Глава 4. Числовые последовательности. Пределы

§15. Числовые последовательности

В физике, технике и других науках часто встречается множество различных величин: время, длина, вес и так далее. Любая из них, смотря по обстоятельствам, то принимает различные значения, то лишь одно. В первом случае мы имеем дело с *переменной* величиной, а во втором – с *постоянной.* При этом каждая величина зависит от некоторых других величин. Например, “вес” зависит от “объема” и “плотности”. То есть, по сути, мы имеем дело с функцией зависящей от других переменных величин. Исключительно важным примером переменной величины является числовая последовательность.

Определение. Пусть каждому натуральному числу n по определенному закону ставится в соответствие некоторое вещественное число a_n, тогда множество чисел

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad \text{или кратко} \quad \{a_n\},$$

расположенных в порядке возрастания номеров n, называется *числовой последовательностью*, а элемент a_n называется n-*м членом последовательности*, $n \geq 1$.

Иными словами, числовая последовательность это совокупность чисел расположенных в порядке возрастания номеров. Например:

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}: \quad 0,\ 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, ...$$

В последующем слово “числовая” будет часто опускаться.

Одной из важнейших характеристик числовой последовательности является понятие ее *сходимости* или *расходимости*.

<u>*Определение*</u>**.** Число A называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что все члены последовательности с номерами $n \geq N$ удовлетворяют неравенству

$$\left| a_n - A \right| < \varepsilon . \qquad (4.1)$$

Символическая запись:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \qquad \text{или} \qquad a_n \to A.$$

При этом также говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *сходится* к числу A, или *имеет предел* A. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, а в остальных случаях – *расходящейся*.

Укажем наглядное *геометрическое истолкование предела* числовой последовательности. Так как для любого $\varepsilon > 0$ неравенство (4.1) эквивалентно следующим

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon , \qquad (4.2)$$

то изображая на числовой оси числа $A, A \pm \varepsilon$ и a_n получим следующее: какой бы малый интервал длины 2ε с центром в точке A ни взять, *все* точки a_n, начиная с $N = N(\varepsilon)$ должны попасть *внутрь* этого интервала (так что вне его может остаться разве лишь конечное число этих точек). Точки, изображающие последовательность, *сгущаются* к предельной точке (рис. 4.1).

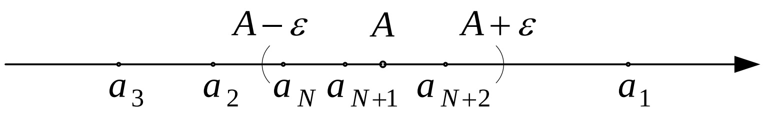


Рис. 4.1

Для практических задач важно не только значение предела, но и тот номер (на практике, например, момент времени), начиная с которого данная величина отличается от предельного значения на заданную величину (погрешность). Рассмотрим типичный пример.

Случай, когда последовательность стремится к нулю представляет особый интерес.

<u>*Определение.*</u> Последовательность $\{a_n\}$, имеющая своим пределом ноль, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, называется *бесконечно малой.*

Легко показать, что последовательность $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, является бесконечно малой, то есть.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0, \quad (\alpha > 0). \tag{4.3}$$

Бесконечно малым величинам, в некотором смысле, противопоставляются *бесконечно большие* величины.

<u>*Определение*</u>. Последовательность $\{b_n\}$ называется *бесконечно большой,* если для любого $M > 0$ существует номер $N = N(M)$ такой, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|b_n| > M\ .$$

При этом пишут:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \qquad \text{или} \qquad b_n \to \infty,$$

и говорят, что b_n *стремится к бесконечности*.

Если бесконечно большая последовательность, начиная с некоторого номера N_0, принимает только положительные значения или, соответственно, только отрицательные, то пишут:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \qquad \text{или} \qquad b_n \to +\infty,$$

соответственно,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \qquad \text{или} \qquad b_n \to -\infty.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = +\infty \quad (\alpha > 0). \tag{4.4}$$

Для вычисления пределов активно используется следующая

Теорема 1 **(арифметические свойства).**

Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к a и b соответственно, тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot a$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$.

