Глава 1. Элементы линейной алгебры

§1. Матрицы и действия над ними

<u>Определение.</u> *Матрицей* размеров $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. В дальнейшем для записи матрицы размеров $m \times n$ будет применяться следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, а их элементы – соответствующими маленькими буквами $a, b, c, \ldots$.

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы* A. Индекс i – это номер строки, в которой стоит элемент a_{ij}, а индекс j – номер столбца.

Например $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Эта матрица имеет 3 строки и 4 столбца, то есть, её размеры 3×4.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей–строкой*, а из одного столбца – *матрицей–столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Если число строк матрицы равно числу её столбцов и равно n, то такая матрица называется *квадратной порядка* n. Например, квадратная матрица второго порядка имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

квадратная матрица третьего порядка имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и так далее.

Квадратная матрица n-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ квадратной матрицы.

Если на главной диагонали квадратной матрицы стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, то эта матрица называется *единичной* и обозначается E.

Например $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка,

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка и так далее.

<u>*Определение.*</u> Матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

<u>Умножение матрицы на число</u>

Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Сумма матриц A и B размеров $m \times n$ есть матрица C размеров $m \times n$, каждый элемент c_{ij} которой есть сумма $a_{ij} + b_{ij}$.

Вычитание производится аналогично.

Умножение матриц

Произведение матриц $A \cdot B$ существует тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то есть, если матрица A имеет размеры $m \times n$, то матрица B должна иметь размеры $n \times p$, где p – любое натуральное число. При этом произведение $C = A \cdot B$ будет иметь размеры $m \times p$, а элементы матрицы C вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

(правило "строка на столбец"). То есть для вычисления элемента c_{ij} матрицы C, стоящего в строке с номером i и в столбце с номером j, берем $i-$ю строку матрицы A и $j-$й столбец матрицы B, перемножаем попарно соответствующие элементы (первый на первый, второй на второй и так далее) и полученные произведения складываем.

Отметим, что для умножения матриц не выполняется перестановочный закон, то есть, как правило, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Более того, если произведение $A \cdot B$ существует, то отсюда вовсе не следует, что должно существовать произведение $B \cdot A$.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

то произведение $C=A\cdot B$ существует, так как размеры матрицы A – 2×3, а размеры матрицы B – 3×3. При этом матрица C будет иметь размеры 2×3. Произведение $B\cdot A$ не существует, так как матрица B имеет 3 столбца, а матрица A – 2 строки.

Две квадратные матрицы одинакового порядка всегда можно умножить. Причем их произведение будет квадратной матрицей того же порядка.

Если для матриц выполняется равенство $A\cdot B=B\cdot A$, то такие матрицы называются *перестановочными.*

Для квадратных матриц вводится действие возведения в целую неотрицательную степень. Если A – квадратная матрица, то

$$A^0=E,\ A^1=A,\ A^2=A\cdot A,\ A^3=A^2\cdot A,\ldots,\ A^n=A^{n-1}\cdot A,\ldots$$

Здесь E – единичная матрица того же порядка, что и A.

.

§ 2. Определители

Для квадратных матриц вводится понятие определителя. *Определитель* – это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице и может быть вычислено по её элементам.

Пусть $A=(a_{11})$ - квадратная матрица первого порядка, тогда ее определителем называется число $\det A=a_{11}$.

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка, то её определителем называется число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Определитель квадратной матрицы четвертого порядка определяется аналогично:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

и так далее. То есть определитель n-го порядка определяется через определители $(n-1)$-го порядка при любом натуральном $n\geq 3$.

<u>*Определение.*</u> Пусть A – квадратная матрица порядка n. Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы порядка $(n-1)$, которая получается, если в матрице A вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец.

<u>*Определение.*</u> Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-(1-9)=8.$$

(Здесь определитель получен вычеркиванием в матрице A второй строки и третьего столбца).

Некоторые свойства определителей

1. Определитель матрицы не меняется при её транспонировании:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Сумма произведений всех элементов какой–либо строки (столбца) матрицы A на их алгебраические дополнения равна $\det A$. Сумма произведений всех элементов какой–либо строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) этой же матрицы равна нулю.

То есть для строки с номером i:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

для столбца с номером i:

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} \det A & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

3. Если в матрице A поменять местами какие–нибудь две строки (столбца), то определитель полученной матрицы будет равен определителю матрицы A, взятому с противоположным знаком.

4. Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) матрицы A умножить на число α, то её определитель умножится на это число.

Следствия:

1) $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$, где n – порядок матрицы A.

2) Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

5. Если в матрице A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

6. Если строка (столбец) матрицы A состоит целиком из нулей, то $\det A = 0$.

7. Если к элементам какой-нибудь строки (столбца) матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) матрицы A, умноженные на одно и то же число, то определитель полученной матрицы будет равен $\det A$.

8. Если A и B – две квадратные матрицы одного и того же порядка, то

$$\det\left(A \cdot B\right) = \det A \cdot \det B.$$

Некоторые способы вычисления определителей

<u>1) Разложение по элементам строки или столбца</u>

Пользуясь свойством 2, можно вычисление определителя свести к вычислению нескольких определителей более низкого порядка.

Пример. Вычислить треугольный определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

(треугольным называется определитель, все элементы которого, стоящие под главной диагональю, равны нулю).

Решение. Разложим Δ по элементам первого столбца:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}.$$

Так как $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$, то

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по элементам первого столбца, получаем

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}.$$

Таким образом, треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Можно доказать это свойство для определителя любого порядка.

2) Приведение определителя к треугольному виду

Пользуясь свойствами определителей, можно любой определитель привести к треугольному виду, после чего вычислить его, перемножив элементы, стоящие на главной диагонали.

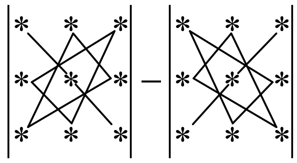
3) Правило треугольника для вычисления определителя третьего порядка

Для вычисления определителя 3-го порядка можно пользоваться формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\right).$$

Однако, вычислять определители по правилу треугольника легче, если пользоваться не формулой, а следующей схемой:



Перемножая между собой элементы определителя, стоящие на местах, соединенных в схеме линиями, получаем, что обе таблицы дают по три произведения, каждое из которых состоит из трех сомножителей.

Произведения, полученные по первой таблице, складываем и из этой суммы вычитаем сумму произведений, полученных по второй таблице.

§3. Обратная матрица

<u>*Определение.*</u> Пусть A – квадратная матрица. Если существует матрица A^{-1} такая, что

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

то матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A. (Здесь E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A).

<u>*Определение.*</u> Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной*, если $\det A = 0$.

Теорема. Любая квадратная невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет единственную обратную матрицу, которая вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Для построения обратной матрицы пользуемся следующей схемой:

1) находим $\det A$. Если $\det A = 0$, то обратная матрица не существует. Если $\det A \neq 0$, то переходим к следующему пункту;

2) вычисляем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A;

3) строим по формуле A^{-1}.

Матричные уравнения

Пусть заданы матрицы A, B, C, причем A и C – квадратные невырожденные матрицы.

Рассмотрим три вида матричных уравнений относительно неизвестной матрицы X:

1) $A \cdot X = B$.

Умножая это уравнение слева на A^{-1}, получаем $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$ при условии, что произведение $A^{-1} \cdot B$ существует.

2) $X \cdot C = B$.

Умножая это уравнение справа на C^{-1}, получаем

$$X = B \cdot C^{-1}.$$

3) $A \cdot X \cdot C = B$.

Умножая это уравнение слева на A^{-1}, а справа на C^{-1}, получаем

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

§4. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выберем в ней какие-то r строк и r столбцов. *Минором порядка* r матрицы A называется определитель квадратной матрицы порядка r, образованной элементами, расположенными на пересечении выбранных строк и столбцов.

Определение. Минор порядка r матрицы A называется *базисным,* если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$ матрицы A равны нулю либо не существуют.

Определение. *Рангом* матрицы A называется порядок ее базисного минора.

Ранг матрицы A обозначается $\mathrm{Rg}\, A$.

Непосредственно из определения следует, что $\mathrm{Rg}\, A \le m$ и $\mathrm{Rg}\, A \le n$.

Введем обозначения для строк матрицы A:

$$\overline{a_1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$
$$\overline{a_2}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\overline{a_m}=\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ можно рассматривать как матрицы-строки, для которых уже введены действия умножения на число и сложения.

<u>Определение.</u> Строки $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}$ матрицы A называются *линейно независимыми*, если из равенства $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k} = \overline{0}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – числа, $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Теорема. Максимальное число линейно независимых строк матрицы A равно её рангу.

Чтобы вычислить ранг матрицы, обычно используют элементарные преобразования.

<u>Определение.</u> *Элементарными преобразованиями матрицы* называются следующие преобразования:

1) умножение строки (столбца) матрицы на любое отличное от нуля число;

2) прибавление к элементам одной строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) этой матрицы, умноженных на какое-то число;

3) перестановка строк (столбцов) матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменится, если над ней произвести любое из элементарных преобразований.

Любую матрицу A можно с помощью элементарных преобразований привести к трапециевидной форме, то есть к матрице вида:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{11}\neq 0, b_{22}\neq 0,\dots, b_{rr}\neq 0$, а все элементы, стоящие ниже указанных, а также ниже r–й строки равны нулю. Очевидно, базисным минором матрицы B является минор $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11}\cdot b_{22}\cdot\ldots\cdot b_{rr}\neq 0$, порядок которого равен r. Поэтому $\operatorname{Rg} B = r$. Так как матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} B=r$.

<u>Определение.</u> Матрицы, получаемые одна из другой с помощью элементарных преобразований, называются *эквивалентными.*

§5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где a_{ik} − коэффициенты при неизвестных; b_i − правые части системы; a_{ik} и b_i − заданные числа; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − неизвестные.

<u>*Определение*</u>. Набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется *решением системы* (1.1), если при подстановке в систему $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ каждое уравнение этой системы обращается в тождество. Заметим, что решение системы (1.1) может быть также записано в виде столбца $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

<u>*Определение.*</u> Система (1.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

<u>*Определение.*</u> Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые совокупности решений.

Введем обозначения:

а) матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

б) расширенная матрица системы

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right);$$

в) матрица − столбец правых частей

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

г) матрица − столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Систему (1.1) можно записать в матричном виде $A \cdot X = B$.

Методы решения СЛАУ

1) Матричный метод

Если матрица системы A − квадратная, то есть число уравнений системы (1.1) равно числу неизвестных, и $\det A \neq 0$, то, вычислив A^{-1}, можно решить матричное уравнение $A \cdot X = B$ и получить решение системы (1.1) в матричном виде: $X = A^{-1} \cdot B$.

2) Правило Крамера

Пусть СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

то есть число уравнений системы равно числу неизвестных.

Обозначим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

− определитель системы.

Если $\Delta \neq 0$, то составляем определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ по правилу: Δ_k − определитель, который получается, если в Δ заменить k−тый столбец столбцом правых частей. После того как все определители вычислены, находим неизвестные по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

3) Метод Гаусса

Рассмотрим теперь систему (1.1). Для нее справедлива

Теорема *Кронекера − Капелли*. СЛАУ (1.1) совместна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, \overline{A}$.

При этом, если $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, \overline{A} = n$, где n − число неизвестных, то система (1.1) имеет единственное решение, если $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, \overline{A} < n$, то система (1.1) имеет бесконечное множество решений.

Чтобы решить систему (1.1), нужно выписать ее расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований привести ее к трапециевидной форме. Причем над столбцами можно производить только одно элементарное преобразование − перестановку столбцов с первого по n−й включительно, при этом соответствующие неизвестные поменяются местами.

В результате получится один из трех случаев:

1. Матрица $\overline{A}$ преобразуется к виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где $C_{kk} \neq 0$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$, а все элементы, стоящие под ними и под элементом d_n равны нулю.

Одновременно матрица A преобразуется к матрице

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = n$. По теореме Кронекера − Капелли система имеет единственное решение.

Чтобы найти это решение, выписываем СЛАУ, для которой полученная матрица является расширенной, при этом, не нарушая общности, будем считать, что столбцы матрицы A мы не переставляли:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Эта система эквивалентна системе (1.1).

Систему (1.2) решаем снизу вверх: так как $c_{nn} \neq 0$, то $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$.

Подставляя найденное x_n в $(n-1)$–е уравнение, находим x_{n-1} и так далее. Последним находим x_1 из первого уравнения.

2. Матрица $\bar{A}$ преобразуется к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right),$$

где $C_{kk} \neq 0$ при всех $k = 1, \cdots, r$, все элементы, стоящие ниже этих элементов, а также ниже элементов $C_{r\,r+1}, C_{r\,r+2}, \dots, C_{rn}$, равны нулю, а среди элементов d_{r+1}, d_{r+2}, …, d_m хотя бы один отличен от нуля.

Одновременно матрица A преобразуется к матрице, состоящей из первых n столбцов полученной матрицы. В этом случае $\operatorname{Rg} A = r$, $\operatorname{Rg} \bar{A} = r+1$ и по теореме Кронекера − Капелли система (1.1) несовместна.

