МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«Харківський політехнічний інститут»

Т.В. Потаніна

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

«ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ І ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

Теорія і практика

Навчальний посібник

Харків

2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

Т.В. Потаніна

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

«ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ І ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

Теорія і практика

Навчальний посібник

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»
протокол № від

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

УДК 514.742.43, 517.373, 517.43

ББК

Рецензенти:

Т.В. Шматко, канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики НТУ «ХПІ»,

Ю.І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики УІПА (м. Харків)

Навчальний посібник містить теоретичний і практичний курс розділу вищої математики «Векторний аналіз і теорія поля».

Призначений для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Потаніна Т.В.

Вища математика: «Векторний аналіз і теорія поля». Теорія і практика: навч. посібник / Т.В. Потаніна. – Х.: НТУ «ХПІ», 2019. – 151 с.

ISBN

Навчальний посібник містить теоретичний і практичний курс розділу вищої математики «Векторний аналіз і теорія поля».

Призначений для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Рис… Бібліогр.: 5 назв.

УДК 514.742.43, 517.373, 517.43

ББК

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

При розв’язанні інженерних задач виникає необхідність дослідження структури фізичного поля та його впливу на матеріальні об’єкти. В загальному випадку фізичне поле є характеристикою фізичного середовища, яким наповнена певна область простору і де відбуваються певні процеси.

Існують дві основні групи фізичних полів – скалярні та векторні.

Скалярним полям відповідають одновимірні величини. Приклади таких полів: поля температур та тисків в тому чи іншому середовищі, поля гравітаційного й електричного потенціалу та ін.

Векторним полям відповідають багатовимірні величини. Такими є силові поля (гравітаційне, електричне й ін.), поле швидкостей рідини чи газу, поля градієнтів температури і таке ін. Електромагнітне поле вимірюється двома величинами: електричною та магнітною індукцією. Фізичне середовище в усіх випадках – субстанція або вакуум, що заповнюють певну область простору.

В посібнику розглянуто математичні моделі фізичних полів – скалярні та векторні функції координат і часу. Функція поля вважається відомою. Основну увагу віддано стаціонарним полям, які, за означенням, не залежні від часу.

В механіці існує принцип, згідно з яким будь-який складний рух можна представити в вигляді суми двох рухів: поступового й обертального навколо деякого, загалом, рухомого миттєвого центру. Цей принцип має своєрідне відображення в теорії векторного поля. Так, наприклад, в полі лінійних швидкостей рідини поступовий рух середовища від джерела або до стоку характеризується дивергенцією лінійної швидкості частинок рідини (розбіжність ліній струму), при цьому дивергенція є скалярною величиною. Обертальний рух середовища задається вектором кутової швидкості частинок рідини, який помножений на два, визначає ротор поля.

Поняття дивергенції й ротору зв'язані з іншими основними поняттями теорії векторного поля, до яких, насамперед, відносяться робота силового поля, циркуляція вектора вздовж замкненого контуру і потік векторного поля через поверхню. Цей зв'язок здійснюється за допомогою формул Гріна, Стокса та Гаусса-Остроградського.

В теорії векторного поля застосовуються криволінійні й поверхневі інтеграли 2-го роду.

Представлений посібник містить ***теоретичну та практичну частини курсу,*** який викладається студентам ***інженерно-фізичного*** інституту, інституту ***енергетики, електроніки та електромеханіки***, факультету ***комп'ютерних та інформаційних технологій*** викладачами кафедри ***вищої математики НТУ «ХПІ»***.

Теоретична частина містить шість розділів, що відповідає шести лекціям, де наведено основні поняття і основні положення курсу «Векторний аналіз і теорія поля», доведено теореми, розглянуто приклади.

Практична частина – варіант проведення шести практичних занять – запропоновано відповідну кількість прикладів, також представлено набір прикладів для самостійної роботи студентів вдома. Окрім того, посібник містить розрахунково-графічні завдання для індивідуального виконання студентами (25 варіантів) і зразок розв'язання варіанту завдання.

Даний посібник адресований викладачам і студентам інженерних спеціальностей для лекційних, практичних занять, самостійної роботи та підготовки до іспиту з вищої математики по курсу «Векторний аналіз і теорія поля».

Автор

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Розділ 1. Основні поняття векторного аналізу

1.1 Скалярне поле. Поверхні та лінії рівня.

Нехай в точці P області D в просторі $\mathbb{R}^3$ задана функція $u(P) = u(x, y, z)$. Тоді говорять, що в D задане ***скалярне поле функції*** $u(P) = u(x, y, z)$.

Якщо поле змінюється з плином часу t, то $u = u(x, y, z, t)$, тобто є функцією чотирьох змінних. Поле, яке не залежить від змін часу, є ***стаціонарним***, в протилежному випадку – ***нестаціонарним***.

Приклади: поле температур, тиску, щільності, концентрацій, поле потенціалів.

Для характеристики скалярного поля застосовують ***поверхні рівня (еквіпотенціальні поверхні)***

$$u(x, y, z) = k, \quad \text{де } k = \text{const}.$$

В випадку $u(P) = u(x, y)$ поле є ***матеріальним скалярним полем***. Поле $u = u(M)$ буде ***матеріальним***, якщо в просторі існує напрям, при здвигах вздовж якого поле переходить само в себе. Поверхні рівня такого поля – циліндричні поверхні, причому у відповідній системі координат вони задаються рівняннями $u(x, y) = C$ і в цій системі є ***лініями рівня***.

Розглянемо приклад поля електричного потенціалу точкового заряду q. Потенціал електростатичного поля заряду q, що міститься в початку координат, в кожній точці простору $M(x, y, z)$ з радіус-вектором $\vec{\mathbf{r}}(x, y, z)$ за виключенням самого початку координат, задається функцією поля вигляду:

$$u = \frac{q}{\left|\vec{\mathbf{r}}\right|} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Якщо $\left|\vec{\mathbf{r}}\right| = \text{const} = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ – рівняння сфери. Тобто, в точках на сфері потенціал електростатичного поля зберігає своє значення, або $u = \text{const}$.

Поверхні рівня поля точкового заряду – концентричні сфери різних радіусів.

Приклади. Визначити поверхні рівня для скалярного поля

1. $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

За означенням поверхні рівня $x^2 + y^2 + z^2 = k$. Даний вираз визначає поверхню лише в випадку $k \geq 0$. Зокрема, якщо $k = 0$ – співвідношення визначає точку $O(0,0,0)$, а при $k > 0$ поверхні рівня – сфери радіуса $\sqrt{k}$.

2. $u(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.

Рівняння поверхонь рівня $z - x^2 - y^2 = k \Leftrightarrow z - k = x^2 + y^2$. При будь-якому k дане рівняння визначає параболоїд обертання з вершиною в точці $(0,0,k)$.

1.2 Похідна за напрямом.

Нехай в точці $P(x, y, z)$ області V задана скалярна функція $u(P) = u(x, y, z)$, а за допомогою вектора $\vec{\mathbf{l}}$ з початком в точці P задано напрям (рис. 1.1). Відповідно $\vec{\mathbf{l}^0} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – орт вектора $\vec{\mathbf{l}}$ (одиничний вектор $\vec{\mathbf{l}^0} = \dfrac{\vec{\mathbf{l}}}{|\vec{\mathbf{l}}|}$).

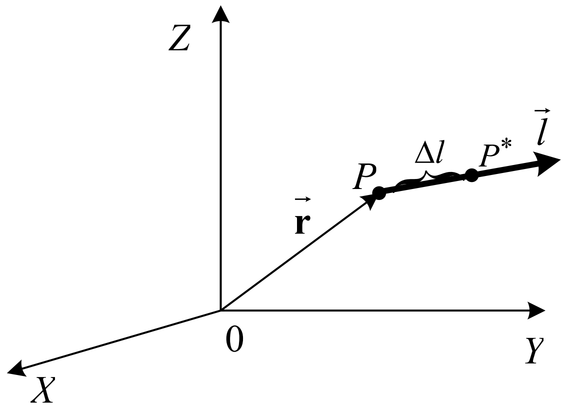


Рис. Т1.1.

Функція $u(P) = u(x, y, z)$ – диференційована в точці P, а частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ є неперервними в околі цієї точки. Задамо на $\vec{\mathbf{l}}$ приріст $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$; точка $P^*(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ знаходиться на векторі $\vec{\mathbf{l}}$. Тоді функція u отримає приріст $\Delta u = u\left(P^*\right) - u(P)$.

<u>**Означення 1.**</u> ***Похідна за напрямом*** $\vec{\mathbf{l}}$ ***скалярної функції*** $u(x, y, z)$ в точці $P(x, y, z)$ – границя частки Δu до Δl, коли $\Delta l \to 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta l}. \tag{1.1}$$

Теорема. Якщо скалярна функція $u = u(x, y, z)$ диференційована в точці $P(x, y, z)$, то існує похідна цієї функції за будь-яким напрямом $\vec{\mathbf{l}}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ і

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P \cdot \cos\gamma . \qquad (1.2)$$

Приклад. Обчислити похідну за напрямом від точки $P(1,1,1)$ до точки $Q(7,-1,3)$ скалярного поля $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 2z}$.

Розв'язання: Частинні похідні скалярної функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 2z}$ дорівнюють:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 2z}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z}}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 2z}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 2z}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z}} .$$

В точці P їх значення відповідно: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P = \frac{1}{2}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P = \frac{1}{2}, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P = \frac{1}{2}$.

Координати вектора

$$\overrightarrow{PQ} = \{x_Q - x_P; y_Q - y_P; z_Q - z_P\} = \{7-1; -1-1; 3-1\} = \{6; -2; 2\}.$$

Обчислимо модуль даного вектора і координати орта:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11},$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{2\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}, \cos\beta = -\frac{2}{2\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}, \cos\gamma = \frac{2}{2\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} .$$

Похідна за напрямом відповідно з (1.2):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{11}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{3}{2\sqrt{11}}\,.$$

Оскільки $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P > 0$, це означає зростання скалярного поля в цьому напрямі.

1.3 Градієнт скалярного поля.

__Означення 2__. ***Градієнт скалярного поля*** $u(P) = u(x, y, z)$ – вектор

$$\mathbf{grad}\,u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \tag{1.3}$$

Існує очевидний зв'язок між градієнтом $\mathbf{grad}\,u$ та похідною за напрямом $\frac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{grad}\,u \cdot \vec{\mathbf{l}^0}\,. \tag{1.4}$$

Співвідношення (1.4) означає, що похідна за напрямом вектора $\vec{\mathbf{l}}$ дорівнює проекції вектора $\mathbf{grad}\,u$ на даний напрямок.

Властивості $\mathbf{grad}\,u$:

1. Найбільше значення похідної за напрямом $\vec{\mathbf{l}}$ осягається за напрямом $\mathbf{grad}\,u$ даної функції.

2. $\mathbf{grad}\,u$ – напрям найбільшого зростання функції скалярного поля, а $|\mathbf{grad}\,u|$ – швидкість найбільшого зростання.

3. Вектор $\mathbf{grad}\,u$ завжди перпендикулярний поверхні (лінії) рівня поля.

Диференціальні властивості $\mathbf{grad}\,u$:

1. Якщо скалярне поле є сумою двох полів $u(x,y,z)=f(x,y,z)+g(x,y,z)$, то $\mathbf{grad}\,u=\mathbf{grad}\,f+\mathbf{grad}\,g$.

2. $\mathbf{grad}(f\cdot g)=(\mathbf{grad}\,f)\cdot g+(\mathbf{grad}\,g)\cdot f$.

3. $\mathbf{grad}(c\cdot f)=c\cdot\mathbf{grad}\,f$, де $c=\mathrm{const}$.

4. Градієнт складеного скалярного поля $\mathbf{grad}\,f(u)=f'_u\cdot\mathbf{grad}\,u$.

Вигляд формули для градієнта зміниться, якщо функція поля задана в інших координатах.

Так в циліндричних координатах (ρ,φ,z):

$$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\overrightarrow{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\overrightarrow{e_z}, \tag{1.5}$$

де $\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z}$ – локальний базис, породжений одиничними дотичними векторами до координатних ліній, напрямлених в бік зростання відповідної координати.

В сферичних координатах (r,φ,θ):

$$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta}+\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}, \tag{1.6}$$

а $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}$ – локальний базис породжений одиничними дотичними векторами до координатних ліній, напрямлених в бік зростання відповідної координати.

Разом з тим, слід зауважити, що властивості градієнта є інваріантними (не залежать від системи координат), тобто градієнт завжди показує величину і напрям найбільшого зростання скалярного поля.

<u>Приклад</u>. Визначити напрямок найбільшого спадання та швидкість спадання функції $u = xyz$ в точці $P_0(1,2,2)$.

<u>Розв'язання:</u> Напрямок найбільшого спадання функції – $(-\mathbf{grad}\, u)$. Таким чином, $-\mathbf{grad}\, u = -\{yz; xz; xy\}$, а в точці P_0: $-\mathbf{grad}\, u\big|_{P_0} = \{-4; -2; -2\}$. Визначимо швидкість спадання:

$$\left|-\mathbf{grad}\, u\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

1.4 Векторне поле. Векторні лінії векторного поля. Векторна трубка.

<u>Означення 3</u>. Нехай в кожній точці M області D в просторі $\mathbb{R}^3$ задано вектор $\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$ (рис. 1.2), де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні в D функції, $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ – ортонормований базис декартової прямокутної системи координат. Тоді говорять, що в D задане ***векторне поле*** $\vec{\mathbf{a}}(M) = \vec{\mathbf{a}}(x,y,z)$.

