МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. П. Пріщенко, Т. Т. Черногор

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник
з курсу вищої математики

для студентів хімічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 22.06.2017

Харків
НТУ «ХПІ»
2017

УДК 517.91
ББК 22.161.6
П 77

Рецензенти:
О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, проф. УІПА
Ю. І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц. НТУ «ХПІ»

Пріщенко О. П.
П 77 Диференціальні рівняння та їх застосування : навч.-метод. посіб. / Пріщенко О.П., Черногор Т.Т. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – 88 с.

Навчально-методичний посібник містить детально роз'яснені методи розв'язання типових диференціальних рівнянь, методику розв'язання задач з хімічним змістом та 25 варіантів розрахункових завдань до них.

Призначено для студентів хімічних спеціальностей.

Табл. 1. Іл. 2. Бібліогр.: 7 назв.

УДК 517.91
ББК 22.161.6

ВСТУП

Диференціальні рівняння широко використовуються в різноманітних галузях сучасної науки і техніки. Тому теорія диференціальних рівнянь, як окрема тема в курсі вищої математики, посідає важливе місце в системі підготовки фахівців з механіки, фізики, електротехніки, хімії та машинобудування.

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики «Диференціальні рівняння та їх застосування» має за мету допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, а також набути практичних навиків у розв'язанні диференціальних рівнянь. В даному посібнику приділено достатню увагу детальному роз'ясненню методів розв'язання типових рівнянь теорії звичайних диференціальних рівнянь, його зміст повністю відповідає програмі з курсу диференціальних рівнянь для студентів хімічних спеціальностей.

Навчально-методичний посібник складається з двох розділів, до складу яких входять детально роз'яснені методи розв'язання типових диференціальних рівнянь, методика розв'язання задач з хімічним змістом та 25 варіантів розрахункових завдань до них.

Посібник може стати в нагоді також студентам, які самостійно вивчають теорію диференціальних рівнянь, так як в тексті є короткий зміст основних теоретичних відомостей, знання яких необхідно для свідомого розв'язання диференціальних рівнянь та хімічних задач.

Методичні вказівки до виконання розрахункових завдань

В завданні 1 необхідно розв'язати десять диференціальних рівнянь і систему. Для цього необхідно навчитися класифікувати рівняння та з'ясовувати методи їх розв'язання.

В завданні 2 при розв'язанні хімічних задач можна рекомендувати таку послідовність дій:

- встановити, яким законом підпорядковується даний процес;
- вибрати незалежну змінну і шукану функцію;
- визначити початкові умови;
- відобразити всі наявні в задачі величини, використовуючи при цьому фізичний зміст похідної;
- скласти диференціальне рівняння;
- знайти загальний інтеграл диференціального рівняння;
- за початковими умовами знайти частинний розв'язок.

Автори

1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Нагадаємо, що диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну. Порядок диференціального рівняння визначає найвищий порядок похідної. Загальний вигляд диференціального рівняння:

$$\Phi\left(x, y, y'\right) = 0,$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, y' – її похідна.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція, яка задовольняє цьому рівнянню (тобто функція при підстановці якої в задане рівняння одержуємо тотожність).

Кожний розв'язок, отриманий із загального розв'язку при певному значенні сталої C називається частинним розв'язком.

Для знаходження частинного розв'язку необхідно задати умови $y(x_0) = y_0$, які називаються частинними умовами.

Задача знаходження частинного розв'язку при заданих початкових умовах називається *задачею Коші*.

Розглянемо деякі види диференціальних рівнянь першого порядку.

1.1.1. *Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними*

Рівняння виду $M(y)dy = N(x)dx$, де $M(y)$, $N(x)$ – неперервні функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*. Для знаходження розв'язання такого рівняння необхідно проінтегрувати його обидві частини:

$$\int M(y)dy = \int N(x)dx + C, \text{ де } C = const.$$

Після інтегрування одержимо так званий *загальний розв'язок диференціального рівняння*.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$e^{\sin y} \cdot \cos y dy = \frac{dx}{x}$$

Розв'язання. Маємо $\int e^{\sin y} \cdot \cos y dy = \int \frac{dx}{x}$, де $e^{\sin y} = \ln|x \cdot C|$ – це і є загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $e^{\sin y} = \ln|x \cdot C|$.

Рівняння виду:

$$M(x)N(y)dy + P(y)Q(x)dx = 0,$$

де $M(x), N(y), P(y), Q(x)$ – неперервні функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Поділивши обидві частини такого рівняння на вираз $M(x) \cdot P(y)$, одержимо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{N(y)}{P(y)} dy = -\frac{Q(x)}{M(x)} dx.$$

При цьому також необхідно врахувати, що можуть бути втрачені розв'язання рівняння, а тому слід розглянути рівняння $P(y) = 0$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо відповідні дії:

$$x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0,$$

$$\frac{ydy}{y^2 + 1} = -\frac{xdx}{1 - x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + 1\right| = \frac{1}{2}\ln\left|1 - x^2\right| + \frac{1}{2}\ln C \Rightarrow \ln(y^2 + 1) = \ln\left|(1 - x^2) \cdot C\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + 1 = C(1 - x^2)$$ – загальний розв'язок рівняння.

Відповідь: $y^2 + 1 = C(1 - x^2)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$yy' = \frac{1 - 2x}{y}.$$

Розв'язання. Запишемо $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тоді рівняння набуде вигляду:

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{1-2x}{y}$$

або $y^2 dy = (1-2x)dx$.

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, маємо:

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$$

або $y^3 = 3x - 3x^2 + C_1$.

Таким чином, $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C_1}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C_1}$.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' \cdot \sin x = y \ln y \text{ за умови } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln|C|,$$

$\ln|\ln y| = \ln\left|C \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| \Rightarrow \ln y = C \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Враховуючи, що $y = e$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$, маємо $e = e^{C\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, тоді $e = e^C \Rightarrow C = 1$.

Таким чином, $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ – частинний розв'язок диференціального рівняння, що відповідає заданим початковим умовам.

Відповідь: $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

1.1.2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Нагадаємо, що диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо має місце тотожність $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Функцію $f(x, y)$ можна записати $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi(1, t)$, де $t = \frac{y}{x}$. Тобто функція $f(x, y)$ фактично залежить від однієї змінної $t = \frac{y}{x}$, звідки $y = tx$, а $y' = t'x + t$. Якщо в однорідному диференціальному рівнянні $y' = f(x, y)$ шукану функцію $y(x)$ замінити на $y = tx$, то одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Відповідно до вищезгаданого позначимо $\frac{y}{x} = t,$ тоді $y = t \cdot x$ та $y' = t'x + t$. Наше диференціальне рівняння набуває вигляду $t' \cdot x + t = t \cdot \ln t$, а це і є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Зробимо відповідні перетворення:

$t' \cdot x = t \cdot \ln t - t,\ \frac{dt}{dx}x = t(\ln t - 1),\ \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}.$ Проінтегруємо обидві частини:

$$\ln\left|\ln t - 1\right| = \ln\left|Cx\right| \Rightarrow \ln t - 1 = Cx \Rightarrow \ln t = Cx + 1 \Rightarrow t = e^{Cx+1}.$$

Повертаємось до початкової змінної $\frac{y}{x} = e^{Cx+1} \Rightarrow y = x \cdot e^{Cx+1}$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Відповідь: $y = x \cdot e^{Cx+1}$.

Приклад 6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Слід звернути увагу на те, що визначити вид диференціального рівняння простіше тоді, коли коефіцієнт при y' дорівнює 1. Зробимо перетворення та перепишемо рівняння таким чином: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$ або $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ – це рівняння повністю відповідає загальному вигляду однорідного диференціального рівняння першого порядку, а саме $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Здійснимо заміну змінної $\frac{y}{x} = t,\quad y = t \cdot x$, $y' = t'x + t$, тоді рівняння набуде вигляду $t' \cdot x + t = t + \sqrt{1 + t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} \cdot x = \sqrt{1 + t^2}$. Розділимо змінні та проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|t + \sqrt{t^2 + 1}\right| = \ln|Cx|$$

і повернемося до початкової змінної $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = Cx.$

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2 \text{ – загальний розв'язок.}$$

Відповідь: $y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2$.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = x \text{ за умови } y(1) = 0.$$

Розв'язання. Для того, щоб переконатися, що дане рівняння є однорідним першого порядку, приведемо його до виду $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Для цього здійснимо деякі перетворення, а саме розділимо обидві частини на x: $\left(y' - \frac{y}{x}\right)\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = 1$. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = t,\quad y = t \cdot x$, $y' = t'x + t$.

Рівняння набуде вигляду: $(t' \cdot x + t - t)\operatorname{arctg} t = 1 \Rightarrow t' \cdot x \cdot \operatorname{arctg} t = 1$,

$\operatorname{arctg} t \cdot dt = \dfrac{dx}{x}$. Проінтегруємо обидві його частини:

$$\int \operatorname{arctg} t \cdot dt = = \left| \begin{matrix} U = \operatorname{arctg} t; & dU = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dV = dt; & V = t \end{matrix} \right| =$$

$$= t \cdot \operatorname{arctg} t - \int \frac{tdt}{1+t^2} = t \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln\left|1+t^2\right| + C_1 .$$

Таким чином маємо:

$$t \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln\left|1+t^2\right| = \ln|Cx| \Rightarrow t \cdot \operatorname{arctg} t = \ln\left|Cx\sqrt{1+t^2}\right| .$$

Повертаємось до початкової змінної: $\dfrac{y}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\left|Cx\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\right|$

або $\dfrac{y}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\left|C\sqrt{x^2+y^2}\right|$ – це і є загальний розв’язок рівняння.

Так як задана умова $y(1) = 0,$ необхідно ці дані підставити в загальний розв’язок рівняння. Маємо: $\operatorname{arctg} 0 = \ln|C| \Rightarrow 0 = \ln C \Rightarrow C = 1$.

Значення $C = 1$ підставимо в загальний розв’язок. Тоді частинним розв’язком диференціального рівняння буде:

$$\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{або} \quad e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2+y^2} .$$

Відповідь: $e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.1.3. Лінійні диференціальні рівняння

Рівняння виду $y' + P(x) \cdot y = Q(x),$ де $P(x)$ та $Q(x)$ – неперервні функції, називається *лінійним диференціальним рівнянням.* Загальний розв’язок такого рівняння знаходиться у вигляді добутку двох функцій $y = U(x) \cdot V(x).$ Враховуючи, що $y' = U'V + UV',$ задане рівняння набуває вигляду:

$$U'V + UV' + P(x)\cdot UV = Q(x)$$

або $U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x)$.

Так як одна з функції U або V може бути обрана довільно, виберемо V таким чином, щоб $V' + P(x)\cdot V = 0$, тоді $U'\cdot V = Q(x)$. Невідомі функції $U(x)$ і $V(x)$ знайдемо з системи диференціальних рівнянь, кожне з яких є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} V' + P(x)\cdot V = 0, \\ U'\cdot V = Q(x) \end{cases}$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння лінійне, а тому, згідно з наведеним вище, маємо:

$$y = U\cdot V,\ \ y' = U'V + UV',$$

тоді наше рівняння набуде вигляду:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' + 2xV = 0, \\ U'\cdot V = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з наведених рівняння системи. При цьому сталу інтегрування при знаходженні $V(x)$ покладаємо рівною нулю, так як нас цікавить будь-який розв'язок, що відрізняється від нуля.

$$V' + 2xV = 0,\ \frac{dV}{dx} = -2xV,$$

$$\int \frac{dV}{V} = -2\int xdx,\ \ln|V| = -x^2,$$

$$V = e^{-x^2}.$$

Тоді друге рівняння системи набуде вигляду:

$$U'\cdot V = x\cdot e^{-x^2},\ \frac{dU}{dx}e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2},\ \int dU = \int xdx,$$

$$U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Відповідно, $y = U \cdot V = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$

Відповідь: $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$

Приклад 9. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

Розв'язання. В даному випадку необхідно розділити обидві частини рівняння на вираз $(1 + x^2)$ і тоді ми одержимо рівняння $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$, яке повністю відповідає загальному вигляду лінійного диференціального рівняння першого порядку.

Відповідно до вищезгаданого маємо:

$$y = U \cdot V,\; y' = U'V + UV',$$

$$U'V + UV' - \frac{2xUV}{1 + x^2} = 1 + x^2$$

або $U'V + U\left(V' - \frac{2xV}{1 + x^2}\right) = 1 + x^2.$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' - \frac{2xV}{1 + x^2} = 0, \\ U'V = 1 + x^2. \end{cases}$$

Маємо:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2xV}{1 + x^2},$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2},$$

$$\ln|V| = \ln\left|1 + x^2\right|, V = 1 + x^2.$$

Тоді:

$$\frac{dU}{dx}(1+x^2)=1+x^2,\ \int dU=\int dx, U=x+C.$$

Таким чином, $y=U\cdot V=(x+C)(1+x^2)$.

Відповідь: $y=(x+C)(1+x^2)$.

Приклад 10. Розв'язати диференціальне рівняння, яке задовольняє початковим умовам:

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{e^x}{x},\ \ y(a)=b.$$

Розв'язання. Дане рівняння – лінійне, а тому загальний розв'язок будемо шукати у вигляді: $y=U\cdot V$, тоді $y'=U'V+UV'$.

Таким чином рівняння набуде вигляду:

$$U'V+UV'+\frac{UV}{x}=\frac{e^x}{x} \text{ або } U'V+U\left(V'+\frac{V}{x}\right)=\frac{e^x}{x}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V'+\dfrac{V}{x}=0, \\ U'V=\dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з рівняння окремо. А саме:

$$V'+\frac{V}{x}=0,\ \frac{dV}{dx}=-\frac{V}{x},\ \int\frac{dV}{V}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|V|=-\ln|x|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

тоді $V=\dfrac{1}{x}$.

Друге рівняння системи набуде вигляду $\dfrac{dU}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{e^x}{x}$ або $dU=e^x dx$, звідки $U=\int e^x dx=e^x+C$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння буде:

$$y=U\cdot V=\frac{e^x+C}{x}.$$

Оскільки в умові рівняння задані початкові умови, то необхідно знайти частинний розв’язок диференціального рівняння. З умови відомо, що $y = b$ при $x = a$.

Використовуючи ці дані, маємо:

$$b = \frac{e^a + C}{a}, \; e^a + C = ab, \; C = -e^a + ab.$$

Відповідно: $y = \dfrac{e^x - e^a + ab}{x}$ – частинний розв’язок рівняння.

Відповідь: $y = \dfrac{e^x - e^a + ab}{x}$.