В теореме 1 рассматривались выражения:

$$a_n \pm b_n, \quad a_n \cdot b_n, \quad \frac{a_n}{b_n}$$

в предположении, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к *конечным* пределам (для частного требовалось еще, чтобы $b \neq 0$). Однако особый интерес представляют следующие случаи:

1) последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - *бесконечно малые*, тогда говорят, что *выражение* $\frac{a_n}{b_n}$ *представляет неопределенность вида* $\left\|\frac{0}{0}\right\|$;

2) последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - *бесконечно большие*, тогда говорят, что *выражение* $\frac{a_n}{b_n}$ *представляет неопределенность вида* $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$;

3) $a_n \to +\infty$ и $b_n \to +\infty$, тогда говорят, что *выражение* $a_n - b_n$ *представляет неопределенность вида* $\|\infty - \infty\|$;

4) $a_n \to 0$, а $b_n \to +\infty$, тогда говорят, что *выражение* $a_n \cdot b_n$ *представляет неопределенность вида* $\|0 \cdot \infty\|$.

В этих случаях приходится *непосредственно* исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование получило название *раскрытие неопределенности*. Особо подчеркнем, что *все возникающие неопределенности будут, с помощью тех или иных элементарных преобразований, сводиться к двум*: $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ или $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$.

Перед тем, как приступить к рассмотрению конкретных примеров, напомним некоторые элементарные понятия.

1. *Факториал*. По определению полагают:

$$0!=1, \quad 1!=1, \quad 2!=1\cdot 2, \quad 3!=1\cdot 2\cdot 3, \quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

В частности: $(n+1)! = n!\cdot(n+1), \quad (n+2)! = n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ и так далее.

2. *Формулы сокращенного умножения*. Справедливы формулы:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \tag{4.5}$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3. \quad (4.6)$$

В формуле (4.5) *сопряженным выражением* к $(a-b)$ называется выражение $(a+b)$ и наоборот. В формуле (4.6) *сопряженным выражением* к $(a \pm b)$ называется выражение $(a^2 \mp ab + b^2)$ и наоборот.

Рассмотрим примеры на вычисление пределов.

Для раскрытия неопределенностей вида $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$ *можно «отбрасывать» слагаемые с меньшими степенями (однако так, чтобы не получить 0).*

§16. Предел функции

В предыдущем параграфе рассматривалось понятие предела числовой последовательности, то есть функции натурального аргумента. В этих функциях аргумент изменялся разрывно, принимая значения 1, 2, …, n, …

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$, где аргумент изменяется непрерывно, принимая все значения из определенного промежутка $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, за исключением, возможно, точки x_0.

Определение. Интервал $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется δ-*окрестностью* точки x_0.

Сформулируем определение предела функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Определение. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из условия $0 < |x - x_0| < \delta$, следует неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \qquad (4.7)$$

Символическая запись:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ или } f(x)\underset{x\to x_0}{\to} A.$$

В определении предела неравенство $|x-x_0|<\delta$ означает, что x принадлежит δ-окрестности точки x_0, т.к.

$$|x-x_0|<\delta \quad \Leftrightarrow \quad -\delta<x-x_0<\delta \quad \Leftrightarrow$$
$$x_0-\delta<x<x_0+\delta \quad \Leftrightarrow \quad x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta).$$

Аналогично, неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ равносильно тому, что $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки A. Итак, если число A является пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, то геометрически это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности, исключая, быть может, саму точку x_0 (в точке x_0 функция $y=f(x)$ может быть и не определена), соответствующие значения функции будут находиться в ε-окрестности точки A. На рис. 4.2 в качестве δ можно взять $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$.

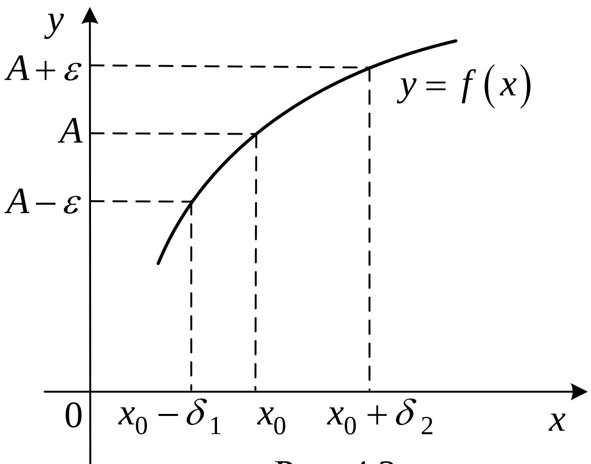


Рис. 4.2

При вычислении пределов функций используется следующая

Теорема 2. Если элементарная функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

В этом случае вычисление предела функции сводится к подстановке в функцию предельного значения аргумента.

Наряду с изучением поведения функции в конечной точке изучают поведение функции на бесконечности. Если переменная x неограниченно возрастает, то говорят, что она стремится к $+\infty$ и пишут: $x \to +\infty$. Если же переменная x неограниченно убывает, то говорят, что она стремится к $-\infty$ и пишут: $x \to -\infty$.

Сформулируем определения предела функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

<u>Определение.</u> Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > M$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

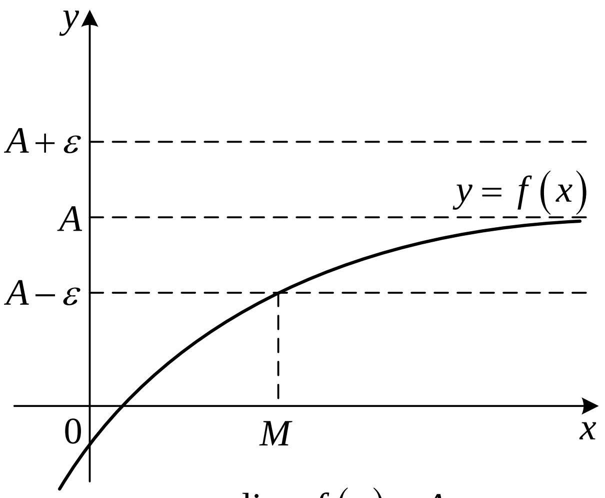
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} A \quad \text{(рис. 4.3).}$$

<u>Определение.</u> Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M = M(\varepsilon) < 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x < M$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

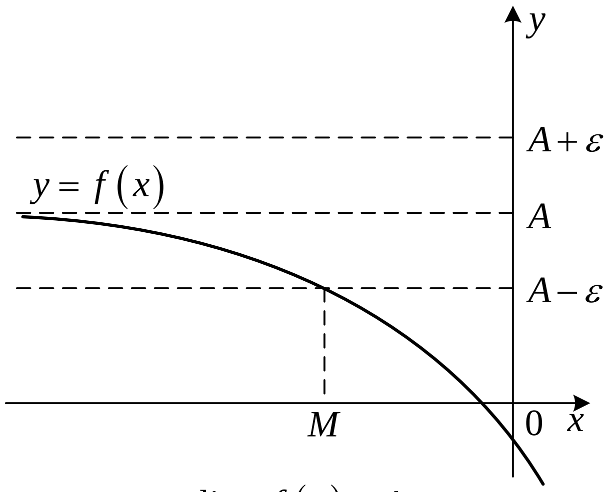
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} A \quad \text{(рис. 4.4).}$$

Функция $y = f(x)$ может стремиться к одному и тому же числу A как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

Рис. 4.3



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

Рис. 4.4

Мы рассмотрели понятия предела функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Заметим, что эти понятия отличаются друг от друга лишь тем, что неравенство (4.7) выполняется для различных интервалов оси Ox.

Аналогично понятию δ-окрестности точки x_0, введем понятия окрестности $+\infty$, $-\infty$ и ∞, и тогда рассматриваемые в дальнейшем определения и теоремы можно будет сформулировать для общего случая, то есть когда x стремится к конечной точке, либо неограниченно возрастает или убывает.

Определение. Пусть $\delta > 0$, тогда:

1) интервал $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$ называется δ – *окрестностью* $+\infty$;

2) интервал $U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta)$ называется δ – *окрестностью* $-\infty$;

3) область $U_\delta(\infty) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$ называется δ – *окрестностью* ∞.

В дальнейшем под записью $x \to a$ будем понимать, что переменная x стремится к конечному числу или к бесконечности, то есть a - конечное число или один из символов: $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Как и для последовательностей, особый интерес будут представлять функции, предел которых равен 0 или ∞, то есть бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.) при $x \to a$, если для любого $M > 0$ найдется такая окрестность $U_\delta(a)$, что для всех $x \in U_\delta(a)$, $x \neq a$, справедливо неравенство $|f(x)| > M$.

Символическая запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{или} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\to} \infty.$$

Если функция $y = f(x)$, стремясь к бесконечности, остается положительной, то пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (рис. 4.5), если же при стремлении $f(x)$ к бесконечности она отрицательна, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ (на рис. 4.6 $x \to -\infty$).

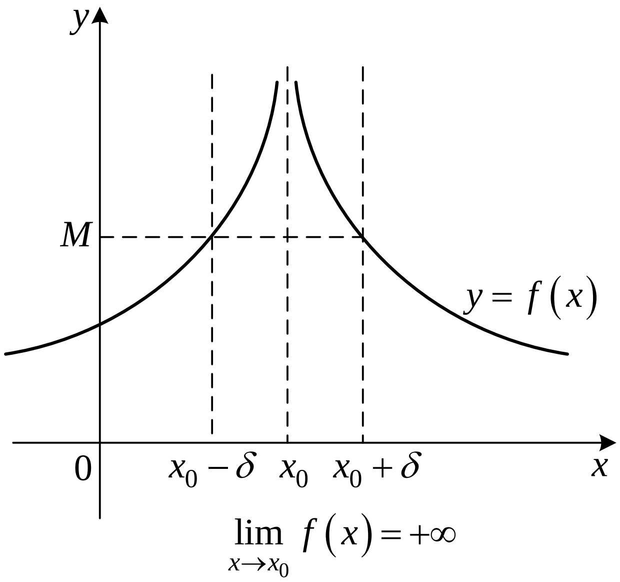


Рис. 4.5

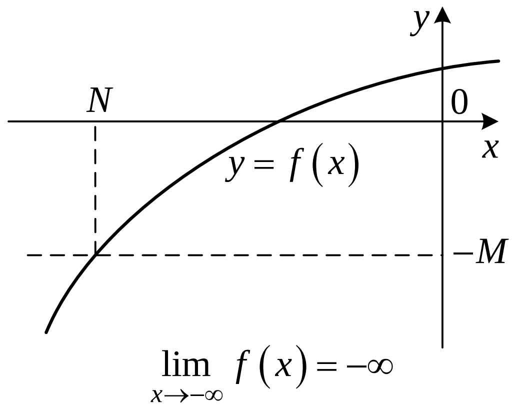


Рис. 4.6

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует тесная связь, которую устанавливает следующая

Теорема 3.

1) Пусть $f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to a$, тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to a$, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0. \qquad (4.8)$$

2) Пусть $f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая при $x \to a$, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \qquad (4.9)$$

Используя соотношения (4.8) и (4.9), введем следующие обозначения, употребляющиеся для сокращения записи: для любого числа $C>0$ будем писать $\frac{C}{+0}=+\infty$, $\frac{C}{-0}=-\infty$, $\frac{C}{+\infty}=+0$, $\frac{C}{-\infty}=-0$, $\frac{\pm C}{\infty}=0$, $\frac{\pm C}{0}=\infty$.

Теорема 4. Если $f(x)$ − б.м. функция при $x\to a$, а $g(x)$− функция ограниченная в некоторой δ−окрестности точки $x=a$ (то есть для всех $x\in U_\delta\left(a\right)$: $\left|g(x)\right|\le M$), то их произведение $f(x)\cdot g(x)$ является б.м. функцией при $x\to a$.

Итак, в простейших случаях вычисление предела функции сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако, часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида:

$$\left\|\frac{0}{0}\right\|,\ \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|,\ \left\|0\cdot\infty\right\|,\ \left\|\infty-\infty\right\|,\ \left\|0^0\right\|,\ \left\|\infty^0\right\|,\ \left\|1^\infty\right\|.$$

Нахождение предела функции в этих случаях называется *раскрытием неопределенности*. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

При вычислении пределов функций необходимо знать следующие свойства пределов.

***Теорема 5* (арифметические свойства пределов)**.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, тогда:

1) $\lim\limits_{x\to a} C=C$, где $C=Const$.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\pm B$.

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\cdot B$.

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$.

Способ вычисления предела функции $y=f(x)$ существенно зависит от того, стремится ли переменная x к конечному числу или к бесконечности. В связи с этим выделяются два случая:

1. x стремится к $+\infty,\ -\infty,\ \infty$.