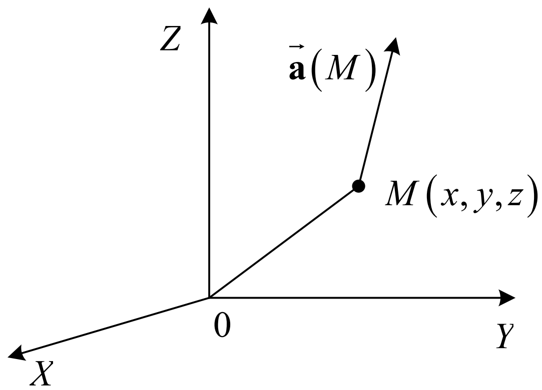


Рис. Т1.2.

Векторні поля діляться на нестаціонарні і стаціонарні в залежності від того, чи вектор-функція залежить чи не залежить від часу t.

Приклади: силове (гравітаційне) поле Землі, поле швидкостей рідини або газу в каналах і апаратах, електричне поле напруженості, електромагнітне поле.

Геометричні характеристики векторного поля – векторні лінії.

Означення 4. ***Векторні лінії*** векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ – криві, дотичні в кожній точці яких співпадають з $\vec{\mathbf{a}}(M)$ (рис. Т1.3).

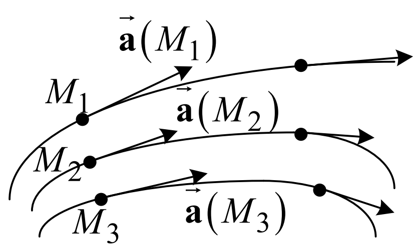


Рис. Т1.3.

Через те, що будь яку криву на нескінченно малій ділянці $\overrightarrow{\mathbf{ds}}=\{dx;dy;dz\}$ (вектор дотичної) можна замінити відрізком дотичної, а напрям цієї дотичної співпадає з напрямом $\vec{\mathbf{a}}(M)$, то рівняння $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ будуть визначати векторну лінію.

В залежності від фізичної природи поля векторні лінії мають свої назви. В гідродинамічному полі – це лінії струму рідини, в силовому полі – силові лінії.

<u>Приклад.</u> Знайти векторні (силові) лінії магнітного поля, породженого сталим електричним струмом сили I, що тече по нескінченому довгому прямолінійному дроту, розміщеному вздовж осі OZ. Вектор-функцією є напруженість магнітного поля $\vec{\mathbf{H}}(x,y,z)=\dfrac{2I}{\rho^2}\left(-y\vec{\mathbf{i}}+x\vec{\mathbf{j}}\right)$, ρ – відстань від точки (x,y,z) до осі OZ.

<u>Розв'язання:</u> Координати вектор-функції $\vec{\mathbf{H}}(x,y,z)=\left\{-\dfrac{2I}{\rho^2}y;\dfrac{2I}{\rho^2}x;0\right\}$. Тому система диференціальних рівнянь для векторних ліній

$$\frac{dx}{-\frac{2I}{\rho^2}y}=\frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x}=\frac{dz}{0}\Leftrightarrow\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}.$$

Дана система розпадається на два рівняння:

$$\begin{cases} dz=0\Leftrightarrow z=C_1 \\ \dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}\Leftrightarrow xdx=-ydy\Leftrightarrow\int xdx=-\int ydy\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{2}=C_2-y^2 \end{cases}.$$

Остаточно $z = C, x^2 + y^2 = R^2$.

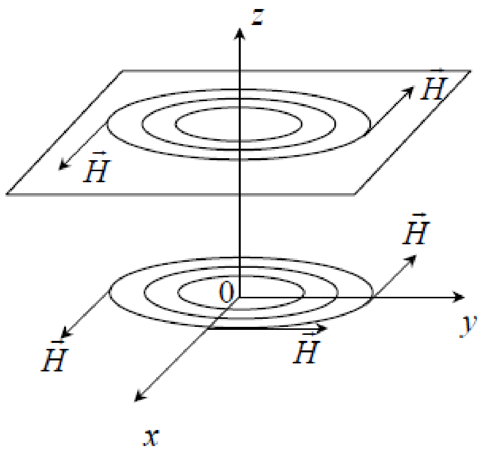


Рис. Т1.4.

Тобто векторні лінії поля $\vec{\mathbf{H}}(x, y, z)$ – кола радіуса R, які містяться в площинах $z = C$, а центри кіл лежать на осі OZ (рис. Т1.4).

<u>Означення 5.</u> Нехай в векторному полі $\vec{\mathbf{a}}(M)$ міститься довільна площадка Σ, обмежена замкненим контуром Γ.

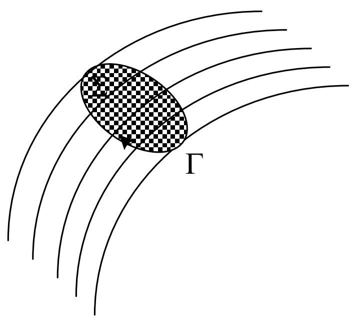


Рис. Т1.5.

Через границю цієї площадки проведемо векторні лінії. Фігура, що утворилася при цьому є ***векторною трубкою*** (рис. Т1.5).

Розділ 2. Поняття про поверхневі інтеграли. Потік векторного поля.

2.1 Поверхня, її орієнтація. Площа поверхні.

Розглянемо в області V простору $\mathbb{R}^3$ певну поверхню Ω – гладку або кусково-гладку. Нагадаємо, що гладка поверхня – це така поверхня, в кожній точці якої існує дотична площина, що неперервно змінюється вздовж поверхні, а кусково-гладка – така, що складається зі скінченної кількості гладких «кусків» (гладких поверхонь). Прикладом кусково-гладкої поверхні є поверхня прямокутного паралелепіпеда.

На поверхні Ω (замкненій або обмеженій гладким контуром) візьмемо точку M_0. В цій точці побудуємо нормаль до поверхні Ω, обравши певний напрямок нормалі (один з двох можливих) (рис. Т2.1).

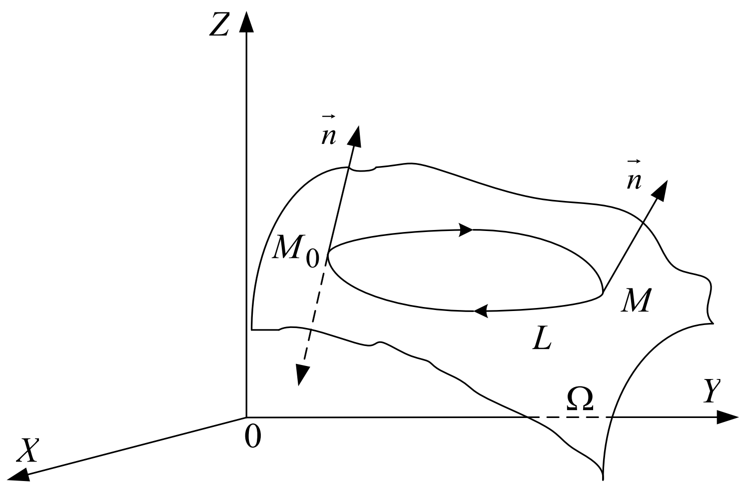
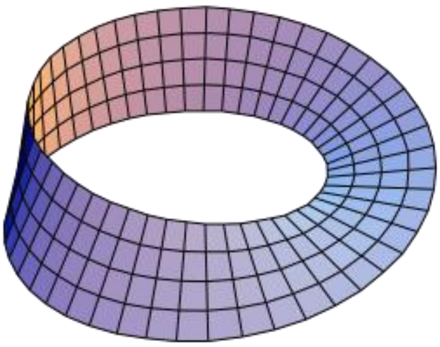


Рис. Т2.1.

Проведемо на поверхні довільний контур L, який починається і закінчується в точці M_0 та не перетинає межу поверхні. Розглянемо точку M, що рухається вздовж контуру, і в кожному з її положень проведемо нормаль того напрямку, в який неперервно переходить нормаль із попередньої точки. Якщо після обходу контуру нормаль повернеться в точці M_0 до свого початкового положення при довільному виборі точки M_0 на поверхні, то така поверхня називається ***двобічною.*** Якщо ж напрямок нормалі після обходу хоча б в одній точці зміниться на протилежний, поверхня – ***однобічна***.

Класичним прикладом однобічної поверхні є стрічка Мебіуса (рис. Т2.2), яка утворюється, якщо взяти вузьку довгу смугу (рис. Т2.3) та з'єднати точку A_1 з точкою A_2, точку B_1 з точкою B_2.

Можна побачити, що обхід контуру L перевертає нормаль (змінює її напрямок на протилежний).



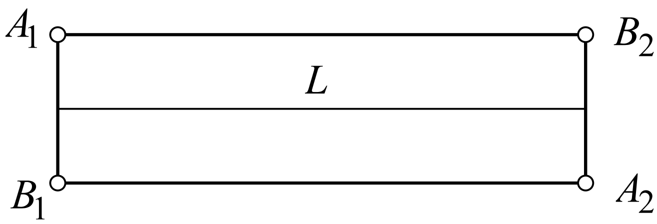


Рис. Т2.2. Рис. Т2.3.

Означення 1. Сукупність усіх точок поверхні з однаковим напрямком нормалі, називається ***стороною поверхні***.

Означення 2. ***Задати орієнтацію поверхні (обрати визначену сторону поверхні)*** означає обрати в кожній точці поверхні один з двох можливих напрямів нормалі так, щоб він неперервно змінювався від точки до точки.

Розглянемо обмежену гладку (або кусково-гладку) поверхню Ω, яка обмежена контуром L, і розіб'ємо її будь-якими кривими на «елементарні поверхні» (ділянки) $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ (рис. Т2.4). В кожній ділянці Ω_k візьмемо довільну точку M_k і побудуємо проекцію цієї ділянки на дотичну площину до поверхні, що проходить через точку M_k. Проекцією буде плоска фігура з площею T_k. Позначимо через ρ найбільшу відстань між двома точками будь-якої ділянки поверхні Ω.

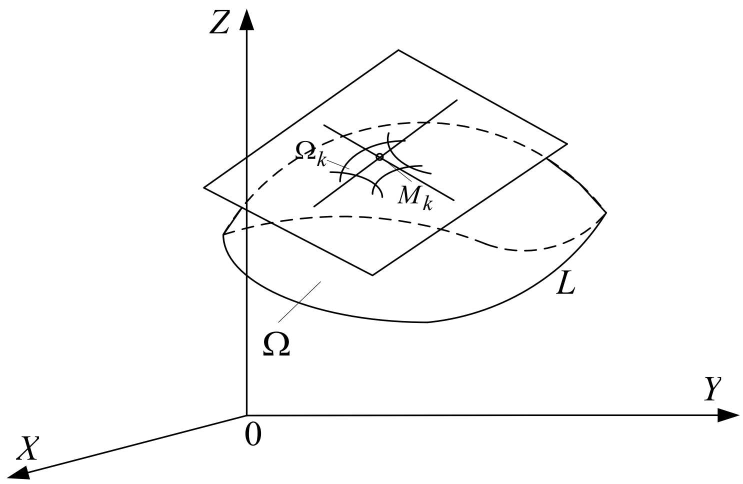


Рис. Т2.4.

<u>**Означення 3.**</u> Назвемо ***площею*** S ***поверхні*** Ω границю суми площ T_k при $\rho \to 0$:

$$S = \lim_{\rho \to 0} \sum_k T_k . \tag{2.1}$$

2.2 Потік векторного поля.

Нехай Ω – орієнтована гладка поверхня (рис. Т2.5), що знаходиться в області $V \subset \mathbb{R}^3$, в якій задано векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x, y, z)\vec{\mathbf{i}} + Q(x, y, z)\vec{\mathbf{j}} + R(x, y, z)\vec{\mathbf{k}}.$$

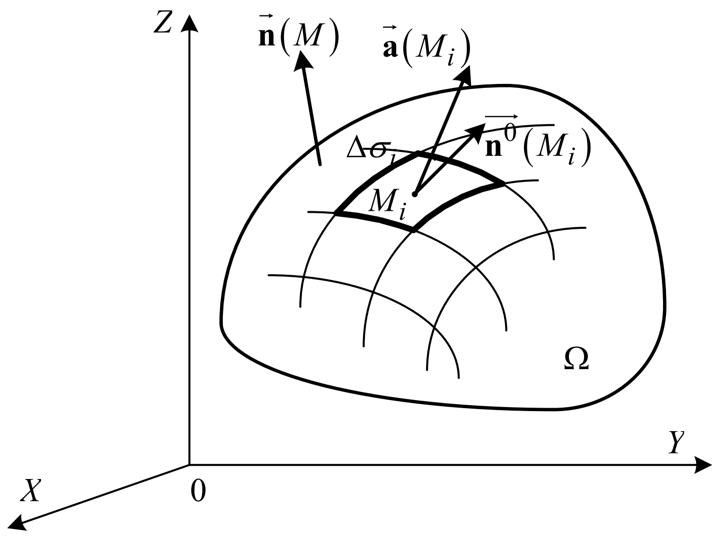


Рис. Т2.5.

Розіб'ємо поверхню Ω кривими на ділянки $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ з площами $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. В кожній ділянці Ω_i оберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Зафіксуємо за допомогою нормалі $\vec{\mathbf{n}}(M)$ одну із двох сторін поверхні. В точці M_i побудуємо одиничний вектор нормалі $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M_i)$. Складемо вектор $\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i} = \Delta\sigma_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M_i)$, що міститься на $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M_i)$ і має довжину $\Delta\sigma_i$. Розглянемо скалярний добуток $\vec{\mathbf{a}}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i}$ та побудуємо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{a}}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i}\ . \tag{2.2}$$

Означення 4. Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум (2.2), яка не залежить ані від способу розбиття поверхні Ω на ділянки, ані від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$, при $n \to \infty, \rho \to 0$, то вона називається ***поверхневим інтегралом першого***

роду від скалярного добутку $\vec{\mathbf{a}}(M)$ на одиничний вектор нормалі $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M)$ по поверхні Ω і позначається

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{a}}(M_i)\cdot\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i}=\iint_{\Omega}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M)d\sigma=\iint_{\Omega}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}, \qquad (2.3)$$

Інтеграл (2.3) ***– потік*** Π ***векторного поля*** $\vec{\mathbf{a}}(M)$ ***через поверхню*** Ω – скалярна характеристика векторного поля.