Приклад 11. Розв’язати рівняння $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0.$

Розв’язання. Це рівняння не є лінійним відносно y та y', але його можна переписати у вигляді:

$$2y \cdot x'_y - 6x = -y^2, \text{ так як } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \text{ тобто } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Таким чином, маємо: $x'_y - \dfrac{6x}{2y} = -\dfrac{y^2}{2y}$ або $x'_y - \dfrac{3x}{y} = -\dfrac{y}{2}$.

Позначимо $x = U \cdot V$, де $U = U(y)$ і $V = V(y)$ та $x' = U'V + UV'$.

Маємо:

$$U'V + UV' - \frac{3UV}{y} = -\frac{y}{2},$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{3V}{y}\right) = -\frac{y}{2}.$$

Система рівняння у даному випадку буде:

$$\begin{cases} V' - \dfrac{3V}{y} = 0, \\ U'V = -\dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

Відповідно:

$$\frac{dV}{dy}=\frac{3V}{y},\ \frac{dV}{V}=\frac{3dy}{y},\ \ln|V|=3\ln|y|=\ln|y|^3\Rightarrow V=y^3.$$

Далі $U'V=-\frac{y}{2},\ \frac{dU}{dy}\cdot y^3=-\frac{y}{2},\ dU=-\frac{y}{2}\cdot\frac{dy}{y^3}$ або $dU=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{y^2}$,

$U=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y}\right)+C=\frac{1}{2y}+C.$

Таким чином, $x=U\cdot V=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $x=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)$.

1.1.4. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду $y'+P(x)\cdot y=Q(x)y^n$, де $n\neq 0, n\neq 1$ називається *рівнянням Бернуллі*. Якщо обидві частини цього рівняння поділити на y^n, а потім замінити $y^{-n+1}=z$, то одержимо рівняння $z'+P(x)(1-n)\cdot z=(1-n)Q(x)$, яке є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

На практиці немає сенсу проводити таку заміну, достатньо невідому функцію відразу записати у вигляді $y=U\cdot V$ та розв'язувати як лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $xy'+y=y^2\ln x$.

Розв'язання. Для зручності запишемо рівняння у вигляді $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2\ln x}{x}$, тоді $y=U\cdot V$, а $y'=U'V+UV'$.

Рівняння набуде вигляду:

$$U'V+UV'+\frac{UV}{x}=\frac{U^2V^2\ln x}{x},$$

$$U'V+U\left(V'+\frac{V}{x}\right)=\frac{U^2V^2\ln x}{x}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V'+\dfrac{V}{x}=0, \\ U'V=\dfrac{U^2V^2\ln x}{x}, \end{cases}$$

та розв'яжемо кожне з рівнянь:

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{V}{x},\ \frac{dV}{V}=-\frac{dx}{x},\ \ln|V|=-\ln|x|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ V=\frac{1}{x}.$$

Тоді друге рівняння системи буде:

$$\frac{dU}{dx}\cdot V=\frac{U^2V^2\ln x}{x},\ \frac{dU}{U^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx,\ -\frac{1}{U}=-\frac{\ln x+1+Cx}{x},\ U=\frac{x}{\ln x+1+Cx}.$$

Відповідно $y=U\cdot V=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$.

Відповідь: $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$.

Приклад 13. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

Розв'язання. Позначимо $y=U\cdot V$, тоді $y'=U'V+UV'$. Маємо:

$$U'V+UV'+\frac{2UV}{x}=\frac{2\sqrt{U}\cdot\sqrt{V}}{\cos^2 x},\ U'V+U\left(V'+\frac{2V}{x}\right)=\frac{2\sqrt{U}\cdot\sqrt{V}}{\cos^2 x}.$$

Запишемо систему рівнянь: $\begin{cases} V'+\dfrac{2V}{x}=0, \\ U'V=\dfrac{2\sqrt{U}\cdot\sqrt{V}}{\cos^2 x}, \end{cases}$

та розв'яжемо кожне з цих рівнянь:

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{2V}{x},\ \frac{dV}{V}=-\frac{2dx}{x},\ \ln|V|=-2\ln|x|=\ln\left|\frac{1}{x^2}\right|,\ \text{тоді:}$$

$$\frac{dU}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{2\sqrt{U}\cdot}{x\cos^2 x},\ \frac{dU}{2\sqrt{U}}=\frac{xdx}{\cos^2 x},\ \sqrt{U}=x\cdot\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C,$$

$$U=\left(x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C\right)^2.$$

Таким чином, $y=\frac{\left(x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C\right)^2}{x^2}$. Звідки:

$y=\left(\operatorname{tg}x+\frac{\ln|\cos x|+C}{x}\right)^2$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y=\left(\operatorname{tg}x+\frac{\ln|\cos x|+C}{x}\right)^2$.

1.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

1.2.1. Диференціальне рівняння виду $y^{(n)}=f(x)$

Послідовним інтегруванням вдається знизити порядок диференціального рівняння і в результаті отримати його загальний розв'язок.

Приклад 14. Розв'язати диференціальне рівняння $y''=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. $y'=\int\frac{2\cos x}{\sin^3 x}dx=\int 2(\sin x)^{-3}\cdot d(\sin x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+C_1$,

Далі $y=\int\left(-\frac{1}{\sin^2 x}+C_1\right)dx$. Звідки $y=\operatorname{ctg}x+C_1x+C_2$ – загальний розв'язок рівняння.

Відповідь: $y=\operatorname{ctg}x+C_1x+C_2$.

Приклад 15. Розв’язати диференціальне рівняння:

$$y'' = \sin 3x - 4e^{-x}.$$

Розв’язання. $y' = \int\left(\sin 3x - 4e^{-x}\right)dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + 4e^{-x} + C_1.$

Далі $y = \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + 4e^{-x} + C_1\right)dx$. Загальний розв’язок рівняння:

$$y = -\frac{1}{9}\sin 3x - 4e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{9}\sin 3x - 4e^{-x} + C_1 x + C_2.$

1.2.2. Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію

Загальний вигляд такого диференціального рівняння:

$$F\left(x, y', y''\right) = 0$$

У даному випадку необхідно скористатись заміною $y' = P(x)$, тоді $y'' = \frac{dP}{dx}.$

Приклад 16. Розв’язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x.$$

Розв’язання. Позначимо $y' = P(x)$, тоді $y'' = \frac{dP}{dx}.$ Маємо $P' - 2\operatorname{ctg} x \cdot P = \sin^3 x.$ Одержане рівняння є типовим представником лінійного диференціального рівняння першого порядку, а тому позначимо $P = U \cdot V,\ P' = U'V + UV'.$

В результаті даних позначень рівняння набуває вигляду:

$$U'V + UV' - 2\operatorname{ctg} x \cdot U \cdot V = \sin^3 x,$$

$$U'V + U(V' - 2\operatorname{ctg} x \cdot V) = \sin^3 x.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' - 2\operatorname{ctg} x \cdot V = 0, \\ U'V = \sin^3 x, \end{cases}$$

та послідовно розглянемо рівняння:

$$\frac{dV}{dx} = 2\operatorname{ctg} xV \Rightarrow \frac{dV}{V} = 2\operatorname{ctg} xdx,$$

$$\ln|V| = 2\ln|\sin x| = \ln\left|\sin^2 x\right| \Rightarrow V = \sin^2 x.$$

Перейдемо до другого рівняння:

$$\frac{dU}{dx}V = \sin^3 x \Rightarrow \frac{dU}{dx}\sin^2 x = \sin^3 x \Rightarrow dU = \sin xdx \Rightarrow U = C_1 - \cos x.$$

Таким чином, $P = UV = (C_1 - \cos x)\sin^2 x$, $y' = (C_1 - \cos x)\sin^2 x$.

Інтегруванням знайдемо саму функцію y :

$$y = \int (C_1 - \cos x)\sin^2 xdx = C_1\int \sin^2 xdx - \int \sin^2 x\cos xdx =$$

$$= C_1\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx - \int (\sin x)^2 d(\sin x).$$

Таким чином, $y = \frac{C_1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y = \frac{C_1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння $y'' = \frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x}$.

Розв'язання. Позначимо $y' = P(x)$, тоді $y'' = \frac{dP}{dx}$. Маємо:

$$P' = \frac{P}{x}\ln\frac{P}{x}.$$

Дане рівняння являє собою однорідне диференціальне рівняння першого порядку, а тому позначимо $\frac{P}{x} = t \Rightarrow P = t \cdot x \Rightarrow P' = t' \cdot x + t$.

Таким чином маємо:

$$t' \cdot x + t = t\ln t \Rightarrow t' \cdot x = t(\ln t - 1) \Rightarrow \frac{dt}{dx}x = t(\ln t - 1),$$

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\ln t - 1\right| = \ln\left|C_1 x\right| \Rightarrow \ln t - 1 = C_1 x \Rightarrow \ln t = C_1 x + 1 \Rightarrow t = e^{C_1 x + 1}.$$

Повернемось до початкової змінної:

$$\frac{P}{x} = e^{C_1 x + 1}, \ P = xe^{C_1 x + 1} \Rightarrow y' = xe^{C_1 x + 1}, \ y = \int xe^{C_1 x + 1}dx = \begin{vmatrix} U = x, & dV = e^{C_1 x + 1}dx \\ dU = dx, & V = \dfrac{1}{C_1}e^{C_1 x + 1} \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{x}{C_1}e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1}\int e^{C_1 x + 1}dx = \frac{x}{C}e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C^2}e^{C_1 x + 1} + C_2$$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y = \dfrac{x}{C_1}e^{C_1 x + 1} - \dfrac{1}{C_1}\int e^{C_1 x + 1}dx = \dfrac{x}{C}e^{C_1 x + 1} - \dfrac{1}{C^2}e^{C_1 x + 1} + C_2$.

1.2.3. Диференціальні рівняння другого порядку, що не містять незалежну змінну

Загальний вигляд вказаного диференціального рівняння:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Метод розв’язання – заміна: $y' = P(y), \ y'' = P\dfrac{dP}{dy}$.

Приклад 18. Розв’язати рівняння $1 + (y')^2 = 2yy''$.

Розв’язання. Це рівняння належить до даного типу рівнянь, а тому позначимо $y' = P(y), \ y'' = P\dfrac{dP}{dy}$, в результаті задане рівняння набуде вигляду: $1 + P^2 = 2yP\dfrac{dP}{dy}$.

Розділимо змінні, тоді рівняння буде:

$$\frac{2PdP}{1 + P^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln\left|1 + P^2\right| = \ln\left|C_1 y\right| \Rightarrow 1 + P^2 = C_1 y;$$

$$P^2 = C_1 y - 1 \Rightarrow P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Нагадаємо, що $P(y) = y'$, тоді $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$ або $\dfrac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx.$

Інтегруючі обидві частини рівняння маємо:

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = C_2 \pm x \Rightarrow (C_2 \pm x)^2 = \frac{4}{C_1^2}(C_1 y - 1) \text{ або}$$

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4} \Rightarrow y = \frac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4C_1} + \frac{1}{C_1},$$

$y = \dfrac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4} + \dfrac{1}{C_1}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y = \dfrac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4} + \dfrac{1}{C_1}$.

Приклад 19. Розв'язати рівняння $2y'' = 3y^2$ за умови $y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$.

Розв'язання. В даному випадку також позначимо $y' = P(y),\ \ y'' = P\dfrac{dP}{dy}$. Тоді:

$$2P\frac{dP}{dy} = 3y^2 \Rightarrow 2PdP = 3y^2 dy \Rightarrow P^2 = y^3 + C_1,$$

$$P = \pm\sqrt{y^3 + C_1} \Rightarrow y' = \pm\sqrt{y^3 + C_1}.$$

Доречно згадати про початкові умови $y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$, тоді $-1 = \pm\sqrt{1 + C_1}$. Очевидно, що $C_1 = 0$, тобто можна записати $y' = -\sqrt{y^3}$. Знайдемо y з одержаного рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y^3} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^3}} = -dx \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{y}} = -x + C_2,$$

$$-2 = 2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -4.$$

Таким чином, $\frac{-2}{\sqrt{y}}=-x-4,\ \frac{2}{\sqrt{y}}=x+4,\ \frac{4}{y}=(x+4)^2$.

$y=\frac{4}{(x+4)^2}$ – розв'язок диференціального рівняння, що відповідає початковим умовам.

Відповідь: $y=\frac{4}{(x+4)^2}$.

1.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами a_1, a_2, a_3 має вигляд $a_1y''+a_2y'+a_3y=0$.

Відомо, якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – частинний розв'язок такого рівняння, вони утворюють *фундаментальну систему розв'язань*. Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо як $y_{з.о.}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. Для знаходження частинних розв'язань $y_1(x)$ та $y_2(x)$ необхідно спочатку розв'язати відповідне характеристичне рівняння $a_1k^2+a_2k+a_3=0$. При розв'язанні квадратного рівняння можливі три випадки:

№ з/п	**Корені рівняння**	**Частинні розв'язки**	**Загальний розв'язок**
1.	Дійсні різні $k_1\neq k_2$	$y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$	$y_{з.о.}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2.	Дійсні рівні $k_1=k_2$	$y_1=e^{k_1x}$, $y_2=x\cdot e^{k_1x}$	$y_{з.о.}=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$
3.	Комплексно-спряжені $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y_{з.о.}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

Приклад 20. Розв'язати рівняння $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння $3k^2 + 5k - 2 = 0$, його корені $k_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{-5 \pm 7}{6}, k_1 = -2, k_2 = \dfrac{1}{3}$ дійсні та різні. Відповідно, $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{\frac{1}{3}x}$ – частинні розв'язки, а $y_{з.о.} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Відповідь: $y_{з.о.} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$.

Приклад 21. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння буде $k^2 + 6k + 9 = 0$, а тому $k_{1,2} = -3$ (дійсні та рівні корені), відповідно $y_1 = e^{-3x}, y_2 = xe^{-3x}$.

Отже, $y_{з.о.} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

Відповідь: $y_{з.о.} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

Приклад 22. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 13y = 0 .$$

Розв'язання. В цьому випадку характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 13 = 0$, а його корені $k_{1.2} = 3 \pm 2i$. Відповідно до наведеної вище таблиці $\alpha = 3, \ \beta = 2$ та $y_1 = e^{3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{3x} \sin 2x$.

Таким чином, $y_{з.о.} = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Відповідь: $y_{з.о.} = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Приклад 23. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \text{ за умови } y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

Розв'язання. Розглянемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k + 29 = 0.$$

Його корені $k_{1,2} = -2 \pm 5i$. Тоді ($\alpha = -2, \ \beta = 5$) $y_1 = e^{-2x} \cos 5x$ та $y_2 = e^{-2x} \sin 5x$, а $y_{з.о.} = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Скористаємось початковою умовою $y(0)=3$, а саме замість x та y підставимо їх значення в загальний розв'язок однорідного рівняння. Маємо $3=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0)\Rightarrow 3=C_1$.

Обчислимо:

$$y'_{з.о.}=-2e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)+e^{-2x}(-5C_1\sin 5x+5C_2\cos 5x),$$

а далі у цей вираз підставимо $x=0$ та $y'=-1$. Тоді:

$$-1=-2(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+(-5C_1\sin 0+5C_2\cos 0),$$

$$\text{тобто } -1=-2C_1+5C_2.$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1=3, \\ -2C_1+5C_2=-1, \end{cases} \text{ звідки } C_2=1.$$

Отже розв'язок рівняння, що відповідає заданим початковим умовам буде:

$$y=e^{-2x}(3\cos 5x+\sin 5x).$$

Відповідь: $y=e^{-2x}(3\cos 5x+\sin 5x)$.

1.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

1.4.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального виду

Загальний вигляд такого рівняння:

$$a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)\ \text{, де } f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

а $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ – многочлени відповідно степені m та n.

Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$, де $y_{з.о.}$ одержуємо розглянувши відповідне рівняння $a_1y''+a_2y'+a_3y=0$, а частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}\left(M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x\right)\cdot x^s .$$

В даному випадку $k = \max\{m, n\}$, $M_k(x), N_k(x)$ – многочлени степеню k з невідомими коефіцієнтами.

Якщо так зване *контрольне число* $\gamma = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $s = 0$, в іншому випадку число s визначає, з якою кількістю коренів характеристичного рівняння співпадає γ.

Приклад 24. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 4y = x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} .$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' + 4y = 0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, корені якого будуть $k_{1,2} = \pm 2i$. Звідки можна записати:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Права частина заданого рівняння має спеціальний вигляд, причому контрольне число $\gamma = \alpha + \beta i = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. А тому $y_{\text{ч.н.}} = Ax + B$. Для обчислення коефіцієнтів A та B знайдемо похідні $y'_{\text{ч.н.}} = A$ і $y''_{\text{ч.н.}} = 0$ та підставимо їх значення в умову диференціального рівняння $4(Ax + B) = x$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 4A = 1, \\ x^0 & 4B = 0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = 0 .$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{4}x$, відповідно $y_{\text{з.н.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Приклад 25. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' = 2 - 3x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо у вигляді: $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$.

Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - 3y' = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 - 3k = 0$, корені якого будуть $k_1 = 0$ та $k_2 = 3$. Отже $y_{\text{з. о.}} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Права частина заданого рівняння є спеціального виду. де $\alpha = 0, \beta = 0, f(x) = 2 - 3x$. Контрольне число $\gamma = 0$ та дорівнює одному кореню характеристичного рівняння. Таким чином, $y_{\text{ч.н.}}$ можна підібрати за правою частиною, тобто:

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx .$$

Коефіцієнти A та B знаходимо вже відомим методом:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B, \; y''_{\text{ч.н.}} = 2A .$$

$$2A - 3(2Ax + B) = 2 - 3x ,$$

$$2A - 6Ax - 3B = 2 - 3x ,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & -6A = -3 \\ x^0 & 2A - 3B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{3} .$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$, а $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$.

Приклад 26. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3 .$$

Розв'язання. Як відомо, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.н.}}$: $y'' - 6y' + 9y = 0$, $k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = 3 \Rightarrow y_{\text{з. о.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

Визначимо контрольне число:

$$\gamma = \alpha + \beta i, \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0, \; \gamma \neq k_{1,2} .$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx + C$. Знаходимо $y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B, \; y''_{\text{ч.н.}} = 2A$ та підставимо ці вирази у задане диференціальне рівняння:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3 ,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 9A = 2, \\ x^1 & -12A + 9B = -1, \\ x^0 & 2A - 6B + 9C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{2}{9},\ B = \frac{5}{27},\ C = \frac{11}{27}.$$

Таким чином:

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27},$$

$$\text{а } y_{\text{з.н.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

Приклад 27. Розв'язати рівняння $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Розв'язання. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$

Виконуючи всі дії, аналогічно попереднім, маємо:

$$2y'' - y' - y = 0,\ 2k^2 - k - 1 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так як $\alpha = 2, \beta = 0$, то $\gamma = 2,\ \gamma \neq k_{1,2}$ тоді:

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)e^{2x},$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}(2A) = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Маємо:

$$2e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Скоротимо обидві частини рівняння на e^{2x}:

$$8Ax + 8A + 8B - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x,$$

$$5Ax + 7A + 5B = 4x.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 5A = 4, \\ x^0 & 7A + 5B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{4}{5},\ B = -\frac{28}{25}.$$

$$y_{\text{ч.н.}} = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}, \text{ а } y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$.

Приклад 28. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = e^x(5 - x)$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}},\ y'' - 2y' + y = 0,\ k^2 - 2k + 1 = 0,\ k_{1,2} = 1,$$

$$y_{\text{з.о.}} = e^x(C_1 + C_2x).$$

Враховуючи праву частину рівняння, маємо:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 1 = k_{1.2},$$

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x(Ax + B)\cdot x^2 = e^x(Ax^3 + Bx^2),$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx),$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2B) =$$

$$= e^x(Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B).$$

Підставимо $y_{\text{ч.н.}}, y'_{\text{ч.н.}}, y''_{\text{ч.н.}}$ в задане рівняння та скоротимо обидві частини на e^x:

$$6Ax + 2B = 5 - x,$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 6A = -1, \\ x^0 & 2B = 5 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A = -\frac{1}{6},\ B = \frac{5}{2}.$$

$$y_{\text{ч.н.}} = x^2e^x\left(-\frac{x}{6} + \frac{5}{2}\right) = e^x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2\right),$$

$$y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2xe^x + e^x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2\right).$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2xe^x + e^x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2\right)$.

Приклад 29. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y' + 10y = 5\sin 4x - 3\cos 4x .$$

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} .$$

Для того, щоб знайти $y_{\text{з.о.}}$ запишемо однорідне диференціальне рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$, корені якого $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Таким чином, $y_{\text{з.о.}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

За правою частиною рівняння $\alpha = 0, \beta = 4$, тобто $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 4i, \gamma \neq k_{1,2}$, а отже, $y_{\text{ч.н.}} = A\sin 4x + B\cos 4x$. Знайдемо

$$y'_{\text{ч.н.}} = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x \text{ та } y''_{\text{ч.н.}} = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x .$$

Підставимо їх значення в умову. Тоді маємо:

$$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x + 8A\cos 4x - 8B\sin 4x + 10A\sin 4x + 10B\cos 4x =$$
$$= 5\sin 4x - 3\cos 4x .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 4x$ та $\cos 4x$ одержимо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} \cos 4x & -6A - 8B = 5, \\ \sin 4x & 8A - 6B = -3 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A = -0{,}54, \;\; B = -0{,}22 .$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -0{,}54\sin 4x - 0{,}22\cos 4x$, а відповідно

$$y_{\text{з.н.}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0{,}54\sin 4x - 0{,}22\cos 4x .$$

Відповідь:

$y_{\text{з.н.}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0{,}54\sin 4x - 0{,}22\cos 4x.$

Приклад 30. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому випадку $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$$y'' + 9y = 0,\, k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = \pm 3i \Rightarrow \;\; y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x .$$

За правою частиною рівняння маємо $\alpha = 0,\ \beta = 2,$ тоді $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 2i, \gamma \neq k_{1,2} \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = A\cos 2x + B\sin 2x$ Знайдемо A та B. Для цього запишемо:

$y'_{\text{ч.н.}} = -A\sin 2x + 2B\cos 2x$ та $y''_{\text{ч.н.}} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Підставимо одержані вирази в задане диференціальне рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9A\cos 2x + 9B\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\text{тоді } 5A\cos 2x + 5B\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 5A = -\dfrac{17}{2}, \\ \sin 2x & 5B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B = 0,\ A = -\frac{17}{10} = -1{,}7.$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = -1{,}7\cos 2x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 1{,}7\cos 2x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 1{,}7\cos 2x$.

Приклад 31. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' - 5y = 2\sin 3x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Розв'язання. У даному випадку необхідно спочатку повторити всі дії, які були наведені в попередніх прикладах, а потім скористатися початковими умовами. Отже, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$$y'' + 4y' - 5y = 0,\ k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -5.$$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1e^x + C_2e^{-5x}.$$

Так як $\alpha = 0, \beta = 3 \Rightarrow \gamma = \alpha \pm \beta i = 3i, \gamma \neq k_{1,2}$, то:

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Обчислимо A та B:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 12A\sin 3x + 12B\cos 3x - 5A\cos 3x - 5B\sin 3x = 2\sin 3x,$$

$$\begin{array}{c|} \cos 3x \\ \sin 3x \end{array} \begin{cases} -9A+12B-5A=0, \\ -9B-12A-5B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14A+12B=0, \\ -12A-14B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7A+6B=0, \\ -6A-7B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{6}{85},\ B=-\frac{7}{85}.$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -\frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x .$$

Скористаємось початковою умовою $y(0)=1$:

$$1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85} .$$

Запишемо $y'_{\text{з.н.}} = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x} + \frac{18}{85}\sin 3x - \frac{21}{85}\cos 3x$, та скористаємось умовою $y'(0)=0$:

$$0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85} .$$

Об'єднаємо одержані рівняння в систему:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 - \dfrac{6}{85}, \\ 0 = C_1 - 5C_2 - \dfrac{21}{85}, \end{cases}$$

та знайдемо $C_1 = \frac{238}{255}, C_2 = \frac{7}{51}$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковим умовам:

$$y = \frac{238}{255}e^x + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x .$$

Відповідь: $y = \frac{238}{255}e^x + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x$.

1.4.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та неспеціальною правою частиною. Метод варіації довільних сталих

Посилаючись на теоретичний матеріал, можна стверджувати, що загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$, являє собою суму загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язка неоднорідного диференціального рівняння, тобто $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$.

Розглянемо метод Лагранжа (так званий метод варіації довільних сталих), який дозволяє за відомим загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад 32. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, тоді лінійно незалежні розв'язки будуть $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x.$ Відповідно, загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_{\text{з.о.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, тобто:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння будемо шукати у вигляді $y_{\text{ч.н.}} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, де $C_1(x)$ та $C_2(x)$ – функції, що підлягають визначенню. Ці функції визначаємо з системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Запишемо систему для нашого диференціального рівняння:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot \cos x + C_2'(x)\cdot \sin x = 0, \\ -C_1'(x)\cdot \sin x + C_2'(x)\cdot \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

За правилом Крамера:

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \operatorname{tg} x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \operatorname{tg} x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\sin x.$$

Звідки:

$$C_1(x)=\int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sin x,$$

$$C_2(x)=\int \sin x dx=-\cos x.$$

Тоді маємо:

$$y_{\text{ч.н.}}=\left(\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cdot\cos x-\cos x\cdot\sin x=-\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Згідно з вищевикладеним, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{\text{з.н.}}=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}}=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Приклад 33. Розв'язати рівняння $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння $y''-2y'+y=0$, його характеристичне рівняння $k^2-2k+1=0$ має кратні корені $k_{1,2}=1$, а його лінійно незалежні розв'язки будуть $y_1=e^x$ та $y_2=xe^x$.

Згідно з теоремою про загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння маємо $y_{\text{з.о.}}=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$, де $C_1(x)$ та $C_2(x)$ ті функції, які необхідно визначити. Їх знаходимо з відомої вже системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}. \end{cases}$$

За правилом Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{x^2+1} & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{xe^{2x}}{x^2+1}}{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x}} = -\frac{xe^{2x}}{e^{2x}\left(x^2+1\right)} = -\frac{x}{x^2+1},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}}{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Звідки:

$$C_1(x) = \int -\frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \text{ , а}$$

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| \cdot e^x + xe^x \operatorname{arctg} x.$$

Таким чином:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{e^x}{2}\ln\left|x^2+1\right| + xe^x \operatorname{arctg} x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2xe^x - \dfrac{e^x}{2}\ln\left|x^2+1\right| + xe^x \operatorname{arctg} x$.

1.5. Інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь методом виключення

Нормальна система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f_1(x, y), \\ \dfrac{dx}{dt} = f_2(x, y), \end{cases}$$

де $y(t)$ та $x(t)$ невідомі функції, $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)$ – лінійні функції своїх аргументів.

Розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь, що має дві невідомих функції, необхідно привести до одного диференціального рівняння другого порядку, яке містить тільки одну невідому функцію. Після знаходження цієї функції другу функцію знаходимо із заданих рівнянь та тих рівнянь, що отримані в результаті їх диференціювання.

Приклад 34. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок даної системи рівнянь будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Для цього оберемо перше рівняння системи та запишемо його у вигляді $\dot{x} = 5x + 8y$. Обидві частини рівняння продиференціюємо, тоді $\ddot{x} = 5\dot{x} + 8\dot{y}$. Підставимо в це рівняння значення $\dot{y}$, взяте з другого рівняння системи: $\dot{y} = 3x + 3y$, тоді $\ddot{x} = 5\dot{x} + 8(3x + 3y) \Rightarrow \ddot{x} = 5\dot{x} + 24x + 24y$.

Далі замість y підставимо його вираз, взятий з першого рівняння системи $\left(y = \dfrac{\dot{x} - 5x}{8} \right)$, $\ddot{x} = 5\dot{x} + 24x + 3\dot{x} - 15x \Rightarrow \ddot{x} - 8\dot{x} - 9 = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння та знайдемо його корені:

$$k^2 - 8k - 9 = 0, \text{ звідки } k_1 = -1, k_2 = 9.$$

Таким чином можна записати, що: $x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{9t}$. Враховуючи те, що $y(t)=\frac{1}{8}(\dot{x}-5x)$, маємо:

$$y(t)=\frac{1}{8}\left(-C_1e^{-t}+9C_2e^{9t}-5C_1e^{-t}-5C_2e^{9t}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(-6C_1e^{-t}+4C_2e^{9t}\right)=\frac{1}{4}\left(-3C_1e^{-t}+2C_2e^{9t}\right).$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи рівнянь буде:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{9t}, \\ y(t)=\frac{1}{4}\left(-3C_1e^{-t}+2C_2e^{9t}\right). \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{9t}, \\ y(t)=\frac{1}{4}\left(-3C_1e^{-t}+2C_2e^{9t}\right). \end{cases}$.

