Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Кафедра вищої математики

Тестові завдання

з курсу вищої математики

Потаніна Т.В.

Тести з курсу вищої математики розроблено для їх застосування при проведенні оперативного контролю поточної і проміжної атестації студентів з метою оцінки рівня їх приготування за даною дисципліною.

Розділи:

1. Лінійна алгебра.
2. Векторна алгебра та елементи аналітичної геометрії.
3. Границі та неперервність функції однієї змінної.
4. Диференціальне числення функції однієї змінної.
5. Невизначений, визначений та невласний інтеграли функції однієї змінної.
6. Функції декількох змінних.
7. Диференціальні рівняння.
8. Ряди.
9. Комплексні числа та функції комплексного змінного.
10. Операційне числення.
11. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля.

РОЗДІЛ 1

«Лінійна алгебра»

Питання для самоперевірки:

1. Матриці. Лінійні дії над матрицями. Добуток матриць.
2. Визначники другого, третього та вищих порядків. Їх властивості та методи обчислення.
3. Обернена матриця.
4. Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Сумісні, несумісні та невизначені системи.
5. Формули Крамера, умови застосування.
6. Метод Гауса розв'язання та дослідження систем.

Тест з теорії:

1. Матриця – це:

А) множина чисел, яка після певних обчислень дорівнює одному числу;
Б) прямокутний масив чисел, який завжди містить n рядків та n стовпців;
В) прямокутний масив чисел, який містить n рядків та m стовпців.

2. Визначник – це:

А) прямокутний масив чисел, який містить n рядків та n стовпців;
Б) число, що ставиться у відповідність масиву чисел, який містить n рядків та n стовпців;
В) число, що ставиться у відповідність масиву чисел, який містить n рядків та m стовпців.

3. Визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ обчислюється за формулою:

А) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$
Б) $a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$
В) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
Г) $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$

4. Мінором M_{ij} визначника матриці $(a_{kl})_{k,l=\overline{1,n}}$ називається:

А) матриця $(n-1)$- го порядку, що утворюється з початкової матриці викреслюванням рядка i і стовпця j;
Б) визначник $(n-1)$- го порядку, що утворюється з початкової матриці викреслюванням рядка i і стовпця j;
В) визначник початкової матриці, помножений на елемент a_{ij}.

5. При заміні усіх рядків матриці стовпцями з відповідними номерами визначник матриці:

А) змінює знак;
Б) не змінює свого числового значення;

В) подвоюється.

6. Одинична матриця – це матриця:
А) довільного розміру з елементами, що дорівнюють одиниці;
Б) квадратна з елементами, що дорівнюють одиниці;
В) квадратна з одиницями на головній діагоналі та нульовими усіма позосталими елементами.

7. При множенні матриці на число:
А) усі елементи множаться на це число;
Б) усі елементи першого рядка матриці множаться на це число;
В) визначник цієї матриці множиться на дане число.

8. При множенні двох матриць дотримуємося умови:
А) кількість рядків першого множника дорівнює кількості стовпців другого множника;
Б) кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці;
В) кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості стовпців другої матриці.

9. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо виконується умова:
А) $A^{-1} \cdot A = A$
Б) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$
В) $A^{-1} \cdot A = 1$

10. Розв'язок матричного рівняння $X \cdot A = B$ має вигляд:
А) $X = A^{-1} \cdot B$
Б) $X = B \cdot A^{-1}$
В) $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$

11. Рангом матриці називається:
А) сума кількості рядків та стовпців;
Б) число, що дорівнює найбільшому порядку мінору;
В) число, що дорівнює найбільшому порядку ненульового мінору.

12. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) є сумісною, якщо вона:
А) має лише єдиний розв'язок;
Б) має більше одного розв'язка;
В) має розв'язок.

13. Однорідна СЛАР має більше одного розв'язка, якщо:
А) визначник матриці системи дорівнює нулю;
Б) визначник матриці системи відмінний від нуля.

14. Загальний розв'язок однорідної СЛАР $A \cdot X = 0$ є:
А) лінійною комбінацією r розв'язків системи, де $r = \mathrm{rangA}$;
Б) лінійною комбінацією розв'язків з ФСР.

РОЗДІЛ 2

«Векторна алгебра та елементи аналітичної геометрії»

Питання для самоперевірки:

1. Вектор. Поняття нульового й одиничного векторів. Колінеарні, компланарні, рівні вектори.
2. Лінійні операції над векторами.
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори. Основні теореми.
4. Лінійні комбінації двох і трьох векторів. Лінійна залежність чотирьох векторів.
5. Базис. Координати вектора. Базис на площині і в просторі.
6. Проекція вектора на вісь.
7. Декартова прямокутна система координат.
8. Скалярний добуток векторів, його властивості.
9. Відстань між двома точками.
10. Ділення відрізка в заданому відношенні.
11. Векторний добуток векторів, його властивості.
12. Мішаний добуток векторів, його властивості.
13. Рівняння лінії на площині. Рівняння поверхні та лінії у просторі.
14. Рівняння прямої на площині. Загальне рівняння. Канонічне рівняння. Рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку. Кут між прямими. Умови паралельності й перпендикулярності прямих.
15. Рівняння площини. Нормальне рівняння. Загальне рівняння. Рівняння площини в відрізках. Кут між площинами. Умови паралельності й перпендикулярності площин.
16. Відстань від точки до площини.
17. Канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.
18. Эліпс.
19. Гіпербола.
20. Парабола.

Тест з теорії:

1. Вектори називаються колінеарними, якщо вони знаходяться
А) на одній і лише на одній прямій;
Б) лише на паралельних прямих;
В) або на одній прямій, або на паралельних.

2. Вектори називаються компланарними, якщо вони знаходяться
А) в одній і лише в одній площині;
Б) лише в паралельних площинах;
В) або в одній площині, або в паралельних площинах.

3. Сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (початок вектора $\vec{b}$ і кінець вектора $\vec{a}$ співпадають) – це вектор,

А) що з'єднує кінець вектора $\vec{b}$ і початок вектора $\vec{a}$;

Б) що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ і кінець вектора $\vec{b}$.

4. Орто-нормованим базисом називається

А) сукупність трьох перпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

Б) сукупність трьох перпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ з довільною довжиною;

В) сукупність трьох перпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ з одиничними довжинами.

5. Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB}$ має координати:

А) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

Б) $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$;

В) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

6. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається ($\vec{a}\vec{b}$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$)

А) число, яке позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ та дорівнює $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\vec{a}\vec{b}$;

Б) вектор, ортогональний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з довжиною $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vec{a}\vec{b}$;

В) число $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vec{a}\vec{b}$, що позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

7. Якщо $\vec{a}$ ортогональний $\vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$ дорівнює

А) нулю;

Б) $|\vec{a}||\vec{b}|$.

8. Якщо $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ і $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$ дорівнює

А) $a_1b_1\vec{i} + a_2b_2\vec{j} + a_3b_3\vec{k}$;

Б) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

9. Відстань між точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

А) $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|$;

Б) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$;

В) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

10. Кут між векторами $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ і $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ визначається за формулою

А) $\cos\varphi = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

Б) $\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

В) $\sin\varphi = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

11. Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ –

А) вектор, що позначається $\vec{a}\times\vec{b}$, компланарний з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а довжина цього вектора дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\vec{a}\vec{b}$;

Б) вектор, що позначається $\vec{a}\times\vec{b}$, ортогональний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а довжина цього вектора дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\vec{a}\vec{b}$;

В) що позначається $\vec{a}\times\vec{b}$, ортогональний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а довжина цього вектора дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\vec{a}\vec{b}$;

Г) скаляр, який дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\vec{a}\vec{b}$.

12. Векторний добуток має властивості:

А) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}, \vec{a}\times\vec{a} = 0$;

Б) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}, \vec{a}\times\vec{a} = 0$;

В) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}, \vec{a}\times\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

13. Якщо $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ та $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, то векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює

А) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

Б) $a_1b_1\vec{i} + a_2b_2\vec{j} + a_3b_3\vec{k}$;

В) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

14. Мішаний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ є

А) вектор, що отриманий при множенні $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а отриманий результат помножений скалярно на $\vec{c}$;

Б) скаляр, що отриманий при множенні $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а отриманий вектор помножений векторно на $\vec{c}$;

В) скаляр, що отриманий при множенні $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а отриманий вектор помножений скалярно на $\vec{c}$.

15. Загальне рівняння прямої L на площині має вигляд

А) $Ax+By+C=0$, де $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ – вектор ортогональний прямій L;

Б) $Ax+By+C=0$, де $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ – напрямний вектор прямої L;

В) $y=Ax+B$, де $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ – напрямний вектор прямої L.

16. Рівняння $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ (1) , $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ (2) і

вектор $\vec{s}=\{l;m;n\}$ (3)

називаються відповідно:

А) (1) – параметричні рівняння прямої у просторі, (2) – канонічні рівняння прямої у просторі, (3) – напрямний вектор прямої;

Б) (1) – канонічні рівняння прямої у просторі, (2) – параметричні рівняння прямої у просторі, (3) – нормальний вектор прямої;

В) (1) – канонічні рівняння прямої у просторі, (2) – параметричні рівняння прямої у просторі, (3) – напрямний вектор прямої.

17. Кут між прямими $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$

визначається з виразу:

А) $\cos\alpha=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$;

Б) $\cos\alpha=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$;

В) $\sin\alpha=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

18. Рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ (1) і вектор $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ (2) називаються:

А) (1) – рівняння прямої у просторі, (2) – напрямний вектор прямої;

Б) (1) – рівняння площини у просторі, (2) – напрямний вектор площини;

В) (1) – рівняння площини у просторі, (2) – нормальний вектор площини.

19. Кут між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ визначається з виразу:

А) $\sin\alpha = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

Б) $\cos\alpha = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$;

В) $\cos\alpha = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

20. Яка з кривих другого порядку має ексцентриситет $\varepsilon > 1$:

А) парабола;
Б) гіпербола;
В) еліпс.

21. Для спряженої гіперболи $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ дійсною є вісь:

А) OX; Б) OY.

22. На якій координатній осі містяться фокуси еліпса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$?

А) на OX; Б) на OY.

РОЗДІЛ 3

«Границі та неперервність функції однієї змінної»

Питання для самоперевірки:

1. Поняття множини, підмножини. Види множин. Операції над множинами.
2. Поняття функції. Область визначення та множина значень функції. Обернена функція. Складена функція. Обмежена функція. Монотонна функція. Парна та непарна функції. Періодична функція.
3. Числова послідовність. Границя числової послідовності.
4. Границя функції в точці. Однобічні границі.
5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.
6. Границя функції на нескінченності.
7. Перша важлива границя.
8. Друга важлива границя.
9. Еквівалентні нескінченно малі функції.
10. Неперервність функції в точці, на множині.
11. Точки розриву функції.

Тест з теорії:

1. Множини A та B називаються рівними, якщо:

А) $(A \subset B) \vee (B \subset A)$;

Б) $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

2. m – інфімум множини A:

А) верхня грань;

Б) нижня грань;

В) найменша з усіх нижніх граней;

Г) найбільша з усіх нижніх граней.

3. Функція $f(x)$ – обмежена, якщо:

А) її область визначення обмежена множина;

Б) множина її значень обмежена множина;

В) область визначення та множина значень функції – обмежені множини.

4. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (обрати відповідне означення та дати геометричний зміст):

А) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N \ \left(|a_n - a| < \varepsilon\right)$;

Б) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \left(|a_n - a| < \varepsilon\right)$;

В) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \left(|a_n - a| > \varepsilon\right)$.

5. Монотонно зростаюча числова послідовність,

А) що обмежена зверху, має границю;

Б) що має границю, є обмеженою.

6. Висловлення
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : \left[\left(0 < x - a < \delta \right) \to \left(\left| f(x) - A \right| < \varepsilon \right) \right]$ означає:
А) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$;
Б) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$;
В) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

7. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означає:
А) $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x : \left[\left(|x| > M \right) \to \left(\left| f(x) - A \right| < \varepsilon \right) \right]$;
Б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x : \left[\left(|x| > M \right) \to \left(\left| f(x) \right| < A \right) \right]$;
В) $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x : \left[\left(x > M \right) \to \left(\left| f(x) - A \right| < \varepsilon \right) \right]$.

8. З того, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ випливає:
А) $f(x) - A$ є нескінченно малою;
Б) $f(x) - A$ є оберненою до нескінченно малої;
В) $f(x) - A$ є такою, що спадає.

9. Добуток нескінченно малої функції на обмежену є
А) нескінченно малою;
Б) обмеженою;
В) спадаючою.

10. $\exists \lim\limits_{x \to a} u(x) = A, \exists \lim\limits_{x \to a} v(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, якщо:
А) $f(x) \le u(x) \le v(x)$ на усій області визначення $f(x)$;
Б) $u(x) \le f(x) \le v(x)$ в околі точки a ;
В) $u(x) \le f(x) \le v(x)$ в $0 < x - a < 1$.

11. Еквівалентними нескінченно малими функціями серед наведених є:
А) $1 - \cos x$ та x при $x \to 0$;
Б) $\sin x$ та x при $x \to 0$;
В) $1 - e^x$ та x при $x \to 0$.

12. Приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 при прирості аргументу Δx це:
А) $\Delta y = f(\Delta x) - f(x_0)$;
Б) $\Delta y = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$;
В) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

13. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо приріст функції при $\Delta x \to 0$:
А) прямує до деякої сталої;
Б) прямує до нуля.

14. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то ця функція на $[a,b]$:

А) обмежена і приймає свої найменше та найбільше значення;

Б) має точку розриву першого роду та приймає свої найменше та найбільше значення;

В) не є обмеженою на $[a,b]$.

15. Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, то точка a є:

А) точкою усувного розриву;

Б) точкою розриву першого роду;

В) точкою розриву другого роду.

РОЗДІЛ 4

«Диференціальне числення функції однієї змінної»

Питання для самоперевірки:

1. Похідна функції. Її фізичний та геометричний зміст. Основні правила диференціювання.
2. Похідна складеної функції. Похідна оберненої функції.
3. Таблиця похідних.
4. Диференціювання функції, що задана параметрично.
5. Диференціювання функції, що задана неявно.
6. Диференціал функції.
7. Основні теореми диференційного числення: Теореми Ферма, Роля, Лагранжа, Коші.
8. Правило Лопіталя.
9. Монотонність функції.
10. Екстремум функції. Дослідження функції на екстремум.
11. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
12. Увігнутість та опуклість графіка функції.
13. Точки перегину графіка функції.
14. Асимптоти графіка функції.

Тест з теорії:

1. Приріст функції $f(x)$ в точці x_0 при прирості аргументу Δx це:

А) $\Delta y = f(\Delta x) - f(x_0)$;

Б) $\Delta y = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$;

В) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

1. Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0:

А) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$; Б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; В) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Функція $y = f(x)$, яка визначена в точці x_0 та її околі, називається диференційовною при $x = x_0$, якщо:

А) $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, де – $\alpha(\Delta x)$ нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$;

Б) $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta y$;

В) $\Delta y = A\cdot f(x_0) + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

4. Якщо приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то диференціалом функції називається:

А) $A\cdot\Delta x$ і позначається $y'(x_0)$;

Б) $\alpha\left(\Delta x\right)\cdot\Delta x$ і позначається $df(x_0,\Delta x)$;

В) $A\cdot\Delta x$ і позначається $df(x_0,\Delta x)$.

5. Якщо приріст функції $y=f(x)$ в точці x_0 має вигляд $\Delta y=A(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\left(\Delta x\right)\cdot\Delta x$, то:

А) $A(x_0)=dy$;

Б) $A(x_0)=y'(x_0)$;

В) $A(x_0)\Delta x=y'(x)$.

6. Якщо в точці x_0 до графіка функції $y=f(x)$ проведено дотичну, то похідна і диференціал мають наступний геометричний зміст:

А) приріст ординати дотичної на проміжку $\left[x_0;x_0+\Delta x\right]$ і тангенс кута нахилу дотичної до осі OX в точці x_0;

Б) тангенс кута нахилу дотичної до осі OX і приріст функції на $\left[x_0;x_0+\Delta x\right]$;

В) тангенс кута нахилу дотичної до осі OX в точці x_0 і приріст ординати дотичної на проміжку $\left[x_0;x_0+\Delta x\right]$.

7. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні, то $(uv)'$ і $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$ обчислюються за формулами:

А) $u'v-v'u$ і $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$;

Б) $u'v+v'u$ і $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$;

В) $u'v+v'u$ і $\dfrac{v'u-u'v}{v^2}$.

8. Якщо функцію задано параметричними рівняннями $y=y(t), x=x(t)$, то похідна $\dfrac{dy}{dx}$ обчислюється за формулою:

А) $\dfrac{dy}{dt}$; Б) $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$; В) $\dfrac{x'(t)}{y'(t)}$.

9. Правило Лопіталя: Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні та диференційовні в деякому околі точки $x=x_0$ та $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, то

А) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$;

Б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

В) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{g^2(x)}$.

10. Достатньою умовою спадання функції на (a,b) є

А) $f'(x)<0\ \ \forall x\in(a,b)$;

Б) $f''(x)<0\ \ \forall x\in(a,b)$;

В) $f'(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)$;

Г) $f''(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)$.

11. Пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо існують

А) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$;

Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=b$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-bx\right)=k$;

В) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}=k$ і $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-kx\right)=b$, де $x=a$ – точка розриву другого роду.

12. Достатньою умовою точки перегину $x=a$ є:

А) $f''(a)=0$ та ліворуч і праворуч точки $f''(x)$ має різні знаки;

Б) $f''(a)\neq 0$ та ліворуч і праворуч точки $f''(x)$ має різні знаки;

В) $f''(a)=0$ та ліворуч і праворуч точки $f''(x)$ має однакові знаки.

13. Якщо функція $y=f(x)$ визначена на (a,b) і в усіх точках (a,b) $f''(x)\geq 0$, то функція $f(x)$ на цьому інтервалі:

А) спадає;

Б) зростає;

В) опукла (опукла вверх);

Г) ввігнута (опукла вниз).

14. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в околі точки a і $f'(a)=0$, тоді точка a є точкою максимуму, якщо:

А) $f'(x)<0$ при $x<a$ і $f'(x)>0$ при $x>a$;

Б) $f'(x)>0$ при $x<a$ і $f'(x)<0$ при $x>a$;

В) $f'(x)>0$ при $x<a$ і $f'(x)>0$ при $x>a$;

Г) $f'(x)<0$ при $x<a$ і $f'(x)<0$ при $x>a$.

15. Якщо точка $x=a$ така, що $f'(a)=0$, тоді ця точка буде точкою мінімуму, якщо:

А) $f''(a) < 0$;
Б) $f''(a) > 0$;
В) $f''(a) = 0$.

16. Геометричний зміст формули Лагранжа: для неперервно-диференційовної на $[a,b]$ функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) існує точка, в якій

А) дотична перпендикулярна січній, яка сполучає точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$;

Б) дотична паралельна січній, яка сполучає точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$.

17. Достатня умова зростання функції $f(x)$ на (a,b):

А) $f'(x) < 0$ в усіх точках (a,b);

Б) $f''(x) < 0$ в усіх точках (a,b);

В) $f'(x) > 0$ в усіх точках (a,b);

Г) $f''(x) > 0$ в усіх точках (a,b).

18. Пряма $x = a$ – вертикальна асимптота графіка функції $f(x)$, якщо точка $x = a$ є:
А) точкою усувного розриву ;
Б) точкою розриву першого роду;
В) точкою розриву другого роду, причому одна (або обидві) з однобічних границь дорівнює нескінченності.

19. Необхідна умова екстремуму диференційованої функції $f(x)$ в точці $x = a$:
А) $f''(a) = 0$;
Б) $f'(a) = 0$;
В) $f'(a) > 0$;
Г) $f'(a) < 0$.

20. Число m є точною нижньою межею (інфімумом) функції $f(x)$ на множині E, якщо:
А) для будь-якого $x \in E$: $f(x) \le m$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне значення $x \in E$: $f(x) > m - \varepsilon$;
Б) для будь-якого $x \in E$: $f(x) \ge m$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне значення $x \in E$: $f(x) < m + \varepsilon$;
В) для будь-якого $x \in E$: $f(x) \le m$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне значення $x \in E$: $f(x) > m + \varepsilon$;
Г) для будь-якого $x \in E$: $f(x) \ge m$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне значення $x \in E$: $f(x) > m - \varepsilon$.

РОЗДІЛ 5

«Невизначений, визначений та невласний інтеграли функції однієї змінної»

Питання для самоперевірки:

1. Невизначений інтеграл. Властивості.
2. Заміна змінної в невизначеному інтегралі.
3. Інтегрування частинами. Невизначений інтеграл від комплексно-значної функції дійсного аргументу.
4. Інтегрування раціональних дробів. Прості дроби 1-го і 2-го роду.
5. Інтегрування функцій, що раціонально залежать від тригонометричних.
6. Інтегрування лінійних та квадратичних ірраціональних виразів.
7. Конструкція визначеного інтеграла.
8. Властивості визначеного інтеграла.
9. Визначений інтеграл, як функція верхньої змінної межі інтегрування. Основна теорема інтегрального та диференціального числення.
10. Формула Ньютона-Лейбніца.
11. Інтегрування частинами в визначеному інтегралі. Заміна змінної в визначеному інтегралі.
12. Інтеграл від парної та непарної функції на симетричному відносно нуля відрізку.
13. Площа плоскої фігури
14. Довжина дуги кривої
15. Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів. Об'єм тіла обертання.
16. Невласні інтеграли. Ознаки збіжності. Абсолютна збіжність.

Тест з теорії:

1. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ у проміжку (a,b), якщо

А) $f'(x)=F(x)\,(a<x<b)$;

Б) $F'(x)=f(x)+C\,(a<x<b)$;

В) $f(x)=F'(x)+C\,(a<x<b)$;

Г) $F'(x)=f(x)\,(a<x<b)$.

2. Укажіть вірну відповідь:

А) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)+C$, $\int df(x)=f(x)dx$;

Б) $\left(\int f(x)dx\right)'=f'(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right)=df(x)$, $\int df(x)=F(x)+C$;

В) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right)=df(x)$, $\int df(x)=f(x)+C$.

3. Укажіть вірну відповідь:

А) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a+b} F(ax+b) + C$;

Б) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$;

В) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{b} F(ax+b) + C$.

4. Первісними функцій $\frac{1}{\cos^2 x}, \frac{1}{x^2+a^2}, \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \frac{1}{x}$ є функції

1. $a^x + C$; 2. $\arcsin\frac{x}{a} + C$; 3. $\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C$; 4. $\operatorname{ctg} x + C$; 5. $\operatorname{tg} x + C$; 6. $\ln|x| + C$;

7. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$:

А) 1; 3; 2; 6

Б) 5; 3; 2; 6

В) 5; 2; 3; 6

Г) 5; 7; 2; 6

Д) 5; 2; 7; 6

5. Заміна змінної в невизначеному інтегралі $\int f(x)dx$ $(a<x<b)$ при $x=\varphi(t)$ $(\alpha<t<\beta, \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b)$ здійснюється за формулою

А) $\int f(\varphi(t))dt$;

Б) $\int f(\varphi(t))t'dt$;

В) $\int f(\varphi(t)) f'(t)dt$;

Г) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

6. Метод інтегрування частинами

А) $\int udv = uv + \int vdu$;

Б) $\int udv = u'v + v'u$;

В) $\int udv = uv - \int vdu$;

Г) $\int udv = uv \cdot \int vdu$.

7. Записати первісні функцій $\frac{A}{x-b}, \frac{A}{(x-b)^n}$, де – A, b, n відомі сталі.

8. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в випадку $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ обчислюється за допомогою підстановки:

А) $t = \sin x$;
Б) $t = \cos x$;
В) $t = \operatorname{tg} x$.

9. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в випадку $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ обчислюється за допомогою підстановки:

А) $t = \sin x$;
Б) $t = \cos x$;
В) $t = \operatorname{tg} x$.

10. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в випадку $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ обчислюється за допомогою підстановки:

А) $t = \sin x$;
Б) $t = \cos x$;
В) $t = \operatorname{tg} x$.

11. Інтегральною сумою функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ з введеним розбиттям та з набором зазначених точок $\xi_i, i = \overline{1,n}$ називається:

А) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$; Б) $\sum_{i=1}^{n} \Delta f(\xi_i)$; В) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta y_i$; Г) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

12. Якщо проміжок $[a,b]$ розбитий точкою $x = c$ на $[a,c]$ і $[c,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює:

А) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$;
Б) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$;
В) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

13. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює:

А) $\int\limits_b^a f(x)dx$; Б) $-\int\limits_b^a f(x)dx$; В) $-\int\limits_{-a}^{-b} f(x)dx$.

14. Інтегралом зі змінною верхньою межею називається

А) $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$;

Б) $\Phi(x)=\int\limits_a^t f(x)dx$;

В) $\Phi(x)=\int\limits_a^x \Phi(t)dt$.

15. Формула Ньютона-Лейбніца для функції $f(x)$ з первісною $F(x)$:

А) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$;

Б) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$;

В) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(a)\cdot F(b)$.

16. Об'єм тіла обертання навколо осі OX області, утвореної лініями $x=a, x=b, y=y_1(x), y=y_2(x)$, причому $y_1(x)\le y_2(x)$ для усіх $x\in[a,b]$, дорівнює:

А) $\pi\int\limits_a^b \left(y_2(x)-y_1(x)\right)^2 dx$;

Б) $\pi\int\limits_a^b \left[y_2{}^2(x)-y_1{}^2(x)\right]dx$;

В) $2\pi\int\limits_a^b \left(y_2(x)-y_1(x)\right)xdx$.

17. Якщо лінія на площині задана рівнянням у полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$, то довжина дуги цієї кривої $\varphi\in[\alpha,\beta]$ дорівнює:

А) $\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi)+\rho'(\varphi)}d\varphi$;

Б) $\int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cdot\rho'(\varphi)d\varphi$;

В) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2 + \left[\rho'(\varphi)\right]^2}\, d\varphi$.

18. Якщо функція $f(x)$ на $\left[a,b\right]$ приймає від'ємні значення, то площа криволінійної трапеції, обмеженої $x = a, x = b, y = f(x), y = 0$, дорівнює:

А) $-\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$; Б) $-\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$.

19. Серед поданих інтегралів який є невласним першого роду (функція $f(x)$ – неперервна на інтервалі інтегрування):

А) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$; Б) $\int\limits_{a}^{o} f(x)dx$; В) $\int\limits_{0}^{b} f(x)dx$.

20. Невласний інтеграл другого роду $\int\limits_{a}^{b} \frac{1}{\left(x-a\right)^p} dx$ є збіжним, якщо:

А) $p < 1$; Б) $p \geq 1$; В) $p \leq 1$.

РОЗДІЛ 6
«Функції декількох змінних»

Питання для самоперевірки:

1. Функції декількох змінних. Границя. Частинні похідні.
2. Диференціювання складеної функції декількох змінних.
3. Диференціал. Формула для наближених обчислень.
4. Дотична площина та нормаль.
5. Екстремум функції декількох змінних. Необхідна та достатня умови існування екстремуму.
6. Поняття про умовний екстремум. Множники Лагранжа.

Тест з теорії:

1. Якщо кожній точці M певної області D у площині (просторі) ставиться у відповідність за відомим законом деяке число U, то область D є:

А) областю визначення функції $U = f(M)$;

Б) множиною значень функції $U = f(M)$.

2. Повний приріст Δz і частинний приріст $\Delta_x z$ функції двох змінних $z = z(x, y)$ в точці $M(x, y)$ дорівнюють:

А) $\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y), \Delta_x z = z(x+\Delta x, y) - z(x, y)$;

Б) $\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y), \Delta_x z = z(x, y+\Delta y) - z(x, y)$;

В) $\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y), \Delta_x z = z(x+\Delta x, y) - z(x, y)$.

3. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ функції двох змінних $z = z(x, y)$ за означенням:

А) $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y)}{\Delta x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$;

Б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{z(x+\Delta x, y) - z(x, y)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{z(x, y+\Delta y) - z(x, y)}$;

В) $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}$.

4. Функція $z = z(x, y)$ називається диференційовною в точці $M(x, y)$, якщо повний приріст функції у цій точці дорівнює:

А) $\Delta z = A(x, y) \cdot \Delta x + B(x, y) \cdot \Delta y + o(\rho), \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$;

Б) $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + o(\rho), \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$;

В) $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+o(\rho),\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

5. Якщо функція $z=z(x,y)$ має неперервні частинні похідні в околі точки $M(x,y)$, то повний диференціал:

А) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$;

Б) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y$;

В) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$.

6. Якщо функція $z=z(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0)$, а функції $x=x(t)$ і $y=y(t)$ диференційовні у точці t_0 ($y_0=y(t_0), x_0=x(t_0)$), тоді складна функція $z=z(x,y)$ диференційовна у точці t_0 і:

А) $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$;

Б) $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$;

В) $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

7. Рівняння дотичної площини до поверхні $(S): F(x,y,z)=0$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

А) $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot(z-z_0)=0$;

Б) $\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{(z-z_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}$;

В) $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot(y-y_0)=z-z_0$.

8. Функція $z=z(x,y)$ задана неявно рівнянням $F(x,y,z)=0$, частинні похідні цієї функції:

А) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$;

Б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$;

В) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial y}$.

9. Якщо функція $z = z(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, а функції $x = x(u,v)$ і $y = y(u,v)$ диференційовні у точці (u_0, v_0) ($y_0 = y(u_0,v_0), x_0 = x(u_0,v_0)$), тоді складна функція $z = z(x,y)$ диференційовна у точці (u_0, v_0) і:

А) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

Б) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$;

В) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{du} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{du}, \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dv} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dv}$.

10. Оберіть справедливі твердження:

А) існування частинних похідних є достатньою умовою диференційовності функції;

Б) існування частинних похідних є необхідною умовою диференційовності функції;

В) неперервність частинних похідних є достатньою умовою диференційовності функції;

Г) існування частинних похідних є необхідною і достатньою умовою диференційовності функції.

11. Оберіть справедливі твердження:

А) якщо $f'_x(x_0, y_0) = 0$ та $f'_y(x_0, y_0) = 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка екстремуму функції $z = f(x,y)$;

Б) якщо $\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка екстремуму функції $z = f(x,y)$;

В) якщо для координат точки $M_0(x_0, y_0)$ виконуються умови $f'_x(x_0, y_0) = 0$ і $f'_y(x_0, y_0) = 0$, а $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимуму;

Г) якщо для координат точки $M_0(x_0, y_0)$ виконуються умови $f'_x(x_0, y_0) = 0$ і $f'_y(x_0, y_0) = 0$, $\Delta > 0$ та $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка мінімуму.

РОЗДІЛ 7

«Диференціальні рівняння»

Питання для самоперевірки:

1. Поняття звичайного і канонічного диференціальних рівнянь n-го порядку, розв’язок, загальний і окремий розв’язок диференціального рівняння.
2. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння.
3. Рівняння з відокремлюваними змінними.
4. Однорідна функція. Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.
5. Лінійні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі.
6. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку: однорідні (ЛОДР) і неоднорідні (ЛНДР). Основні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
7. Лінійно незалежні і лінійно залежні на інтервалі функції. Визначник Вронського. Теорема про визначник Вронського для лінійно залежних функцій.
8. Поняття фундаментальної системи розв’язків (ФСР) лінійного однорідного диференціального рівняння. Теорема про визначник Вронського ФСР.
9. Теорема про структуру загального розв’язку однорідного лінійного диференціального рівняння.
10. ЛОДР зі сталими коефіцієнтами. Поняття характеристичного рівняння ЛОДР. Вигляд окремих розв’язків з ФСР в залежності від коренів характеристичного рівняння.
11. ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Теорема про структуру загального розв’язку ЛНДР.
12. Метод варіації довільних сталих розв’язання ЛНДР.
13. Розв’язання ЛНДР зі спеціальною правою частиною. Принцип суперпозиції.
14. Нормальна система лінійних диференціальних рівнянь: однорідна і неоднорідна. Розв’язання нормальної системи. Теорема існування та єдиності розв’язку нормальної системи. Розв’язання системи шляхом зведення її до диференціальних рівнянь n-го порядку.

Тест з теорії:

1. Диференціальне рівняння $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ називається:
А) рівнянням в частинних похідних;
Б) звичайним диференціальним рівнянням 1-го порядку;
В) звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку;
Г) рівнянням в частинних похідних n-го порядку.

2. Порядком диференціального рівняння називається:
А) найбільший степінь однієї з похідних рівняння;
Б) найбільший порядок похідних рівняння;
В) сума усіх порядків похідних, що містяться у рівнянні.

3. Загальний розв’язок диференціального рівняння $F(x, y, y') = 0$ має вигляд:

А) $y=\varphi(x)$;

Б) $y=\varphi(x,C)$;

В) $\Phi(x,y,C)=0$;

Г) $y'=f(x,y)$.

4. Загальний інтеграл диференціального рівняння $F(x,y,y')=0$ має вигляд:

А) $y=\varphi(x)$; В) $\Phi(x,y,C)=0$;

Б) $y=\varphi(x,C)$; Г) $y'=f(x,y)$.

5. Яке з диференціальних рівнянь

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{1}$$

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+\left(f_3(x)+f_4(y)\right)dy=0 \tag{2}$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними:

А) (1) з відокремлюваними змінними, (2) не є з відокремлюваними змінними;

Б) (2) з відокремлюваними змінними, (1) не є з відокремлюваними змінними;

В) (1) з відокремлюваними змінними, (2) з відокремлюваними змінними.

6. Однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ розв'язується методом підстановки:

А) $y=u(x)\cdot v(x)$; В) $y=\frac{u(x)}{v(x)}$;

Б) $y=t(x)\cdot x$; Г) $y=\frac{x}{t(x)}$.

7. Диференціальне рівняння 1-го порядку називається лінійним, якщо воно має вигляд:

А) $y'=f(x,y)$, причому функція $f(x,y)$: $f(kx,ky)=f(x,y)$;

Б) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, де функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ одного порядку;

В) $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$.

8. Рівняння Бернуллі має вигляд:

А) $y'+P(y)\cdot x=Q(x)$;

Б) $y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n, n\neq 0,1$;

В) $y'+P(x)=Q(x)\cdot y^n, n\neq 0,1$.

9. Лінійне рівняння 1-го порядку розв'язується методом підстановки:

А) $y=t\cdot x$; В) $y=\frac{x}{t}$;

Б) $y=\dfrac{u}{v}$; Г) $y=u\cdot v$.

10. Диференціальне рівняння 2-го порядку $F(y,y',y'')=0$ допускає зниження порядку через підстановку:

А) $y'=p(y), y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$;

Б) $y'=p(x), y''=p\cdot\dfrac{dp}{dx}$;

В) $y'=p, y''=p'$.

11. Диференціальне рівняння $y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+...+a_n\cdot y=f(x)$ називається:

А) лінійним неоднорідним n-го порядку;
Б) нелінійним неоднорідним n-го порядку;
В) лінійним однорідним n-го порядку.

12. Якщо диференціальне рівняння $y''+a_1\cdot y'+a_2\cdot y=0$ має два розв'язки y_1 і y_2, то

А) y_1+y_2 буде розв'язком, а $C_1y_1+C_2y_2$ не буде розв'язком;
Б) y_1+y_2 і $C_1y_1+C_2y_2$ – розв'язки;
В) $C_1y_1+C_2y_2$ буде розв'язком, а y_1+y_2 не буде розв'язком;
Г) y_1+y_2 і $C_1y_1+C_2y_2$ можуть бути, а можуть і не бути розв'язками.

13. Якщо y_1 і y_2 – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння $y''+a_1\cdot y'+a_2\cdot y=0$, то загальний розв'язок має вигляд:

А) $C_1y_1+C_2y_2$; В) C_1y_1/C_2y_2;

Б) y_1+y_2; Г) $C_1e^{y_1x}+C_2e^{y_2x}$.

14. Якщо визначник Вронського системи функцій $y_1,y_2,...,y_n$ дорівнює нулю, то функції:

А) лінійно незалежні;
Б) лінійно залежні;
В) можуть бути як лінійно залежними, так і лінійно незалежними.

15. Якщо диференціальне рівняння $y''+a_1\cdot y'+a_2\cdot y=f(x)$ має частинний розв'язок $\tilde{y}$, а загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_{з.о.}$, загальний розв'язок даного рівняння:

А) $C_1\tilde{y}+C_2y_{з.о.}$; В) $\tilde{y}+C_2y_{з.о.}$;

Б) $y_{з.о.}+\tilde{y}$; Г) $\tilde{y}\cdot y_{з.о.}$.

16. Однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ має характеристичне рівняння:

А) $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot y = 0$; В) $\lambda'' + a_1 \cdot \lambda' + a_2 \cdot \lambda = 0$;

Б) $y^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 = 0$; Г) $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 = 0$.

17. Розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n \cdot y = 0$ шукаємо у вигляді:

А) $y = e^x$; В) $y = \lambda e^x$;

Б) $y = e^{\lambda x}$; Г) $y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$.

18. Характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ має два різних дійсних кореня λ_1 і λ_2. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

А) $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$; В) $C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_2 x$;

Б) $e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}$; Г) $C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot C_2 e^{\lambda_2 x}$.

19. Характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ має комплексно-спряжені корені $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

А) $e^{\beta x}(C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x)$; В) $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \alpha x$;

Б) $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$; Г) $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$.

20. Характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ має однакові корені $\lambda_1 = \lambda_2$. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

А) $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$; В) $C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x$;

Б) $e^{\lambda_1 x}(C_1 \cos \lambda_2 x + C_2 \sin \lambda_2 x)$; Г) $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$.

21. Характеристичне рівняння диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = P_n(x) e^{ax}$ має два різних дійсних кореня λ_1 і λ_2. Число a дорівнює хоча б одному з коренів характеристичного рівняння. Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

А) $Q_n(x) e^{ax}$; В) $Q_n(x) x^r e^{ax}$;

Б) $Q_n(x)(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x})$; Г) $Q_n(x) x^r (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x})$.

22. Нормальну систему з n рівнянь можна привести до:

А) диференціального рівняння довільного порядку;

Б) диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами;

В) диференціального рівняння n порядку.

РОЗДІЛ 8
«Ряди»

Питання для самоперевірки:

1. Числовий ряд: означення, збіжність, сума. Геометричний ряд. Арифметичні операції над числовими рядами, що збігаються.
2. Залишок числового ряду. Теорема про однакову поведінку числового ряду і будь-якого його залишку.
3. Необхідна ознака збіжності числового ряду. Дослідження збіжності числового ряду.
4. Достатні ознаки збіжності знакосталого числового ряду
5. Знакозмінні числові ряди. Теорема (ознака) Лейбніца.
6. Знакопочережні числові ряди. Абсолютна і умовна збіжність знакозміного числового ряду. Дії над абсолютно сходяться числовими рядами (формулювання).
7. Числовий ряд з комплексними членами: означення, збіжність, сума. Достатня ознака збіжності числового ряду з комплексними членами.
8. Функціональний ряд: означення, точка збіжності, область збіжності, сума ряду. Область збіжності функціональних рядів. Правильна збіжність функціонального ряду.
9. Степеневий ряд. Структура області збіжності степеневого ряду (теорема Абеля).
10. Задача про розвинення функції в степеневий ряд.
11. Форма Лагранжа залишкового члена ряду Тейлора. Достатня умова розвинення функції в ряд Тейлора.
12. Розкладання в ряд Маклорена основних елементарних функцій.
13. Ортогональні системи функцій. Основна тригонометрическая система, її ортогональність. Розвинення функції в ряд по системі функцій. Ряд Фур'є по ортогональній системі функцій.
14. Тригонометричний ряд Фур'є. Умови і теорема Діріхле. Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є періодичної функції, парної і непарної функцій.
15. Дійсна і комплексна гармоніки, зв'язок їх параметрів. Комплексна форма ряду Фур'є. Спектральні характеристики періодичного сигналу.
16. Дослідження функцій за допомогою інтеграла Фур'є, формули обернення. Поняття про спектральний аналіз функцій, які представлені інтегралом Фур'є.

