# Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Елементи лінійної алгебри» складається з 8 практичних завдань, що охоплюють правила виконання дій над матрицями, обчислення визначників, розв'язання матричних рівнянь, пошук рангу матриці, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) за правилом Крамера, матричним методом, дослідження і розв'язок довільних неоднорідних СЛАР, а також побудову фундаментальної системи розв'язків однорідної СЛАР. Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [3, 4, 5, 8, 9, 10, 12], а також відповісти на контрольні питання.

## Контрольні питання

1. Поняття матриці. Типи матриць.
2. За якими правилами виконуються дії над матрицями:
   а) транспонування матриці,
   б) множення матриці на число,
   в) додавання двох матриць,
   г) добуток двох матриць,
   д) піднесення матриці в цілу невід'ємну степінь?

3. Поняття визначника. Основні властивості визначників.
4. Як обчислити визначник:
   а) розкладанням за елементами рядка чи стовпця,
   б) зведенням до трикутного вигляду,
   в) за правилом трикутника?
5. Поняття оберненої матриці. Для яких матриць існують обернені?
6. Як знайти обернену матрицю?
7. Поняття рангу матриці.
8. Методи обчислення рангу матриці.

9. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Сумісні, несумісні, визначені й невизначені СЛАР.

10. Правило Крамера розв'язання СЛАР. Які СЛАР розв'язуються за цим правилом?

11. Які СЛАР і як розв'язуються за допомогою матриці, оберненої до матриці системи?

12. Теорема Кронекера-Капеллі.
13. Метод Гауса розв’язання СЛАР.
14. Фундаментальна система розв’язків однорідної СЛАР.

## Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

**Приклад 1.** Виконати дії:

а) знайти $5A-2B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

б) знайти добуток матриць $A\cdot B^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.*

а) Щоб помножити матрицю на число, треба кожний елемент матриці помножити на це число, а при додаванні двох матриць одного розміру, треба додати відповідні елементи цих матриць.

Тому одержимо:

$$5A-2B=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -15 & 20 \\ 10 & 35 & -10 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 4 & -10 & -2 \\ 6 & -14 & -4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -25 & 18 \\ 16 & 21 & -14 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) Транспонуємо матрицю *B*:

$$B^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця $A$ має розмір $3\times 4$, матриця $B^T$ – $4\times 3$. Оскільки число стовпців матриці $A$ дорівнює числу рядків матриці $B^T$, то матриці $A$ і $B^T$ можна перемножити, і матриця $A\cdot B^T=C$ має розмір $3\times 3$.

Елементи матриці $C$ обчислюємо за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j},\quad (i,j=1,2,3).$$

$$c_{11}=4\cdot 2+3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 0=4,$$
$$c_{12}=4\cdot(-3)+3\cdot 6+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-1)=6,$$
$$c_{13}=4\cdot 5+3\cdot(-4)+(-1)\cdot 0+2\cdot 4=16,$$
$$c_{21}=(-1)\cdot 2+4\cdot(-1)+2\cdot 1+0\cdot 0=-4,$$
$$c_{22}=(-1)\cdot(-3)+4\cdot 6+2\cdot(-2)+0\cdot(-1)=23,$$
$$c_{23}=(-1)\cdot 5+4\cdot(-4)+2\cdot 0+0\cdot 4=-21,$$
$$c_{31}=2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 1+(-2)\cdot 0=8,$$
$$c_{32}=2\cdot(-3)+(-1)\cdot 6+3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)=-16,$$
$$c_{33}=2\cdot 5+(-1)\cdot(-4)+3\cdot 0+(-2)\cdot 4=6.$$

У результаті одержимо:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ -4 & 23 & -21 \\ 8 & -16 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Відповідь*: а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -25 & 18 \\ 16 & 21 & -14 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ -4 & 23 & -21 \\ 8 & -16 & 6 \end{pmatrix}$.

**Приклад 2.** Задано багаточлен $f(x)=-2x^2+4x-3$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

*Розв'язання.* Відповідно до означення багаточлена від матриці одержимо: $f(A)=-2\cdot A^2+4\cdot A-3E$, де $E$ – одинична матриця третього порядку.