Приклад 35. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-7x+y, \\ \frac{dy}{dt}=-2x-5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Загальний розв'язок даної системи рівнянь будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$$

Запишемо систему таким чином:

$$\begin{cases} \dot{x}=-7x+y, \\ \dot{y}=-2x-5y. \end{cases}$$

Оберемо перше рівняння системи $\dot{x}=-7x+y$. Обидві частини рівняння продиференціюємо, тоді $\ddot{x}=-7\dot{x}+\dot{y}$. Підставимо в це рівняння значення $\dot{y}$, взяте з другого рівняння системи:

$$\dot{y}=-2x-5y \text{, тоді } \ddot{x}=-7\dot{x}-2x-5y .$$

Далі замість y підставимо його вираз, взятий з першого рівняння системи $\left(y = \dot{x} + 7x\right)$, $\ddot{x} = -7\dot{x} - 2x - 5(\dot{x} + 7x) \Rightarrow \ddot{x} + 12\dot{x} + 37x = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння та знайдемо його корені:

$$k^2 + 12k + 37 = 0\text{, звідки } k_{1,\,2} = -6 \pm i.$$

Таким чином можна записати, що:

$$x(t) = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Враховуючи те, що $y(t) = \dot{x} + 7x$, маємо:

$$y(t) = -6e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right) +$$

$$+7e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right).$$

Отже, загальний розв’язок заданої системи рівнянь буде:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right), \\ y(t) = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right). \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right), \\ y(t) = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right). \end{cases}$.

Розрахункове завдання 1

Знайти загальний або частинний розв'язок диференціальних рівнянь і системи:

Варіант 1

1. $\left(5x+xy\right)dy+e^{y}\left(1-2x\right)dx=0$;
2. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$;
3. $y'+y\cos x=\sin x\cdot\cos x,\ y(0)=0$;
4. $xy'+y=y^2\ln x$;
5. $y''=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$;
6. $xy''+y'+x=0, y(1)=0, y'(1)=0$;
7. $y''y^3=1$;
8. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x^4}$;
9. $y''+6y'+13y=\cos 3x$;
10. $y''-2y'-3y=e^{4x}$,

    $y(\ln 2)=1,\ y'(\ln 2)=3$;
11. $\begin{cases}\dot{x}=x-3y,\\ \dot{y}=3x+y.\end{cases}$

Варіант 2

1. $\dfrac{yy'}{x}=\dfrac{\cos x^2}{\cos y}$;
2. $y'=\dfrac{3y-x}{x+y}$;
3. $(y^2-6x)y'+2y=0$;
4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$;
5. $y''=e^{3x}-x+1$;
6. $(1+x^2)y''=1+y'^2$,

    $y(0)=y'(0)=1$;
7. $2yy''=1+y'^2$;
8. $y''+\pi^2y=\dfrac{\pi^2}{\sin\pi x}$;
9. $y''-3y'+2y=1-2x$;
10. $y''+y=3\sin x$,

    $y(0)+y'(0)=0$,

    $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$;
11. $\begin{cases}\dot{x}=y-7x,\\ \dot{y}=-2x-5y.\end{cases}$

Варіант 3

1. $y(1-x^2)dy-x(1-y^2)dx=0$;
2. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$;
3. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=x^2$;

4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$;

5. $y'' = \dfrac{1}{(x+3)^2}$;

6. $(x+1)y'' + xy'^2 = y'$,

$y(1) = -2, y'(1) = 4$;

7. $yy'' = y'^2$;

8. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$;

9. $y'' + 2y' = 4e^x$;

10. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Варіант 4

1. $y' = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$;

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

3. $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{ctg} x + 2x \sin x$;

4. $(1-x^2)y' - xy = xy^2$;

5. $y'' = 5^{2x}$;

6. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0, y'(2) = 4$;

7. $y'' + \dfrac{2}{1-y} \cdot y'^2 = 0$;

8. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$;

10. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$,

$y(0) = 1, y'(0) = 3,2$;

11. $\begin{cases} \dot{y} = -3y - x, \\ \dot{x} = y - x. \end{cases}$

Варіант 5

1. $xdx + ydy = 0$;

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$,

$y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

3. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$;

4. $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$;

5. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

6. $xy'' + xy'^2 - y' = 0$,

$y(2) = 2, y'(2) = 1$;

7. $1 + y'^2 = yy''$;

8. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3 x}$;

9. $y'' - 2y' + 2y = x^2$;

10. $4y''+16y'+15y=4e^{\frac{-3}{2}x}$,

$y(0)=3, y'(0)=-5,5$;

11. $\begin{cases}\dot{x}=x+5y,\\ \dot{y}=-x-3y.\end{cases}$

Варіант 6

1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;
2. $(x+y)dx-xdy=0$;
3. $\dfrac{dy}{dx}+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=1$;
4. $xy'+y=y^2\ln x$;
5. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$;
6. $y''(x^2+1)=2xy'$,

   $y(0)=1, y'(0)=3$;
7. $y''(1+y)=y'^2+y'$;
8. $y''+16y=\dfrac{16}{\sin 4x}$;
9. $y''-5y'=\sin 5x$;
10. $y''-y=e^x$, $y(0)=y'(0)=\dfrac{1}{2}$;
11. $\begin{cases}\dot{y}=y+x\\ \dot{x}=-10y-x\end{cases}$.

Варіант 7

1. $x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0$;
2. $x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)(ydx+xdy)-$

   $-y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)(xdy-ydx)=0$;
3. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y(0)=3$;
4. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$;
5. $y''=\dfrac{\ln x}{x}$;
6. $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$,

   $y(2)=1, y'(2)=-1$;
7. $yy''-y'^2=y^2y'$;
8. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$;
9. $y''-y=2e^{3x}$;
10. $y''-2y'+y=x^2+x-3$;
11. $\begin{cases}\dot{x}=-3x-y,\\ \dot{y}=x-y.\end{cases}$

Варіант 8

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$;
2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2}{x^2}$, $y(1)=-1$;

3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$;

5. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3$;

6. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right)$,

$y(1) = \dfrac{1}{2}, y'(1) = 1$;

7. $yy'' = y'(y'+1)$;

8. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$;

9. $y'' + 2y' - 3y = x^2$;

10. $y'' + 9y = 6e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Варіант 9

1. $x(1+y^2)dx = ydy$;

2. $y' = \dfrac{3y - x}{x + y}$;

3. $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$;

4. $\dfrac{y'}{y^3} + 2\dfrac{x}{y^2} = 2x^3$;

5. $y'' = \dfrac{5}{\sin^2 x} + 1$;

6. $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x$,

$y(1) = \dfrac{1}{2}, y'(1) = 1$;

7. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$,

$y(-1) = \dfrac{\pi}{6}, y'(-1) = 2$;

8. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$;

9. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;

10. $y'' + 8y' + 16y = \dfrac{289}{-5} \cdot \cos x$,

$y(0) = 0, y'(0) = -\dfrac{48}{5}$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Варіант 10

1. $s \cdot \operatorname{tg} t dt + ds = 0$, $s\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4$;

2. $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$, $y(1) = 3$;

3. $y' + 2y = e^{3x}$;

4. $(1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0$;

5. $y''' = e^{-x} + x$;

6. $xy'' - y' = x^2 e^x$;

7. $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y'(-2) = -1$;

8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$;

9. $y'' - 2y' + y = 6x$;

10. $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 2$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 4x + 5y. \end{cases}$

Варіант 11

1. $(1 + y)dx = (1 - x)dy$, $y(-2) = 3$;
2. $(x^2 + y^2)dx = xydy$;
3. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$;
4. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$;
5. $y''' = \cos 2x$;
6. $xy'' + y' = 0$;
7. $yy'' = y'^2 - y'^3$,

   $y(1) = 1, y'(1) = -1$;
8. $y'' + y = \mathrm{ctg}^2\, x$;
9. $y'' + 6y' + 10y = 5e^{-3x}$;
10. $y'' + 6y' + 9y = 3x + 11$,

    $y(0) = -1, y'(0) = \dfrac{7}{3}$;
11. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Варіант 12

1. $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$;
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;
3. $(x^2 - 1)y' - xy - ax = 0$;
4. $xy' + y = y^2 \cdot \ln x$;
5. $y'' = \cos x \sin 7x$;
6. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;
7. $2(y')^2 = y''(y - 1)$,

   $y(1) = 2, y'(1) = -1$;
8. $y'' + y = \mathrm{tg}^2\, x$;
9. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$;
10. $y'' + 2y' + y = 8e^{-3x}$,

    $y(0) = -1, y'(0) = 1$;
11. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 8y, \\ \dot{y} = 3x + 3y. \end{cases}$

Варіант 13

1. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$;
2. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;
3. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$;
4. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$;
5. $y'' = \dfrac{4}{x^2}$;

6. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$;

7. $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$,

8. $y'' + y = \operatorname{tg} x$;

9. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x - 5$;

10. $y'' + 4y = 5e^{2x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 9y, \\ \dot{y} = x + 8y. \end{cases}$

Варіант 14

1. $y^2 dx = e^x dy$, $y(0) = 1$;

2. $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$;

3. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$;

4. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right) dx = \frac{2y dy}{x^3}$;

5. $y'' = e^{-x} + \ln x$;

6. $y''y' = -x$;

7. $1 + y'^2 = yy''$;

8. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$;

9. $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 + 5$;

10. $y'' + y = -\sin 2x, y(\pi) = y'(\pi) = 1$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Варіант 15

1. $\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} = \operatorname{ctg} x \sin y dy$,
$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$;

2. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$;

3. $y' + y = \cos x$;

4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$, $y(-1) = 1$;

5. $y'' = \ln x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

6. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$;

7. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$;

8. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$,
$y(0) = 0, y'(0) = 2$;

9. $y'' + 2y' = e^{3x}$;

10. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

Варіант 16

1. $\dfrac{dy}{dx} = y\,\mathrm{tg}\,x$;
2. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$;
3. $e^{x^2}y' + 2xye^{x^2} = x\sin x$;
4. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$;
5. $y'' = \sin^3 x$;
6. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;
7. $y'' = 18\sin^3 y\cos y$,

   $y(1) = \dfrac{\pi}{2}, y'(1) = 3$;
8. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;
9. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$;
10. $y'' + y = 3e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$;
11. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = 4x - 5y. \end{cases}$

Варіант 17

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2+1}$;
2. $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$

   ;
3. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x}$;
4. $3y^2y' + y^3 = x + 1$;
5. $y'' = \sin^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4, y'(0) = 2$;
7. $xy'' = y' + x\cdot\sin\dfrac{y'}{x}$;
8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$;
9. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$;
10. $2y'' - y' = e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 1$;
11. $\begin{cases} \dot{x} = 8y - x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Варіант 18

1. $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$;
2. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$;
3. $y' - \dfrac{1}{\sin x\cos x}y = -\dfrac{1}{\sin x} - \sin x$,

   $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-xy^2$;

5. $y''(e^x+1)+y'=0$;

6. $y''=\cos^2 x+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

7. $y''=128y^3$, $y(0)=1, y'(0)=8$;

8. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$;

9. $y''+2y'+5y=10\cos x$;

10. $y''+y=4e^x$, $y(0)=4, y'(0)=-3$;

11. $\begin{cases}\dot{x}=x-2y,\\ \dot{y}=x+3y.\end{cases}$

Варіант 19

1. $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$;

2. $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$;

3. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{ny}{x+1}=e^x(x+1)^n$, $y(0)=1$;

4. $yy'+\dfrac{1}{2}y^2=\sin x$;

5. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

6. $x^2y''=(y')^2$;

7. $2(y')^2=y''(y-1)$,

   $y(1)=2, y'(1)=-1$;

8. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$;

9. $y''+3y'-4y=e^{-4x}$;

10. $y''-2y'=2e^x$,

    $y(1)=-1, y'(1)=0$;

11. $\begin{cases}\dot{x}=5x+4y,\\ \dot{y}=2x+3y.\end{cases}$

Варіант 20

1. $(1+y)(e^x dx-e^{2y}dy)-$

   $-(1+y^2)dy=0$;

2. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$, $y(1)=3$;

3. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y(0)=3$;

4. $(1-x^2)y'-xy=xy^2$;

5. $y''=\dfrac{1}{x^2}+12x^2$;

6. $(1+x^2)y''=1+(y')^2$;

7. $y^2+y'^2-2yy''=0$,

   $y(0)=y'(0)=1$;

8. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$;

9. $y''-2y'-3y=e^{4x}$;

10. $y''+2y'+2y=x^2-1$,

    $y(0)=1, y'(0)=0$;

11. $\begin{cases}\dot{y}=-x,\\ \dot{x}=-4y.\end{cases}$

Варіант 21

1. $y'\operatorname{tg} x = y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

2. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$,
   $y(1) = 0$;

3. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$;

4. $ydx + (x - \dfrac{1}{2}x^3 y)dy = 0$;

5. $y'' = \dfrac{1}{x}$;

6. $y'' = -\dfrac{x}{y'}$;

7. $3y'y'' = y + (y')^3 + 1$,
   $y(0) = -2, y'(0) = 0$;

8. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{2e^x + 1}$;

9. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$;

10. $y'' + y' - 2y = 3x + 5$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = -20x - y. \end{cases}$

Варіант 22

1. $(y+1)dy + \dfrac{dy}{y-1} = xdx - dx + \dfrac{dx}{x+1}$
   ;

2. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$;

3. $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$;

4. $(1 - x^2)y' - xy = xy^2$;

5. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$;

6. $xy'' + y' = 0$;

7. $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$,
   $y(0) = y'(0) = 2$;

8. $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$;

9. $y'' + y' - 6y = e^{-2x}$;

10. $y'' - 5y' + 6y = 1 - x$,
    $y(0) = y'(0) = 0$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

Варіант 23

1. $y' = e^{x+y}$;

2. $y' = \dfrac{3y - x}{x + y}$;

3. $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$;

4. $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$;

5. $y'' = 2\sin x \cos^2 x$;

6. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$;

7. $yy'' + y'^2 = 1$, $y(0) = y'(0) = 1$;

8. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$;

9. $y'' - 8y' + 7y = 14$;

10. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$,

$y(0) = 3, y'(0) = 9$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Варіант 24

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y')$;

2. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$;

3. $y' + 2y = e^{3x}$;

4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$;

5. $y''' = \cos^2 x$;

6. $x^2 y'' + xy' = 1$;

7. $yy'' + y'^2 = y'^3$, $y(0) = y'(0) = 1$;

8. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \cdot \sqrt{x+1}$;

9. $y'' - 4y' + 4y = x^2$;

10. $y'' + y' - 2y = 5\sin 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

Варіант 25

1. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$;

2. $(x - y)dx + xdy = 0$;

3. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$;

4. $y' = y \cdot \mathrm{ctg}\,x + \dfrac{y^3}{\sin x}$;

5. $y'' = xe^{-x}$;

6. $y'' = \cos^2 x + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

7. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1, y'(0) = 8$;

8. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$;

9. $y'' - y' + y = x^3 + 6$;

10. $y'' - y' = e^{3x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

11. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$

Відповіді:

Варіант 1

1. $\ln\frac{1}{|x|}+2x+C=-5e^{-y}-ye^{-y}-e^{-y}$;
2. $\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2x}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx$;
3. $y=\sin x-1+e^{-\sin x}$;
4. $y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$;
5. $y=-2\,\mathrm{arcctg}\,x+C_1x+C_2$;
6. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}$;
7. $y=\sqrt{C_1(x+C_2)^2+\frac{1}{C_1}}$;
8. $y=e^{-x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{6x^2}\right)$;
9. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+$
   $+\frac{1}{85}\cos 3x+\frac{9}{170}\sin 3x$;
10. $y=\frac{1}{5}e^{4x}+\frac{8}{5}e^{-x}-\frac{3}{8}e^{3x}$;
11. $\begin{cases} x(t)=e^{t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t),\\ y(t)=e^{t}(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t). \end{cases}$

Варіант 2

1. $y\sin y+\cos y+C=\frac{1}{2}\sin x^2$;
2. $e^{\frac{2x}{y-x}}=\frac{y-x}{C}$;
3. $x=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$;
4. $y^2=\frac{x^3}{2}+Cx$;
5. $y=\frac{1}{9}e^{3x}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$;
6. $y=-x-2\ln|x-1|+1$;
7. $y=\frac{C_1}{4}(C_2\pm x)^2+\frac{1}{C_1}$;
8. $y=(C_1-\pi x)\cos\pi x+$
   $+(\ln|\sin\pi x|+C_2)\sin\pi x$;
9. $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}-x-1$;
10. $y=\frac{3(2+\pi)}{8}\cos x+$
    $+\frac{3(2-\pi)}{8}\sin x-\frac{3}{2}x\cos x$;
11. $\begin{cases} x(t)=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t),\\ y(t)=e^{-6t}((C_1+C_2)\cos t+\\ +(C_2-C_1)\sin t). \end{cases}$

Варіант 3

1. $1-y^2 = C(1-x^2)$;
2. $\arcsin\frac{y}{x} = \ln|Cx|$;
3. $y=\frac{x^3}{2}+Cx$;
4. $y=e^{-2x^2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)^2$;
5. $y=-\ln|x+3|+C_1x+C_2$;
6. $y=2\ln|x|-\frac{2}{x}$;
7. $y=e^{C_1x+C_2}$;
8. $y=\left(\ln|\cos\pi x|+C_1\right)\cos\pi x+$
   $+\left(\pi x+C_2\right)\sin\pi x$;
9. $y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{4}{3}e^x$;
10. $y=e^x+\sin x$;
11. $\begin{cases} x(t)=C_1e^t+C_2e^{5t}, \\ y(t)=-C_1e^t+3C_2e^{5t}. \end{cases}$

Варіант 4

1. $y=2\operatorname{arctg}(Ce^{-\cos x})$;
2. $\sin\frac{y}{x}=Cx$;
3. $y=x^2\sin x+C\sin x$;
4. $y=\frac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$;
5. $y=\frac{1}{4\ln^2 5}5^{2x}+C_1x+C_2$;
6. $y=\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{5}$;
7. $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$;
8. $y=\left(C_1-\ln|\sin x|\right)\cos 2x+$
   $+\left(C_2-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x-x\right)\sin 2x$;
9. $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+$
   $+\frac{5}{102}\sin x+\frac{7}{51}\cos x$;
10. $y=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+$
    $+x^2+2{,}2x+0{,}84$;
11. $\begin{cases} x(t)=e^{-2t}(-C_1-C_2-C_2t), \\ y(t)=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}. \end{cases}$

Варіант 5

1. $x^2+y^2=2C$;
2. $\operatorname{tg}\frac{y}{2x}=x$;
3. $y=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2$;

4. $y=\dfrac{\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|}{\sin x+C}$;

5. $y=C_1x+\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+$
$+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C_2$;

6. $y=2+\ln\dfrac{x^2}{4}$;

7. $\ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right|=\pm C_1\left(x+C_2\right)$;

8. $y=\left(C_1-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\cos x+$
$+\left(2\operatorname{tg}x+C_2\right)\sin x$;

9. $y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+$
$+\dfrac{1}{2}(x+1)^2$;

10. $y=2e^{\frac{-5}{2}x}+e^{\frac{-3}{2}x}\left(x+1\right)$;

11. $\begin{cases} x(t)=e^{-t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right), \\ y(t)=\dfrac{1}{5}e^{-t}((C_2-2C_1)\cos t+ \\ +(-C_1-2C_2)\sin t). \end{cases}$

Варіант 6

1. $1+y^2=C(1-x^2)$;

2. $C|x|=e^{\frac{x}{y}}$;

3. $y=(\operatorname{tg}x+1)\cos x$;

4. $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$;

5. $y=x(C_1+\operatorname{arctg}x)+$
$+C_2-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$;

6. $y=x^3+3x+1$;

7. $\ln\left|C_1(y+1)-1\right|=C_1(x+C_2)$;

8. $y=(C_1-4x)\cos 4x+$
$+\left(C_2+\ln\left|\sin 4x\right|\right)\sin 4x$;

9. $y=C_1+C_2e^{5x}+\dfrac{1}{50}\cos 5x-$
$-\dfrac{1}{50}\sin 5x$;

10. $y=\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})+\dfrac{x}{2}e^x$;

11. $\begin{cases} x(t)=(3C_2-C_1)\cos 3t+ \\ +(-3C_1-C_2)\sin 3t, \\ y(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t. \end{cases}$

Варіант 7

1. $1+y^2=C(1+x^2)$;

2. $xy\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)=C$;

3. $y=2x+3\sqrt{1+x^2}$;

4. $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$;

5. $y = C_1x + \frac{x}{2}\ln^2 x - x\ln x + x + C_2$;

6. $y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$;

7. $\ln\left|\frac{y}{y + C_1}\right| = (x + C_2)C_1$;

8. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x +$
$+\cos x \cdot \ln|\cos x|$;

9. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x}$;

10. $y = e^x(C_1 + C_2x) + x^2 + 5x + 5$;

11. $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}, \\ y(t) = e^{-2t}(-C_1 - C_2) - C_2te^{-2t}. \end{cases}$

Варіант 8

1. $y = Cx$;

2. $x = e^{-\frac{x+y}{y}}$;

3. $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$;

4. $y = e^{-2x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)^2$;

5. $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$;

6. $y = \frac{x^2}{2}$;

7. $y = \frac{e^{C_1(x + C_2)} + 1}{C_1}$;

8. $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x}\right)$;

9. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} -$
$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{17}{8}$;

10. $y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})$;

11. $\begin{cases} x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}, \\ y(t) = C_1e^{3t} - 4C_2e^{-2t}. \end{cases}$

Варіант 9

1. $1 + y^2 = e^{x^2 + C}$;

2. $\ln y + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$;

3. $y = (x + C)(1 + x^2)$;

4. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$;

5. $y = -5\ln|\sin x| + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$;

6. $y = \frac{x^2}{2}$;

7. $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 2x + 2$;

8. $y = e^{2x}(C_2 - \ln x + C_1x)$;

9. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x$;

10. $y = 3e^{-4x} + 4xe^{-4x} - 3\cos x -$

$-\frac{8}{5}\sin x$;

11. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}, \\ y(t) = \left(\frac{C_2}{3} - C_1\right) e^{2t} - C_2 t e^{2t}. \end{cases}$.

Варіант 10

1. $s = 8\cos t$;
2. $y^3 = 3x^3(\ln x + 9)$;
3. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$;
4. $(C\sqrt{1-x^2} - a)y = 1$;
5. $y = -e^{-x} + \frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$;
6. $y = \frac{C_1 x^2}{2} + e^x(x-1) + C_2$;
7. $y = \frac{4}{(x+4)^2}$;
8. $y = (C_1 - x)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x$;
9. $y = e^x(C_1 + C_2 x) + 6x + 12$;
10. $y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x} + e^{3x}$;
11. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}, \\ y(t) = (-2C_1 - C_2)e^{3t} - 2C_2 t e^{3t}. \end{cases}$

Варіант 11

1. $1 + y = \frac{12}{1-x}$;
2. $Cx = e^{\frac{y^2}{2x^2}}$;
3. $y = x\ln x + \frac{C}{x}$;
4. $x\left((2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}} + C\right) = e^{\frac{y^2}{2}}$;
5. $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$;
6. $y = \ln\left|x^{C_1} \cdot C_2\right|$;
7. $y - x = 2\ln y$;
8. $y = C_1\cos x + C_2\sin x -$ $-\cos x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - 2$;
9. $y = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 5e^{-3x}$;
10. $y = -2e^{-3x} - \frac{4}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}x + 1$;

11. $\begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \\ y(t) = -\dfrac{e^{-t}((C_1+C_2)\cos t)}{2} - \\ -\dfrac{e^{-t}((C_2-C_1)\sin t)}{2}. \end{cases}$

Варіант 12

1. $\dfrac{Cx}{y} = e^{\frac{x+y}{xy}}$;
2. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x} = x$;
3. $1 = y(C\sqrt{x^2-1} - a)$;
4. $y = \dfrac{1}{Cx + \ln x + 1}$;
5. $y = -\dfrac{1}{128}\sin 8x - \dfrac{1}{72}\sin 6x +$
   $+C_1x + C_2$;
6. $y = \dfrac{x}{C_1}e^{C_1x+1} - \dfrac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2$;
7. $y = \dfrac{x+1}{x}$;
8. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2 +$
   $+\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$;
9. $y = \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{2}{5}\sin x + e^x(C_1\cos x +$
   $+C_2\sin x)$;
10. $y = -3e^{-x} + 4xe^{-x} + 2e^{-3x}$;
11. $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{9t}, \\ y(t) = \dfrac{-3C_1e^{-t} + 2C_2e^{9t}}{4}. \end{cases}$

Варіант 13

1. $2\sqrt{x} - \operatorname{arctg} y = C$;
2. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \ln|y| = C$;
3. $y = \dfrac{x^3}{2} + Cx$;
4. $x\left((2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}} + C\right) = e^{\frac{y^2}{2}}$;
5. $y = -4\ln|x| + C_1x + C_2$;
6. $y = 2\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{(x+C_1)^5}}{5} -$
   $-2\sqrt{2}\,\dfrac{C_1\sqrt{(x+C_1)^3}}{3} + C_2$;
7. $y = -\ln|1-x|$;
8. $y = C_1\cos x + C_2\sin x -$
   $-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$;

9. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2 + 2x + \frac{1}{2}$;

10. $y = \frac{3}{8}\cos 2x - \frac{5}{8}\sin 2x + \frac{5}{8}e^{2x}$;

11. $\begin{cases} x(t) = C_1e^{5t} + C_2te^{5t}, \\ y(t) = \dfrac{-3C_1e^{5t} - 3C_2te^{5t} - C_2e^{5t}}{9}. \end{cases}$

Варіант 14

1. $y = e^x$;

2. $\sin\frac{y}{x} + \ln x = C$;

3. $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$;

4. $x^2 + y^2 = Cx^3$;

5. $y = e^{-x} + C_1x + C_2 +$
$+\frac{x^2}{2}\left(\ln|x| - \frac{3}{4}\right)$;

6. $y = \frac{x}{2}\sqrt{C_1 - x^2} +$
$+\frac{C_1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$;

7. $\ln\left|C_1y + \sqrt{C_1^2y^2 - 1}\right| = \pm C_1\left(x + C_2\right)$;

8. $y = C_1\cos x + C_2\sin x +$
$+\sin x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$;

9. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 2x^2 + 4x - \frac{3}{4}$;

10. $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$;

11. $\begin{cases} x(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}, \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{cases}$

Варіант 15

1. $\sin^2 y = \operatorname{tg}^2 x + 3$;

2. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$;

3. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$;

4. $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$;

5. $y = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} +$
$+C_1x + C_2$;

6. $y = x^2 + \frac{C_1x}{2}\sqrt{1 - x^2} +$
$+\frac{C_1}{2}\arcsin x + C_2$;

7. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x +$
$+2\sin 2x \cdot \ln|\operatorname{tg} x|$;

8. $y = \operatorname{arctg} 2x$;

9. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{15}e^{3x}$;

10. $y = e^{-3x}(\cos 2x + \sin 2x) + 2x - 1$;

11. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + C_2 t e^{3t}. \end{cases}$

Варіант 16

1. $y = C \sec x$;
2. $y = x e^{1+Cx}$;
3. $y = Ce^{-x^2} + (\sin x - x\cos x)e^{-x^2}$;
4. $y = \ln x + \dfrac{C}{x}$;
5. $y = -\dfrac{2}{3}\sin x + C_1 x - \dfrac{\sin^3 x}{9} + C_2$;
6. $y = \dfrac{2}{3C_1}(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$;
7. $y = \mathrm{arcctg}(3 - 3x)$;
8. $y = \left(\ln \dfrac{e^x + 1}{e^x} + C_1\right)e^x +$
$+\left(\ln \dfrac{1}{e^x(e^x+1)} - \dfrac{1}{e^x} + C_2\right)e^{2x}$;
9. $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) +$
$+\dfrac{4}{17}\cos 2x - \dfrac{1}{17}\sin 2x$;
10. $y = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{4}{5}\sin x + \dfrac{3}{5}e^{2x}$;
11. $\begin{cases} y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}, \\ x(t) = \dfrac{2C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-3t}(2t+1)}{4}. \end{cases}$

Варіант 17

1. $y^2 + y - x^2 = C$;
2. $x^3 + y^3 = Cxy$;
3. $y = \dfrac{e^x + C}{x}$;
4. $y^3 = x + Ce^{-x} - 1$;
5. $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{8}\cos 2x - \ln|\cos x| +$
$+C_1 x + C_2$;
6. $y = 4\sqrt{x+1}$;
7. $y = \left(x^2 + \dfrac{1}{C_1^2}\right)\mathrm{arctg}\, C_1 x - \dfrac{x}{C_1} + C_2$
;
8. $y = e^x(\sqrt{4 - x^2} + C_1 + C_2 x +$
$+x\arcsin\dfrac{x}{2})$;
9. $y = C_1\cos x + C_2\sin x -$
$-\dfrac{1}{24}\cos 7x + \dfrac{1}{16}\sin 7x$;
10. $y = -1 + \dfrac{2}{3}e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{3}e^{-x}$;
11. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}, \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2}e^{3t} - \dfrac{C_2}{4}e^{-3t}. \end{cases}$

Варіант 18

1. $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $x + ye^{\frac{x}{y}} = 2$;
3. $y = \operatorname{tg} x + \cos x$;
4. $y(x^2 + Cx) = 1$;
5. $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$;
6. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{8}\cos 2x - \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| +$
   $+C_1 x + C_2$;
7. $y = \dfrac{1}{1-8x}$;
8. $y = e^{-2x}\left(C_1 + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2 + C_2 x\right)$;
9. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) +$
   $+2\cos x + \sin x$;
10. $y = 2\cos x - \sin x + 2e^x$;
11. $\begin{cases} x(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = \dfrac{e^{2t}((-C_1 - C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t)}{2}. \end{cases}$

Варіант 19

1. $y = C\sqrt{1 + e^{2x}}$;
2. $y(y - 2x)^3 = C(x - y)^2$;
3. $y = e^x (x+1)^n$;
4. $y^2 = \sin x - \cos x + Ce^{-x}$;
5. $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} +$
   $+C_1 x + C_2$;
6. $y = C_1 x - C_1^2 \ln|x + C_1| + C_2$;
7. $y = \dfrac{x+1}{x}$;
8. $y = e^{-x}(C_1 - \sqrt{1+x^2} + C_2 x +$
   $+x\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|)$;
9. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \dfrac{1}{5}xe^{-4x}$;
10. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$;
11. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{7t}, \\ y(t) = -C_1 e^t + \dfrac{1}{2}C_2 e^{7t}. \end{cases}$

Варіант 20

1. $e^x - \dfrac{1}{2}e^{2y} - 2\ln(1+y) -$
   $-\dfrac{(y-1)^2}{2} = C$;
2. $y^3 = 3x^3(\ln x + 9)$;

3. $y=2x+3\sqrt{1+x^2}$;

4. $y=\dfrac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$;

5. $y=-\ln|x|+x^4+C_1x+C_2$;

6. $y=-\dfrac{x}{C_1}-\dfrac{1+C_1^2}{C_1^2}\ln|1-C_1x|+C_2$;

7. $y=e^x$;

8. $y=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)+$
$+C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$;

9. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{5}e^{4x}$;

10. $y=e^{-x}(\cos x+\sin x)+\dfrac{1}{2}x^2-x$;

11. $\begin{cases} x(t)=-2C_1e^{2t}+2C_2e^{-2t}, \\ y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}. \end{cases}$

Варіант 21

1. $y=\sin x$;

2. $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$;

3. $y=x\ln x+\dfrac{C}{x}$;

4. $x^2=\dfrac{1}{y-Cy^2}$;

5. $y=x\left(\ln|x|-1\right)+C_1x+C_2$;

6. $y=\pm\left(\dfrac{x}{C_1}\sqrt{C_1^2-x^2}+\dfrac{C_1^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{C_1}\right)+$
$+C_2$;

7. $-(y+2)^{\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{3}{2}=x$;

8. $y=\left(C_1-\dfrac{1}{2}\ln\left|2e^x+1\right|\right)e^x+$
$+\left(x-\ln\left|2e^x+1\right|+C_2\right)e^{2x}$;

9. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+\dfrac{1}{16}e^{2x}$;

10. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{13}{4}$;

11. $\begin{cases} x(t)=e^{-3t}(C_1\cos 4t+C_2\sin 4t), \\ y(t)=e^{-3t}((2C_1+4C_2)\cos 4t+ \\ +(2C_2-4C_1)\sin 4t). \end{cases}$

Варіант 22

1. $\dfrac{C(x+1)}{y-1}=e^{\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+y+x}$;

2. $y=xe^{1-x}$;

3. $y=e^{2x}-e^x+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$;

4. $y=\dfrac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$;

5. $y=\ln|\sin x|+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

6. $y=C_1\ln|x|+C_2$;

7. $y=2e^{x}$;

8. $y=\ln\left|2+e^{x}\right|+C_1+$

$+\left(C_2-e^{x}+2\ln\left|e^{x}+2\right|\right)e^{-x}$;

9. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}$;

10. $y=-\dfrac{1}{4}e^{2x}+\dfrac{2}{9}e^{3x}-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{36}$;

11. $\begin{cases} x(t)=e^{t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t), \\ y(t)=e^{t}(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t). \end{cases}$

Варіант 23

1. $y=\ln\dfrac{1}{C-e^{x}}$;

2. $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$;

3. $y=(x+1)^2(e^{x}+C)$;

4. $x^2=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$;

5. $y=-\dfrac{2}{3}\sin x+\dfrac{2}{9}\sin^3 x+C_1x+C_2$;

6. $y=-\dfrac{x}{C_1}+\dfrac{C_1^{\,2}+1}{C_1^{\,2}}\ln\left|1+C_1x\right|+C_2$;

7. $y=x+1$;

8. $y=C_1+\ln(1+e^{3x})+$

$+(C_2-e^{3x}+\ln(1+e^{3x}))e^{-3x}$;

9. $y=C_1e^{7x}+C_2e^{x}+2$;

10. $y=\dfrac{e^{x}}{8}+\dfrac{11}{4}e^{3x}+\dfrac{1}{8}e^{5x}$;

11. $\begin{cases} x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{5t}, \\ y(t)=-C_1e^{t}+3C_2e^{5t}. \end{cases}$

Варіант 24

1. $y-a=\dfrac{Cx}{ax+1}$;

2. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$;

3. $y=Ce^{-2x}+\dfrac{1}{5}e^{3x}$;

4. $y=e^{-2x^2}\left(C+\dfrac{1}{2}x^2\right)^2$;

5. $y=\dfrac{x^3}{12}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x-$

$-\dfrac{1}{16}\sin 2x+C_3$;

6. $y=\dfrac{\ln^2\left|C_1x\right|}{2}+C_2$;

7. $y=x+1$;

8. $y=(C_1-\frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}+$

$+2\sqrt{(x+1)^3})e^{-x}+$

$+(C_2+2(x+1)^{\frac{3}{2}})xe^{-x}$;

9. $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$;

10. $y=e^x-\frac{3}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}\cos 2x-$

$-\frac{3}{4}\sin 2x$;

11. $\begin{cases} x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t, \\ y(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t. \end{cases}$

Варіант 25

1. $\frac{y^2}{2}+y-\frac{x^2}{2}+x=\ln\left|\frac{C(x+1)}{y-1}\right|$;
2. $xe^{\frac{y}{x}}=C$;
3. $y=\sin x$;
4. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$;
5. $y=e^{-x}(x+2)+C_1x+C_2$;
6. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+$

   $+C_1x+C_2$;
7. $y=\frac{1}{1-8x}$;
8. $y=C_1+C_2e^x-\cos e^x$;
9. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$

   $+x^3+3x^2+6x$;
10. $y=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{6}e^{3x}$;
11. $\begin{cases} x(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-2t}, \\ y(t)=\dfrac{3C_1e^{-4t}+C_2e^{-2t}}{3}. \end{cases}$

2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ХІМІЧНИХ ЗАДАЧ

При розв'язанні завдань з фізико-хімічним змістом можна рекомендувати таку послідовність дій:

1. Встановити, яким законам підпорядковується даний процес.

2. Вирішити, що вибрати за незалежну змінну (наприклад, час t) і що за шукану функцію (наприклад, $x = x(t)$).

3. Виходячи з умов завдання визначити початкові умови (наприклад, $x_0 = x(t_0)$).

4. Відобразити всі наявні в задачі величини через t, x, x', використовуючи при цьому фізичний зміст похідної як швидкості зміни змінної x в досліджуваному процесі.

5. Виходячи з умов завдання та на підставі фізичного закону, якому підпорядковується даний процес, скласти диференціальне рівняння.

6. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

7. За початковими умовами знайти частинний розв'язок.

При розв'язанні великої кількості фізико-хімічних задач слід знати, що швидкість зміни змінної величини пропорційна значенням цієї змінної в першій степені. Такі процеси називаються процесами першого порядку і описуються рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

У разі хімічної реакції величини, що входять до неї, означають:

x – кількість речовини в одиниці об'єму,

k – постійну величину при заданій температурі (стала швидкості реакції),

t – час.

До таких процесів слід віднести радіоактивний розпад, зміна концентрації розчину, хімічну реакцію, що протікає відповідно до стехіометричного рівняння типу $A \rightarrow B$, закон охолодження тіла та ін.

Задача 1. Відомо, що кількість радіоактивної речовини, яка розпадається за одиницю часу, пропорційна до кількості цієї речовини в розглянутий момент. За 30 днів розпалося 50 % первісної кількості речовини. Через скільки часу залишиться 1 % первісної кількості речовини?

Розв'язання. Кількість речовини, що розпадається за одиницю часу є швидкість розпаду цієї речовини. За умовою задачі

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

де x – кількість радіоактивної речовини. У початковий момент було x_0 речовини. Тоді $x = Ce^{-kt}$, значення постійної інтегрування C при $t = 0$ знаходимо з умови $x = x_0$ і $x = x_0 e^{kt}$. Знайдемо коефіцієнт пропорційності. Через 30 днів залишилася половина початкової кількості, тобто:

$$x = \frac{x_0}{2}; \quad \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-30k}; \quad \frac{1}{2} = e^{-30k};$$

$$\ln\frac{1}{2} = -30k; \quad k = +\frac{\ln 2}{30}.$$

Необхідно знайти час, коли залишиться 1 % первісної кількості речовини:

$$\frac{x}{x_0} = 0,01\,(1\,\%); \quad 0,01 = e^{\frac{-\ln 2}{30}t}; \quad t = \frac{-30\ln 0,01}{\ln 2};$$

$$t \approx \frac{195}{38}\ (\text{днів}).$$

Відповідь: $t \approx \frac{195}{38}$ (днів).

Задача 2. В резервуарі є 100 л розчину, що містить 5 кг розчиненої речовини (солі). У нього надходить чиста вода зі швидкістю 30 л/хв. Одночасно з цього резервуара з тією ж швидкістю видаляється розчин. Перемішування забезпечує однакову концентрацію солі у всьому резервуарі. Скільки солі залишиться в резервуарі до моменту часу t?

Розв'язання. Виберемо в якості аргументу час *t* і позначимо через *x(t)* кількість солі в резервуарі в момент часу *t*. Розглянемо проміжок часу Δt і знайдемо зміну кількості солі в резервуарі за проміжок часу Δt.

Зміна кількості солі за час від t до $t+\Delta t$, тобто $\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t)$, дорівнює різниці кількості солі, яка надійшла (прихід) і кількості видаленої солі у розчині (витрата). В даному випадку кількість солі, яка надходить дорівнює нулю, так як в резервуар надходить чиста вода, тобто прихід дорівнює нулю.

Витрата: *x(t)*=(швидкість витікання розчину) × (концентрацію) × (час). Концентрація солі в видаленому розчині дорівнює $\frac{x}{V}$,

де V – об'єм розчину, що дорівнює 100 л,

x(t) – загальна кількість солі в момент часу *t*.

Отже, $\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) = -0{,}3x(t)\Delta t.$ Звідси випливає, що $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -0{,}3x.$

Обчислимо границю при $\Delta t \to 0$, та отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}3x.$$

Розв'яжемо це рівняння, та скористаємось початковими умовами. В результаті чого отримаємо: $x(t) = 5e^{-0{,}3t}$.

Відповідь: $x(t) = 5e^{-0{,}3t}$.

Задача 3. За який час тіло, нагріте до 100 °С, охолоне до 25 °С в кімнаті з температурою 20 °С, якщо до 60 °С воно охолоджується за 10 хв?

Розв'язання. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою середовища:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{cp}), \quad \frac{dT}{dt} = k(T-20), \quad \frac{dT}{T-20} = kdT,$$

$$\ln|T-20| = kt + \ln C, \quad T - 20 = e^{kt} + \ln C, \quad T = 20 + Ce^{kt}.$$

$$100-20=Ce^{\circ},\quad C=80^{\circ},\quad T=20+80e^{kt},$$

$$60-20=80e^{10k},\quad e^{10k}=\frac{1}{2},\quad 10k=\ln\frac{1}{2},$$

$$10k=-\ln 2,\quad k=-\frac{\ln 2}{10}.$$

$$T=20+80e^{\frac{-t\ln 2}{10}},\ 25^{\circ}=20^{\circ}+80e^{\frac{-t\ln 2}{10}}.$$

$$e^{\frac{-t\ln 2}{10}}=\frac{1}{16};\ -\frac{t\ln 2}{10}=\ln 16;\ t=\frac{10}{\ln 2}\ln 16;$$

$$t=10\cdot 4=40.$$

Відповідь: $t=40$.

Задача 4. Отримати рівняння хімічної реакції першого порядку і визначити час, необхідний для того, щоб концентрація $x_{A_0}=0,98\ \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$ знизилася до $x=0,14\ \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$, якщо стала швидкості цієї реакції дорівнює $k=0,42$.

Розв'язання. При хімічній реакції першого порядку, тобто реакції, що протікає відповідно до рівняння *A*→*R*, його швидкість пропорційна кількості речовини, що ще не прореагувала. Нехай x_{A_0} – початкова кількість речовини *A*, x_A – кількість речовини, що ще не прореагувала на момент часу *t*. Оскільки об'єм постійний, x_A є концентрацією речовини, що реагує в момент часу *t*. Очевидно, швидкість реакції є $\frac{dx}{dt}$ і диференціальне рівняння реакції має вигляд $\frac{dx_A}{dt}=-kx_A$.

Знак « – » вказує на те, що x_A зі зростанням *t* зменшується. У рівнянні реакції розділяємо змінні та інтегруємо:

$$\int \frac{dx_A}{x_A} = -k\int dt, \quad \ln x_A = -kt + C.$$

Сталу C в рівнянні визначаємо, використовуючи умову: в початковий момент часу $t = 0$ кількість речовини дорівнює x_{A_0}.

$$C = kt_0 + \ln x_{A_0}, \quad t = 0, C = \ln x_{A_0},$$

з урахуванням чого рівняння реакції прийме вигляд:

$$\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = -kt \Rightarrow -\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = kt$$

$$\text{або} \int\limits_{x_{A_0}}^{x_A} \frac{dx_A}{x_A} = -k\int\limits_0^t dt \Rightarrow -\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = kt,$$

$$t = -\frac{1}{k}\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = -\frac{1}{0,42}\ln \frac{0,14}{0,98},$$

$$t = -\frac{1}{0,42}\ln \frac{0,14}{0,98} \approx 5 \text{ с}.$$

Відповідь: $t \approx 5$ с.

При розв’язанні завдань зустрічаються хімічні реакції типу $aA + bB \to rR + dD$, де *A, B* – реагенти, *R, D* – продукти, *a, b, r, d*– стехіометричні коефіцієнти. Такі процеси називаються процесами другого порядку. Слід знати, що швидкість хімічної реакції такого типу пропорційна добутку концентрацій реагентів у степенях, що дорівнюють стехіометричним коефіцієнтам, $V = k \cdot C_A^a \cdot C_B^b$, де k – стала швидкості.

В окремому випадку, коли концентрації вихідних речовин однакові, швидкість пропорційна квадрату концентрації однієї з реагуючих речовин:

$$V = k \cdot C_A^2.$$

Задача 5. Реакція між речовинами *A* і *B* протікає за бімолекулярним законом $A + B \to R$. Стала швидкості дорівнює $0,025$ м^3/кмоль×с. Концентрація вихідних реагентів $C_{B_0} = 1,8$ кмоль/м, $C_{A_0} = 1,5$ кмоль/м.

Визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація реагентів знизилася до $C_{B_{кон}} = 0,675$ кмоль/м, $C_{A_{кон}} = 0,375$ кмоль/м.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння реакції другого порядку. Швидкість хімічної реакції прямо пропорційна концентрації вихідних речовин. Тоді для реакції $A + B \to R$ в будь-який момент часу концентрації вихідних речовин відповідно рівні C_A, C_B, а диференціальне рівняння швидкості прийме вигляд:

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A C_B.$$

Рівняння містить дві невідомі C_A і C_B, а так як загальне число еквівалентів обох речовин не зміниться в реакції, тобто зберігається матеріальний баланс, то:

$$C_{A_0} = C_A + C_R \Rightarrow C_R = C_{A_0} - C_A;$$

$$C_{B_0} = C_B + C_R \Rightarrow C_B = C_{B_0} - C_R.$$

При цьому права частина отриманого диференціального рівняння прийме вигляд:

$$-kC_A C_B = -kC_A\left(C_{B_0} - C_R\right) = -kC_A\left[C_{B_0} - (C_{A_0} - C_A)\right] =$$

$$= -kC_A\left[C_{B_0} - C_{A_0} + C_A\right] = -kC_A(M + C_A), \text{ де } M = C_{B_0} - C_{A_0}.$$

Отже, $\dfrac{dC_A}{dt} = -kC_A\left(M + C_A\right)$. Розділимо змінні:

$$-\frac{dC_A}{C_A\left(M + C_A\right)} = -kdt,$$

і проінтегруємо обидві частини: $-\int\limits_{C_{A0}}^{C_A} \dfrac{dC_A}{C_A\left(M + C_A\right)} = k\int\limits_0^t dt,$ отримаємо:

$$\frac{1}{M}\ln\frac{M + C_A}{C_A}\Bigg|_{C_{A_0}}^{C_A} = k\,t\Big|_0^t, \;\; \frac{1}{M}\ln\frac{M + C_A}{C_A} = kt + \ln C$$

або $\dfrac{1}{M}\ln\dfrac{C_{A_0}\left(M+C_A\right)}{C_A\left(M+C_{A_0}\right)}=kt,\ t=0,\ C=\dfrac{1}{M}\ln\dfrac{M+C_{A_0}}{C_{A_0}};$

$$\frac{1}{C_{B_0}-C_{A_0}}\ln\frac{C_{A_0}\left(C_{B_0}-C_{A_0}+C_A\right)}{C_A\left(C_{B_0}-C_{A_0}+C_{A_0}\right)}=kt;\ \ln\frac{C_{A_0}C_B}{C_A\,C_{B_0}}=\left(C_{B_0}-C_{A_0}\right)kt.$$

Скористаємось початковими умовами:

$$\ln\frac{1,5\cdot 0,675}{0,375\cdot 1,8}=\left(1,8-1,5\right)\cdot 0,025\,t,$$

$$t\approx 54,06\ \text{с}.$$

Відповідь: $t\approx 54,06$ с.

Задача 6. Отримати рівняння хімічної реакції, що складається з двох реакцій першого порядку $A\xrightarrow{k_1}B\xrightarrow{k_2}C$ (послідовна реакція), за умови, що відомі стали швидкості реакцій $x_{A_0}, x_{B_0}, x_{C_0}$, а також визначити концентрацію x_B в момент часу 120 с, якщо $x_{A_0}=0,28\,\dfrac{\text{кмоль}}{\text{м}^3},\ k_1=2,5\cdot 10^{-3}\,\dfrac{1}{\text{с}},\ k_2=5,5\cdot 10^{-3}\,\dfrac{1}{\text{с}},\ x_{B_0}=0,\ x_{C_0}=0.$

Розв'язання. Нехай x_A, x_B, x_C – відповідно концентрації речовин *A, B, C*.

Рівняння швидкості реакцій для речовини *A*:

$$\frac{dx_A}{dt}=-k_1x_A.$$

(1)

Речовина *B* утворюється з речовини *A*, тому швидкість утворення речовини *B* пропорційна концентрації речовини *A* у відповідний момент часу *t*. Сама речовина *B* є джерелом речовини *C* і швидкість розпаду (зворотного процесу утворення) речовини *B* пропорційна його концентрації у відповідний момент часу. Ці два процеси протікають одночасно; швидкість зміни кількості *B* визначається рівнянням:

$$\frac{dx_B}{dt} = k_1 x_A - k_2 x_B.$$

(2)

Швидкість реакції утворення речовини C визначається концентрацією x_B, відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{dx_C}{dt} = k_2 x_B.$$

(3)

Для рівняння (1) маємо:

$$x_A = x_{A_0} e^{-k_1 t}.$$

(4)

Якщо формулу (4) використаємо у рівняння (1) і (2), то отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dx_B}{dt} + k_2 x_B = k_1 x A_0 e^{-k_1 t}.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$\frac{dx_B}{dt} + k_2 x_B = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$x_B = U(t)V(t),$$

$$x'_B = U'(t)V(t) + U(t)V'(t),$$

$$U'V + UV' + k_2 UV = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$V' + k_2 V = 0,$$

$$\int \frac{dV}{V} = -k_2 \int dt, \ln V = -k_2 t, V = e^{-k_2 t},$$

$$U' e^{-k_2 t} = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$dU = k_1 x_{A_0} e^{-(k_1 - k_2)t}, U = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-(k_1 - k_2)t} + C,$$

$$x_B = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-(k_1 - k_2)t} e^{-k_2 t} + C e^{-k_2 t},$$

при $t = 0,\ x_B = x_{B_0}$:

$$x_{B_0} = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} + C;\ \ C = x_{B_0} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}$$

$$x_B = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + x_{B_0} e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t} =$$

(5)

$$= x_{B_0} e^{-k_2 t} + \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Зауважимо, що x_C легше визначити не з рівняння (3), а з рівнянь матеріального балансу (4) і (5).

Рівняння матеріального балансу має вигляд:

$$x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} = x_A + x_B + x_C;\ \text{звідси}$$

$$x_C = x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} - x_A - x_B = x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} - x_{A_0} e^{-k_1 t} -$$

$$- x_{B_0} e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Отримавши рівняння послідовної хімічної реакції, визначимо з рівняння (5) концентрацію x_B в заданий момент часу при заданих початкових умовах:

$$x = 0 \cdot e^{-5,5\cdot 10^{-3}\cdot 120} + \frac{2,5\cdot 10^{-3}\cdot 0,28\,\frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}}{5,5\cdot 10^{-3} - 2,5\cdot 10^{-3}}(e^{-2,5\cdot 10^{-3}\cdot 120} - e^{-5,5\cdot 10^{-3}\cdot 120}) \approx$$

$$\approx 0,11\,\frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь: $x \approx 0,11\,\frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$.

Задача 7. Посудина, стінки якої утворюють деяку поверхню обертання з вертикальною віссю, наповнена рідиною до висоти h. Нехай у дні посудини зроблено отвір з площею f, через який рідина витікає з посудини. Потрібно визначити час, необхідний для того, щоб рідина опустилася до заданого рівня або витекла повністю. За умови, що протягом всього процесу не відбувається припливу рідини в посудину і що різницею тиску повітря в поверхні і у вихідного отвору можна знехтувати, визначити час, який знадобиться для того, щоб рівень рідини в циліндричній посудині знизився внаслідок витікання рідини на 0,6 м, якщо діаметр циліндричної посудини 3 м, отвір у дні посудини має діаметр 57 мм, посудина, наповнена рідиною до 1,8 м. Визначити, через скільки часу витече вся вода з посудини.

Розв'язання. Кількість рідини dQ, що випливає за час $d\tau$ зі швидкістю ω_1 через отвір, очевидно, дорівнює $f\omega_1 d\tau$. Рівень рідини, поверхня F якої протягом часу $d\tau$ буде вважатися незмінною, знизиться за цей час з деякою швидкістю ω на висоту $\omega d\tau$, а отже, обсяг рідини в посудині зменшиться на величину $F\omega d\tau$. Ця величина повинна дорівнювати величині dQ . Звідси отримуємо:

$$dQ = f\omega_1 d\tau = F\omega d\tau$$

(6)

або $f\omega_1 = F\omega.$

(7)

Згідно із законом, швидкість ω_1 витікання рідини з отвору з площею поперечного перерізу f дорівнює швидкості, яку набуває вільно падаюче тіло, пройшовши відстань, рівну висоті стовпа рідини над отвором.

Введемо тепер прямокутну систему координат, взявши за вісь *Ox* вісь посудини, а за вісь *Oy* будь-яку перпендикулярну до неї пряму, що лежить в площині, з якою співпадала поверхня рідини на початку процесу (в момент $\tau = 0$). Вісь *Ox* направимо вертикально вниз. Тоді, згідно з вищевказаним законом ми отримаємо для швидкості витікання ω_1 з отвору в момент τ наступний вираз $\omega_1 = \sqrt{2g(h-x)},$

де g – прискорення сили тяжіння;

h – початкова висота стовпа рідини (при $\tau = 0$);

x – рівень в момент τ .

Підставляючи значення ω_1 у формулу (7), отримаємо вираз для швидкості ω падіння рівня в момент τ:

$$\omega = \frac{f}{F}\sqrt{2g(h-x)}$$

(8)

Якщо посудина має форму вертикального циліндра або призми, то F постійна: якщо ж посудина являє собою тіло обертання, твірна якого має рівняння $y = f(x)$ (Рисунок 2.1), то $F = \pi y^2$.

Підставляючи $\frac{dx}{d\tau}$ в рівняння (8) замість ω_1, отримаємо:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{f}{F}\sqrt{2g(h-x)} \text{ або } d\tau = \frac{1}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{Fdx}{\sqrt{h-x}}.$$

Розв’язуючи рівняння, маємо:

$$\tau = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{h-x}}; \quad \tau = -\frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h-x} + C.$$

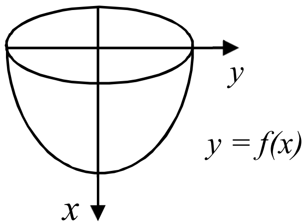

Рисунок 2.1

Скористаємось початковими умовами: в початковий момент закінчення зниження рівня рідини дорівнює нулю. Значить, якщо $\tau = 0$, то $x = 0$.

Отже:

$$C = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h},$$

звідки $\tau = \dfrac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h-x})$.

Отримавши формулу, що дозволяє визначити час, необхідний для опускання рідини до заданого рівня, підставимо в неї дані задачі і визначимо час, необхідний для того, щоб рівень рідини знизився на 0,6 м:

$$F_{пос} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 9^2}{4} = 53,6 \text{ м}^3;$$

$$f_{отв} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,057^2}{4} = 0,003;$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2; \; h = 1,8 \text{ м}; \; x = 0,6 \text{ м};$$

$$\tau = \frac{53,6 \cdot 1,4}{0,003 \cdot \sqrt{9,8}}(\sqrt{1,8} - \sqrt{1,2}) \approx 26 \text{ хв}.$$

Для визначення часу, необхідного для того, щоб вся рідина витекла з посудини $x = h$, отримуємо формулу:

$$\tau = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h},$$

$$\tau = \frac{53,6 \cdot 1,4}{0,003 \cdot \sqrt{9,8}}\sqrt{1,8} = 169 \text{ хв}.$$

Відповідь: $\tau = 169$ хв.

Задача 8. Два пункти розташовані вертикально один над іншим на висотах h_1 і h_2, $h_2 > h_1$ над рівнем моря. Нехай барометричні тиски в цих пунктах дорівнюють відповідно b_1 і b_2 мм рт. ст. Знайти залежність між різницею висот $h_2 - h_1$, і барометричними тисками на цих висотах, якщо стовп повітря між обома точками має всюди однакову температуру $0°$ і позбавлений водяних парів (зміною прискорення сили ваги з висотою нехтуємо).

Розв'язання. Тиск, вироблений газом, пропорційний щільність газу. Позначимо через p тиск (кг) повітря на горизонтальну площину в 1 м^2 розташовану на висоті h над рівнем моря, а через $p+dp$ – тиск на таку ж площину на висоті $h+dh$. Різниця цих тисків dp дорівнює вазі стовпа повітря з висотою dh який знаходиться між площинами. Тому, якщо γ є маса повітря на висоті h, то ми будемо мати:

$$dp = -\gamma dh.$$

(9)

Якщо γ_0 позначає масу повітря при тиску p_0, то $p : p_0 = \gamma : \gamma_0$; $\gamma = \dfrac{p\gamma_0}{p_0}$. Підставляючи значення γ в рівняння (9), отримаємо:

$$dh = -\frac{p_0}{\gamma_0} \cdot \frac{dp}{p}.$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\int dh = -\frac{p_0}{\gamma_0} \int \frac{dp}{p},$$

$$h = -\frac{p_0}{\gamma_0} \ln|p| + \ln C.$$

Нехай p_1 і p_2 – тиск на висотах h_1 і h_2:

$$\int_{h_1}^{h_2} dh = -\frac{p_0}{\gamma_0} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}.$$

Одержимо:

$$h_2 - h_1 = -\frac{p_0}{\gamma_0}(\ln p_2 - \ln p_1) = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так як показання барометра пропорційні тиску повітря, то замість $\dfrac{p_1}{p_2}$ можна підставити $\dfrac{b_1}{b_2}$.

Таким чином:

$$h_2 - h_1 = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{b_1}{b_2},$$

або $h_2 - h_1 = \dfrac{p_0}{\gamma_0} 2{,}303 \ln \dfrac{b_1}{b_2}.$

Отримана залежність дозволяє наближено обчислити висоту, на яку треба піднятися, щоб показання барометра змінилося на 1 мм, якщо $b_1 = 760$ мм:

$$h_2 - h_1 = \frac{1033}{1,293} \ln \frac{760}{759} \approx 10,5 \text{ м}.$$

Відповідь: $h_2 - h_1 \approx 10,5$ м.

Задача 9. Лівий кінець стержня, довжина якого дорівнює L підтримується при постійній температурі T_1, а правий – при постійній температурі $T_2 < T_1$.

Стрижень зроблений з металу з теплопровідністю λ у вигляді бруска малої товщини з периметром поперечного перерізу P м і площею перерізу A м^2. Коефіцієнт тепловіддачі від поверхні стрижня до навколишнього середовища α може бути прийнятий постійним.

Температура навколишнього середовища дорівнює T_s. Потрібно встановити зв'язок між температурою стержня в будь-якій точці і відстанню цієї точки від гарячого кінця, за умови, що стержень досить тонкий; якщо теплопровідність його велика, то ми можемо без суттєвої помилки знехтувати температурними градієнтами в напрямках, перпендикулярних до осі стержня, і прийняти постійну температуру в кожній точці поперечного перерізу, перпендикулярного осі Ox.

Розв'язання. Дослідимо процес розповсюдження тепла в елементарному відрізку довжиною dx на відстані x від того кінця стержня, температура якого t_1 (Рисунок 2.2).

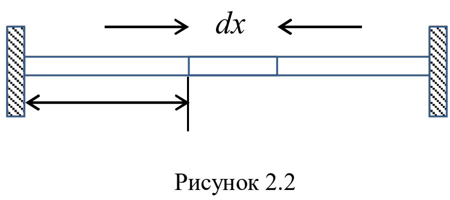

Рисунок 2.2

Кількість тепла, що проходить за час $d\tau$ через перетин стержня, що знаходиться на відстані x від початку стержня, згідно теорії теплопередачі, буде дорівнювати:

$$-\lambda A \frac{dT}{dx} d\tau.$$

Кількість тепла, що пройшло за час $d\tau$ через поперечний переріз, що знаходиться на відстані $x + dx$ від початку, буде:

$$-\lambda A \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) d\tau.$$

Ділянка стержня, розташована між перерізами, віддаленими від початку на відстанях x і $x + dx$, внаслідок теплопровідності набуває за час $d\tau$ кількість тепла, що дорівнює різниці вказаних кількостей, тобто:

$$\lambda A \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau.$$

За той же час втрата тепла від цієї ділянки в навколишнє середовище буде становити:

$$\alpha P dx (T - T_s) d\tau.$$

Але так як досліджуваний нами процес є стаціонарним, то

$$\lambda A \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau = \alpha P dx (T - T_s) d\tau.$$

Остаточно приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\lambda A} (T - T_s). \tag{10}$$

Нехай $\dfrac{\alpha P}{\lambda A} = a^2$. Зауважимо, що при $T_s = const$:

$$\frac{d(T - T_s)}{dx} = \frac{dT}{dx};$$

$$\frac{d^2(T - T_s)}{dx^2} = \frac{d^2T}{dx^2}.$$

Тому рівняння може бути переписано у наступному вигляді:

$$\frac{d^2(T-T_s)}{dx^2}-a^2(T-T_s)=0.$$

Це рівняння має постійні коефіцієнти. Його загальний розв'язок буде:

$$T-T_s=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}. \qquad (11)$$

При розв'язанні прикладних задач для знаходження довільних сталих можуть бути використані граничні умови: в початковій точці стержня, тобто при $x=0,\ T=T_1$ та у кінцевій, тобто при $x=\alpha,\ T=T_2$. Тоді з рівняння (11) знаходимо:

$$T_1-T_s=C_1+C_2;\ T_2-T_s=C_1e^{aL}+C_2e^{-aL_1}. \qquad (12)$$

З цих рівнянь можна виразити C_1 і C_2 через відомі величини. Розв'язуючи рівняння (12) щодо C_1 і C_2 отримаємо:

$$C_1=\frac{(T_2-T_s)-(T_1-T_s)e^{-aL_1}}{2\operatorname{sh}aL},$$

$$C_2=\frac{(T_1-T_s)e^{aL_1}-(T_2-T_s)}{2\operatorname{sh}aL}.$$

Підстановка значень C_1 і C_2 в рівняння (12) дає:

$$T-T_s=\frac{(T_2-T_s)\operatorname{sh}ax+(T_1-T_s)\operatorname{sh}a(L-x)}{\operatorname{sh}aL}.$$

Отримавши рівняння, що встановлює залежність між температурою T і координатою x точки нагрітого стержня, визначимо, зокрема, температуру стержня завдовжки 1 м в точці, віддаленій від лівого кінця на відстань 0,4 м, за умови:

$$T_1=0,\ \alpha=10\ \text{ккал/м}^2\cdot\text{год}\cdot\text{град},\ \frac{A}{P}=72,5,\ \lambda=330\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{год}\cdot\text{град}}.$$

$$a=\sqrt{\frac{\alpha P}{xA}=1,48.}$$

$$T=47,9\cdot\operatorname{sh}1,48\cdot0,4+95,8\cdot\operatorname{sh}1,48(1-0,4),$$

$$T=126,7°.$$

Відповідь: $T=126,7°$.

У пропонованих методичних вказівках наведені деякі задачі хімічної технології, загальний розв’язок яких призводить нас до рівнянь з відокремлюваними змінними, до лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, до лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Слід зазначити, що при розв’язанні задач хімічної технології ми зустрічаємося з усіма типами диференціальних рівнянь, розглянутими нами вище.

Так, з однорідним диференціальним рівнянням першого порядку ми зустрічаємося при розв’язанні задач: процес хлорування органічних сполук, витрата реагенту при максимальному виході цільового продукту в складних реакціях; з неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами – при розв’язанні задач: система оборотних реакцій, що протікають при постійному об'ємі, безперервний процес гідролізу твердого жиру в розпилювальній колонці; з диференціальними рівняннями другого порядку, що допускають зниження порядку – рух рідини в капілярах; з лінійним неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами – при розв’язанні багатьох задач, зокрема, наприклад, при знаходженні закону руху частинки, що випадає в осад в рідині без початкової швидкості.

Розрахункове завдання 2

1. Відомо, що кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна до кількості цієї речовини в розглянутий момент. Визначити час напіврозпаду радону, якщо його стала радіоактивності $K = 2,084 \cdot 10^{-6}$ (час вимірюється в секундах).

2. У баку знаходиться 100 л розчину, що містить 10 кг солі. У бак вливається вода зі швидкістю 5 л/хв і суміш витікає з неї з тією ж швидкістю. Концентрація приймається рівномірною. Скільки солі залишиться в баку через 1 годину?

3. Повітря, що наповнює посудину місткістю 3 л, містить 20 % кисню. Посудина має дві трубки. Через одну з них у посудину починають впускати чистий кисень, через інший витікає назовні стільки повітря, скільки притікає в посудину кисню. Яка кількість буде міститися в посудині після того, як через неї протече 10 л кисню?

4. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості. Протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 г. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

5. У резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, кожну хвилину надходить 30 л води і випливає 20 л суміші. Визначити, яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хв, припускаючи, що суміш миттєво перемішується.

6. Закон розпаду радію полягає в тому, що швидкість розпаду пропорційна кількості радію. Відомо, що половина його первісного запасу розпадається після закінчення 1600 років. Визначити кількість радію, що не розпався, після закінчення 100 років, якщо початкова його кількість дорівнює 1 кг.

7. Посудина об’ємом 40 л містить повітря (80 % азоту і 20 % кисню). В посудину втікає кожну секунду 0,2 л азоту, який безперервно розмішують, і випливає така ж кількість суміші. Через який час в посудині буде 99 % азоту?

8. За який час тіло, нагріте до 100°, охолоне до 25° в кімнаті з $t = 20°$, якщо до 60° воно охолоджується за 10 хв?

9. Для реакції першого порядку $A \to R$, стала швидкості якої $K = 0,38$ хв$^{-1}$, визначити час, необхідний для того, щоб концентрація $C_{A_0} = 1,2$ кмоль/м^3 знизилася до $C_A = 0,224$ кмоль/м^3.

10. Якщо початкова кількість ферменту 1 г через годину стає рівною 1, 2 м, то чому вона буде дорівнювати через 5 годин після початку бродіння, якщо вважати, що швидкість приросту ферменту пропорційна його наявній кількості?

11. Бімолекулярна реакція $A + R \to R$ протікає з сталою швидкості, що дорівнює $K = 1,85$ л/моль$\cdot$с. Початкова концентрація $C_{A_o} + C_{B_o} = 0,075$ моль/л. Визначити концентрації вихідних речовин через 45 хв.

12. Речовина A перетворюється за реакцією другого порядку. Стала швидкості дорівнює $0,12$ м^3/кмоль$\cdot$с. Визначити концентрацію речовини A до моменту часу 40 с, якщо в початковий момент вона становила $0,8$ кмоль/м^3.

13. Стала швидкості реакції другого порядку $2A \to R$ дорівнює $0,18$ л/моль$\cdot$с. Визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація речовини A, рівна $0,075$ моль/л, знизилася до значення $0,0075$ моль/л.

14. Рідкофазна реакція $A + R \to R + S$ протікає в ізотермічному режимі. Стала швидкості реакції дорівнює $11,42 \cdot 10^{-2}$ м^3/кмоль$\cdot$с. Концентрація вихідних речовин $C_{A_o} = 1,4$ кмоль/м^3, $C_{A_o} = C_B$. Визначити значення концентрації вихідних реагентів до моменту часу 4 хв.

15. Реакція між речовинами A і B протікає за бімолекулярним законом. Стала швидкості дорівнює $0,045$ м^3/кмоль$\cdot$с. Визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація речовини A, рівна $1,25$ кмоль/м^3, знизилася до $0,19$ кмоль/м^3. Прийняти при цьому, що реагенти взяті в еквімолярних співвідношеннях.

16. Циліндрична посудина діаметром 1,8 м, що має в дні отвір 38 мм, наповнена водою до висоти 2,5 м. Скільки часу потрібно, щоб рівень води знизився на 0,9 м?

17. Циліндрична посудина діаметром 1,5 м, що має отвір у дні 29 мм, наповнена рідиною до висоти 1 м. Скільки часу потрібно, щоб рівень рідини знизився до 0,37 м?

18. Циліндрична посудина діаметром 2,5 м, що має в дні отвір 36 мм, наповнена водою до висоти 1,9 м. Скільки часу знадобиться для того, щоб рівень води знизився на 0,7 м?

19. Стали швидкості послідовної хімічної реакції першого порядку $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ рівні $K_1 = 2 \cdot 10^{-2} \dfrac{1}{\text{с}}$; $K_2 = 1,8 \cdot 10^{-2} \dfrac{1}{\text{с}}$. Визначити концентрацію X_B в момент часу $t = 90$ с, якщо $X_{A_o} = 1,2$ кмоль/м^3, $X_{B_o} = 0, X_{C_o} = 0$.

20. Обчислити висоту, на яку треба піднятися, щоб показання барометра змінилися на 2 мм. Початковий барометричний тиск $B_1 = 760$ мм. Біля поверхні землі при температурі $0°$ числові значення $p_0 = 10333$ кг/м^2, $\gamma_0 = 1,293$ кг/м^3.

21. Обчислити висоту, на яку треба піднятися, щоб показання барометра змінилися на 10 мм. Початковий барометричний тиск $B_1 = 756$ мм. Біля поверхні землі при температурі $0°$ числові значення $p_0 = 1033$ кг/м^2, $\gamma_0 = 1,293$ кг/м^3.

22. За який час тіло, нагріте до $140\ °C$, охолоне до $35°$ в кімнаті з $T = 18°$, якщо до $70°$ воно охолоджується за 15 хв?

23. Визначити температуру алюмінієвого стержня прямокутного перерізу $a \times в = 15 \times 25$ мм в точці, віддаленій від лівого кінця на відстань 0,8 м, якщо температура лівого кінця $T_1 = 140\ °C$, правого $T_2 = 70\ °C$, $T_{повітря} = 20\ °C$ коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 16$ Вт/м$^2 \cdot$К, теплопровідність стержня $\lambda = 203,5$ Вт/м$\cdot$К.

24. Визначити температуру мідного стержня квадратного перерізу $a \times a = 20 \times 20$ мм, довжиною 1,2 м на відстані 0,4 м, якщо температура лівого кінця $T_1 = 220\ °C$, правого кінця $T_2 = 95\ °C$, $T_{повітря} = 16\ °C$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 18,5$ Вт/м$^2 \cdot$K, теплопровідність стержня $\lambda = 203,5$ Вт/м$\cdot$K.

25. Для реакції другого порядку $A + B \rightarrow R$ визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація $C_{A_0} = 1,35$ моль/л знизилася до $C_A = 0,2$ моль/л, якщо стала швидкості $K = 0,3$ л/моль$\cdot$с, початкова концентрація речовини $C_{B_o} = 1,8$ моль/л.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Таблиця похідних

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in R, x > 0$;

$(a^x)' = a^x \ln a$, $0 < a \neq 1, x \in R$;

$(e^x)' = e^x$, $x \in R$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $0 < a \neq 1, x > 0$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

$(\sin x)' = \cos x$, $x \in R$;

$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in R$;

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n, n \in Z$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in R$;

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in R$;

$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$, $x \in R$;

$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$, $x \in R$;

$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $x \in R$;

$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $x \neq 0$.

2. Основні правила диференціювання

Якщо $U = U(x)$ та $V = V(x)$ – функції , що мають похідні, а C – стала, то:

$$(C)' = 0;$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U';$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{V}\right)' = \frac{-C \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\left(f(U(x))\right)'_x = f'_U \cdot U'_x.$$

3. Таблиця інтегралів

$$\int dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \ \ x > 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

4. Основні властивості невизначеного інтегралу

$\int f(x)dx = F(x) + C,$ за умови $F'(x) = f(x)$;

$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; $\qquad \int dF(x) = F(x) + \mathrm{C}$;

$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx$;

$\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx$;

$\int f(u)du = F(u) + C,$ C – стала, $u = u(x)$ – будь-яка функція, що має похідну за змінної x;

$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$; $\qquad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

5. Деякі тригонометричні формули

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$;

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$;

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$;

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$;

$\sin\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$;

$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha$;

$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$;

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$;

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha \; ; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg}\alpha \; .$$

6. Квадратні рівняння

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходять за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \; D = b^2 - 4ac \ge 0.$$

Теорема Вієта: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \end{cases}$ де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена.

7. Формули скороченого множення

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $\qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; $\qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. : в 2 т. Т. 2 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 376 с.

2. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Кириллова Н.О., Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 432 с.

3. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 2 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 476 с.

4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н.О. Чікіна, А.М. Гайдаш, В.Д. Крупка та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2013. – 216 с.

5. Методические указания к решению расчетных заданий по теме «Дифференциальные уравнения и их приложения» по курсу высшей математики для студентов химических специальностей / сост. А.М. Мануйлова, Е.И. Орлова, Т.Т. Черногор и др. – Харьков : ХПИ, 1989. – 76 с.

6. Скатецкий В.Г. Математические методы в химии : учеб. пособ. для студентов вузов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.

7. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 3 : Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ПРІЩЕНКО Ольга Петрівна
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник
з курсу вищої математики

для студентів хімічних спеціальностей

Відповідальний за випуск Ю. Л. Геворкян

Роботу до видання рекомендувала проф. Л. В. Курпа

В авторській редакції

План 2017 р., поз. 98

Підп. до друку 14.07.2017 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso – друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 5,1. Наклад 50 прим.
Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.