Глава 2. Элементы векторной алгебры

Пусть даны точки A и B. Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – это отрезок, соединяющий эти точки и направленный от точки A, называемой *началом вектора*, к точке B, называемой *его концом*.

Длина отрезка AB называется *модулем вектора* $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$. Если $|\vec{a}| = 1$, то вектор называется *единичным вектором.*

Нулевым называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными* (обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они лежат на одной, либо на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной, либо в параллельных плоскостях.

Единичный вектор $\overrightarrow{a^{\circ}}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и одинаково с ним направленный, называется *ортом вектора* $\vec{a}$.

Единичный вектор $\overrightarrow{S^{\circ}}$, имеющий с осью S одинаковое направление, называется *ортом оси* S.

Пусть имеются ось S и вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Опустим из точек A и B на ось S перпендикуляры AA' и BB' (см. рис. 2.1).

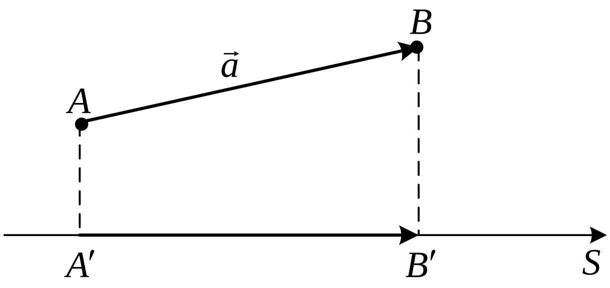

Рис. 2.1

Проекцией вектора $\vec{a}$ *на ось* S (обозначение: $np_S\,\vec{a}$) называется $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси, и $\left(-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|\right)$, если это направление противоположно направлению оси S.

§7. Линейные операции над векторами

1. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, определяемый следующими условиями:

а) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

в) $\vec{b} \parallel \vec{a}$;

с) $\vec{b}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково, если $\lambda > 0$, и направлены в противоположные стороны, если $\lambda < 0$.

2. Определим сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение: $\vec{a} + \vec{b}$). Начало вектора $\vec{b}$ совместим с концом вектора $\vec{a}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b}$ – это вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$, и направленный в сторону конца вектора $\vec{b}$ (см. рис. 2.2).

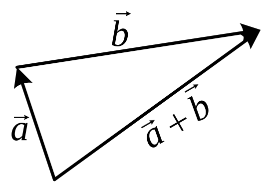

Рис. 2.2

Разложение вектора по ортам осей

Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат xyz. Орты осей Ox, Oy, Oz обозначаются, соответственно, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

или, сокращенно, $\vec{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, где числа a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Они называются *координатами вектора* $\vec{a}$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Основные задачи на векторы

1) Умножение вектора на число

Пусть дан вектор $\vec{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, λ – число, тогда $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$.

2) Сложение и вычитание векторов

Пусть даны векторы $\vec{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$ и $\vec{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$.

Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x\right)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + \left(a_z + b_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x - b_x\right)\vec{i} + \left(a_y - b_y\right)\vec{j} + \left(a_z - b_z\right)\vec{k}.$$

3) Вычисление модуля вектора

Пусть дан вектор $\vec{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$.

4) Вычисление вектора по координатам его начала и конца

Пусть даны точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ вычисляется по формуле:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

Отсюда, в частности, следует, что нулевой вектор имеет вид $\vec{O}\{0, 0, 0\}$.

5) Условие коллинеарности векторов

Векторы $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где λ – число. Откуда условие коллинеарности в координатной форме примет следующий вид: $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = \lambda$.

6) Направляющие косинусы вектора

Обозначим углы, образованные вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz, через α, β, γ соответственно (см. рис. 2.3).