Знаходимо спочатку $A^2$:

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot3+(-1)\cdot4+2\cdot2 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot1 & 3\cdot2+(-1)\cdot3+2\cdot(-1) \\ 4\cdot3+(-4)\cdot4+3\cdot2 & 4\cdot(-1)+(-4)\cdot(-4)+3\cdot1 & 4\cdot2+(-4)\cdot3+3\cdot(-1) \\ 2\cdot3+1\cdot4+(-1)\cdot2 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-4)+(-1)\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot3+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 2 & 15 & -7 \\ 8 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тоді $f(A)=(-2)\cdot\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 2 & 15 & -7 \\ 8 & -7 & 8 \end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} -18 & -6 & -2 \\ -4 & -30 & 14 \\ -16 & 14 & -16 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ 16 & -16 & 12 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -10 & 6 \\ 12 & -49 & 26 \\ -8 & 18 & -23 \end{pmatrix}.$$

*Відповідь:* $\begin{pmatrix} -9 & -10 & 6 \\ 12 & -49 & 26 \\ -8 & 18 & -23 \end{pmatrix}.$

**Приклад 3.** Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ двома способами: а) розкладанням за елементами рядка (або стовпця), б) зведенням до трикутного вигляду.

*Розв'язання.*

а) Розкладемо даний визначник за елементами другого рядка, користуючись формулою: $\Delta=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},\ i=1,...,n\,(n=4)$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1&6\\3&-1&0&2\\1&-4&-3&5\\-3&2&1&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3&1&6\\-4&-3&5\\2&1&-1\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1&6\\1&-3&5\\-3&1&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&-3\\-3&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot 24-1\cdot(-66)+2\cdot(-30)=-66.$$

б) Зведемо визначник до трикутного вигляду, користуючись властивостями визначника:

| | |
|---|---|
| $\begin{vmatrix}2&-3&1&6\\3&-1&0&2\\1&-4&-3&5\\-3&2&1&-1\end{vmatrix}=$ | міняємо місцями перший і третій стовпці |
| $=-\begin{vmatrix}1&-3&2&6\\0&-1&3&2\\-3&-4&1&5\\1&2&-3&-1\end{vmatrix}=$ | додаємо до третього рядка перший, помножений на 3, до четвертого рядка – перший, помножений на (–1) |
| $=-\begin{vmatrix}1&-3&2&6\\0&-1&3&2\\0&-13&7&23\\0&5&-5&-7\end{vmatrix}=$ | додаємо до третього рядка другий, помножений на (–13), до четвертого рядка – другий, помножений на 5 |
| $=-\begin{vmatrix}1&-3&2&6\\0&-1&3&2\\0&0&-32&-3\\0&0&10&3\end{vmatrix}=$ | міняємо місцями третій і четвертий стовпці |
| $=\begin{vmatrix}1&-3&6&2\\0&-1&2&3\\0&0&-3&-32\\0&0&3&10\end{vmatrix}=$ | додаємо третій рядок до четвертого |

$$=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-22) = -66.$$

*Відповідь:* $-66$.

**Приклад 4.** Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Запишемо це рівняння у вигляді $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то розв'язок цього рівняння знаходиться за формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Обчислимо $\det A$ за правилом трикутника:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 16 + 0 - 10 - 0 - 12 = -7.$$

$\det A = -7 \neq 0$, отже, матриця $A$ – невироджена і для неї існує обернена матриця, яку обчислюємо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ik}$ – алгебраїчні доповнення елемента $a_{ik}$ матриці $A$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 4, \; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -11, \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -17,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8, \; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Тоді $A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -11 & 8 \\ 3 & -17 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{17}{7} & -\frac{13}{7} \end{pmatrix}$. Тому

$$X = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -11 & 8 \\ 3 & -17 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -17 \\ 24 & 18 & 110 \\ 46 & 31 & 156 \end{pmatrix}.$$

**Перевірка.** Підставимо знайдену матрицю в рівняння

$$A \cdot X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -17 \\ 24 & 18 & 110 \\ 46 & 31 & 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = B,$$

отже, $X$ дійсно є розв'язком рівняння.

*Відповідь:* $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -17 \\ 24 & 18 & 110 \\ 46 & 31 & 156 \end{pmatrix}$.