2. x стремится к конечному числу $x_0\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим эти случаи по порядку.

Вычисление предела функции при стремлении аргумента x к $+\infty,\ -\infty,\ \infty$

1. Рассмотрим случай, когда $x\to+\infty$.

Методы вычисления предела функции при $x\to+\infty$ точно такие, как и в случае последовательности (грубо говоря, нужно заменить букву «n» на букву «x»): мы также «отбрасываем» меньшие степени; умножаем и делим, если нужно, на сопряженное выражение; приводим выражение, стоящее под знаком предела к общему знаменателю и так далее.

2. Рассмотрим случай, когда $x\to-\infty$.

Методы решения те же, что и в пункте 1, но необходимо учитывать, что $\sqrt{x^2}=|x|$. Поэтому

$$\sqrt{x^2}=|x|=-x \text{ при } x<0.$$

3. Рассмотрим случай, когда $x\to\infty$.

В этом случае, как указывалось выше, мы полагаем, что функция $f(x)$ имеет равные пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Способы решения такие же, что и в пункте 1.

Вычисление предела функции при стремлении аргумента x к конечному числу $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Рассмотрим предел вида: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,

где $P_n(x),\ Q_m(x)$ - многочлены от x степени n и m соответственно.

Возможны три случая:

1) $Q_m(x_0) \neq 0$. Тогда, по теореме 2,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}.$$

2) $Q_m(x_0) = 0, \quad P_n(x_0) \neq 0$. Тогда, по формуле (4.9),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\| \frac{P_n(x_0)}{0} \right\| = \infty.$$

3) $Q_m(x_0) = P_n(x_0) = 0$. Тогда $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ делятся на $x - x_0$, то есть

$$P_n(x) = (x - x_0)R_{n-1}(x),\ Q_m(x) = (x - x_0)S_{m-1}(x).$$

Поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)R_{n-1}(x)}{(x - x_0)S_{m-1}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_{n-1}(x)}{S_{m-1}(x)},$$

и мы снова повторяем рассуждения по пунктам 1) – 3), пока не избавимся от неопределенности $\left\| \dfrac{0}{0} \right\|$.

Напомним, что квадратный трехчлен $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, у которого дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$ может быть представлен в следующем виде:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена, которые могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases} \text{(т. Виета)} \quad \text{или по формуле} \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Следует также помнить разложение разности квадратов, разности и суммы кубов на множители (формулы (4.5), (4.6)).

2. Рассмотрим предел дроби, содержащей иррациональные выражения, если ее числитель и знаменатель – бесконечно малые функции.

Для вычисления предела нам, как и в случае $x\to\infty$, нужно избавиться от иррациональности, умножив числитель и знаменатель дроби на соответствующий сопряженный множитель.

§17. Вычисление пределов функций с использованием первого замечательного предела, а также следствий из него

Для вычисления пределов функций большое значение имеет следующий предел.

Теорема 6 **(первый замечательный предел)**.

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1.$$

В теории пределов особую роль играет понятие эквивалентности функций.

<u>*Определение.*</u> Бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Символическая запись:

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

Например, теорема 6 означает, что $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$.

Приведенные ниже формулы получены с помощью первого замечательного предела.

Следствие 1.

1) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\arcsin u}{u}=1$ или $\arcsin u \underset{u\to 0}{\sim} u$.

2) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} u}{u}=1$ или $\operatorname{tg} u \underset{u\to 0}{\sim} u$.

3) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} u}{u}=1$ или $\operatorname{arctg} u \underset{u\to 0}{\sim} u$.

При вычислении пределов активно используется следующая

***Теорема** 7* **(о замене бесконечно малых функций им эквивалентными)**. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения функций, им эквивалентных, то есть, если $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$, $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Использование первого замечательного предела, следствий из него, а также теоремы 7 существенно упрощают вычисление пределов.

Следует отметить, что при вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, часто используются следующие формулы:

$$1-\cos u = 2\sin^2\frac{u}{2},$$

$$\sin u-\sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2},$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2}.$$

Отметим, что заменять функции им эквивалентными в сумме или в разности можно только в том случае, когда эта сумма (разность) не обращается в 0.

