Розділ 3. ГРАНИЦІ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Границі і неперервність» складається з 7 практичних завдань, що охоплюють методи обчислення границь з розкриттям невизначеностей виду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|, \left\|\frac{0}{0}\right\|, \|\infty-\infty\|, \|\infty \cdot 0\|, \left\|1^{\infty}\right\|$, а також дослідження функцій на неперервність. Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [1, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14], а також відповісти на наступні контрольні питання.

Контрольні питання

1. Поняття множини. Підмножина. Дії над множинами.
2. Поняття функції. Що таке область визначення функції, область значень функції?
3. Границя числової послідовності.
4. Границя функції за умови $x \to x_0, x \to \infty$.
5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Зв'язок між ними.
6. Властивості нескінченно малих функцій.
7. Класифікація нескінченно малих функцій.
8. Границя суми, добутку й частки функцій.
9. Ознаки існування границі функції.
10. Перша визначна границя. Наслідки.
11. Друга визначна границя. Наслідки.
12. Поняття неперервної функції у точці, на інтервалі.
13. Неперервність суми, добутку й частки функцій.
14. Неперервність складної і оберненої функції.
15. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)},\ \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3-5x^2+19}}{\sqrt{9x^6+x^5-4x+2}-\sqrt[4]{x^3}}.$$

Розв'язання. У даному випадку ми маємо справу з розкриттям невизначеності вигляду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$. Тут доцільно використати правило «старших степенів»:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{(8x^3+36x^2+54x+27)(x+1)-8x^4}{(9x^2+12x+4)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{8x^4}+36x^3+54x^2+27x+8x^3+36x^2+54x+27-\cancel{8x^4}}{9x^3+12x^2+4x-36x^2-48x-16}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{44x^3+90x^2+81x+27}{9x^3-24x^2-44x-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{44x^3}{9x^3}=\frac{44}{9}.$$

б) У цьому випадку в чисельнику і знаменнику дробу є функції вигляду $\varphi(x)=\sqrt[k]{P_n(x)}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-ого степеня. В подібних випадках при $x\to\infty$ теж працює правило «старших степенів». Враховуючи викладене, легко отримати відповідь:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3-5x^2+19}}{\sqrt{9x^6+x^5-4x+2}-\sqrt[4]{x^3}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{9x^6}-\sqrt[4]{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{3x^3-x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: а) $\frac{44}{9}$, б) $\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

$$а)\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4},\ б)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4x-12}.$$

Розв'язання. У даному випадку ми маємо справу з розкриттям невизначеності вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, а саме: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n-ого та m-ого степеня відносно x.

Для усунення невизначеності необхідно виділити в чисельнику та знаменнику множник $(x-x_0)$, що наближається до 0 за умови $x\to x_0$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{(x-x_0)\cdot P_{n-1}(x)}{(x-x_0)\cdot Q_{m-1}(x)}.$$

Невизначеність $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ може зникнути після скорочення дробу під знаком границі.

$$а)\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(3x+7)}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+7}{x-2}=\left\|\frac{13}{0}\right\|=\infty.$$

$$б)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4x-12}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-6)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x-6}=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}.$$

Відповідь: а) ∞, б) $-\frac{3}{2}$.

Приклад 3. Обчислити границі:

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5}{2x^2+1}-\frac{x^3-x}{2}\right),\ б)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+3x-9}\right).$$

Розв'язання. У даному випадку ми маємо справу з розкриттям невизначеності вигляду $\|\infty-\infty\|$. При розкритті невизначеності вигляду $\|\infty-\infty\|$ необхідно виконати тотожні перетворення, які дозволять звести таку невизначеність до вигляду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ або $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5}{2x^2+1}-\frac{x^3-x}{2}\right)=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-(x^3-x)(2x^2+1)}{2(2x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-(2x^5+x^3-2x^3-x)}{4x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^5}-\cancel{2x^5}+x^3+x}{4x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{4x^2+2}=$$

$$=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4x^2}=\infty.$$

б) Для розкриття цієї невизначеності чисельник і знаменник дробу треба помножити на відповідний ірраціональному виразу спряжений множник:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+3x-9}\right)=\|\infty-\infty\|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+3x-9}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+3x-9}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+3x-9}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4-(x^2+3x-9)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x}=\left\|\frac{5}{\infty}\right\|=0.$$

Відповідь: а) ∞, б) 0.