**Приклад 5.** Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

*Розв'язання.* Щоб знайти ранг матриці $A$ зведемо її за допомогою елементарних перетворень до трикутної або трапецієвидної форми:

| | |
|---|---|
| $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \sim$ | додаємо до першого рядка другий |
| $\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \sim$ | додаємо до другого рядка перший, помножений на (–3), до третього – перший, помножений на 4, до четвертого – перший, помножений на 3 |

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & -19 & -8 \\ 0 & -3 & 29 & 5 \\ 0 & -3 & 29 & 5 \end{pmatrix}\sim$$

додаємо до другого рядка третій, помножений на 2, до четвертого – третій, помножений на (–1)

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 39 & 2 \\ 0 & -3 & 29 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на 3

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 39 & 2 \\ 0 & 0 & 146 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B.$$

Ранг матриці $A$ дорівнює числу ненульових рядків матриці $B$. Отже $\mathrm{Rg}A=3$.

*Відповідь:* $3$.

**Приклад 6.** Розв'язати систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$

а) за правилом Крамера, б) матричним методом.

*Розв'язання***.** а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-33.$$

Якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за правилом Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta_i \quad (i=1,2,3)$ отримаємо, якщо у $\Delta$ замінимо $i-$тий стовпець стовпцем правих частин системи.

Обчислимо визначники $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -66,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 33,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 14 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -99.$$

Отже: $x_1 = \dfrac{-66}{-33} = 2, \quad x_2 = \dfrac{33}{-33} = -1, \quad x_3 = \dfrac{-99}{-33} = 3$.

**Перевірка.** Підставляючи знайдений розв'язок у систему рівнянь, одержимо: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 14, \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4, \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -1. \end{cases}$

Отже розв'язок знайдено правильно.

б) Введемо такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

і запишемо систему як матричне рівняння: $A \cdot X = B$.

Це рівняння має єдиний розв'язок $X = A^{-1} \cdot B$, тому що $\Delta = \det A \neq 0$. Знайдемо $A^{-1}$:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -5, & A_{12} = -1, & A_{13} = -8, \\ A_{21} = 1, & A_{22} = -13, & A_{23} = -5, \\ A_{31} = -8, & A_{32} = 5, & A_{33} = 7. \end{array}$$

Отже: $A^{-1} = -\dfrac{1}{33} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -8 \\ -1 & -13 & 5 \\ -8 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді:

$$X = -\frac{1}{33} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -8 \\ -1 & -13 & 5 \\ -8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{33} \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ -99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язком системи є $x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$.

*Відповідь:* $(2; -1; 3)$.

**Приклад 7.** Дослідити системи рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі і розв'язати за методом Гауса ті з них, які мають розв'язок.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -2, \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

*Розв'язання.*

а) Випишемо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right),$$

де $A$ – матриця системи, $B$ – матриця-стовпець правих частин рівнянь.

Будемо за допомогою елементарних перетворень знаходити одночасно ранги матриць $A$ і $\overline{A}$ (при цьому над стовпцями будемо, при необхідності, проводити тільки одне перетворення – перестановку перших чотирьох стовпців разом із відповідними невідомими).

Проводимо обчислення:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–1), до третього – перший, помножений на (–2), до четвертого – перший, помножений на (–3)

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & 7 \end{array}\right) \sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на $(-0,5)$, до четвертого – другий, помножений на (–2)

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

додаємо до четвертого рядка третій, помножений на (–3)

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Отже виходить, що $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = 4$. За теоремою Кронекера-Капеллі система має єдиний розв'язок.

Одержана матриця є розширеною матрицею системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 = 0, \\ \quad -2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 6, \\ \qquad\qquad -x_3 + \ \ x_4 = -1, \\ \qquad\qquad\qquad -2x_4 = -2, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі рівнянь.

З останнього рівняння $x_4 = 1$. Підставляючи його в третє рівняння, знаходимо $x_3 = 2$, з другого рівняння знаходимо $x_2 = -1$, а з першого $-x_1 = 1$.

Таким чином, розв'язком заданої системи рівнянь є $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

б) Випишемо розширену матрицю системи б):

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

і будемо одночасно шукати $\operatorname{Rg} A$ і $\operatorname{Rg} \overline{A}$.

Міняючи місцями перший і другий рядки, одержимо:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–2),до третього – перший, помножений на (–4)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -14 \end{array}\right) \sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на (–1)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Отже, $\operatorname{Rg} A = 2$, а $\operatorname{Rg} \overline{A} = 3$.