Властивості потоку:

1. Потік змінює знак на протилежний, якщо змінюється орієнтація поверхні Ω:

$$\iint_{\Omega^+}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M)d\sigma=-\iint_{\Omega^-}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M)d\sigma\ . \qquad (2.4)$$

2. *Адитивність відносно поверхні інтегрування*. Якщо поверхню Ω можна розбити на декілька частин $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_k$, то потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ через поверхню Ω дорівнює сумі потоків через поверхні $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_k$:

$$\Pi_\Omega\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=\sum_{i=1}^{k}\Pi_i=\sum_{i=1}^{k}\iint_{\Omega_i}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M)d\sigma. \qquad (2.5)$$

3. *Лінійність*. Нехай $\overrightarrow{\mathbf{a}_1}(M)$, $\overrightarrow{\mathbf{a}_2}(M)$ – векторні поля, α, β – сталі, тоді

$$\iint_{\Omega}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}_1}(M)+\beta\overrightarrow{\mathbf{a}_2}(M)\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M)d\sigma=\alpha\cdot\iint_{\Omega}\overrightarrow{\mathbf{a}_1}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}+\beta\cdot\iint_{\Omega}\overrightarrow{\mathbf{a}_2}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}\ .$$

(2.6)

2.3 Обчислення потоку векторного поля.

Нехай поверхня Ω задана рівнянням $z = f(x, y)$ і її можна спроектувати на координатну площину XOY; область D – проекція Ω на XOY (рис. Т2.6). Тоді вектор нормалі $\vec{\mathbf{n}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1 \right\}$, а одинична нормаль

$$\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \pm \frac{\vec{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{n}}|} \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \pm \left\{ \frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{\left(\partial f / \partial x\right)^2 + \left(\partial f / \partial y\right)^2 + 1}}; \frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{\left(\partial f / \partial x\right)^2 + \left(\partial f / \partial y\right)^2 + 1}}; \frac{-1}{\sqrt{\left(\partial f / \partial x\right)^2 + \left(\partial f / \partial y\right)^2 + 1}} \right\}$$

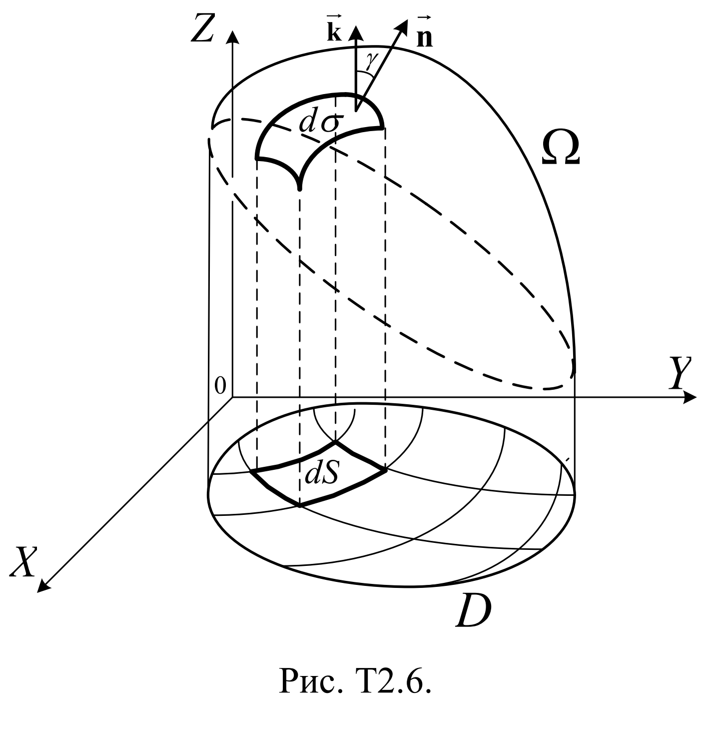


Рис. Т2.6.

Встановимо зв'язок між елементом $d\sigma$ на поверхні Ω і елементом dS (проекція $d\sigma$ на XOY) області D: $d\sigma = \dfrac{dS}{|\cos\gamma|}$, де γ – кут між нормаллю $\vec{\mathbf{n}}$ і віссю OZ (її визначає вектор $\vec{\mathbf{k}} = \{0;0;1\}$). Маємо

$$|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{\left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2 + 1}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2} \cdot dS = \sqrt{1 + \left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2}\, dxdy\,.$$

Потік через поверхню Ω векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint\limits_{\Omega} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M) d\sigma = \iint\limits_{D} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M) \sqrt{1 + \left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2}\, dxdy = \\ &= \pm \iint\limits_{D} \Big(P(x,y,f(x,y)) \cdot \partial f/\partial x + Q(x,y,f(x,y)) \cdot \partial f/\partial y - R(x,y,f(x,y)) \Big) \times \\ &\times \sqrt{1 + \left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2}\, dxdy.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Тобто обчислення потоку приведено до обчислення подвійного інтеграла. Знак залежить від напряму нормалі до поверхні Ω.

Якщо поверхню Ω задано рівнянням в неявному вигляді: $\Phi(x,y,z) = 0$, то нормаль визначається відповідно: $\vec{\mathbf{n}} = \{\Phi'_x; \Phi'_y; \Phi'_z\}$, а

$$\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=\pm\left\{\frac{\Phi'_x}{\sqrt{(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2+(\Phi'_z)^2}};\frac{\Phi'_y}{\sqrt{(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2+(\Phi'_z)^2}};\right.$$

$$\left.\frac{\Phi'_z}{\sqrt{(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2+(\Phi'_z)^2}}\right\}.$$

Нехай нормаль $\vec{\mathbf{n}}$ до поверхні Ω утворює з координатними осями кути α,β,γ. Тоді, відповідно, $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ і потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P(M);Q(M);R(M)\}$ дорівнює

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}\big(P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma\big)d\sigma=\iint\limits_{\Omega}P(M)\cos\alpha d\sigma+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}Q(M)\cos\beta d\sigma+\iint\limits_{\Omega}R(M)\cos\gamma d\sigma=$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$$

.

Обчислення потоку приведене до обчислення трьох подвійних інтегралів за умови, що поверхню Ω спроектовано на усі три координатні площини; області D_{xy},D_{xz},D_{yz} – проекції на площини XOY,XOZ,YOZ відповідно.

Також має місце формула

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy. \qquad (2.8)$$

Поверхневий інтеграл (2.8) називається ***поверхневим інтегралом другого роду***. В такому інтегралі знак кожного доданка слід обирати в залежності від знака відповідної координати нормалі.

2.4 Фізичний зміст потоку.

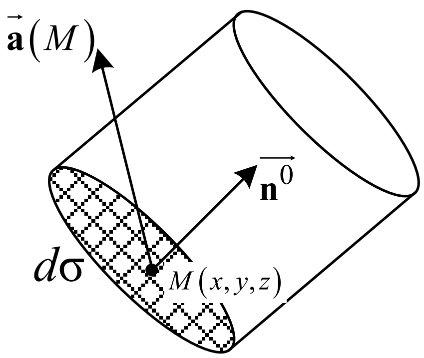


Рис. Т2.7.

Нехай $\vec{\mathbf{a}}(M)$ – поле швидкостей деякої рідини, а Ω – певна поверхня в полі. Тоді $\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{d\sigma}} = \text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{n}^0}}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot d\sigma$ – об'єм стовпа рідини з основою $d\sigma$ і висотою $\text{пр}_{\overrightarrow{\mathbf{n}^0}}\vec{\mathbf{a}}(M)$, тобто об'єм рідини, що тече через ділянку $d\sigma$ за одиницю часу в напрямку $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}$ (рис. Т2.7). Розглядаючи усю поверхню Ω, отримуємо $\Pi = \iint\limits_{\Omega}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{d\sigma}}$ – потік рідини, що тече за одиницю часу через Ω.

<u>Приклад</u>. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\cdot\vec{\mathbf{i}} + y\cdot\vec{\mathbf{j}} + z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через повну поверхню циліндра висоти H, з основою радіуса R.

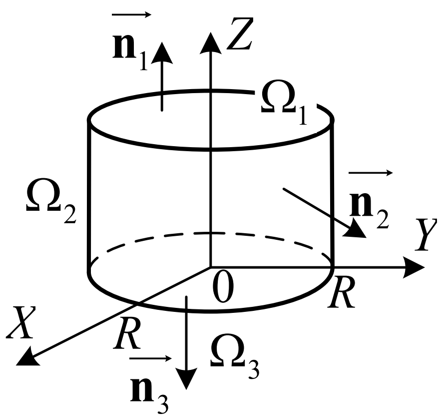


Рис. Т2.8.

Розв'язання: Циліндр Ω розмістимо в системі координат таким чином, що його віссю є вісь OZ. Поверхня Ω є об'єднанням трьох поверхонь: Ω_1 – верхня основа циліндра – круг, що міститься в площині $z = H$ і має радіус R, Ω_2 – бічна поверхня циліндра і Ω_3 – нижня основа циліндра – круг, що міститься в площині $z = 0$ і має радіус R (рис. Т2.8). Тобто $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$.

Визначимо нормалі до поверхонь. На поверхні Ω_1 нормаль, очевидно, $\overrightarrow{\mathbf{n}_1} = \vec{\mathbf{k}} = (0;0;1)$, на Ω_3 нормаль має протилежний напрямок, тобто $\overrightarrow{\mathbf{n}_3} = \overrightarrow{-\mathbf{k}} = (0;0;-1)$. Вектор нормалі $\overrightarrow{\mathbf{n}_2}$ перпендикулярний осі OZ і, враховуючи те, що рівняння бічної поверхні циліндра Ω_2:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

координати вектора

$$\overrightarrow{\mathbf{n}_2} = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}; 0 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 0 \right).$$

Скалярні добутки

$$\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_1}(M)=z\,,\ \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_2}(M)=\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_3}(M)=-z\,.$$

Визначимо потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ через поверхню Ω_1 за формулою (11): $\Pi_1=\iint\limits_{\Omega_1}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_1}(M)d\sigma=\iint\limits_{\Omega_1}zd\sigma$. Обчислимо даний поверхневий інтеграл за допомогою переходу до подвійного інтеграла по проекції Ω_1 на координатну площину XOY. Цією проекцією є круг $D_1: x^2+y^2\le R^2$. Елемент $d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$, де $z=H$:

$$d\sigma=\sqrt{1+0+0}dxdy=dxdy,$$

$$\Pi_1=\iint\limits_{D_1}H\,dxdy=H\cdot\pi R^2.$$

Потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ через поверхню Ω_3:

$$\Pi_3=\iint\limits_{\Omega_3}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_3}(M)d\sigma=-\iint\limits_{\Omega_3}zd\sigma=-\iint\limits_{D_1}0d\sigma=0\,.$$

І, наприкінці, потік через Ω_2:

$$\Pi_2=\iint\limits_{\Omega_2}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_2}(M)d\sigma=\iint\limits_{\Omega_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=R\iint\limits_{\Omega_2}d\sigma\,.$$

Останній поверхневий інтеграл визначає площу поверхні Ω_2, яка, очевидно, дорівнює $2\pi R\cdot H$. Тоді $\Pi_2=R\cdot 2\pi R\cdot H=2\pi R^2H$.

Остаточно $\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3=3\pi R^2H$.

Звернімо увагу, що потік в нашому випадку $\Pi=3\cdot V_{\text{циліндра}}$.

На наступній лекції побачимо, що це не випадково.

Розділ 3. Дивергенція векторного поля. Потік поля через замкнену поверхню. Формула Гауса-Остроградського.

3.2 Дивергенція векторного поля.

<u>**Означення 1.**</u> ***Дивергенція*** (*розбіжність*) векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ – скаляр, що визначається

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{3.1}$$

Дивергенція – диференціальна та локальна (залежить від точки) кількісна характеристика векторного поля, визначає щільність потоку в точці M.

3.2 Потік через замкнену поверхню.

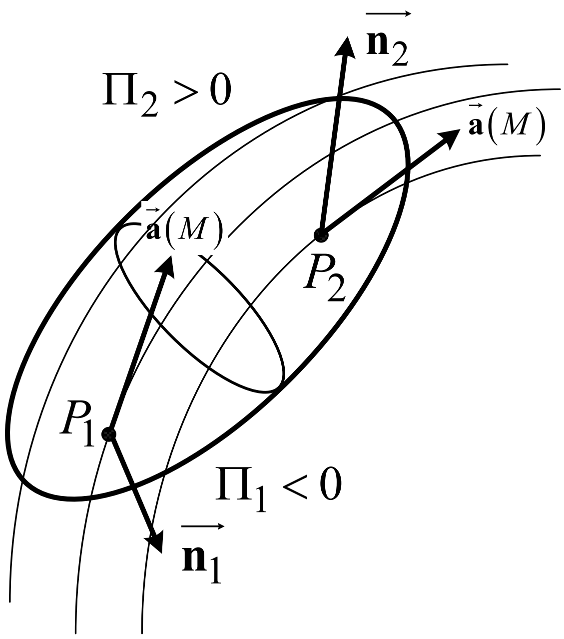


Рис. Т3.1.