Приклад 4. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{8x+1}-5}{2x^2+x-21}$.

Розв'язання. При обчисленні границі функції, що містить у чисельнику або у знаменнику (або у чисельнику та знаменнику) ірраціональні вирази, які перетворюються в нуль за умови $x\to x_0$, множник $(x-x_0)$ виділяється після операції множення на відповідний ірраціональному виразу спряжений множник:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{8x+1}-5}{2x^2+x-21}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{8x+1}-5\right)\left(\sqrt{8x+1}+5\right)}{\left(2x^2+x-21\right)\left(\sqrt{8x+1}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{8x+1-25}{\left(2x^2+x-21\right)\left(\sqrt{8x+1}+5\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 3}\frac{8\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\,(2x+7)\cdot 10}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{8}{(2x+7)\cdot 10}=\frac{4}{13\cdot 5}=\frac{4}{65}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{65}$.

Приклад 5. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos 5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-x\right)}$.

Розв'язання. Якщо функція, що стоїть під знаком границі, складається з тригонометричних або обернених тригонометричних функцій, то треба застосувати першу визначну границю та її наслідки.

а) У даному випадку скористаємося тим, що при $\alpha(x)\to 0$: $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, а

$$\left(1-\cos\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos 5x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin(-3x)}{\frac{(5x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 4x\cdot(-3x)\cdot 2}{25x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-48x^2}{25x^2}=-\frac{48}{25}.$$

б) Для обчислення границі скористаємося наступними еквівалентностями:

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\text{ якщо } \alpha(x)\to 0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-x\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left|\begin{array}{l}\arcsin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{3x+1}-2\\ \operatorname{tg}\left(x^2-x\right)\underset{x\to 1}{\sim}x^2-x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1-4}{(x^2-x)\cdot 4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{4(x^2-x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{4x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: а) $-\dfrac{48}{25}$, б) $\dfrac{3}{4}$.

Приклад 6. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{\frac{7}{x^2-4}}$.

Розв'язання. При розкритті невизначеностей вигляду $\left\| 1^{\infty} \right\|$ треба скористатися другою визначною границею, за якою $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left[1+\alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, де $e \approx 2{,}71$.

Проаналізуємо вираз, що стоїть під знаком границі в другій визначній границі. Його конструкція така: до одиниці додається нескінченно мала величина $\alpha(x)$, а потім отримана сума підноситься до степеня, що є оберненою величиною для $\alpha(x)$, тобто до степеня $\dfrac{1}{\alpha(x)}$.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}} = \left\|1^{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x+5}-1\right)^{\frac{x^2}{x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3-2x-5}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-8}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{2x+5}\cdot\frac{x^2}{x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x^2}{(2x+5)(x-4)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{(2x+5)(x-4)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{2x^2}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

б) Обчислюючи такі границі (для більш швидкого отримання результату), можна скористатися формулою:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} u(x)^{v(x)} = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\left[u(x)-1\right]\cdot v(x)}.$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{\frac{7}{x^2-4}} = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}-1\right)\cdot\frac{7}{x^2-4}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3-3x+1)\cdot 7}{(3x-1)(x^2-4)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{7(4-2x)}{(3x-1)(x^2-4)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2\cancel{(x-2)}\cdot 7}{(3x-1)\cancel{(x-2)}(x+2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-14}{(3x-1)(x+2)}} = e^{-\frac{14}{20}} = e^{-\frac{7}{10}}.$$

Відповідь: а) $\dfrac{1}{e^4}$, б) $e^{-\frac{7}{10}}$.

