.

2. Определитель треугольной матрицы вычисляем как произведение элементов главной диагонали.

С ***алгоритмом*** (то есть ***порядком действий***) метода Гаусса познакомимся в ходе решения следующего примера.

Пример 57. Вычислить определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Начинаем выполнение первого этапа с того, что получим во всех позициях первого столбца, кроме самой верхней, нули. Верхняя строка объявляется ***рабочей***, остальные строки называются ***текущими***. Для каждой текущей i - той строки подбирается такой коэффициент k_i, чтобы в результате сложения данной строки и рабочей строки, умноженной на этот коэффициент, первый элемент текущей строки был равен нулю. После нахождения этих коэффициентов выполняются указанные преобразования строк. При этом в силу **свойства 7** величина определителя не меняется.

В соответствии с указанным выше порядком, прибавим ко второй строке первую, умноженную на коэффициент $k_2 = -1$, к третьей строке – первую, умноженную на коэффициент $k_3 = -3$, и к четвертой – первую строку, получим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, выполнен так называемый ***первый шаг*** алгоритма Гаусса. Теперь нужно выполнить ***второй шаг*** и обнулить элементы второго столбца, расположенные под главной диагональю, сохранив при этом те три нуля, которые были получены раньше. Использовать первую строку в качестве рабочей больше нельзя, так как это не даст возможности сохранить нули в первом столбце. Поэтому, **выберем в качестве рабочей строки вторую**.

Прибавив к третьей строке вторую, умноженную на коэффициент $k_3 = -4$, к четвёртой строке - вторую, умноженную на коэффициент $k_4 = 3$, получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

На ***третьем*** (и последнем для определителя 4 – го порядка) ***шаге*** осталось обнулить один элемент третьего столбца. **Выберем в качестве рабочей строки третью, начинающуюся с двух нулей**.

Умножив третью строку на коэффициент $k_4 = -\dfrac{1}{2}$ и сложив с четвёртой, получим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{7}{2} \end{vmatrix}.$$

Теперь можно выполнить второй этап, то есть перемножить диагональные элементы:

$$\det A = 1 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} = -14\,.$$

Примечание. При ручном счёте рабочая строка обычно выбирается так, чтобы все или большинство коэффициентов k_i были целыми числами. Поэтому в определителе

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

в качестве рабочей строки надо было выбрать не третью, а четвёртую, поменяв их местами. Повторим вычисления:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-7) = -14.$$

Как видите, результат не изменился, но мы обошлись без дробей.

При вычислениях на ЭВМ, особенно если определитель имеет очень высокий порядок, переставляются местами не только строки, но и столбцы. При этом обычно добиваются того, чтобы все коэффициенты k_i на каждом шаге преобразований были минимальными, что обеспечивает минимум погрешности вычислений. Такая разновидность алгоритма называется ***методом Гаусса с выбором главного элемента***.

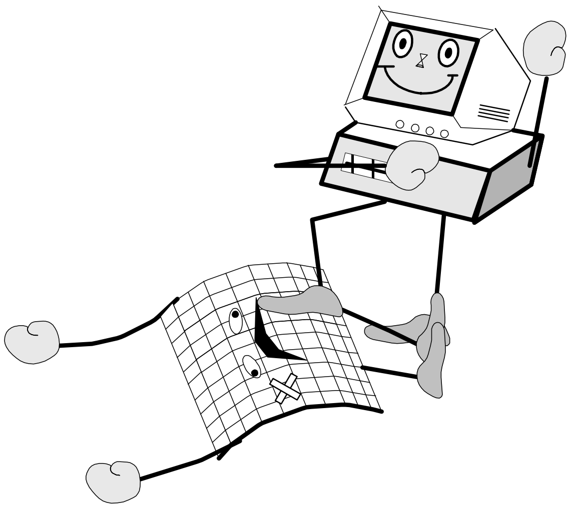


Рисунок 48

Пример 58. **ЭВМ против определителя: третий раунд.** Оценим число операций, которое потребуется для вычисления определителя квадратной матрицы n - го порядка по методу Гаусса. Первый шаг преобразований, как это нетрудно подсчитать (смотри **примеры 45 и 51**), составляет в эквивалентном пересчёте примерно $3 \cdot (n-1)^2$ операций сложения двух чисел. Поэтому всё преобразование матрицы к треугольному виду потребует

$$N_3 = 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-2)^2 + \ldots + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 \approx 3 \cdot (n^3 / 3) = n^3$$

операций сложения. Для определителя 20 – го порядка число $N_3 \approx 8000$, поэтому время вычисление такого определителя на современной ЭВМ любого класса не превысит 1 миллисекунды (то есть одной тысячной секунды). Таким образом, **этот раунд и бой в целом за явным преимуществом выигрывает ЭВМ** (рис. 48).

Сопоставление результатов решённых **примеров 45, 51 и 58** является прекрасной иллюстрацией известного тезиса о том, что **нет ничего практичнее хорошей**

теории. Вы, конечно, прекрасно понимаете, что бой с определителем на самом деле выиграла не ЭВМ, а метод расчёта. **Гаусс был великим математиком**, а отличие ***великих*** учёных от ***знаменитых***, ***известных***, ***видных*** и прочих состоит как раз в том, что они не только открывают новые направления в науке, но и **каждую разрабатываемую ими научную проблему решают исчерпывающим образом**.

Пример 59. **Определитель Вандермонда**. Определитель матрицы Вандермонда (**пример 6**) называется ***определителем Вандермонда***. Этот определитель имеет следующий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Определитель Вандермонда вычисляется по очень красивой формуле

$$\Delta = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(a_i - a_j \right). \tag{35}$$

Символом $\prod$ обозначают произведение. Формула (35) доказывается методом математической индукции. В этом примере мы ограничимся тем, что проверим базу индукции, то есть убедимся в справедливости этой формулы для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Вычислим определители Вандермонда 2 - го и 3 - го порядков по формуле (35):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le 2} \left(a_i - a_j \right) = a_2 - a_1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le 3} \left(a_i - a_j \right) = \left(a_2 - a_1 \right) \cdot \left(a_3 - a_1 \right) \cdot \left(a_3 - a_2 \right).$$

Вычислим Δ_2 и Δ_3, пользуясь свойствами определителей, и сравним результаты:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1. \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Прибавим в определителе Δ_3 ко второй строке первую, умноженную на $-a_1$, а к третьей - первую, умноженную на $-a_1^2$, и получим:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 + a_1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\cdot(a_3 - a_2).$$

Таким образом, справедливость формулы (35) для определителей Вандермонда 2-го и 3-го порядков проверена.

§ 13. Условия существования и единственности обратной матрицы

Определение. Квадратная матрица B называется ***обратной*** по отношению к матрице A, если

$$A \cdot B = B \cdot A = I, \tag{36}$$

где I – единичная матрица.

Обратную матрицу B обозначают A^{-1}. Матрица A по отношению к обратной матрице называется ***прямой***. Прямая матрица, как это следует из условия (36), является обратной матрицей к матрице A^{-1}, то есть

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Замечание. Из определения следует, что прямая и обратная матрицы перестановочны между собой.

Пример 60. **Зачем нужны обратные матрицы?** Мы ответим на этот вопрос, но прежде заметим, что в приводимых выше примерах вы уже встречались с парами взаимно обратных матриц. Так, две матрицы вращения

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

при любом значении угла φ удовлетворяют условию $U(\varphi)\cdot U(-\varphi) = U(\varphi-\varphi) = U(0) = I$ и являются взаимно обратными.

Матрицы блочной перестановки $J = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ I & \Theta \end{pmatrix}$ удовлетворяют условию $J \cdot J = E$, где $E = diag(I, I)$ – единичная матрица порядка $2\cdot n$, являются **взаимно обратными с самими собой**; таким же свойством обладают любые матричные алгебраические корни второй степени из единичной матрицы $I = diag(1,1)$ (смотри **пример 36**).