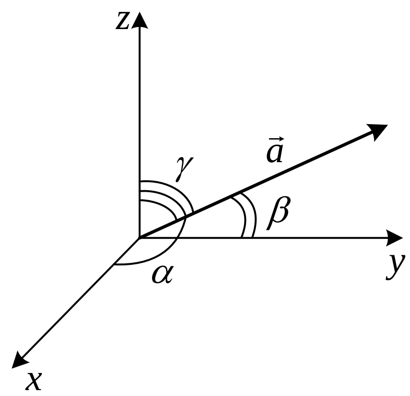

Рис. 2.3

Направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ называются $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Если дан вектор $\vec{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, то его направляющие косинусы вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Выражая из этих равенств a_x, a_y, a_z, получаем:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Основное свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

7) Вычисление орта вектора

Вычисление орта вектора $\vec{a}$ производится по формуле:

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

8) Разложение вектора по базису

Любые три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис трехмерного пространства. Это означает, что любой четвертый вектор $\vec{d}$ может быть, причем единственным образом, представлен в виде:

$$\vec{d} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – действительные числа. Эти числа называются *координатами вектора* $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Разложить вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – это значит найти числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $\vec{d} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c}$.

§8. Скалярное произведение векторов

<u>*Определение.*</u> *Скалярным произведение двух векторов* называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

Применяются следующие обозначения: $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\,\vec{b},\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)$, то есть

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right).$$

Свойства скалярного произведения:

1. *Переместительное:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. *Распределительное:* $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

3. *Сочетательное* относительно скалярного (числового) множителя:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right),$$

где λ – число.

Из определения следует, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю (так как $\cos 90^\circ=0$).

Вычислим скалярный квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2.$$

<u>Скалярное произведение векторов в координатной форме</u>

Пусть $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, тогда скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Угол между векторами

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}.$$

2.19. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\{-1,2,5\}$ и $\vec{b}\{2,-2,3\}$.

Решение.

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-2-4+15}{\sqrt{1+4+25}\cdot\sqrt{4+4+9}}=\frac{9}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{17}}=\frac{9}{\sqrt{510}}.$$

Вычисление проекции вектора на ось

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}.$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось S, образующую с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ, вычисляется по формуле

$$np_S\vec{a}=a_x\cdot\cos\alpha+a_y\cdot\cos\beta+a_z\cdot\cos\gamma.$$

Физический смысл скалярного произведения

Пусть под действием силы $\vec{F}$, постоянной по величине и направлению, точка, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M в положение N. Тогда работа этой силы вычисляется по формуле: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$.

§9. Векторное произведение векторов

<u>*Определение.*</u> Некомпланарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с общим началом образуют *правую* тройку, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ наблюдается против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *левой*.

<u>*Определение.*</u> *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\vec{c}|$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах, то есть $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\vec{a}, \hat{\vec{b}}\right)$.

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Свойства векторного произведения:

1. *Антиперестановочное:* $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$.

2. *Распределительное:* $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

3. *Сочетательное* относительно скалярного множителя:

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right),$$

где λ – число.

Из определения векторного произведения следует, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, где $\vec{0}$ – нулевой вектор.

В частности, для любого вектора $\vec{a}$ векторное произведение $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Векторное произведение в координатной форме

Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

то $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \vec{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right).$$

Вычисление площадей параллелограмма и треугольника

Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Пусть дан треугольник ABC. Его площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, как на сторонах. То есть $S_{\vartriangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Физический смысл векторного произведения

Пусть A- неподвижная точка твердого тела, а в точке B этого тела приложена сила $\vec{F}$. Тогда момент силы $\vec{F}$ относительно точки A вычисляется по формуле $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB}\times\vec{F}$.

§10. Смешанное произведение векторов

Определение. Пусть заданы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Умножим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторно. Полученный вектор умножим скалярно на вектор $\vec{c}$. Указанное произведение трех векторов называется *векторно-скалярным* или *смешанным произведением*. Обозначение: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. *Сочетательное:* $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

В силу этого свойства можно ввести обозначение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. *Сочетательное относительно скалярного множителя*:

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\,(\lambda\vec{c})=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right).$$

3. *Распределительное*: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

4. Круговая перестановка не меняет смешанного произведения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

5. Перестановка местами двух соседних векторов меняет знак смешанного произведения на противоположный $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right)$.

6. Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, если эта тройка – левая.

7. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны.

8. Смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

<u>Смешанное произведение в координатной форме</u>

Если $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$,

то
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}.$$