Для упрощения вычислений удобно пользоваться арифметическими свойствами пределов. А именно:

> *если один из сомножителей (например, в числителе или знаменателе дроби) имеет* ***ненулевой*** *предел, то его заменяют значением этого предела.*

В предыдущих примерах аргумент тригонометрических функций стремился к 0 и мы могли пользоваться первым замечательным пределом и его следствиями. Если же при вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ аргумент функции не стремится к 0, то используется следующий прием: представляем x в виде

$$x = x_0 + (x - x_0)$$

и используем формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \sin(\pi\pm\alpha) = \mp\sin\alpha, \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right) = -\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp\sin\alpha, \qquad \cos(\pi\pm\alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right) = \pm\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha.$$

В технических и инженерных задачах часто оказывается важным порядок малости бесконечно малой функции относительно другой бесконечно малой, что приводит нас к задаче сравнения б.м. функций.

Определение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции при $x \to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=C$ $(C\neq 0)$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка*;

в частности, если $C=1$, функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны;

2) если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=0$, то функция $f(x)$ называется б.м. *более высокого порядка,* чем функция $g(x)$, а функция $g(x)$ называется б.м. *более низкого порядка*, чем $f(x)$;

3) если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\infty$, то функция $f(x)$ называется б.м. *более низкого порядка,* чем функция $g(x)$, а функция $g(x)$ называется б.м. *более высокого порядка*, чем $f(x)$;

4) если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то б.м. величины $f(x)$ и $g(x)$ называются *несравнимыми*.

§18. Вычисление пределов функций с использованием второго замечательного предела, а также следствий из него

Наряду с первым замечательным пределом особое место в теории пределов занимает следующий предел:

Теорема 8 **(второй замечательный предел).**

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\left\|1^{\infty}\right\|=e.$$

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\left\|1^\infty\right\|=e.$$

Второй замечательный предел, а также приведенные ниже следствия из этого предела часто используются для раскрытия различных видов неопределенностей.

Следствие 2.

1) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$ или $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$.

2) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u\ln a}=1$ или $a^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u\ln a$.

3) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\log_a(1+u)}{\frac{u}{\ln a}}=1$ или $\log_a(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}\frac{u}{\ln a}$.

4) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ или $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$.

При раскрытии неопределенности вида $\left\|1^\infty\right\|$ следует воспользоваться вторым замечательным пределом (теорема 8).

Отметим, что конструкция выражения, стоящего под знаком предела, такова: к единице прибавляется бесконечно малая функция и эта сумма возводится в степень, равную обратной величине прибавляемой бесконечно малой. На этом и основан метод вычисления пределов этого вида.

Как правило, следствия из первого и второго замечательных пределов используются при вычислении пределов совместно. Соберем все следствия в одну таблицу 4.1.

Таблица 4.1

Таблица эквивалентных бесконечно малых

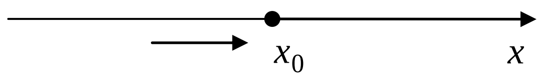
Следствия из I замечательного предела:	**Следствия из II замечательного предела:**
1. $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ 2. $\arcsin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ 3. $\operatorname{tg} u \underset{u\to 0}{\sim} u$ 4. $\operatorname{arctg} u \underset{u\to 0}{\sim} u$	1. $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ 2. $a^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u \ln a$ 3. $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ 4. $\log_a(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u}{\ln a}$

§19. Непрерывность функции

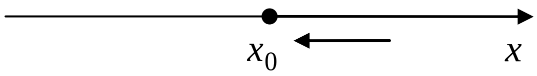
Одним из фундаментальных понятий в математике есть понятие *непрерывности* функции.

Для рассмотрения этого ключевого понятия нам необходимо ввести понятие *одностороннего предела* функции в точке.

Если $x \to x_0$, оставаясь меньше x_0, то говорят, что $x \to x_0$ слева и обозначают: $x \to x_0 - 0$.



Если $x \to x_0$, оставаясь больше x_0, то говорят, что $x \to x_0$ справа и обозначают: $x \to x_0 + 0$.



Если $x_0 = 0$, то вместо $x \to 0 - 0$ и $x \to 0 + 0$ часто пишут $x \to -0$ и $x \to +0$ соответственно.