Розглянемо замкнену поверхню Ω, яка обмежує об'єм V в векторному полі $\vec{\mathbf{a}}(M)$ швидкостей течії нестисливої рідини (рис. Т3.1). Потік $\Pi = \oiint\limits_{\Omega} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{d\sigma}}$ – кількість рідини, що протікає через замкнену поверхню Ω. Векторні лінії входять та виходять з Ω. В точці P_1 кут між $\vec{\mathbf{a}}(M)$ і нормаллю $\overrightarrow{\mathbf{n}_1}$ – тупий, і це означає, що рідина втікає всередину поверхні: $\Pi_1 < 0$. В точці виходу P_2 кут між $\vec{\mathbf{a}}(M)$ і нормаллю $\overrightarrow{\mathbf{n}_2}$ – гострий, рідина витікає: $\Pi_2 > 0$. Таким чином, потік через замкнену поверхню чисельно дорівнює різниці потоків рідини, що втікає і витікає за одиницю часу зі швидкістю $\vec{\mathbf{a}}(M)$ в область V, яка обмежена поверхнею Ω.

Висновки:

1. Якщо $\Pi > 0$, то більше витікає рідини, ніж втікає. Тобто в області V є джерела поля.
2. Якщо $\Pi < 0$, то більше втікає рідини, ніж витікає. В області V є стоки поля.
3. $\Pi = 0$ – немає ані джерел, ані стоків, або вони компенсують один одного.

Точки поля, в яких $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) > 0 \Rightarrow \Pi > 0$ називають ***джерелами поля***, а точки в яких $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) < 0 \Rightarrow \Pi < 0$ – ***стоками векторного поля***.

Векторні лінії векторного поля починаються в точках з додатною дивергенцією, а закінчуються в точках з від'ємною дивергенцією.

Означення 2. Величина $\left|\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)\right|$ називається ***потужністю джерела або стоку***.

3.3 Формула Гауса-Остроградського.

Нехай в просторі $\mathbb{R}^3$ задано область V, обмежену замкненою поверхнею Ω. Припустимо, що Ω можна розбити на три поверхні: Ω_1 – рівняння $z=f_1(x,y)$, Ω_2 – рівняння $z=f_2(x,y)$, Ω_3 – циліндрична поверхня задана рівнянням $\varphi(x,y)=0$ (рис. Т3.2).

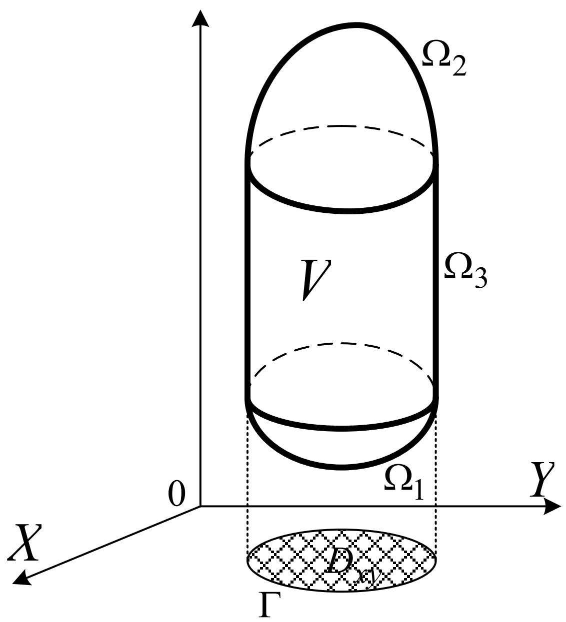


Рис. Т3.2.

Нехай в області V задано векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}}+Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}}+R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$, причому функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ неперервні в V.

Розглянемо трикратний інтеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz = \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, f_2\left(x, y\right)\right)dxdy - \\ - \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, f_1\left(x, y\right)\right)dxdy. \tag{3.2}$$

Якщо розглянути одну й ту саму сторону поверхонь Ω_1 і Ω_2, то

$$\iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, f_1\left(x, y\right)\right)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} R\left(x, y, z\right)dxdy,$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, f_2\left(x, y\right)\right)dxdy = \iint\limits_{\Omega_2} R\left(x, y, z\right)dxdy.$$

Очевидно, що $\iint\limits_{\Omega_3} R\left(x, y, z\right)dxdy = 0$.

В інтегралі по поверхні Ω_1 поміняємо сторону поверхні, тоді (3.2) $\Leftrightarrow$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, f_2\left(x, y\right)\right)dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, f_1\left(x, y\right)\right)dxdy = \\ = \iint\limits_{\Omega_1} R\left(x, y, z\right)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} R\left(x, y, z\right)dxdy + \iint\limits_{\Omega_3} R\left(x, y, z\right)dxdy = \\ = \oiint\limits_{\Omega} R\left(x, y, z\right)dxdy. \tag{3.3}$$

Аналогічно

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} P\left(x, y, z\right)dydz, \tag{3.4}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_\Omega Q\left(x, y, z\right) dxdz\ . \tag{3.5}$$

Додаємо (3.3)+(3.4)+(3.5):

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \\ &= \oiint\limits_\Omega P(x, y, z)dydz + Q\left(x, y, z\right)dxdz + R(x, y, z)dxdy. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Це є формула Гауса-Остроградського.

Її векторна форма

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{\mathbf{a}}\, dxdydz = \oiint\limits_\Omega \left(\vec{\mathbf{a}}\left(M\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M) \right) d\sigma. \tag{3.7}$$

<u>Теорема Гауса-Остроградського:</u>

Потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)$ через замкнену поверхню Ω в напрямі зовнішньої нормалі дорівнює трикратному інтегралу від дивергенції даного векторного поля по області V, обмеженої поверхнею Ω.

<u>Приклад</u>. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right) = \left\{ x^2 y; xy^2; xyz \right\}$ через повну поверхню тіла $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ в напрямі зовнішньої нормалі.

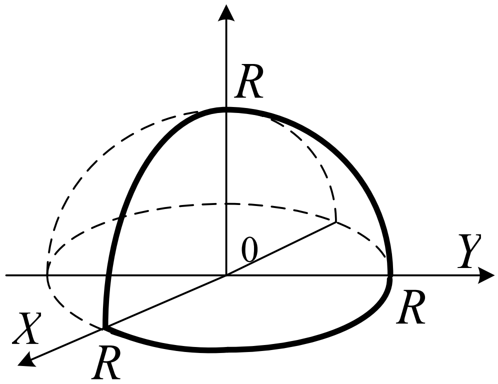


Рис. Т3.3.

Розв'язання: Скористаємося теоремою Гауса-Остроградського. Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} = 2xy + 2xy + xy = 5xy$. Область V, яку обмежують задані поверхні – частина кулі радіуса R, що міститься в першому октанті (рис. Т3.3). Відповідно потік дорівнює

$$\Pi = \iiint\limits_V 5xy\,dxdydz = \left| \begin{array}{c} \textit{перехід в сферичні координати} \\ x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^R \rho^2 \sin\theta \cdot 5\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta d\rho =$$

$$= \frac{5}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \left(1 - \cos^2\theta\right) d\theta \int\limits_0^R \rho^4 d\rho =$$

$$= -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Bigg|_0^R = \frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{R^5}{5} = -\frac{R^5}{3}.$$

Потік має від'ємне значення, це означає, що в V містяться стоки поля.

Розділ 4. Криволінійні інтеграли. Робота силового поля. Циркуляція.

4.1 Криволінійні інтеграли. Обчислення.

Нехай в певній області V простору $\mathbb{R}^3$ задано неперервну криву AB довжиною l. Крива визначається параметричними рівняннями:

$\{x = x(s), y = y(s), z = z(s)\}$, де параметр s – довжина дуги і $0 \le s \le l$.

Крива AB є орієнтованою кривою, тобто заданий порядок слідування точок вздовж кривої при зростанні параметра s від 0 до l, інакше від точки A до точки B. Припустимо, що задана крива AB є гладкою, тобто вона має дотичну, що змінюється неперервно (або AB є кусково-гладкою – складається зі скінченого числа гладких кусків; наприклад, будь-яка ламана – кусково-гладка лінія).

Нехай вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M)$ – орт дотичної в точці M кривої AB, який співпадає за напрямом з напрямом кривої: $\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M) = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$.

Нехай в області V визначене векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$.

Розіб'ємо криву AB довільним способом на n «елементарних дуг» довжиною Δs_i, $i = 1,\ldots,n$ в напрямку від A до B, а на кожній елементарній дузі візьмемо, також довільним способом, точку M_i (набір точок $M_1,\ldots,M_n$ називаємо зазначеними точками); вектор

$\Delta\vec{\mathbf{s}}_i = \Delta s_i \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M_i)$. Для дуги з номером i складемо скалярний добуток: $\left(\vec{\mathbf{a}}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta\mathbf{s}_i}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}}(M_i) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M_i)\right) \cdot \Delta s_i$, а потім укладемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\mathbf{a}}(M_i) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M_i)\right) \cdot \Delta s_i . \tag{4.1}$$

Це є інтегральна сума для функції $\left(\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M)\right)$ вздовж кривої AB.

Нехай тепер $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta s_i$ – найбільша з довжин Δs_i.

<u>**Означення 1.**</u> Якщо існує скінчена границя послідовності інтегральних сум (4.1), за умови, що $\lambda \to 0$ (або $n \to \infty$), і ця границя не залежить ані від способу розбиття кривої на дуги, ані від вибору зазначених точок, то вона є криволінійним інтегралом від функції $\left(\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M)\right)$ вздовж кривої AB і позначається

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\mathbf{a}}(M_i) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}(M_i)\right) \cdot \Delta s_i . \tag{4.2}$$

В даному виразі розкриваємо скалярний добуток $\vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}$, і тоді

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}\, ds = \int\limits_{AB} \left(P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma\right) ds . \tag{4.3}$$

Введемо вектор $\overrightarrow{\mathbf{ds}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}\, ds = \{dx; dy; dz\}$. Тоді

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}\, ds = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz . \tag{4.4}$$

Криволінійний інтеграл (4.3) є криволінійним інтегралом 1-го роду (по довжині дуги), а інтеграл (4.4) – криволінійним інтегралом 2-го роду (по координатам).

Теорема 1. Якщо крива AB міститься на площині і задана рівняннями

$$\{x=\varphi(t), y=\psi(t),$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ визначені та неперервні на проміжку $[\alpha,\beta]$, причому $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ також існують й неперервні на $[\alpha,\beta]$, а параметр t зростає від α до β, і, якщо в кожній точці кривої AB функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – координати векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z)\}$ – неперервні, то тоді криволінійний інтеграл другого роду вздовж кривої AB існує і виражається через визначений інтеграл:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\\&=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big[\varphi(t),\psi(t)\big]\cdot\varphi'(t)+Q\big[\varphi(t),\psi(t)\big]\cdot\psi'(t)\Big)dt.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Якщо крива AB є кривою у просторі та задається параметричними рівняннями

$$\{x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\eta(t),\ t\in[\alpha,\beta]\,(\alpha<\beta)$$

і функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ – неперервно-диференційовні на проміжку $[\alpha,\beta]$, функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – координати векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ – неперервні в кожній точці кривої AB, то справедливе твердження

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[P(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)) \cdot \psi'(t) +$$

$$+ R(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)) \cdot \eta'(t) \Big] dt. \qquad (4.6)$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1;2;-2)$ і $B(0;-1;0)$, а векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left\{x^3; 2xy^2; -3x^2 z\right\}$.

Розв'язання: Запишемо рівняння прямої AB у параметричній формі. Вектор $\overrightarrow{AB} = \{-1;-3;2\}$ – напрямний вектор цієї прямої, тому рівняння прямої

$$\{x = 1 - t, y = 2 - 3t, z = -2 + 2t,$$

а для ділянки AB параметр, очевидно, змінюється в межах: $0 \le t \le 1$.

Отже, $x'(t) = -1, y'(t) = -3, z'(t) = 2$. Тоді

$$\int\limits_L x^3 dx + 2xy^2 dy - 3x^2 z dz =$$

$$= \int\limits_0^1 -(1-t)^3 dt - 6(1-t)(2-3t)^2 dt - 6(1-t)^2(-2+2t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (25t^3 - 51t^2 + 31t - 5)dt = \left. \left(\frac{25}{4}t^4 - \frac{51}{3}t^3 + \frac{31}{2}t^2 - 5t \right) \right|_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

4.2 Робота силового поля.

Означення 2. Якщо поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ є силовим полем, то криволінійний інтеграл (4.4) виражає ***роботу*** даного поля, що витрачена на переміщення матеріальної точки вздовж траєкторії AB.

Приклад. Обчислити роботу силового векторного поля $\vec{F}=\{y, z, -x\}$ вздовж одного вітка гвинтової лінії $\{x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ від точки $A(a;0;2b\pi)$ до точки $B(a;0;0)$.

Розв'язання: Орієнтація лінії відповідає зміні параметра t від $t=2\pi$ (в точці A) до $t=0$ (в точці B).

Робота силового поля

$$A=\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int\limits_{AB} ydx+zdy-xdz=$$

$$=\int\limits_{2\pi}^{0}\left(a\sin t\cdot(-a\sin t)+bt\cdot a\cos t-ba\cos t\right)dt=$$

$$=\int\limits_{2\pi}^{0}\left(-a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+ab(t-1)\cdot\cos t\right)dt.$$

Інтеграл $\int\limits_{2\pi}^{0} ab(t-1)\cos tdt$ обчислюємо методом інтегрування частинами: $u=(t-1), dv=\cos tdt \Rightarrow du=dt, v=\sin t$. Таким чином

$$A=\left(-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+ab(t-1)\cdot\sin t+ab\cos t\right)\Bigg|_{2\pi}^{0}=a^2\pi\,.$$

4.3 Властивості криволінійного інтеграла другого роду.

Коли точка A співпадає з точкою B, тобто коли крива AB є замкненим контуром L, криволінійний інтеграл другого роду позначається символом:

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,,$$

причому не має значення, в якій точці починається рух вздовж контуру.