Тест з теорії:

1. Якщо – $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$послідовність чисел, то вирази $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ називаються:

А) ряд, часткова сума, сума ряду;
Б) сума ряду, часткова сума, ряд;
В) часткова сума, сума ряду, ряд;
Г) часткова сума, ряд, сума ряду.

2. Необхідна ознака збіжності ряду є:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

В) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0$;

Г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,2} \neq 0$.

3. Якщо для двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) з додатними членами виконується нерівність $a_n \le b_n$, то

А) із збіжності ряду (1) випливає збіжність ряду (2);
Б) із розбіжності ряду (1) випливає збіжність ряду (2);
В) із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1).

4. Ознака Даламбера числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = q,$ причому, якщо $q > 1$ – ряд розбігається, $q < 1$ – ряд збігається;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q,$ причому, якщо $q > 1$ – ряд розбігається, $q < 1$ – ряд збігається;

В) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q,$ причому, якщо $q > 1$ – ряд збігається, $q < 1$ – ряд розбігається.

5. Ознака Коші збіжності числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = q,$ причому, якщо $q > 1$ – ряд розбігається, $q < 1$ – ряд збігається;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q,$ причому, якщо $q > 1$ – ряд розбігається, $q < 1$ – ряд збігається;

В) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q,$ причому, якщо $q > 1$ – ряд збігається, $q < 1$ – ряд розбігається.

6. Інтегральна ознака Коші збіжності числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами:

А) якщо $\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(x)dx$ збігається, то і ряд збігається;

Б) якщо $\int\limits_{1}^{\infty} a(x)dx$ збігається, то і ряд збігається;

В) якщо $\int\limits_{1}^{\infty} a(x)dx$ розбігається, то ряд збігається.

7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо:

А) збігається $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|$;

Б) збігається $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$;

В) збігається $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$;

Г) збігається $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

8. Знакопереміжний ряд $a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$ $(a_n \geq 0)$ збігається за ознакою Лейбніца, якщо:

А) $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

Б) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

В) $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;

Г) $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

9. Степеневим рядом називається ряд вигляду:

А) $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$;

Б) $a_0 + a_1 2^x + a_2 3^x + \ldots + a_n (n+1)^x + \ldots$;

В) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$.

10. Сума функціонального ряду:

А) число;

Б) функція;

В) матриця.

11. Якщо функціональний ряд правильно збігається на проміжку, то:

А) в усіх точках цього проміжку числові ряди збігаються;

Б) в усіх точках цього проміжку числові ряди збігаються абсолютно;

В) в усіх точках цього проміжку числові ряди збігаються умовно.

12. Структура області збіжності степеневого ряду включає:

А) безліч можливостей;

Б) одну можливість;

В) три можливості.

13. Якщо степеневий ряд збігається в одній точці, то радіус збіжності R цього ряду:

А) $R=\infty$;

Б) $R=0$;

В) $R=const\neq 0$.

14. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ має радіус збіжності R_1, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ – R_2; сума рядів має радіус збіжності

А) R_1+R_2;

Б) $\min\{R_1,R_2\}$;

В) $\max\{R_1,R_2\}$.

15. Сумою функціонального ряду $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ є функція:

А) e^x;

Б) $\ln(1+x)$;

В) $\operatorname{arctg} x$.

16. Рівність $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ справедлива на:

А) $(-\infty,+\infty)$;

Б) $[-1,1]$;

В) $(-1,1)$.

17. Залишковий член ряду Тейлора у формі Лагранжа:

А) $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_0)^n$;

Б) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_o)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$;

В) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\Theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, 0<\Theta<1$.

18. Достатня умова розкладання функції у ряд Тейлора:

А) існування нескінченної кількості похідних функції;

Б) існування числа, яким обмежені похідні функції в околі центру розкладання;

В) існування обмежених похідних функції в околі центру розкладання.

19. Рівність між функцією та сумою її ряду Фур’є за змістом теореми Діріхле означає:

А) рівність в усіх точках інтервалу;

Б) рівність в точках неперервності ;

В) рівність в точках неперервності, окрім кінців інтервалу.

20. Дійсний тригонометричний ряд Фур'є – це ряд вигляду:

А) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos^k \omega_1 x + b_k \sin^k \omega_1 x$;

Б) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 x + b_k \sin k\omega_1 x$;

В) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_1 x^k + b_k \sin \omega_1 x^k$.

21. Тригонометричний ряд Фур'є парної функції має коефіцієнти

А) $a_k = 0, k = \overline{0,\infty}$;

Б) $b_k = 0, k = \overline{1,\infty}$.

РОЗДІЛ 9

«Операційне числення (перетворення Лапласа)»

Питання для самоперевірки:

1. Означення перетворення Лапласа і оригіналу.
2. Одинична функція (функція Хевісайда). Її зображення.
3. Теорема лінійності перетворення Лапласа.
4. Теорема подібності.
5. Теорема зсуву.
6. Теорема загаювання.
7. Зображення періодичного імпульсу.
8. Теорема диференціювання оригіналу.
9. Теорема інтегрування оригіналу.
10. Теорема диференціювання зображення.
11. Теорема інтегрування зображення.
12. Згортка функцій. Її властивості.
13. Теорема множення зображень.
14. Інтеграл Дюамеля.

Тест з теорії:

1. Функція $f(t)$ є оригіналом, якщо вона:

А) кусково-неперервна, обмежена $|f(t)| \le M \cdot t^{\alpha}$, $M, \alpha - \text{const}$;

Б) кусково-неперервна, $f(t) = 0$ для $t < 0$ та обмежена $|f(t)| \le M \cdot t^{\alpha}$, $M, \alpha - \text{const}$;

В) кусково-неперервна, $f(t) = 0$ для $t < 0$ та обмежена $|f(t)| \le M \cdot e^{\alpha t}$, $M, \alpha - \text{const}$;

2. Перетворення Лапласа функції-оригіналу $f(t)$ задається:

А) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$;

Б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{pt} f(t)dt$;

В) $\int\limits_0^{+\infty} e^{pt} f(p)dp$.

3. Одинична функція (функція Хевісайда) та її зображення:

А) $\sigma(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ 1, t \ge 0 \end{cases}$, $\sigma(t) \longleftarrow p$;

Б) $\sigma(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \ge 0 \end{cases}$, $\sigma(t) \longleftarrow p$;

В) $\sigma(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\ge 0\end{cases}$, $\sigma(t)\longleftarrow\dfrac{1}{p}$.

4. Теорема подібності:

А) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(\lambda t)\longleftarrow F(\lambda p)$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(\lambda t)\longleftarrow \dfrac{1}{\lambda}F(\lambda p)$;

В) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(\lambda t)\longleftarrow \dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$;

Г) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(\lambda t)\longleftarrow \dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)$.

5. Зображення функцій $\sin\omega t, \cos\omega t, \operatorname{sh}\omega t, \operatorname{ch}\omega t$ відповідно:

А) $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \dfrac{p}{p^2-\omega^2}, \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}, \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

Б) $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}, \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}, \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

В) $\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}, \dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$;

Г) $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}, \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

6. Теорема зсуву зображення:

А) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(t)\cdot e^{\alpha t}\longleftarrow F(p+\alpha)$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(t)\cdot e^{\alpha t}\longleftarrow F(p-\alpha)$;

В) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(t-\alpha)\longleftarrow F(p-\alpha)$.

7. Теорема загаювання оригінала:

А) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(t-\alpha)\cdot\sigma(t-\alpha)\longleftarrow F(p+\alpha)$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(t-\alpha)\cdot\sigma(t-\alpha)\longleftarrow F(p)\cdot e^{\alpha p}$;

В) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f(t-\alpha)\cdot\sigma(t-\alpha)\longleftarrow F(p)\cdot e^{-\alpha p}$.

8. Теорема диференціювання оригінала:

А) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f'(t)\longleftarrow F'(p)$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f'(t)\longleftarrow p\cdot F(p)-f(0)$;

В) $f(t)\longleftarrow F(p)\Rightarrow f'(t)\longleftarrow F(p)-p\cdot f(0)$.

9. Теорема інтегрування оригінала:

А) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow \int\limits_0^t f(t)dt \longleftarrow \int\limits_0^\infty F(p)dp$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow \int\limits_0^t f(t)dt \longleftarrow \dfrac{F(p)}{p}$;

В) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow \int\limits_0^t f(t)dt \longleftarrow p\cdot F(p)$.

10. Теорема диференціювання зображення:

А) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow t\cdot f(t) \longleftarrow F'(p)$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow t\cdot f(t) \longleftarrow -F'(p)$.

11. Теорема інтегрування зображення:

А) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow \dfrac{f(t)}{t} \longleftarrow \int\limits_p^\infty F(z)dz$;

Б) $f(t)\longleftarrow F(p) \Rightarrow -\dfrac{f(t)}{t} \longleftarrow \int\limits_p^\infty F(z)dz$.

12. Інтеграл Дюамеля: якщо $f(t)\longleftarrow F(p)$ та $g(t)\longleftarrow G(p)$, то

А) $f(t)g(0)+\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \longleftarrow F(p)G(p)$;

Б) $f(t)g(0)+\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \longleftarrow pF(p)G(p)$;

В) $f(t)g(t)+\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \longleftarrow pF(p)G(p)$.

РОЗДІЛ 10
«Комплексні числа та функції комплексної змінної»

Питання для самоперевірки:

1. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма. Арифметичні дії та їх геометрична інтерпретація.
2. Тригонометрична форма комплексного числа. Операції множення і ділення.
3. Формула Муавра.
4. Корінь з комплексного числа.
5. Комплексно-значна функція дійсного аргументу. Формули Ейлера.
6. Показникова форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в цій формі.
7. Функція комплексного змінного (ФКП). Границя функції в точці. Неперервність.
8. Однозначні та багатозначні ФКП.
9. Диференціювання ФКП. Необхідні і достатні умови диференційованості ФКП в точці.
10. Функція аналітична в точці. Властивості дійсної та уявної частини такої функції.
11. Інтеграл ФКП. Його властивості.
12. Теорема Коші для однозв'язної області.
13. Теорема Коші для складеного контуру.
14. Наслідки з теореми Коші.
15. Інтегральна формула Коші і наслідок з неї.

Тест з теорії:

1. Задано комплексне число z. Оберіть правильні відповіді для обчислення $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|$: 1. $\operatorname{Re} z = y$; 2. $\operatorname{Re} z = iy$; 3. $\operatorname{Re} z = x$; 4. $\operatorname{Im} z = x$; 5. $\operatorname{Im} z = iy$; 6. $\operatorname{Im} z = y$; 7. $|z| = x^2 + y^2$; 8. $|z| = |x| + |y|$; 9. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

А) 1; 4; 9
Б) 3; 5; 8
В) 2; 4; 9
Г) 3; 6; 9
Д) 3; 5; 7

2. Множення комплексних чисел z_1 і z_2 здійснюється за формулою:

А) $|z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1\varphi_2) + i\sin(\varphi_1\varphi_2)\right)$;
Б) $|z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$;
В) $|z_1||z_2|\left(\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$.

3. Ділення комплексних чисел z_1 і z_2 здійснюється за формулою:

А) $\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)$;

Б) $\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$;

В) $\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right)$.

4. Піднесення до степеня n комплексного числа $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ здійснюється за формулою:

А) $|z|^n\left(\cos^n\varphi+i\sin^n\varphi\right)$;

Б) $|z|^n\left(\cos\varphi^n+i\sin\varphi^n\right)$;

В) $|z|^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right)$;

Г) $|z|^n\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=\overline{0,n-1}$.

5. Обчислення кореня n-го степеня з комплексного числа $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ здійснюється за формулою:

А) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=\overline{0,n-1}$;

Б) $\sqrt[n]{|z|}\left(\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=\overline{0,n-1}$;

В) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$;

Г) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\sqrt[n]{\varphi}+i\sin\sqrt[n]{\varphi}\right)$.

6. Умови Коші-Рімана для функції $f(z)$ ($u(x,y)=\operatorname{Re} f(z), v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$):

А) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$;

Б) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$;

В) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}$.

7. Функція $f(z)$ аналітична в точці z_0, якщо функція

А) визначена в цій точці і в деякому її околі;

Б) диференційовна в точці z_0 ;

В) диференційовна в цій точці і в деякому її околі.

8. Інтегральна формула Коші (L – замкнений контур, z_0 – точка в середині контуру)

А) $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, $f(z)$ аналітична в області, яку обмежує L;

Б) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$, $f(z)$ аналітична в точці z_0, і може бути неаналітична в деяких точках в середині контуру;

В) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)(z-z_0)dz$, $f(z)$ аналітична в області, яку обмежує L.

9. Для обчислення інтеграла $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z(z-2)}dz$ за інтегральною формулою Коші слід взяти:

А) $f(z)=e^z$;

Б) $f(z)=\dfrac{e^z}{z-2}$;

В) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$.

10. Точка z_0 є усувною особливою точкою функції $f(z)$, якщо в цій точці функція неаналітична та:

А) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

Б) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує;

В) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A\neq\infty$.

11. В точці z_0, яка є полюсом n–го порядку функції $f(z)$ її ряд Лорана

А) не містить головної частини;

Б) головна частина ряду Лорана містить обмежену кількість членів;

В) головна частина ряду Лорана містить нескінченну кількість членів.

12. Лишок функції $f(z)$ в околі особливої точки z_0 дорівнює

А) коефіцієнту c_1 в розкладанні функції $f(z)$ в ряд Лорана;

Б) коефіцієнту c_{-1} в розкладанні функції $f(z)$ в ряд Лорана;

В) коефіцієнту c_0 в розкладанні функції $f(z)$ в ряд Лорана.

13. Для функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-i}$ точка $z=i$ є

А) кратним полюсом;

Б) суттєво особливою точкою;

В) простим полюсом;

Г) усувною особливою точкою.

14. Інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ вздовж незамкненого контуру L від аналітичної функції $f(z)$

А) залежить від форми кривої інтегрування;

Б) не залежить від форми кривої інтегрування.

15. Інтеграл $\oint\limits_L f(z)dz$ вздовж кола L від аналітичної всередині контуру функції $f(z)$ дорівнює

А) нулю;
Б) значенню функції в точці, яка є центром кола.

РОЗДІЛ 11
«Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля»

Питання для самоперевірки:

1. Конструкція подвійного інтеграла. Обчислення.
2. Обчислення подвійного інтеграла в криволінійних координатах. Визначник Якобі.
3. Властивості подвійного інтеграла. Застосування.
4. Конструкція трикратного інтеграла. Обчислення.
5. Обчислення трикратного інтеграла в криволінійних координатах.
6. Скалярне поле. Геометричні характеристики. Похідна за напрямом. Градієнт.
7. Векторні поля. Спеціальні види.
8. Криволінійні інтеграли.
9. Незалежність криволінійного інтеграла від форми кривої. Потенціал потенціального векторного поля.
10. Циркуляція векторного поля. Формула Гріна.
11. Поверхневі інтеграли.
12. Потік векторного поля.
13. Формула Гаусса-Остроградського.
14. Формула Стокса.

Тест з теорії:

1. Якщо в області D визначена функція $f(x,y)$ та цю область розбито сіткою кривих довільно на n областей, площі яких відповідно $\Delta S_1,\ldots,\Delta S_n$ (максимальний діаметр цих площадок позначимо d), в кожній з цих областей обрано точку P_i, то інтегральною сумою та подвійним інтегралом називаються наступні вирази:

А) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)$, $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$;

Б) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$, $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$;

В) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)/\Delta S_i$, $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)/\Delta S_i$.

2. Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де D – прямокутник, заданий $\{a\le x\le b, c\le y\le d$, представляється повторним інтегралом:

А) $\int\limits_a^b dy\int\limits_c^d f(x,y)dx$; Б) $\int\limits_a^b f(x,y)dx\int\limits_c^d dy$; В) $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

3. Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де D – довільна область, обмежена зверху лінією $y=y_2(x)$, знизу – лінією $y=y_1(x)$, а також прямими $x=a, x=b\left(a\le b\right)$, представляється повторним інтегралом:

А) $\int\limits_a^b dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$; Б) $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy$; В) $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

4. Якщо заміна змінних здійснюється за формулами $x=x(u,v), y=y(u,v)$, то якобіан переходу в подвійному інтегралі від x,y до u,v :

А) $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$; Б) $-\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

5. Подвійний інтеграл у полярній системі координат обчислюється:

А) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho,\varphi)d\rho d\varphi$;

Б) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi$;

В) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho,\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi$.

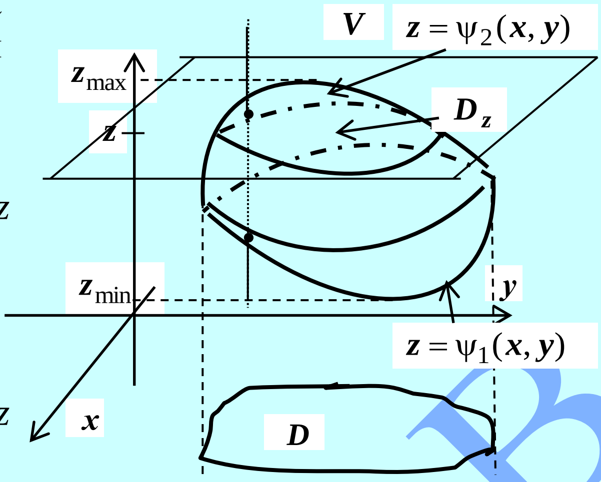
6. Якщо в області V у просторі визначена функція $f(x,y,z)$ та цю область розбито сіткою поверхонь довільно на n областей $V_1,...,V_n$, об'єми яких відповідно $\Delta V_1,...,\Delta V_n$ (максимальний діаметр ΔV_i позначимо d), в кожній з цих областей обрано точку P_i, то інтегральною сумою та потрійним інтегралом називаються наступні вирази:

А) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)$, $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta V_i$;

Б) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta V_i$, $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta V_i$;

В) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)/\Delta V_i$, $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)/\Delta V_i$.

7. Для області V, представленої на кресленні, потрійний інтеграл обчислюється:



А)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Б)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

В) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} dz \iint\limits_D f(x,y,z)dxdy$

8. В циліндричних координатах (ρ,φ,z), введених на області V у просторі змінна ρ означає:

А) відстань між початком координат та поточною точкою області V;

Б) відстань між початком координат та проекцією поточної точки області V на площину XOY;

В) відстань між початком координат та проекцією поточної точки області V на площину YOZ;

Г) відстань між початком координат та проекцією поточної точки області V на площину XOZ.

9. Якщо крива L у просторі задана параметричними рівняннями $\{x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\eta(t)$, $t\in[\alpha,\beta]\,(\alpha<\beta)$, функція $f(x,y,z)$ неперервна в кожній точці L, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється:

А) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right]dt$;

Б) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right]\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\eta'(t)\right]^2}\,dt$;

В) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right]\sqrt{\varphi'(t)+\psi'(t)+\eta'(t)}\,dt$.

10. Якщо крива L на площині задана параметричними рівняннями $\{x=\varphi(t), y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]\,(\alpha<\beta)$, функція $f(x,y)$ неперервна в кожній точці L, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється:

А) $\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]dt$;

Б) $\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\cdot\psi'(t)dt$;

В) $\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt.$

11. Якщо функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні в області D, обмеженої замкненою лінією L, то справедлива формула Гріна:

А) $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$;

Б) $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$;

В) $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy$.

12. Поверхня є двобічною, якщо:

А) після обходу контуру на поверхні, початок якого в довільним способом обраній точці M_0, нормаль повернеться в точці M_0 до свого початкового положення;

Б) напрямок нормалі після обходу контуру на поверхні, початок якого в довільним способом обраній точці M_0, хоча б в одній точці зміниться на протилежний.

13. Якщо в кожній точці поверхні Ω функція $F(x,y,z)$ неперервна, а функція $z = f(x,y)$, що задає поверхню Ω, неперервна в області D площини XOY, в яку проектується поверхня Ω, то поверхневий інтеграл першого роду від функції $F(x,y,z)$ по поверхні Ω обчислюється:

А) $\iint\limits_{\Omega} F(x,y,z)d\sigma = \iiint\limits_{V} F\left[x,y,z\right]\sqrt{1+\left[f'_x\right]^2+\left[f'_y\right]^2}\,dxdydz$;

Б) $\iint\limits_{\Omega} F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} F\left[x,y,z\right]\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}\,dxdydz$;

В) $\iint\limits_{\Omega} F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} F\left[x,y,f(x,y)\right]\sqrt{1+\left[f'_x\right]^2+\left[f'_y\right]^2}\,dxdy$.

14. При побудові інтегральної суми поверхневого інтеграла другого роду від функції $F(x,y,z)$ по поверхні Ω знак виразу $F(x_k,y_k,z_k)\cdot D_k$ (D_k – площа проекції елемента поверхні Ω_k на XOY) залежить від:

А) кута між вектором нормалі до Ω в точці $M_k(x_k,y_k,z_k)$ і віссю OX;

Б) кута між вектором нормалі до Ω в точці $M_k(x_k,y_k,z_k)$ і віссю OY;

В) кута між вектором нормалі до Ω в точці $M_k(x_k,y_k,z_k)$ і віссю OZ.

15. Критерій потенціальності векторного поля $\vec{a}(M)$ в області W:

А) в усіх точках W $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$;

Б) в усіх точках W $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0$;

В) в усіх точках W $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$ і $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0$.

16. Рівняння Лапласа для функції $F(x,y,z)$ має вигляд:

А) $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$;

Б) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$;

В) $\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

17. Градієнт скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

А) $\operatorname{grad}u=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot dx+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot dy+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot dz$;

Б) $\operatorname{grad}u=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\vec{i}+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\vec{j}+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\vec{k}$;

В) $\operatorname{grad}u=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma$.

18. Градієнт скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ характеризує:

А) напрямок і величину максимального зростання цієї функції в точці M_0;

Б) напрямок і величину мінімального зростання цієї функції в точці M_0;

В) величину значення функції $u(M_0)$.

19. Якщо функція $u(x,y,z)$ задана в певному околі точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і в цій точці задано вектор $\vec{l}=\{l_x;l_y;l_z\}$, то похідна за напрямом $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$:

А) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\dfrac{\partial l}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial l}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\dfrac{\partial l}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma$, де $\vec{l}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ – орт вектора $\vec{l}=\{l_x;l_y;l_z\}$;

Б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot dx+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot dy+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot dz$;

В) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma$.

20. Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню Ω дорівнює:

А) $\int\limits_L \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^o}\,dl$ (L – межа поверхні Ω);

Б) $\iint\limits_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\,d\sigma$;

В) $\iint\limits_\Omega \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^o}\,d\sigma$.

21. Теорема Остроградського-Гауса:

А) $\Pi_\Omega(\vec{a}) = \iiint\limits_W \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^o}\,dv$ (Ω – поверхня, $\vec{a}(M)$ – векторне поле, W – замкнена поверхнею Ω область, $\overrightarrow{n^o}$ – орт нормалі до поверхні);

Б) $\Pi_\Omega(\vec{a}) = \iiint\limits_W \operatorname{div}\vec{a}\,dv$;

В) $\Pi_\Omega(\vec{a}) = \iiint\limits_W \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^o}\,dv$.

22. Циркуляція векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж замкненого контуру Γ:

А) Ц$(\vec{a}) = \oint\limits_\Gamma \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{s}$, де $d\vec{s} = \{dx; dy; dz\}$;

Б) Ц$(\vec{a}) = \oint\limits_\Gamma \vec{a}\cdot d\vec{s}$;

В) Ц$(\vec{a}) = \oint\limits_\Gamma \operatorname{div}\vec{a}\,dl$.

23. Теорема Стокса:

А) $\oint\limits_\Gamma \operatorname{div}\vec{a}\,dl = \iint\limits_\Omega \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^o}\,d\sigma$;

Б) $\oint\limits_\Gamma \vec{a}\,d\vec{s} = \iint\limits_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\,d\sigma$;

В) $\oint\limits_\Gamma \vec{a}\,d\vec{s} = \iint\limits_\Omega \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^o}\,d\sigma$.