Теперь отвечаем на поставленный вопрос. Напомним, что в обычной арифметике числа a и $b = \dfrac{1}{a}$, удовлетворяющие очевидному равенству $a \cdot b = 1$, называются ***взаимно обратными***; деление чисел c на a эквивалентно умножению делимого на число, обратное к делителю, то есть $c:a = c\cdot\frac{1}{a}$, причём перемножение чисел c и $\frac{1}{a}$ может выполняться в любом порядке. При этом результат деления (частное x) удовлетворяет одновременно двум условиям:

$$x\cdot a = c \qquad \text{и} \qquad a\cdot x = c\,,$$

которые, в силу свойства перестановочности сомножителей, эквивалентны друг другу.

К сожалению, **в матричной арифметике свойства перестановочности сомножителей нет**, поэтому здесь система двух матричных уравнений

$$X\cdot A = C \qquad \text{и} \qquad A\cdot X = C\,,$$

как правило, решения не имеет, и **операцию деления матриц определить нельзя**. Тем не менее, каждое из этих уравнений может иметь своё решение, которое находится с помощью ***обратной матрицы***.

Действительно, умножая обе части первого уравнения слева, а второго уравнения - справа на матрицу A^{-1}, получаем:

$$X\cdot A\cdot A^{-1} = C\cdot A^{-1} \quad\Rightarrow\quad X\cdot I = C\cdot A^{-1} \quad\Rightarrow\quad X = C\cdot A^{-1};$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot C \quad\Rightarrow\quad I\cdot X = A^{-1}\cdot C \quad\Rightarrow\quad X = A^{-1}\cdot C\,.$$

Ниже будет показано, что если матрицы A и C не перестановочные, то полученные решения отличаются друг от друга.

Теорема 2.6 (необходимое условие существования обратной матрицы). Если квадратная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то определитель матрицы A отличен от нуля.

Доказательство. Произведение определителей прямой и обратной матриц равно 1. Действительно,

$$\det\left(A\cdot A^{-1}\right) = \det A\cdot\det A^{-1} = \det I = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}} \neq 0\,.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы, в частности, следует:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0\,.$$

Определения. Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной***. Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется ***вырожденной***.

Таким образом, **теорема 2.6** утверждает, что **обратные матрицы A^{-1} существуют только у невырожденных матриц A**.

Пример 61. **Электростатическая неопределённость**. Вы уже познакомились со свойствами определителей и знаете, что вырожденность квадратной матрицы связана с выполнением известных условий, накладываемых на числовые значения её элементов. Поскольку в практике инженерных и любых других расчётов используется округление, то многим может показаться, что вырожденные матрицы представляют собой редкое исключение. На материале этого и следующего примера мы покажем, что в приложениях математики к электротехнике и механике используются целые классы вырожденных матриц.

В **примере 5** мы уже рассматривали матрицу проводимости линейного многополюсника. Конкретизируем это понятие для схемы, в которой все клеммы разбиты на две группы – входные и выходные.

Образуем из токов и напряжений на входных и выходных клеммах $(n+m)$ - полюсника два новых вектора-столбца

$$J = \begin{pmatrix} J^{вх} \\ J^{вых} \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} U^{вх} \\ U^{вых} \end{pmatrix}.$$

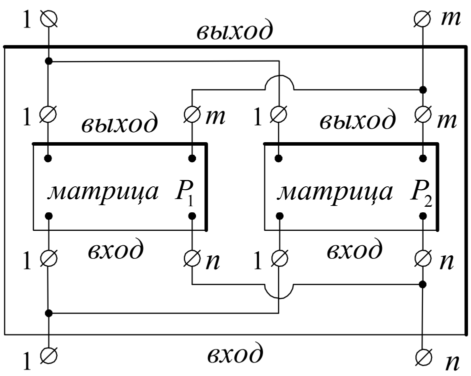


Рисунок 49

Эти столбцы связаны между собой следующим равенством:

$$J = P \cdot U, \tag{37}$$

где матрица P является блочной матрицей формата 2×2 и называется ***матрицей проводимости*** $(n+m)$***- полюсника***.