Слід зазначити, якщо L – плоский замкнений контур, який сам себе не перетинає, то у нього розрізняють додатний і від’ємний напрямки обходу, а саме: ***додатний напрямок обходу*** – напрямок, при якому область, що обмежена контуром L, залишається ліворуч, якщо спостерігач рухається вздовж контуру за цим напрямком. Якщо L – крива у просторі, то напрямок обходу контуру обговорюють окремо.

Розглянемо деякі властивості криволінійного інтеграла другого роду:

1) При визначенні криволінійного інтеграла другого роду $\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{ds}}$ слід розрізняти початок та кінець шляху інтегрування, а саме:

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{ds}} = -\int\limits_{BA} \vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{ds}}. \tag{4.7}$$

2) В тому випадку, коли крива AB замкнена, тобто замкненим є контур L, то

$$\oint_L \vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{ds}} = -\oint_L \vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{ds}}, \tag{4.8}$$

тобто зміна напряму обходу контуру L змінює знак інтеграла на протилежний.

3) Якщо точка C розбиває криву на дві ділянки AC та CB, то

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \int\limits_{AC} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} + \int\limits_{CB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} . \tag{4.9}$$

4) Лінійність: $\overrightarrow{\mathbf{a}_1}(M)$, $\overrightarrow{\mathbf{a}_2}(M)$ – векторні поля, α, β – сталі величини

$$\int\limits_{AB} \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}_1} + \beta\overrightarrow{\mathbf{a}_2}\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \alpha \int\limits_{AB} \overrightarrow{\mathbf{a}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} + \beta \int\limits_{AB} \overrightarrow{\mathbf{a}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} \tag{4.10}$$

Якщо лінія AB є прямолінійним відрізком, перпендикулярним осі OX, то $\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ дорівнює нулю, бо рівняння кривої $x = \mathrm{const}$ і $dx = 0$.

4.4 Циркуляція векторного поля.

<u>**Означення 3.**</u> Криволінійний інтеграл вздовж замкненого контуру $\oint\limits_{L} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}\, ds$ називається ***циркуляцією векторного поля*** $\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$ ***вздовж замкненого контуру***:

$$\text{Ц}_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = \oint\limits_{L} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_0}\, ds = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz . \tag{4.11}$$

Циркуляція характеризує обертальну здібність поля. Якщо векторні лінії поля замкнені, то циркуляція вздовж цих ліній в напрямку поля додатна, при цьому в гідродинамічній інтерпретації частинки рідини течуть по цим замкненим лініям. Нехай лінії течії довільні. Якщо в результаті руху рідини замкнений контур L в об'ємі V буде обертатися, то поле має обертальну здібність; абсолютна величина циркуляції буде визначати кутову швидкість обертання (чим більше $|Ц|$, тим більше швидкість); знак циркуляції покаже, чи співпадає напрямок обертання з напрямком інтегрування.

Циркуляція $Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)$ може бути використана для вимірювання потужності потоку рідини, що рухається вздовж кола L з лінійною швидкістю $\vec{\mathbf{a}}$.

<u>Приклад.</u> Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left\{y; x^2; -z\right\}$ вздовж контуру L, який є перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 4$ і $z = 3$.

<u>Розв'язання:</u> Контур L – коло радіуса $R = 2$, що міститься в площині $z = 3$ (рис. Т4.1). Запишемо параметричне рівняння цього кола:

$$\left\{x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3, t \in [0; 2\pi]\right.$$.

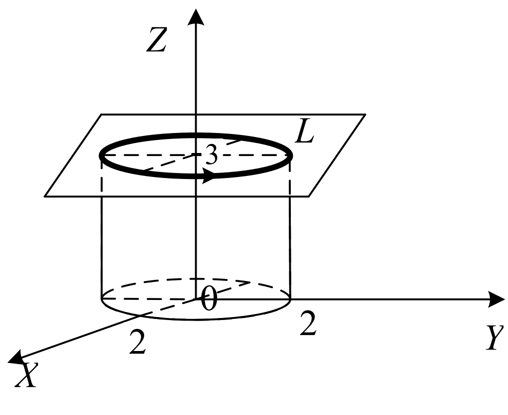


Рис. Т4.1.

Обчислимо циркуляцію за формулою (4.11):

$$\text{Ц}_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_L ydx+x^2dy-zdz=$$

$$\left|\begin{array}{c} dx=\left(2\cos t\right)'dt=-2\sin tdt \\ dy=\left(2\sin t\right)'dt=2\cos tdt \\ dz=\left(3\right)'dt=0 \end{array}\right|$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[2\sin t\cdot\left(-2\sin t\right)+\left(2\cos t\right)^2\cdot 2\cos t\right]dt=-4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt+8\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt+8\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=-4\pi\ .$$

Розділ 5. Ротор. Формула Стокса. Формула Гріна.

5.1 Ротор векторного поля.

<u>**Означення 1.**</u> ***Ротор*** (*вихор*) векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}}+Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}}+R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$ – вектор $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)$, проекція якого на довільний вектор $\vec{\mathbf{s}}$ визначається як границя частки циркуляції поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ вздовж деякого контуру L, який містить точку M і знаходиться в площині, перпендикулярній вектору $\vec{\mathbf{s}}$, до площі області, обмеженої даним контуром, за умови, що контур L стягується в точку M, па площа S прямує до нуля:

$$\text{пр}_{\vec{\mathbf{s}}}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\lim_{\substack{S\to 0\\ L\to M}}\frac{\text{Ц}_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)}{S}\,. \tag{5.1}$$

В просторі через декартові координати ротор визначається формулою

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{k}}\,. \tag{5.2}$$

5.2 Фізичний зміст ротора.

Нехай вектор $\vec{\mathbf{a}}(M)$ задає поле лінійних швидкостей рідини, що рухається навколо осі OZ, а в точці M кутова швидкість обертання $\vec{\boldsymbol{\omega}}=\omega\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Тоді $$\vec{\mathbf{a}}(M) = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{-\omega y; \omega x; 0\}$$ і

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{a}}(M) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \{0; 0; 2\omega\}.$$

Таким чином ротор поля лінійних швидкостей рідини дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ нескінченно малого об'єму навколо точки M. Якщо в дану точку рідини помістити кульку, вона буде обертатися з кутовою швидкістю $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Це пояснює назву «вихор поля», тому що вихор пов'язаний з інтенсивністю обертання рухомих частинок рідини (явище турбулентності).

5.3 Теорема Стокса.

Нехай Ω – певна поверхня, а L – замкнений контур на даній поверхні. Оберемо на Ω напрямок нормалі $\vec{\mathbf{n}}$ і, у відповідності з цим напрямком, встановимо додатний напрямок обходу контуру L.

Також припустимо, що в кожній точці Ω задане векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$.

Має місце твердження:

Формула Стокса:

Циркуляція векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ вздовж контуру L певної поверхні Ω дорівнює потоку ротора векторного поля через цю поверхню

$$\oint\limits_{L} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \iint\limits_{\Omega} \left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0} \right) d\sigma . \qquad (5.3)$$

__**Наслідок:**__ Криволінійний інтеграл вздовж будь-якого кусково-гладкого замкненого контуру дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ротор векторного поля є нульовим.

__**Приклад.**__ Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left\{ y; x^2; -z \right\}$ вздовж контуру L, який є перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 4$ і $z = 3$.

__Розв'язання:__ Контур L є перетином кругового циліндра і площини, паралельної XOY (Рис. Т5.1). Очевидно, що L – коло.

Застосуємо формулу Стокса. Для зручності поверхнею Ω, яка є областю інтегрування в поверхневому інтегралі, оберемо площину $z = 3$.

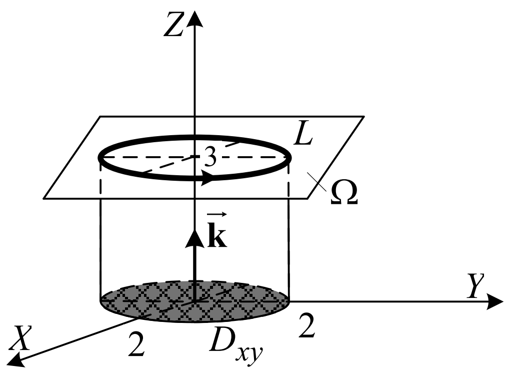


Рис. Т5.1.

Одинична нормаль до Ω: $\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \vec{\mathbf{k}} = \left\{ 0; 0; 1 \right\}$. Обчислимо ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x^2 & -z\end{vmatrix}=\vec{\mathbf{i}}\cdot(0-0)-\vec{\mathbf{j}}\cdot(0-0)+\vec{\mathbf{k}}\cdot(2x-1)=\{0;0;2x-1\}$$

.

Далі $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=2x-1$. Побудуємо для обчислення поверхневого інтеграла проекцію Ω на координатну площину XOY, область D_{xy} – коло $x^2+y^2=4$. В подвійному інтегралі по області D_{xy} перейдемо до полярних координат. Таким чином

$$\text{Ц}_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\iint\limits_{\Omega}(2x-1)\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}(2x-1)\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}(2\rho\cos\varphi-1)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2\rho^3}{3}\cos\varphi-\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{16}{3}\cos\varphi-2\right)d\varphi=\left(\frac{16}{3}\sin\varphi-2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-4\pi\,.$$

Можемо перевірити результат – на попередній лекції ця задача була розв’язана безпосереднім обчисленням криволінійного інтеграла.

5.4 Формула Гріна.

Нехай в області D, яка міститься на площині XOY і контур L є межею даної області, задане неперервне векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}}+Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}}$, тоді справедлива формула

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,, \tag{5.4}$$

при цьому рух вздовж контуру відбувається в такому напрямі, аби область залишалася ліворуч.

Доведення: Розглянемо формулу Стокса в даній ситуації, тобто коли поверхнею є область в площині XOY і нормаль до неї $\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \{0;0;1\}$, а

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$; скалярний добуток $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Згідно (5.3):

$$\oint_L \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{ds}} = \oint_L Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}\right)d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy .$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \{x+y; x-y\}$ вздовж замкненого контуру L (рис. Т5.2), який складається з частин кривих $y = -x^2, y = -1$ (напрям обходу додатний).

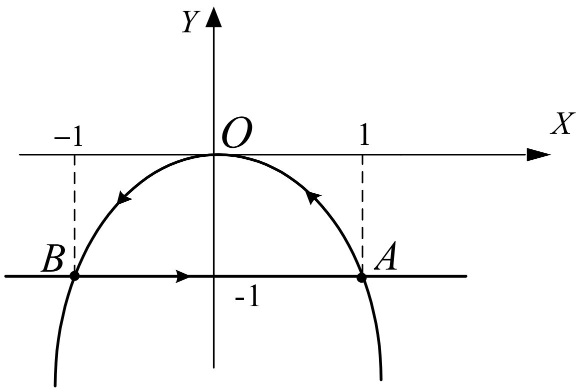


Рис. Т5.2.

Розв'язання: Спочатку обчислимо циркуляцію безпосередньо за допомогою криволінійного інтеграла:

$$Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = \oint_L (x+y)dx + (x-y)dy =$$

$$= \int\limits_{BA} (x+y)dx + (x-y)dy + \int\limits_{AOB} (x+y)dx + (x-y)dy \,.$$

Відрізок прямої BA, з врахуванням напрямку руху, можна записати: $y=-1, -1 \le x \le 1$. Відповідно $dy=0$ і інтеграл

$$\int\limits_{AB} (x+y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x-1\right)dx = \left.\frac{\left(x-1\right)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = -2\,.$$

Дуга параболи AOB задається рівнянням $y=-x^2$, а змінна x змінюється від 1 до -1, тому

$$\int\limits_{AOB} (x+y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{1}^{-1} \Big(x - x^2 + x\cdot\left(-2x\right) + x^2\cdot\left(-2x\right)\Big)dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{-1} \left(x - 3x^2 - 2x^3\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\right|_{1}^{-1} = 2.$$

Остаточно $\oint\limits_{L} (x+y)dx + (x-y)dy = 0$.

Контур L (рис. Т5.2) – замкнений, застосуємо формулу Гріна, враховуючи те, що

$$P(x,y) = x+y \Rightarrow \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1,$$

$$Q(x,y) = x-y \Rightarrow \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1,$$

$$Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = \oint\limits_{L} (x+y)dx + (x-y)dy = \iint\limits_{D} (1-1)dxdy = 0.$$

5.5 Умова незалежності криволінійного інтеграла від форми кривої інтегрування.

<u>Означення.</u> Інтеграл $I = \int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ ***не залежить від шляху інтегрування,*** якщо результати інтегрування вздовж будь-яких кривих, які з’єднують точки A та B, співпадають (рис. Т5.3), тобто, якщо

$$\int\limits_{AMB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \int\limits_{ANB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}.$$

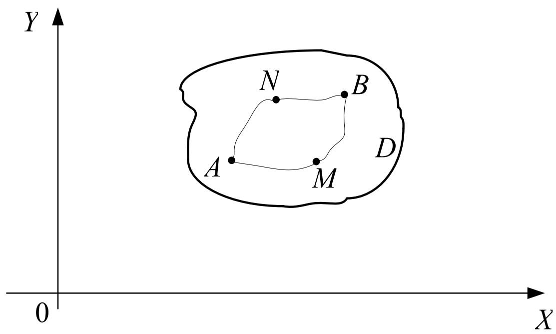


Рис. Т5.3.

<u>Теорема 1.</u> Інтеграл $I = \int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ не залежить від форми кривої AB, причому $\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$, тоді і лише тоді, коли функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні і мають в області $V \subset \mathbb{R}^3$ неперервні частинні похідні, а також в V виконується $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}} \equiv 0$.

<u>Теорема 2.</u> Для того, щоб інтеграл $I = \int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ був не залежним від шляху інтегрування в випадку плоского векторного поля

$\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці області D виконувалася умова

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \qquad (5.5)$$

Якщо інтеграл $I = \int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ не залежить від форми кривої AB, то підінтегральний вираз є повним диференціалом неперервної функції $u = u(x,y,z)$

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z). \qquad (5.6)$$

І тоді

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \int\limits_{AB} du = u(B) - u(A). \qquad (5.7)$$

Функцію $u = u(x,y,z)$ називають ***потенціальною функцією***.

Розділ 6. Спеціальні векторні поля. Потенціал.

6.1 Потенціальне векторне поле.

Означення 1. Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$, задане в області $V \subset \mathbb{R}^3$, є ***потенціальним полем***, якщо воно є полем градієнта деякої скалярної функції, тобто якщо існує така скалярна функція $u(M): \forall M \in V$ виконується $\vec{\mathbf{a}}(M) = \mathbf{grad}\, u(M)$.

Функція $u(M) = u(x, y, z)$ – ***потенціал*** (*силова функція*) векторного поля.

Теорема: *Критерій потенціальності векторного поля*

Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ в області V потенціальне тоді і лише тоді, коли в усіх точках V виконується: $\mathrm{rot}\, \vec{\mathbf{a}} = 0$.

Сформулюємо твердження, які є еквівалентними:

1. Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ потенціальне в області V, тобто в даній області існує скалярне поле $u = u(M)$ таке, що $\vec{\mathbf{a}}(M) = \mathbf{grad}\, u(M)$.

2. Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ безвихрове, тобто в V справедливе $\mathrm{rot}\, \vec{\mathbf{a}} = 0$.

3. Циркуляція потенціального векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ вздовж довільного замкненого контуру $L \subset V$ завжди дорівнює нулю:

$$Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = Ц_L\left(\mathbf{grad}\, u\right) = 0. \tag{6.4}$$

4. Криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ вздовж довільної кривої AB, взятої в цьому полі, дорівнює

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = u(B) - u(A). \tag{6.5}$$

Для силового потенціального поля цей результат означає, що в такому полі робота вздовж будь-якої замкненої траєкторії дорівнює нулю; робота не залежить від форми кривої і дорівнює різниці значень силової функції $u = u(M)$ в кінцевій і початковій точках.

6.2 Обчислення потенціалу потенціального векторного поля.

Візьмемо в області V дві точки: фіксовану точку M_0 і поточну M:

$$u(M) = u(M_0) + \int\limits_{M_0M} \vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} \Leftrightarrow u(x,y,z) = C + \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz \tag{6.6}$$

($C = u(M_0)$ – значення функції в довільній, але фіксованій точці – стала величина).

<u>Приклад</u>. Довести, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(x^2 - 2yz\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(y^2 - 2xz\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(z^2 - 2yx\right)\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне і обчислити його потенціал.

<u>Розв'язання:</u> Координати векторного поля $P(x,y,z) = x^2 - 2yz$, $Q(x,y,z) = y^2 - 2xz$, $R(x,y,z) = z^2 - 2yx$. Обчислимо ротор даного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-2yz & y^2-2xz & z^2-2yx\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\mathbf{i}}\left(-2x+2x\right)-\vec{\mathbf{j}}\left(-2y+2y\right)+\vec{\mathbf{k}}\left(-2z+2z\right)=0.$$

Тобто, векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ – потенціальне.

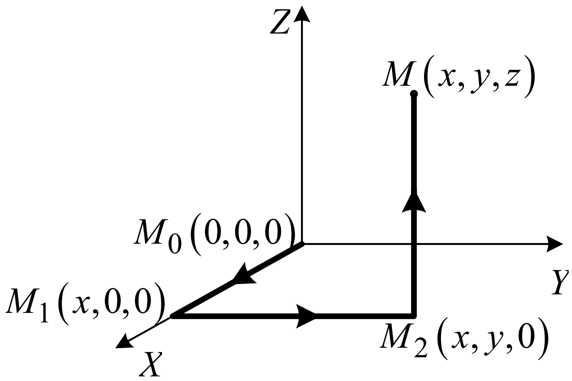


Рис. Т6.1.

Розглянемо ламану $M_0M_1M_2M$, де $M_0\left(0,0,0\right)$ (рис. Т6.1). Потенціал за формулою (6.6):

$$u(x,y,z)=C+\int\limits_{M_0M_1M_2M}\left(x^2-2yz\right)dx+\left(y^2-2xz\right)dy+\left(z^2-2yx\right)dz\,.$$

Розглянемо окремі ланки ламаної:

$$M_0M_1: 0\le x\le x, y=0, z=0;$$

$$M_1M_2: x=\text{const}, 0\le y\le y, z=0;$$

$$M_2M: x=\text{const}, y=\text{const}, 0\le z\le z\,.$$

Продовжимо обчислення потенціалу

$$u(x,y,z)=C+\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z\left(z^2-2yx\right)dz=C+\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-2xyz\,.$$

Можна перевірити результат за допомогою означення $\vec{\mathbf{a}}(M)=\mathbf{grad}\,u(M)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-2yz=P\left(x,y,z\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xz=Q\left(x,y,z\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=z^2-2yx=R\left(x,y,z\right).$$

6.3 Соленоїдальне векторне поле.

<u>**Означення 2.**</u> Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$, задане в області $V\subset\mathbb{R}^3$, називається ***соленоїдальним*** (або трубчатим), якщо в усіх точках даної області виконується: $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=0$.

В гідродинамічній інтерпретації: соленоїдальне векторне поле – це поле без джерел, в електростатиці – поле без зарядів.

<u>**Теорема:**</u> Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$, задане в області $V\subset\mathbb{R}^3$, соленоїдальне тоді і лише тоді, коли векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ є ротором деякого вектора $\vec{\mathbf{b}}(M)$:

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=\operatorname{rot}\vec{\mathbf{b}}(M)\,.$$

$\vec{\mathbf{b}}(M)$ – *векторний потенціал* поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$.

Властивості соленоїдального поля:

1. Соленоїдальні поля не мають ані джерел, ані стоків.
2. Потік $\vec{\mathbf{a}}(M)$ через будь-яку гладку замкнену поверхню Ω, що міститься в полі, дорівнює нулю
$$\Pi = \oiint\limits_{\Omega} \left(\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M) \right) d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}}\, dxdydz = 0.$$
3. В соленоїдальному полі векторні лінії ані розпочинаються, ані закінчуються; вони або замкнені, або мають кінці на межі поля.
4. Потік векторного поля через поперечний переріз векторної трубки (інтенсивність цієї трубки) в соленоїдальному полі залишається сталим вздовж усієї трубки.

Якщо векторне поле є швидкістю течії рідини, то кількість рідини, що витікає через поперечний переріз векторної трубки, завжди дорівнює кількості рідини, яка втікає.

6.4 Оператор Гамільтона.

Засновник векторного аналізу Вільям Роуен Гамільтон впровадив в математику символічний вектор ∇, назвавши його *alted* (слово *delta*, прочитане в зворотному напрямку), який слідом за Олівером Хевісайдом, почали називати *набла* (це назва стародавнього асирійського музичного інструменту).

Цей вектор або ***оператор Гамільтона***:
$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \tag{6.1}$$

Даний оператор набуває важливий зміст в комбінації зі скалярними або векторними функціями. Він дозволяє скоротити і спростити запис багатьох формул теорії поля.

Зокрема, градієнт можна записати $\nabla u = \mathbf{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$;

скалярний добуток $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ і

$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$ називаємо ***оператором Лапласа***.

Також

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{a}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} \text{ (скалярний добуток),} \tag{6.2}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{a}} = \nabla \times \vec{\mathbf{a}} \text{ (векторний добуток).} \tag{6.3}$$

Оператор Гамільтона є диференціальним оператором, тому в запису не слід його відривати від функції, на яку він діє (впливає).

6.5 Гармонійне векторне поле.

<u>Означення 3.</u> Векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$, задане в області $V \subset \mathbb{R}^3$, ***гармонійне***, якщо $\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{a}}(M) = 0$ і $\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{a}}(M) = 0$ в усіх точках цього поля.

Або $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, де $\vec{\mathbf{a}}(M) = \mathbf{grad}\, F$; функція F – гармонійна.

Гармонійне векторне поле – потенціальне поле, потенціал якого – гармонійна функція.

Довільне векторне поле можна розглядати як результат накладання потенціального і соленоїдального полів.

<u>Приклад</u>. Визначити тип векторного поля

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=\{-2x-2y+3z;2z-2x+1;2z+2y+3x+2\}.$$

<u>*Розв'язання:*</u> Обчислимо диференціальні характеристики заданого поля. Дивергенція $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=-2+0+2\equiv 0$. Це дозволяє зробити висновок, що поле є соленоїдальним. Перевіримо, чи виконується для поля критерій потенціальності. Ротор

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -2x-2y+3z & 2z-2x+1 & 2z+2y+3x+2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(2-2\right)-\vec{j}\left(3-3\right)+\vec{k}\left(-2+2\right)\equiv 0.$$

Тобто поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ є потенціальним полем. Таким чином, і $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)\equiv 0$, і $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\equiv 0$, тому поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ – гармонійне поле.

<u>ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА</u>

Заняття 1. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.

<u>Питання</u>:

1. *Скалярне поле. Лінії та поверхні рівня.*
2. *Похідна за напрямом.*
3. *Напрям та швидкість найбільшого зростання функції.*
4. *Градієнт скалярного поля.*

<u>Приклад 1</u>: Скалярне поле задано функцією $u = \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчислити градієнт поля в точці $M(2,-3,1)$. Побудувати поверхні рівня скалярного поля при $u = \dfrac{1}{2}, u = -1$.

<u>Розв'язання</u>: Градієнт скалярного поля визначається формулою $\mathbf{grad}\, u = \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial z} \right\}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2z \cdot \frac{-2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2z \cdot \frac{-2y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2z \cdot 2z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{2\left(x^2 + y^2 - z^2\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}.$$

В точці $M(2,-3,1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = -\frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{\left(2^2 + (-3)^2 + 1^2\right)^2} = -\frac{2}{49};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \frac{3}{49};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \frac{6}{49}.$$

Таким чином $\mathbf{grad}\, u\big|_M = \left\{\dfrac{-2}{49};\dfrac{3}{49};\dfrac{6}{49}\right\}$.

Визначимо поверхні рівня:

1) $u=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=4z \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4z+4=4,$$

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ – сфера з центром в точці $(0,0,2)$ і радіусом 2; в точці $(0,0,0)$ поле не визначено.

2) $u=-1$. Повторимо попередні перетворення:

$$\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}=-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-2z \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2z+1=1,$$

$x^2+y^2+(z+1)^2=1$– сфера з центром в точці $(0,0,-1)$ і радіусом 1; в точці $(0;0;0)$ поле не визначено.

<u>Відповідь</u>: $\mathbf{grad}\, u\big|_M = \left\{\dfrac{-2}{49};\dfrac{3}{49};\dfrac{6}{49}\right\}$; $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ – сфера з центром в точці $(0;0;2)$ і радіусом 2; $x^2+y^2+(z+1)^2=1$– сфера з центром в точці $(0;0;-1)$ і радіусом 1, в сферах точка $(0;0;0)$ є виколотою.

<u>Приклад 2</u>: Побудувати лінії рівня матеріального о скалярного поля $u(x,y)=xy$.

<u>Розв'язання</u>: Поле визначене в усіх точках. Рівняння ліній рівня $xy=C$. Якщо $C=0$, то лінії рівня $x=0$ (вісь OY) і $y=0$ (вісь OX); якщо $C\neq 0$, то рівняння $xy=C$ задають гіперболи (рис. П1.1).

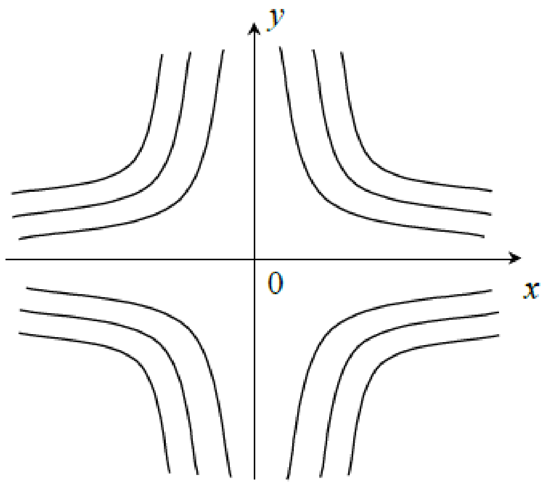


Рис. П1.1.

Приклад 3: Обчислити похідну скалярного поля $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ в точці $M(2;1;1)$ в напрямку вектора $\vec{\mathbf{l}} = 3\vec{\mathbf{j}} - 4\vec{\mathbf{k}}$.

Розв'язання: Похідна скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці M в напрямку вектора $\vec{\mathbf{l}}$ дорівнює:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma .$$

Обчислюємо частинні похідні функції $u(x,y,z)$ та їх значення в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x|_M = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -\left.\frac{1}{1+(y+z)^2}\right|_M = -\frac{1}{5};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -\left.\frac{1}{1+(y+z)^2}\right|_M = -\frac{1}{5}.$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора $\vec{\mathbf{l}}$:

$$\vec{\mathbf{l}} = \{0;3;-4\} \Rightarrow |\vec{\mathbf{l}}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$\cos\alpha = 0, \cos\beta = \frac{3}{5}, \cos\gamma = -\frac{4}{5}.$$

Остаточно $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = 4 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25}.$$

Відповідь: $\frac{1}{25}$.

Приклад 4: Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{x} \cdot y - x \cdot z^2$ в точці $M(1;-1;4)$ в напрямі нормалі до поверхні $x^2 + \frac{y^2}{2} = 2z$ (нормаль утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ).

Розв'язання: Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то нормаль має компоненти $\vec{\mathbf{n}} = \left\{F'_x; F'_y; F'_z\right\}$. В нашому випадку $F(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2} - 2z$, і, значить $F'_x = 2x, F'_y = y, F'_z = -2$. В точці $M(1;-1;4)$ відповідно $F'_x = 2, F'_y = -1, F'_z = -2$. За умовою задачі кут між нормаллю і віссю OZ має бути гострим, тому $\vec{\mathbf{n}} = \{-2;1;2\}$. Напрямні косинуси цього вектора:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{1}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Обчислимо координати градієнта поля u в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\left(\frac{y}{2\sqrt{x}} - z^2\right)\right|_M = -\frac{1}{2} - 16 = -\frac{33}{2},$$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\sqrt{x}\right|_M = 1$, $\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.-2xz\right|_M = -8$.

Остаточно похідна за напрямом

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = -\frac{33}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\cdot\frac{1}{3} + (-8)\cdot\frac{2}{3} = 6.$$

<u>Відповідь</u>: 6.

<u>Приклад 5</u>: Визначити найбільшу крутизну підйому поверхні $u = x^y$ в точці $P(2,2,4)$.

<u>Розв'язання</u>: Скористуємося співвідношенням $|\mathbf{grad}\,u| = \max\frac{\partial u}{\partial l}$.

Обчислимо градієнт поля та його довжину в точці $P(2,2,4)$:

$$\mathbf{grad}\,u = yx^{y-1}\vec{\mathbf{i}} + x^y \ln x\,\vec{\mathbf{j}} + 0\vec{\mathbf{k}};$$

$$\left.\mathbf{grad}\,u\right|_P = 2\cdot 2^{2-1}\vec{\mathbf{i}} + 2^2\ln 2\,\vec{\mathbf{j}} + 0\vec{\mathbf{k}} = \{4;4\ln 2;0\};$$

$$\left|\left.\mathbf{grad}\,u\right|_P\right| = \sqrt{4^2 + 4^2\ln^2 2} = 4\sqrt{1+\ln^2 2}.$$

<u>Відповідь</u>: $4\sqrt{1+\ln^2 2}$.

<u>Приклад 7</u>: Обчислити кут між градієнтами скалярних полів $u = \frac{x}{yz^2}$ і $v = x^2 - y^2 - 3z^2$ в точці $M(1,-1,2)$.

<u>Розв'язання</u>: Обчислимо градієнти полів в заданій точці:

$$\mathbf{grad}\,u = \frac{1}{yz^2}\vec{\mathbf{i}} - \frac{x}{y^2z^2}\vec{\mathbf{j}} - \frac{2x}{yz^3}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{grad}\,v = 2x\vec{\mathbf{i}} - 2y\vec{\mathbf{j}} - 6z\vec{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{grad}\,u\big|_M = -\frac{1}{4}\vec{\mathbf{i}} - \frac{1}{4}\vec{\mathbf{j}} + \frac{2}{8}\vec{\mathbf{k}} = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\};$$

$$\mathbf{grad}\,v\big|_M = 2\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - 12\vec{\mathbf{k}} = \{2; 2; -12\}.$$

Кут між векторами знаходимо за допомогою скалярного добутку

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{grad}\,u\big|_M \cdot \mathbf{grad}\,v\big|_M}{\left|\mathbf{grad}\,u\big|_M\right| \cdot \left|\mathbf{grad}\,v\big|_M\right|},$$

$$\left|\mathbf{grad}\,u\big|_M\right| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{16}}; \quad \left|\mathbf{grad}\,v\big|_M\right| = \sqrt{4 + 4 + 144} = \sqrt{152};$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 12}{\sqrt{\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{152}} = \frac{2\cdot 4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{152}} = \frac{8}{\sqrt{456}} = \frac{2}{\sqrt{114}}.$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{114}}.$$

Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{114}}$.

Домашнє завдання:

1. Визначити область визначення скалярного поля і поверхні (лінії) рівня:

1) $u(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

2) $u(x,y)=x^2-y^2$;

3) $u(x,y,z)=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$;

4) $u(x,y,z)=\ln\left(4-x^2-y^2-z^2\right)$.

2. Знайти векторні лінії векторного поля:

1) $\vec{\mathbf{a}}(M)=\dfrac{\vec{\mathbf{i}}}{x}+\dfrac{\vec{\mathbf{j}}}{y}$;

2) $\vec{\mathbf{a}}(M)=Cx\vec{\mathbf{i}}-Cy\vec{\mathbf{j}}-2Cz\vec{\mathbf{k}}$.

3. Знайти в початку координат похідну скалярного поля $u(x,y)=x^2+y^2-3x+2y$ в напрямі, що йде з початку координат в точку $M(3,4)$.

4. Знайти похідну поля $u(x,y)=xyz$ в точці $M(5,1,-8)$ в напрямі, що йде з цієї точки в точку $A(9,4,4)$.

5. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$ в точці $M(1,2)$.

6. Знайти найбільшу швидкість зміни поля $u(x,y,z)=\ln^2\left(x^2+y^2+4z\right)$ в точці $M(0,1,2)$.

7. Знайти кут між градієнтом скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точці $M(3,4,12)$ і вектором $\vec{\mathbf{b}}=\{2;-3;6\}$.

Заняття 2. Обчислення потоку векторного поля

Питання:

1. *Рівняння площини у відрізках.*
2. *Рівняння поверхонь другого порядку.*
3. *Нормаль до поверхні. Орт вектора нормалі.*
4. *Полярні координати. Випадки застосування для обчислення подвійного інтеграла.*
5. *Потік векторного поля.*

Приклад 1: Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{-x;2y;z\}$ через частину площини $x+2y+3z=1$, що міститься в першому октанті (нормаль утворює з віссю OZ гострий кут).

Розв'язання: Запишемо рівняння площини «в відрізках» і зробимо її креслення (рис. П2.1):

$$x+2y+3z=1 \Leftrightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{1/2}+\frac{z}{1/3}=1,$$

з цього рівняння видно, що відрізки, які відтинає на координатних осях дана площина дорівнюють відповідно $a=1$ (на осі OX), $b=\frac{1}{2}$ (на осі OY), $z=\frac{1}{3}$ (на осі OZ).

Нормаль до площини, що має рівняння $Ax+By+Cz+D=0$, задається $\vec{\mathbf{n}}=\{A;B;C\}$. Таким чином $\vec{\mathbf{n}}=\{1;2;3\}$, а орт нормалі

$$\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \frac{\vec{\mathbf{n}}}{\left|\vec{\mathbf{n}}\right|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+4+9}}; \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}.$$

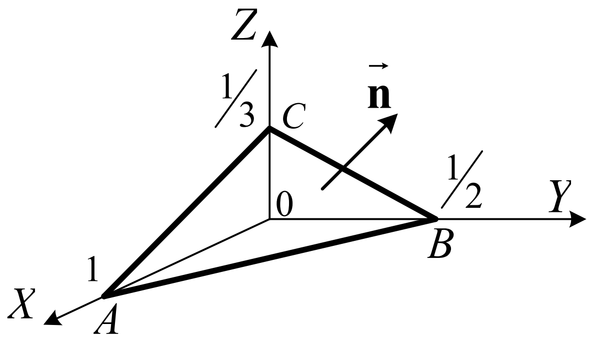


Рис. П2.1.

Потік векторного поля через поверхню

$$\Pi_\Omega\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right) = \iint\limits_\Omega \left(\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n^0}}(M)\right) d\sigma.$$

$$\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n^0}}(M) = -x \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2y \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + z \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left(-x + 4y + 3z\right).$$

Обчислимо поверхневий інтеграл, переходячи до подвійного інтеграла по проекції частини площини на координатну площину XOY (рис. П2.2).

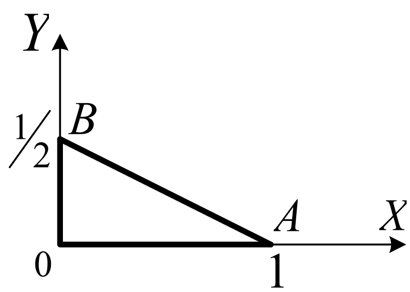


Рис. П2.2.

$$\Pi_{\Omega}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint\limits_{\Omega}\left(-x+4y+3z\right)d\sigma=\left|\begin{array}{l} d\sigma=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy \\ z=\dfrac{1-x-2y}{3}\Rightarrow z'_x=-\dfrac{1}{3},\,z'_y=-\dfrac{2}{3} \\ d\sigma=\sqrt{1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}}dxdy=\dfrac{\sqrt{14}}{3}\,dxdy \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint\limits_{D_{xy}}\left(-x+4y+\left(1-x-2y\right)\right)\frac{\sqrt{14}}{3}dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{D_{xy}}\left(-2x+2y+1\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^{{1-x}/{2}}\left(\left(1-2x\right)+2y\right)dy=\frac{1}{3}\int_0^1 dx\cdot\left(\left(1-2x\right)y+y^2\right)\Big|_0^{{1-x}/{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{\left(1-2x\right)\cdot\left(1-x\right)}{2}+\frac{\left(1-x\right)^2}{4}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}x^2-2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x+\frac{5x^3}{12}-x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{18}.$$

<u>Відповідь</u>: $\frac{1}{18}$.

<u>Приклад 2</u>: Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left\{2x-y;x+y-2z;2x+z\right\}$ через частину площини $x+y+z=3$, що міститься у першому октанті (нормаль утворює з віссю OZ гострий кут).

<u>*Розв'язання:*</u> Лінія перетину площини з координатною площиною XOY – пряма $x+y=3$ (на рисунку П2.3 – пряма AB), лінія перетину площини з координатною площиною XOZ – пряма $x+z=3$ (на рисунку пряма AC), лінія перетину площини з координатною площиною YOZ – пряма $y+z=3$ (на рисунку пряма BC). Обчислимо потік через площу трикутника ABC.

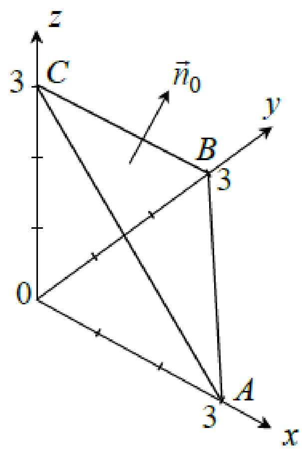


Рис. П2.3.

$$\Pi = \iint\limits_{ABC} (2x-y)dydz + (x+y-2z)dxdz + (2x+z)dxdy.$$

Кожний з трьох поверхневих інтегралів замінимо подвійним інтегралом по проекції трикутника ABC на відповідну координатну площину.

1) Обчислимо $\iint\limits_{ABC} (2x-y)dydz$. Проекцією трикутника ABC на площину YOZ є трикутник COB.

$$\iint\limits_{ABC}\left(2x-y\right)dydz=\iint\limits_{COB}\left(2(3-y-z)-y\right)dydz=\iint\limits_{COB}\left(6-3y-2z\right)dydz=$$

$$=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{3-y}\left(6-3y-2z\right)dz=\int\limits_0^3 dy\cdot\left(\left(6-3y\right)z-z^2\right)\Big|_0^{3-y}=$$

$$=\int\limits_0^3 dy\cdot\left(\left(6-3y\right)z-z^2\right)\Big|_0^{3-y}=\int\limits_0^3\left(18-15y+3y^2-9+6y-y^2\right)dy=\int\limits_0^3\left(2y^2-9y+9\right)dy=$$

$$=\left(\frac{2y^3}{3}-\frac{9y^2}{2}+9y\right)\Bigg|_0^3=18-\frac{81}{2}+27\,.$$

2) Наступний поверхневий інтеграл другого роду обчислюємо, переходячи до подвійного інтеграла по проекції трикутника ABC в координатну площину XOZ, якою є трикутник AOC:

$$\iint\limits_{ABC}\left(x+y-2z\right)dxdz=\iint\limits_{AOC}\left(x+3-x-z-2z\right)dxdz=\iint\limits_{AOC}\left(3-3z\right)dxdz=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x}\left(3-3z\right)dz=\int\limits_0^3 dx\cdot\left(3z-\frac{3z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-x}=\int\limits_0^3\left(9-3x-\frac{27}{2}+9x-\frac{3}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(6x-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}\right)dx=\left(3x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{9}{2}x\right)\Bigg|_0^3=0\,.$$

3) І останній

$$\iint\limits_{ABC}\left(2x+z\right)dxdy=\iint\limits_{AOB}\left(2x+3-x-y\right)dxdy=\iint\limits_{AOB}\left(x+3-y\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x}\left(x+3-y\right)dy=\int\limits_0^3 dx\cdot\left(\left(x+3\right)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-x}=\int\limits_0^3\left(9-x^2-\frac{9}{2}+3x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{9}{2} + 3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{9}{2}x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} + \frac{27}{2} - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}.$$

Остаточний результат $\Pi = \frac{117}{2} + 0 + \frac{27}{2} = 72$.

<u>Відповідь</u>: 72.

<u>Приклад 3</u>: Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\vec{\mathbf{i}} + (y+z)\vec{\mathbf{j}} + (z-y)\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, яка відтинається площиною $z = 0 (z \geq 0)$ (нормаль зовнішня).

<u>Розв'язання</u>: Поверхня $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ – сфера (рис. П2.4); площина $\Sigma_2 : z = 0$ – координатна площина XOY – відтинає верхню частину цієї сфери (за умови $z \geq 0$). Для обчислення поверхневого інтеграла, що визначає потік векторного поля $\Pi_\Omega\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right) = \iint\limits_\Omega \left(\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n^0}}(M)\right) d\sigma$ побудуємо проекцію Ω на XOY : D_{xy} – круг $x^2 + y^2 = 9$.