Якщо $\operatorname{Rg} A \neq \operatorname{Rg} \overline{A}$, то за теоремою Кронекера-Капеллі така система не має розв'язку.

в) Випишемо розширену матрицю системи в) і одночасно будемо знаходити ранги матриць $A$ та $\overline{A}$.

$$\overline{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–2), до третього – перший, помножений на (–4)

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -7 & 5 & -3 & -3\\ 0 & -10 & 1 & -9 & -1 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

міняємо місцями другий та четвертий стовпці

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 5 & -7 & -3\\ 0 & -9 & 1 & -10 & -1 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на (–3)

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 5 & -7 & -3\\ 0 & 0 & -14 & 11 & 8 \end{array}\right)\end{array}.$$

Оскільки $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = 3$, то за теоремою Кронекера-Капеллі система має розв'язок, і оскільки число невідомих $n = 4 > 3$, то система є невизначеною, тобто має безліч розв'язків.

Одержана матриця є розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_3 + 3x_2 = 1,\\ \quad -3x_4 + 5x_3 - 7x_2 = -3,\\ \qquad -14x_3 + 11x_2 = 8, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі.

Виберемо як базисні невідомі $x_1, x_4, x_3$, а за вільну невідому – $x_2$ і перенесемо її в праву частину, тобто одержимо таку систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_3 = 1 - 3x_2,\\ \quad -3x_4 + 5x_3 = -3 + 7x_2,\\ \qquad -14x_3 = 8 - 11x_2. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему відносно базисних невідомих, отримаємо:

$$x_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x_2,\quad x_3=-\frac{4}{7}+\frac{11}{14}x_2,\quad x_4=\frac{1}{21}-\frac{43}{42}x_2.$$

Надаючи вільній невідомій довільне значення $x_2=C$, запишемо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}C,\\ x_2=C,\\ x_3=-\frac{4}{7}+\frac{11}{14}C,\\ x_4=\frac{1}{21}-\frac{43}{42}C. \end{cases}$$

*Відповідь*: а) $(1;-1;2;1)$; б) $\mathrm{Rg}\,A=2$, а $\mathrm{Rg}\,\overline{A}=3$ – така система не має розв'язку; в) $\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}C,\\ x_2=C,\\ x_3=-\frac{4}{7}+\frac{11}{14}C,\\ x_4=\frac{1}{21}-\frac{43}{42}C, \qquad \text{де} \quad C-\text{стала}. \end{cases}$

**Приклад 8**. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-3x_4=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+2x_2-x_4=0,\\ x_1+4x_2-2x_3+5x_4=0. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Випишемо матрицю системи і знайдемо її ранг.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3\\ 2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\sim$$

‖ до другого рядка додаємо перший, помножений на (–2), до третього – перший, помножений на (–3), до четвертого – перший, помножений на (–1) ‖

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}\sim$$

додаємо до третього і четвертого рядків другий, помножений на $(-1)$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже $\mathrm{Rg}A = 2$, а число невідомих $n = 4$. Система є невизначеною, тому що $\mathrm{Rg}A < n$.

Одержана матриця є матрицею однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі.

Виберемо як базисні невідомі $x_1$, $x_2$, а за вільні невідомі – $x_3$, $x_4$ і перенесемо їх до правих частин рівнянь. Тоді одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3x_4 - x_3, \\ 5x_2 = -8x_4 + 3x_3. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо базисні невідомі, виражаючи їх через вільні:

$$x_1 = -\frac{2}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4, \quad x_2 = \frac{3}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4.$$

Надаючи вільним невідомим довільні значення $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, запишемо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}C_1 + \frac{7}{5}C_2, \\ x_2 = \frac{3}{5}C_1 - \frac{8}{5}C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Надаючи сталим значення $C_1 = 5$, $C_2 = 0$, а потім $C_1 = 0$, $C_2 = 5$ одержимо два частинних розв'язки системи:

$$\overrightarrow{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \overrightarrow{X}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої системи лінійних рівнянь.

Загальний розв'язок системи можна записати так: $\overrightarrow{X} = C_1 \overrightarrow{X}_1 + C_2 \overrightarrow{X}_2$.

*Відповідь:* фундаментальна система розв’язків системи: $(-2; 3; 5; 0)$, $(7; -8; 0; 5)$.