Напомним, что все элементы этой матрицы имеют физическую размерность $[1/Ом]$.

Матрицы проводимости используются при расчёте параллельного соединения многополюсников. Пусть два $(n+m)$-полюсника с матрицами проводимости P_1 и P_2 подключены к общим входным и выходным клеммам (рис.49). Тогда векторы – столбцы напряжений одинаковы, а векторы – столбцы токов определяются равенствами:

$$J_1 = P_1 \cdot U \quad \text{и} \quad J_2 = P_2 \cdot U.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$J = J_1 + J_2 = P_1 \cdot U + P_2 \cdot U = (P_1 + P_2)\cdot U = P \cdot U, \text{ где } P = P_1 + P_2.$$

Таким образом, **при параллельном соединении матрицы проводимости складываются**.

Проиллюстрируем это правило на следующем простом примере.

Для шнура – удлинителя (**пример 14**) матрица проводимости имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{pmatrix}.$$

Для параллельного соединения двух таких шнуров получаем матрицу проводимости

$$P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}) & -(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}) \\ (\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}) & -(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \end{pmatrix},$$

где $$\frac{1}{R_5}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}; \quad \frac{1}{R_6}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}.$$

Формулы такого типа вы учили в школьном курсе физики.

Матрица P имеет размер $(n+m)\times(n+m)$, то есть является квадратной матрицей порядка $(n+m)$. В рассмотренных выше примерах все матрицы проводимости имеют пропорциональные столбцы, а значит, их определители равны нулю. Покажем, что эта матрица является вырожденной во всех случаях.

Для этого составим вектор U из одинаковых элементов (например, равных 1 вольту). Если напряжения на всех клеммах одинаковые, то все токи равны нулю, и вектор-столбец $J=\Theta$. Но равенство (37) означает, что столбец J является линейной комбинацией столбцов матрицы P. Следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация столбцов, равная нулю, то есть столбцы оказались линейно зависимыми и

$$\det P = 0.$$

Таким образом, матрица проводимости оказалась вырожденной, а, значит, обратной матрицы P^{-1} не существует. С физической точки зрения это означает, что при определении напряжений на клеммах существует неопределённость в установлении уровня этих напряжений, и эта неопределённость не может быть ликвидирована даже в том случае, если мы знаем значения силы тока на всех входных и выходных клеммах.

Пример 62. **Матрица упругости**. Аналогичными свойствами в механике обладает матрица упругости. Для цепной механической системы (смотри **примеры 13, 16, 17**) из координат и реакций на левом и правом концах составим два новых вектора-столбца

$$X=\begin{pmatrix} X^{пр} \\ X^{лев} \end{pmatrix}; \quad Q=\begin{pmatrix} Q^{пр} \\ Q^{лев} \end{pmatrix}.$$

В статике эти столбцы оказываются связанными между собой равенством

$$Q = K \cdot X,$$

где матрица K называется ***матрицей упругости*** цепной системы.

Матрица K является квадратной матрицей размера $(2\cdot n)\times(2\cdot n)$, где n – число координат, определяющих положение отдельного элемента цепной системы.

Покажем, что матрица K является вырожденной. Для этого составим столбец X следующим образом. Координаты, определяющие продольное перемещение левого и правого конца системы, примем одинаковыми (например, равными 1 мм); все остальные координаты положим равными нулю. В статике таким граничным условиям будет отвечать перемещение всех элементов системы на одно и то же расстояние (равное 1 мм), при этом все реакции после перемещения останутся равными нулю. Фактически это означает, что в матрице K сумма столбцов с номерами 1 и $(n+1)$ равна нулю.

Следовательно, столбцы матрицы линейно зависимы, $\det K = 0$ и обратной матрицы K^{-1} не существует. С физической точки зрения это означает, что в статике для определения координат системы не достаточно знать все внешние силы и моменты сил, приложенные к этой системе. Такое положение вещей именуется в механике ***статической неопределённостью системы***.