3. Матрица $\bar{A}$ преобразуется к виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где $r < n$, $C_{kk} \neq 0$ при всех $k = 1, \dots r$; все элементы, стоящие под ними, а также все элементы строк с номерами, большими r, равны нулю. Матрица A

при этом преобразуется к матрице, состоящей из первых n столбцов полученной матрицы.

В этом случае $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \bar{A} = r < n$ и по теореме Кронекера − Капелли система (1.1) имеет бесконечное множество решений. Чтобы их найти, составим систему, для которой полученная матрица является расширенной:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{n+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + c_{2r+1}x_{n+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases} \tag{1.3}$$

Эта система эквивалентна системе (1.1).

В системе (1.3) неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *главными*, а неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ называются *свободными*. Перенесем свободные неизвестные в правые части уравнений системы (1.3) и положим $x_{r+1} = q_1, x_{r+2} = q_2, \ldots, x_n = q_{n-r}$.

Получим систему r уравнений с r неизвестными

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1r+1}q_1 - \ldots - c_{1n}q_{n-r}, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2r+1}q_1 - \ldots - c_{2n}q_{n-r}, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r\,r+1}q_1 - \ldots - c_{rn}q_{n-r}. \end{cases}$$

Решая ее точно так же, как в случае (1.2), найдем $x_1, x_2, \ldots, x_r$, только теперь они будут зависеть от $q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}$. Решение системы (1.1) в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}), \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_r = x_r(q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}), \\ x_{r+1} = q_1, \\ x_{r+2} = q_2, \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = q_{n-r}, \end{cases}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Это решение называется *общим решением системы* (1.1). Придавая постоянным $q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}$ произвольные числовые значения и вычисляя $x_1, x_2, \ldots, x_r$, будем получать наборы чисел, каждый из которых является *частным решением* системы (1.1).

Однородные СЛАУ

Система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

все правые части которой равны нулю, называется *однородной*. Очевидно, любая однородная система совместна, так как имеет решение $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, которое называется *тривиальным*.

Для системы (1.4) всегда выполнено равенство $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \bar{A}$. Если $\operatorname{Rg} A = n$, то система имеет только нулевое решение. Если $\operatorname{Rg} A < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Ее общее решение ищется так же, как и общее решение системы (1.1).

Расширенная матрица $\bar{A}$ системы (1.4) получается добавлением к матрице A столбца, целиком состоящего из нулей, и не меняющегося при элементарных преобразованиях. Поэтому при решении однородной системы методом Гаусса достаточно привести к трапециевидной форме матрицу A.

Если общее решение системы (1.4) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_1\left(q_1, \ldots, q_{n-r}\right), \\ x_2 = x_2\left(q_1, \ldots, q_{n-r}\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_r = x_r\left(q_1, \ldots, q_{n-r}\right), \\ x_{r+1} = q_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = q_{n-r}, \end{cases}$$

то, придавая произвольным постоянным $q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}$ различные числовые значения, будем получать частные решения системы (1.4). Придадим последовательно произвольным постоянным следующие числовые значения:

$$\begin{array}{llll} q_1 = 1, & q_i = 0 & \text{при всех} & i \neq 1; \\ q_2 = 1, & q_i = 0 & \text{при всех} & i \neq 2; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n-r} = 1, & q_i = 0 & \text{при всех} & i \neq n-r. \end{array}$$

Получим $n-r$ частных решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1\left(1, 0, \ldots, 0\right) \\ x_2\left(1, 0, \ldots, 0\right) \\ \ldots \quad \ldots \\ x_r\left(1, 0, \ldots, 0\right) \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} x_1\left(0, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ x_2\left(0, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ \ldots \quad \ldots \\ x_r\left(0, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \quad \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1\left(0, 0, \ldots, 1\right) \\ x_2\left(0, 0, \ldots, 1\right) \\ \ldots \quad \ldots \\ x_r\left(0, 0, \ldots, 1\right) \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти частные решения образуют *нормальную фундаментальную систему решений* СЛАУ(1.4). Очевидно, они линейно независимы. Отметим, что нормальная фундаментальная система состоит из $n-r$ частных решений, где n − число неизвестных, $r = \operatorname{Rg} A$.

Любые $n-r$ линейно независимых частных решений СЛАУ(1.4) $Y_1, Y_2, ..., Y_{n-r}$ образуют *фундаментальную систему* решений СЛАУ(1.4). Линейная комбинация решений, образующих фундаментальную систему, называется общим решением СЛАУ(1.4), то есть $X_{\text{общее}} = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \cdots + C_{n-r}Y_{n-r}$, где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ − произвольные постоянные.