Приклад 7. Порівняти наступні нескінченно малі величини:

а) $\alpha(x) = e^{7x} - e^{5x}$, $\beta(x) = \ln(1+3x)$ при $x \to 0$, б) $\alpha(x)=5^{x^2-6x+10}-5$, $\beta(x)=\ln(x-2)$ при $x\to 3$,

в) $\alpha(x)=\cos 5x-\cos 3x$, $\beta(x)=\ln(4+3x^2)-\ln 4$ при $x\to 0$.

Розв'язання. Для порівняння нескінченно малих величин необхідно обчислити границю їх відношення.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{5x}}{\ln(1+3x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}(e^{2x}-1)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}\cdot 2x}{3x}=\frac{2}{3},$$

тому $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі величини одного порядку малості.

При обчисленні границі скористалися тим, що $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

б) $$\lim_{x\to 3}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{5^{x^2-6x+10}-5}{\ln(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{5(5^{x^2-6x+9}-1)}{\ln\left[1+(x-3)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5(x^2-6x+9)\cdot\ln 5}{x-3}=5\ln 5\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=5\ln 5\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}}=0,$$

тому $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$.

При обчисленні границі скористалися тим, що $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$ і $\ln\left[1+\alpha(x)\right]\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\ln(4+3x^3)-\ln 4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin x}{\ln\left(\dfrac{4+3x^3}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 4x\cdot x}{\ln\left(1+\dfrac{3}{4}x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{\dfrac{3}{4}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{32x^2}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{32}{3x}=\left\|\frac{32}{0}\right\|=\infty,$$

тому $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш низького порядку малості, ніж $\beta(x)$.

Відповідь: а) $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі величини одного порядку малості, б) $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$, в) $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш низького порядку малості, ніж $\beta(x)$.

Приклад 8. Дослідити функції на неперервність:

а) $y=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$, б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{7}{x+5}$, в) $y=\dfrac{2}{1+9^{\frac{4}{x-3}}}$.

Розв'язання. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 та $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Цю рівність можна переписати в еквівалентній формі:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Якщо порушена одна з умов неперервності функції в точці x_0, то точка x_0 називається точкою розриву. Розрізняють точки розриву першого та другого роду.

а) При $x=3$ та $x=-1$ знаменник обертається в нуль. Значить, $x=3$ та $x=-1$ – точки розриву функції. Для визначення типу розриву треба обчислити границі зліва та справа:

$x=3$: $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{4}$, тому $x=3$ – усувна точка розриву першого роду.

$x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\pm\infty$, тому $x=-1$ – точка розриву другого роду.

б) При $x=-5$ знаменник обертається в нуль. Значить, $x=-5$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to -5-0}\operatorname{arctg}\frac{7}{x+5}=\left|\operatorname{arctg}\frac{7}{-5-0+5}=\operatorname{arctg}\frac{7}{-0}=\operatorname{arctg}(-\infty)\right|=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to -5+0}\operatorname{arctg}\frac{7}{x+5}=\left|\operatorname{arctg}\frac{7}{-5+0+5}=\operatorname{arctg}\frac{7}{+0}=\operatorname{arctg}(+\infty)\right|=\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $x=-5$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний.

в) Дана елементарна функція невизначена при $x=3$. Тому $x=3$ – точка розриву. Визначимо вид точки розриву, обчисливши ліву та праву границі функції:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-3}}}=\left|\frac{2}{1+9^{\frac{4}{3-0-3}}}=\frac{2}{1+9^{\frac{4}{-0}}}=\frac{2}{1+9^{-\infty}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9^{\infty}}}\right|=2,$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-3}}}=\left|\frac{2}{1+9^{\frac{4}{3+0-3}}}=\frac{2}{1+9^{\frac{4}{+0}}}=\frac{2}{1+9^{+\infty}}=\frac{2}{1+\infty}\right|=0,$$

$x=3$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний.

Відповідь: а) $x=-1$ – точка розриву другого роду, б) $x=-5$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний, в) $x=3$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний.