Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Векторна алгебра й аналітична геометрія» складається з 8 практичних завдань, що охоплюють дії над векторами, скалярний, векторний і мішаний добутки та їх фізичні й геометричні застосування, задачі аналітичної геометрії на площині (пряма, криві другого порядку), і у просторі (площина, пряма). Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [3, 4, 5, 8, 9, 10, 12], а також відповісти на контрольні питання.

Контрольні питання

1. Вектори. Лінійні операції над векторами.
2. Проекція вектора на вісь.
3. Дії над векторами, що задані в координатній формі. Напрямні косинуси. Довжина вектора. Відстань між двома точками.
4. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Умова перпендикулярності векторів.
5. Векторний добуток двох векторів, його властивості, фізичні й геометричні застосування.
6. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості, геометричні застосування. Умова компланарності трьох векторів.
7. Пряма на площині. Кутовий коефіцієнт.
8. Кут між прямими на площині. Відстань від точки до прямої на площині.
9. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
10. Площина. Нормальний вектор площини. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами.
11. Пряма у просторі. Напрямний вектор прямої. Канонічні й параметричні рівняння прямої. Загальний вигляд прямої у просторі. Кут між прямими у просторі. Кут між прямою і площиною.
12. Відстань від точки до площини, до прямої у просторі.

Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Відомо, що $\overrightarrow{MC}$ спрямований у напрямку бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$, де $A(4;0;10)$, $B(1;5;2)$ і $M(2;3;4)$. Знайти координати точки C, якщо $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{42}$.

Розв'язання. Якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то вектор $\vec{c}$ за умови, що $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, спрямований у напрямку бісектриси кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Порівняємо довжини векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$: $\overrightarrow{MA} = (2;-3;6)$, тоді $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$, а $\overrightarrow{MB} = (-1;2;-2)$, $\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, тобто $\left|\overrightarrow{MA}\right| \neq \left|\overrightarrow{MB}\right|$. Візьмемо замість вектора $\overrightarrow{MB}$ такий вектор $\overrightarrow{MB_1}$, що $\overrightarrow{MB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$ і $\left|\overrightarrow{MB_1}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$.

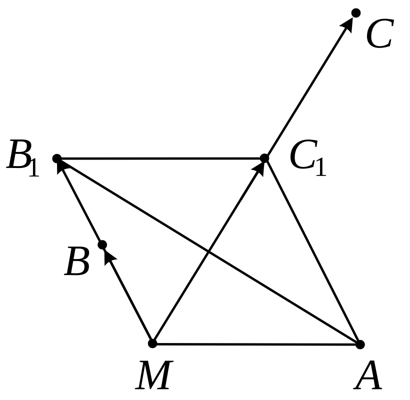


Рисунок 2.1

Очевидно, $\overrightarrow{MB_1} = \frac{7}{3} \cdot \overrightarrow{MB}$, тобто $\overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Тоді вектор $\overrightarrow{MC_1}$, такий, що $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB_1}$, буде направлений у напрямку бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$ (рис. 2.1), тобто $\overrightarrow{MC_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MC}$.

У такому разі існує таке дійсне число $\lambda \neq 0$, що $\overrightarrow{MC} = \lambda \cdot \overrightarrow{MC_1}$, а значить, і $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \lambda \cdot \left|\overrightarrow{MC_1}\right|$. Знайдемо множник λ. За умови задачі $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{42}$.

Знайдемо $\left|\overrightarrow{MC_1}\right|$: $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$, тоді $\left|\overrightarrow{MC_1}\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$. Очевидно, $\lambda = 3$, звідки $\overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MC_1}$, тобто $\overrightarrow{MC} = (-1;5;4)$, тоді $C(0;7;7)$.

Відповідь: $C(0;7;7)$.

Приклад 2. Знайти висоти паралелограма, що побудований на векторах $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30^0.

Розв'язання. Якщо відома площа паралелограма $S_{\square}$, то його висоти h_p і h_q (рис. 2.2) можна знайти за формулами: $h_p = \dfrac{S_{\square}}{|\vec{p}|}$, $h_q = \dfrac{S_{\square}}{|\vec{q}|}$.

Площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{p}$ і $\vec{q}$, обчислюється за формулою: $S_{\square} = |\vec{p} \times \vec{q}|$, тобто:

$$S_{\square} = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\right| = \left|\vec{a} \times \vec{a} - 2\vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{b} \times \vec{a} - 6\vec{b} \times \vec{b}\right| = 5\left|\vec{b} \times \vec{a}\right|.$$

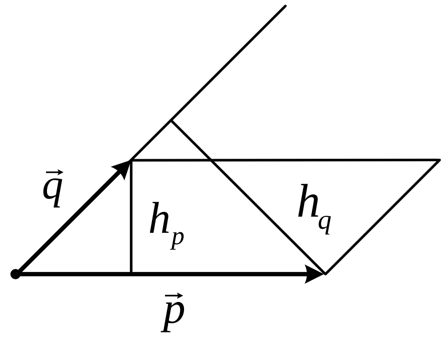


Рисунок 2.2

За означенням векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\varphi$, де φ – кут між цими векторами. Тоді $S_{\square} = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}$.

З властивостей скалярного добутку маємо:

$$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}^2} = \sqrt{\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{4 + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \cdot 3} = 7,$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{\vec{q}^2} = \sqrt{\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot 3} = 2$$

Таким чином, $h_p = \dfrac{S_{\square}}{|\vec{p}|} = \dfrac{5\sqrt{3}}{7}$, $h_q = \dfrac{S_{\square}}{|\vec{q}|} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$, $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 3. Установити лінійну незалежність векторів $\vec{p} = (1;2;3)$, $\vec{q} = (-1;3;2)$ і $\vec{r} = (0;1;2)$. Знайти координати α, β, γ вектора $\vec{x} = (2;1;3)$ у базисі $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Розв'язання. Вектори $\vec{p}, \vec{q}$ і $\vec{r}$ простору R^3 лінійно незалежні, якщо вони не є компланарними. З умови компланарності трьох векторів маємо: $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 0$, тобто мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Перевіримо компланарність векторів $\vec{p}, \vec{q}$ і $\vec{r}$:

$$(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= -(2+3) + 2\cdot(3+2) = 5 \neq 0,$ таким чином, вектори $\vec{p},\vec{q}$ і $\vec{r}$ лінійно незалежні.

Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ означає знайти такі числа α,β,γ, що $\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$. Числа α,β і γ у такому випадку називаються координатами вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$. Переходячи від цього векторного рівняння до рівнянь по координатах, маємо:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2, \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 1, \\ 3\alpha + 2\beta + 2\gamma = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

тоді маємо: $\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,\ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1,\ \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2.$

Таким чином, $\vec{x} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

Відповідь: $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 2.$

Приклад 4. Знайти площу прямокутника, якщо відомі рівняння двох його сторін $l_1: 3x - 2y + 6 = 0$ і $l_2: 2x + 3y + 14 = 0$ та одна з його вершин $A(-2;1)$.

Розв'язання. Перевіримо, чи належить точка A хоча б одній з заданих прямих. Підставляючи координати точки A в рівняння заданих прямих, отримаємо для $l_1: 3\cdot(-2) - 2\cdot 1 + 6 = -2 \neq 0$, а для $l_2: 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 14 = 13 \neq 0$, тобто точка A не належить заданим прямим.

Площу прямокутника знайдемо, якщо будуть відомі відстані a і b від точки A до прямих l_1 і l_2 (рис. 2.3).

Відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої

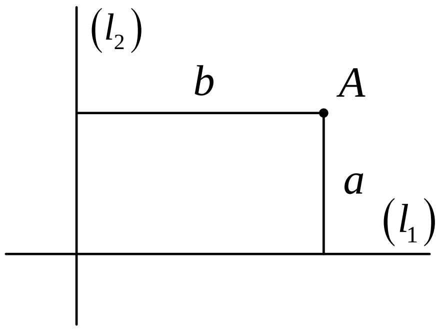


Рисунок 2.3

$l: \quad Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою:

$$d\left(M_0,l\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тоді: $d\left(A,l_1\right)=\dfrac{\left|3\cdot(-2)-2\cdot1+6\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, тобто $a=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$,

$$d\left(A,l_2\right)=\frac{\left|2\cdot(-2)+3\cdot1+14\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}, \text{ тобто } b=\sqrt{13}.$$

Отже, площа прямокутника $S=a\cdot b=2$ (кв. од.).

Відповідь: 2 кв. од.

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-1;2)$ під кутом 45^0 до прямої $\left(M_1M_2\right)$, якщо $M_2(2;3)$.

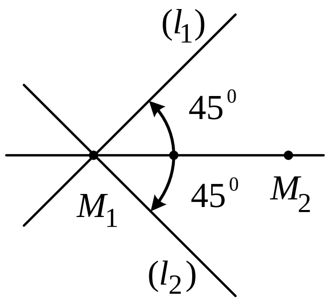
Розв'язання. На площині існують дві такі прямі l_1 і l_2, що задовольняють умовам задачі (рис. 2.4).

Скористаємося формулою обчислення кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|,$$

де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

Знайдемо кутовий коефіцієнт k_1 прямої $\left(M_1M_2\right)$ за формулою: $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, тобто $k_1=\dfrac{3-2}{2+1}=\dfrac{1}{3}$. Оскільки $\operatorname{tg}45^0=1$, то $\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\pm1$, або $1+k_1\cdot k_2=\pm\left(k_2-k_1\right)$, звідки при $k_1=\dfrac{1}{3}$ маємо:



1) $1+\dfrac{1}{3}\cdot k_2=k_2-\dfrac{1}{3}$, або $\dfrac{2}{3}\cdot k_2=\dfrac{4}{3}$, $\quad k_2^{(1)}=2$;

2) $1+\dfrac{1}{3}\cdot k_2=\dfrac{1}{3}-k_2$, або $\dfrac{4}{3}\cdot k_2=-\dfrac{2}{3}$, $\quad k_2^{(2)}=-\dfrac{1}{2}$.

Далі скористаємось рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ у відомому

Рисунок 2.4 напрямку, тобто з відомим кутовим коефіцієнтом k : $y-y_0=k(x-x_0)$.

Шукані прямі l_1 і l_2 проходять через точку $M_1(-1;2)$ і мають кутові коефіцієнти $k_2^{(1)}=2$ і $k_2^{(2)}=-\frac{1}{2}$. До речі, прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, що підтверджується відповідною умовою: $k_2^{(1)}\cdot k_2^{(2)}=-1$.

Отже, l_1: $y-2=2(x+1)$, або $y-2x-4=0$,

l_2: $y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$, або $2y+x-3=0$.

Відповідь: $y-2x-4=0$, $2y+x-3=0$.

Приклад 6. Установити, яка лінія визначається рівнянням, і побудувати цю лінію: а) $4x^2-y^2+16x+2y+11=0$, б) $y=-2-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$.

Розв'язання. а) Задане рівняння кривої зведемо до канонічного вигляду:

$$4(x^2+4x+4)-16-(y^2-2y+1)+1+11=0,$$

звідки отримаємо: $4(x+2)^2-(y-1)^2=4$. Поділивши останнє рівняння на число 4, отримаємо: $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$. Таким чином, задана крива є гіперболою, дійсна вісь якої задається рівнянням $y=1$. Центр симетрії гіперболи знаходиться у точці $O_1(-2;1)$, а її піввісі $a=1$, $b=2$.

На прямій $y=1$ від точки $O_1(-2;1)$ вліво і вправо відкладемо відрізки довжиною $a=1$. Пряма $y=1$ є дійсною віссю гіперболи, а отримані точки $A_1(-3;1)$ і $A_2(-1;1)$ є вершинами гіперболи.

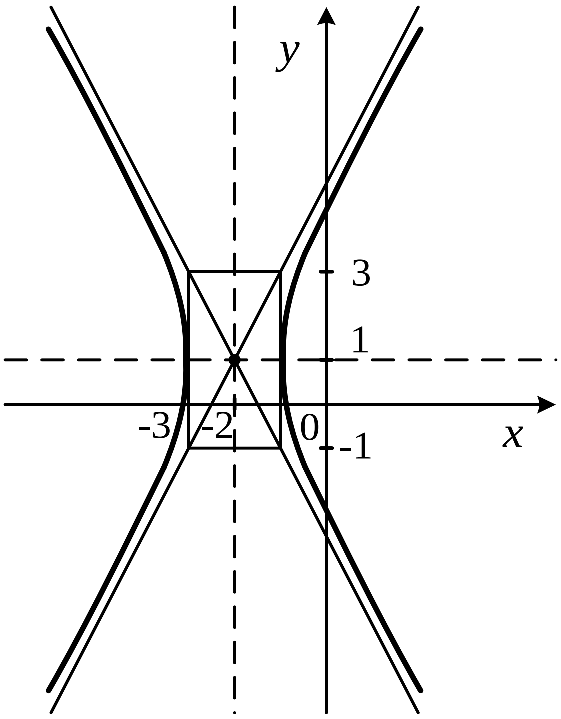


Рисунок 2.5

На прямій $x=-2$ від точки $O_1(-2;1)$ донизу і доверху відкладемо відрізки довжиною $b=2$. Пряма $x=-2$ є для цієї гіперболи уявною віссю і гіпербола її не перетинає. Побудуємо прямокутник, сторони якого паралельні дійсній і уявній осям гіперболи, а отримані вище точки є серединами його сторін. Побудуємо асимптоти гіперболи. Асимптотами гіперболи є прямі, яким належать діагоналі побудованого прямокутника.

Тепер можна будувати гіперболу (рис. 2.5).

б) Задане рівняння $y=-2-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$ кривої зведемо до канонічного вигляду: $y+2=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$, звідки $\left(y+2\right)^2=-\frac{1}{4}\left(x-1\right)$.

Таким чином, задана крива є параболою з вершиною в точці $O_1(1;-2)$, параметр якої $p=\frac{1}{2}$, а вісь симетрії задається рівнянням $y=-2$. Але з рівняння $y+2=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$ витікає, що $y+2\le 0$, або $y\le -2$, тобто рівняння, що задане, визначає частину параболи $\left(y+2\right)^2=-\frac{1}{4}\left(x-1\right)$, яка лежить нижче прямої $y=-2$ (рис. 2.6).

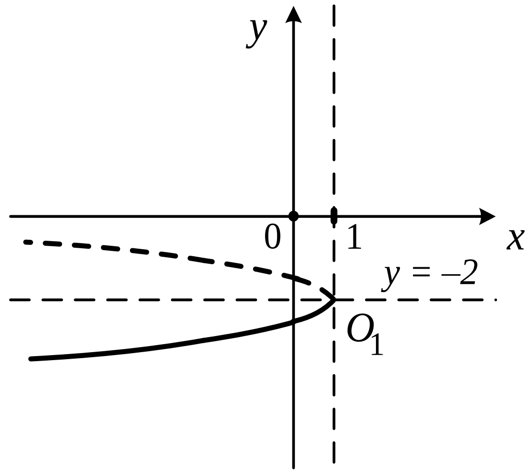


Рисунок 2.6

Приклад 7. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(2;0;-1)$ і $B(5;2;3)$ паралельно осі OX .