Сформулируем определения предела функции $y = f(x)$ слева (левостороннего предела) и предела функции $y = f(x)$ справа (правостороннего предела).

<u>*Определение*</u>. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (*слева*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$ справедливо неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ (предел слева), (рис. 4.7).

<u>*Определение.*</u> Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (*справа*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$ справедливо неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ (предел справа) (рис. 4.8).

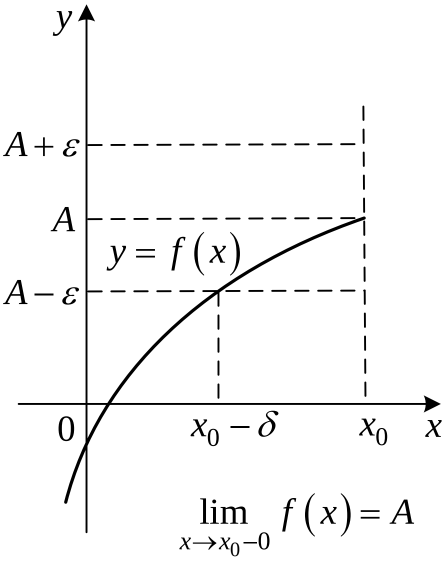


Рис. 4.7

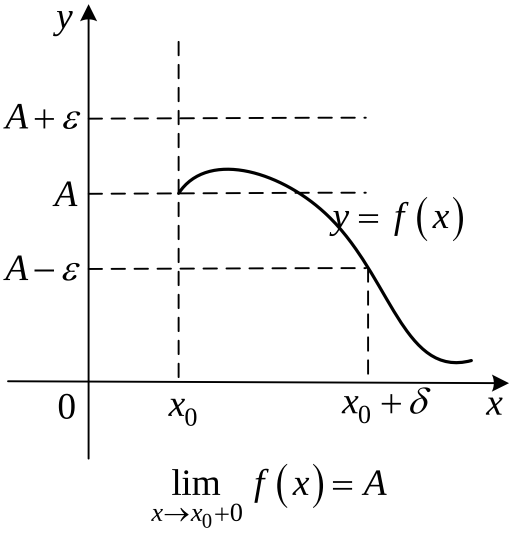


Рис. 4.8

Сформулируем теперь определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0.

<u>*Определение.*</u> Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (4.10)$$

<u>*Определение.*</u> Точка, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва*.

Равенство (4.10) можно записать в эквивалентной форме:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \qquad (4.11)$$

которая позволяет дать классификацию точек разрыва.

<u>*Определение.*</u>

1. Пусть существуют конечные односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$. Тогда:

1) если $A \neq B$, то точка x_0 называется *точкой разрыва I рода* (рис. 4.9);

2) если $A = B$, но $f(x)$ не определена в точке x_0, либо $f(x_0) \neq A$, то точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва* (рис. 4.10).

2. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва II рода* (см. например, рис. 4.11).

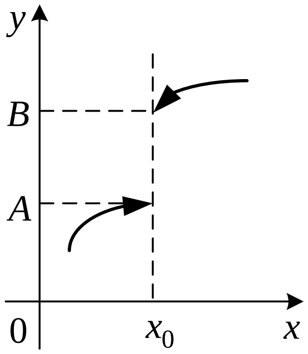


Рис. 4.9

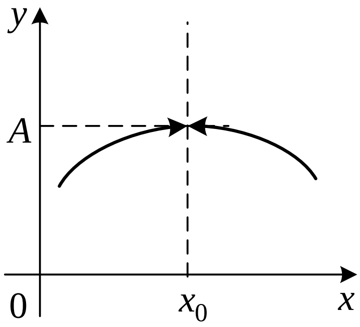


Рис. 4.10

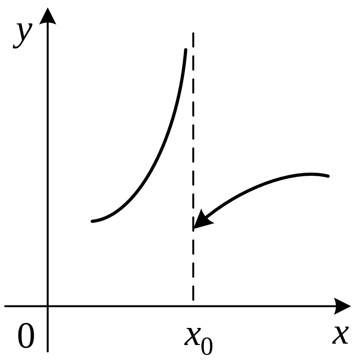


Рис. 4.11

При исследовании функций на непрерывность большое значение имеет следующая

***Теорема 10* (о непрерывности элементарной функции)**. Элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.