Розв'язання. Скористаємось рівнянням площини в загальному вигляді:

$$\alpha: \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

За умови задачі площина паралельна осі OX , тоді її рівняння буде мати вигляд: $By+Cz+D=0$, або $\beta y+\gamma z+1=0$, де $\beta=\dfrac{B}{D}$, $\gamma=\dfrac{C}{D}$. Підставляючи в останнє рівняння координати точок A і B, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -\gamma+1=0, \\ 2\beta+3\gamma+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2, \\ \gamma=1. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння площини: $-2y+z+1=0$, або $2y-z-1=0$.

Відповідь: $2y-z-1=0$.

Приклад 8. При якому значенні λ пряма l: $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z-1=0 \end{cases}$ паралельна площині α: $5x-3y+\lambda z-7=0$? Чи належить пряма l площині α?

Розв'язання. Пряма l паралельна площині α, якщо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої перпендикулярний нормальному вектору $\vec{n}$ площини, тобто $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$.

Знайдемо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l. Пряма l задана як перетин двох площин з нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}=(3;-2;1)$ і $\overrightarrow{n_2}=(4;-3;4)$. У цьому випадку $\vec{s}\parallel\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]$. Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$:

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & -3 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-8+3\right)-\vec{j}\left(12-4\right)+\vec{k}\left(-9+8\right)=-5\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}.$$

Таким чином, як напрямний вектор прямої l можна взяти вектор $\vec{s}=\left(5;8;1\right)$. З рівняння площини α одержимо $\vec{n}=\left(5;-3;\lambda\right)$, тоді за умови перпендикулярності векторів $\vec{s}$ і $\vec{n}$ маємо: $\vec{s}\cdot\vec{n}=25-24+\lambda=0$, звідки $\lambda=-1$.

Перевіримо, чи належить пряма l площині α. Для цього достатньо перевірити, чи належить площині будь-яка точка прямої. Нехай це буде точка, в якій пряма l перетинає координатну площину XOY, тобто точка $P_1\left(x;y;0\right)$. Тоді з рівняння прямої маємо:

$$\begin{cases}3x-2y+3=0,\\ 4x-3y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+3=0,\\ x-y-2=0\end{cases}\Rightarrow\quad P_1\left(-7;-9;0\right).$$

Підставляючи координати точки P_1 у рівняння площини, отримаємо: $5\cdot\left(-7\right)-3\cdot\left(-9\right)-7=-15\neq 0$, тобто пряма не належить площині.

Відповідь: $\lambda=-1$; пряма не належить площині.

Приклад 9. Знайти проекцію P_1 точки $P\left(-1;4;-4\right)$ на площину, що проходить через точки $M_1\left(1;-1;1\right), M_2\left(-2;1;3\right), M_3\left(4;-5;2\right)$.

Розв'язання. Рівняння площини α, що проходить через три точки, має вигляд:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

Отже, $\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-1\\ -2-1 & 1+1 & 3-1\\ 4-1 & -5+1 & -2-1\end{vmatrix}=0$, або $\alpha:\quad 2x-3y+6z-11=0.$

Точку P_1 знайдемо як точку перетину прямої $\left(PP_1\right)$ і площини α. Якщо точка P_1 є проекцією точки P на площину α, то пряма $\left(PP_1\right)$ перпендикулярна площині α, а тому напрямний вектор $\vec{s}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n}$ площини паралельні.

З рівняння площини α отримаємо $\vec{n} = (2;-3;6)$ і візьмемо $\vec{s} = \vec{n}$, тобто $\vec{s} = (2;-3;6)$. Для знаходження точки P_1 запишемо параметричне рівняння прямої (PP_1) $x = 2t-1,\ y = -3t+4,\ z = 6t-4,\ t \in R$ і складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = -3t+4, \\ z = 6t-4, \\ 2x-3y+6z-11 = 0. \end{cases}$$

Звідки маємо: $2(2t-1)-3(-3t+4)+6(6t-4)-11 = 0$, тобто $t = 1$. Отримане значення параметру t відповідає точці P_1 у параметричному рівнянні прямої (PP_1), тому координати точки P_1: $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 2$.

Відповідь: $P_1(1;1;2)$.