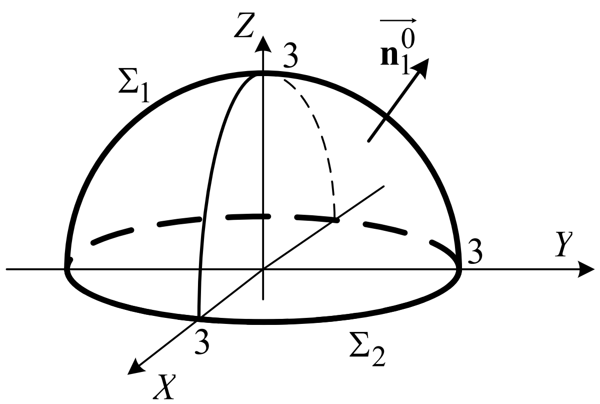


Рис. П2.4.

Рівняння поверхні в вигляді $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$.

Нормаль $\vec{\mathbf{n}}=\pm\left\{F'_x;F'_y;F'_z\right\}$. Таким чином $\vec{\mathbf{n}}=\pm\{2x;2y;2z\}$. Одинична нормаль $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=\pm\dfrac{\{2x;2y;2z\}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\pm\dfrac{\{x;y;z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. З геометричних міркувань зрозуміло, що зовнішня нормаль утворює гострий кут з віссю OZ і $z\geq 0$. Тому $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=\dfrac{\{x;y;z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Тому

$$\Pi_\Omega\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=\iint_\Omega\left(\frac{x\cdot x+(y+z)\cdot y+(z-y)\cdot z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)d\sigma=\iint_\Omega\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)d\sigma=$$

$$\left|\begin{array}{l} d\sigma=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy \\ z=\sqrt{9-x^2-y^2}\Rightarrow z'_x=-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\, z'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \\ d\sigma=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{9-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{9-x^2-y^2}}\,dxdy=\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dxdy \end{array}\right|$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{x^2+y^2-\left(9-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left(9-x^2-y^2\right)}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{2x^2+2y^2-9}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{9}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dxdy=\left|\begin{array}{l}\text{перехід в полярні координати} \\ x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho\, d\rho d\varphi\end{array}\right|=\iint_{D_{\rho\varphi}}\frac{9}{\sqrt{9-\rho^2}}\rho\, d\rho d\varphi=$$

$$=9\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \frac{\rho}{\sqrt{9-\rho^2}} d\rho = 9\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^3 \frac{d\left(9-\rho^2\right)}{\sqrt{9-\rho^2}} = -9\pi\cdot 2\sqrt{9-\rho^2}\Big|_0^3 = 54\pi .$$

Відповідь: 54π.

Приклад 4. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = z\vec{\mathbf{k}}$ через поверхню Ω: частина поверхні $z = x^2 + y^2$, що обмежена площинами $x = 0, y = 0, x + y = 1$. Нормаль до нижньої сторони поверхні.

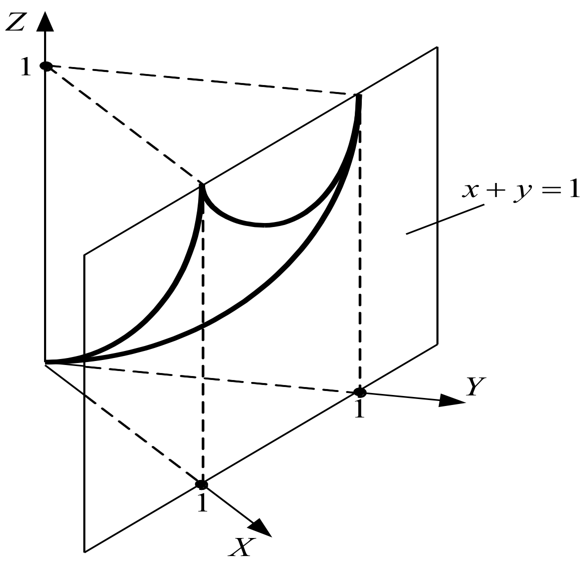


Рис. П2.5.

Розв'язання: Почнемо від креслення поверхні. Частина параболоїда $z = x^2 + y^2$ в першому октанті перетинається площиною $x + y = 1$, лінія перетину – парабола (рис. П2.5).

Потік обчислюємо за допомогою інтеграла $\Pi = \iint\limits_{\Omega} z dx dy$.

Враховуючи те, що поверхневий інтеграл визначено по нижній стороні поверхні, а проекція поверхні на площину XOY – трикутник з вершинами $(1;0),(0;0),(0;1)$, отримуємо

$$\Pi = \iint_{\Omega} z dxdy = -\iint_{D} \left(x^2 + y^2 \right) dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^2 + y^2 \right) dy =$$

$$= -\int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{1-x} = -\int_0^1 \left(x^2 (1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx =$$

$$= -\int_0^1 \left(-\frac{4}{3} x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

__**Відповідь:**__ $-\dfrac{1}{6}$.

__**Приклад 5.**__ Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \{2x; -y; 4xy + z\}$ через основу конуса $z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 3$. Нормаль зовнішня.

Розв'язання: Очевидно, що поверхнею Ω, через яку необхідно обчислити потік векторного поля, є круг, що розташований в площині $z = 3$, його центр міститься на осі OZ – точка $(0;0;3)$ – і радіус 3 (рис. П2.6). Нормаль – вектор колінеарний напрямному вектору осі OZ, зокрема ортом нормалі до Ω можемо вважати безпосередньо $\vec{\mathbf{k}} = \overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \{0;0;1\}$.

Тоді скалярний добуток $\vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}(M) = 4xy + z$. Складемо поверхневий інтеграл для визначення потоку векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\Pi = \iint_{\Omega} (4xy + z) dxdy.$$

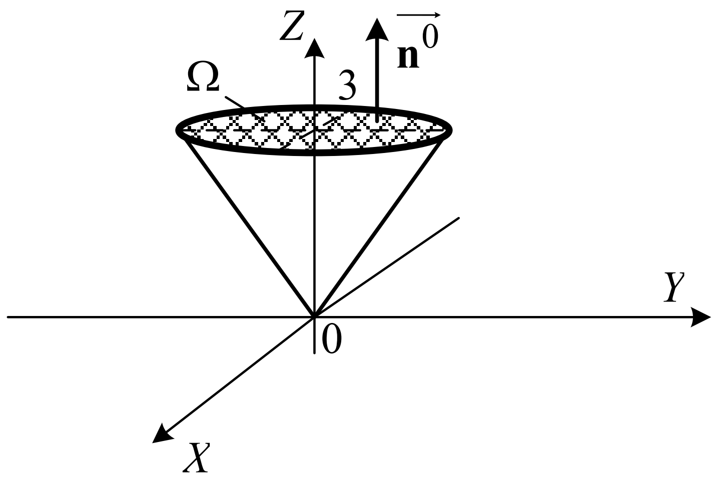


Рис. П2.6.

Даний поверхневий інтеграл другого роду обчислимо переходом до подвійного інтеграла по проекції Ω на площину XOY – по області D (рис. П2.7):

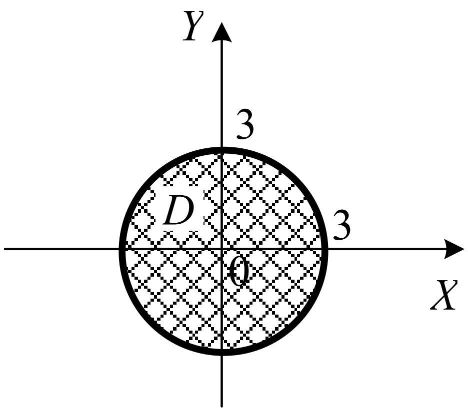


Рис. П2.7.

$$\Pi = \iint_{\Omega} (4xy + z)\,dxdy = \iint_{D} (4xy + 3)\,dxdy = \left| \begin{array}{l} \text{перехід в полярні координати} \\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho\, d\rho d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{D} \left(4\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + 3\right)\rho\, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(4\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + 3\right)\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(2\rho^3 \cdot \sin 2\varphi + 3\rho\right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\frac{\rho^4}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{3\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \left(3\sin 2\varphi + 1\right) d\varphi = \left| \begin{array}{l} \text{враховуємо періодичність} \\ \text{функції } \sin 2\varphi, \text{ а також довжину} \\ \text{інтервала інтегрування} \end{array} \right| = \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{27}{2} \cdot 2\pi = 27\pi.$$

<u>Відповідь:</u> 27π .

Домашнє завдання:

1. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = (x+y)\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ через поверхню Ω: частина поверхні $x - 2y + 3z - 6 = 0$, що обмежена координатними площинами $x = 0, y = 0, z = 0$. Нормаль до зовнішньої сторони поверхні. (21)

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\vec{\mathbf{i}} - 3y\vec{\mathbf{j}} + (y - z)\vec{\mathbf{k}}$ через основу конуса $x^2 + y^2 = z^2, z = 2$. Нормаль зовні конуса. (-8π)

3. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = y^2\vec{\mathbf{j}} - z\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = z$, що відтинається площиною $z = 2$. Нормаль зовні параболоїда (-2π).

4. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(x^2+y\right)\vec{\mathbf{i}}+(x+y)\vec{\mathbf{j}}+(y-2z)\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону поверхні конуса $x^2+y^2=(z-1)^2, z=0$ $(-\frac{\pi}{3})$.

Заняття 3. Обчислення потоку векторного поля через замкнену поверхню. Теорема Гауса-Остроградського.

Питання:

1. *Дивергенція векторного поля.*
2. *Циліндрична та сферична системи координат.*
3. *Теорема Гауса-Остроградського.*

Приклад 1: Обчислити потік векторного поля через замкнену поверхню (нормаль зовнішня), якщо поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = (2y - 5x)\vec{\mathbf{i}} + (x-1)\vec{\mathbf{j}} + \left(2\sqrt{xy} + 2z\right)\vec{\mathbf{k}}$, а поверхня $\Omega: 2x + 2y - z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$.

Розв'язання: Виконаємо креслення поверхні. Запишемо рівняння площини $2x + 2y - z = 4$ «у відрізках»:

$$2x + 2y - z = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{4} = 1.$$

Побудуємо трикутник, вершини якого містяться в точках $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,4)$. Він є основою піраміди, вершина якої знаходиться в початку координат, а інші грані – трикутники в координатних площинах XOY, XOZ, YOZ (рис. П3.1).

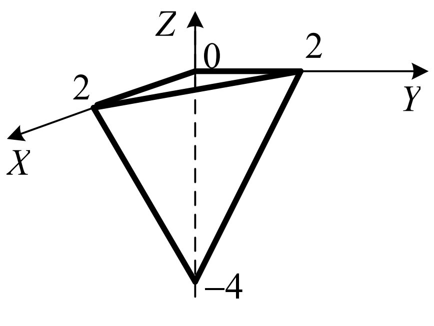


Рис. П3.1.

Оскільки Ω – замкнена поверхня, то скористаємося теоремою Гауса-Остроградського

$$\Pi_{\Omega}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=\oiint\limits_{\Omega}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n^0}}(M)\right)d\sigma=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)dxdydz\,.$$

Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$.

$$P(x,y,z)=2y-5x\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}=-5;\quad Q(x,y,z)=x-1\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial y}=0;$$

$$R(x,y,z)=2\sqrt{xy}+2z\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial z}=2;$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=-5+0+2=-3.$$

Тому

$$\Pi_{\Omega}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=-3\iiint\limits_{V}dxdydz=-3V_{\text{трикутної піраміди}}=-3\cdot\frac{1}{6}\cdot2\cdot2\cdot4=-8.$$

<u>**Відповідь:**</u> -8.

<u>**Приклад 2**</u>**:** Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(x+z)\vec{\mathbf{i}}+y\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню Ω: $\left\{z=8-x^2-y^2,z=x^2+y^2\right.$ (нормаль зовнішня).

<u>*Розв'язання:*</u> $z=8-x^2-y^2$ і $z=x^2+y^2$ – пара параболоїдів обертання (рис. П3.2). Знайдемо лінію їх перетину:

$8-x^2-y^2=x^2+y^2\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=8\Leftrightarrow x^2+y^2=4$ –

коло радіуса 2, що міститься в площині $z = 4$ (для визначення рівняння площини достатньо в рівняння одного з двох параболоїдів підставити співвідношення $x^2 + y^2 = 4$).

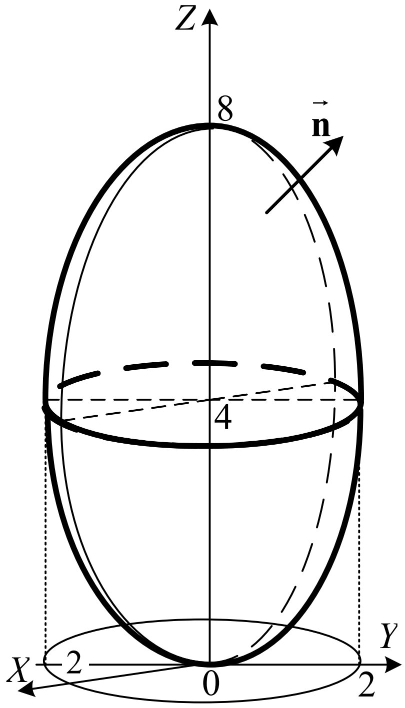


Рис. П3.2.

Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) = 1 + 0 + 0 = 1$.

Відповідно $\Pi_\Omega\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right) = \iiint\limits_V dxdydz =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{перехід в циліндричну} \\ \text{систему координат} \\ x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \\ z = z; \\ z = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = 8 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = \\ = 8 - \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 8 - \rho^2, \\ z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 \end{array} \right| =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^{8-\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \cdot \left(8-\rho^2-\rho^2\right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(8-2\rho^2\right)\rho d\rho =$$

$$=4\pi \int\limits_0^2 \left(4\rho-\rho^3\right) d\rho = 4\pi \cdot \left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 16\pi .$$

Відповідь: 16π.

Приклад 3: Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(y^2+z^2\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(xy+y^2\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(xz+z\right)\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню Ω: $\left\{x^2+y^2=1, z=0, z=1\right.$ (нормаль зовнішня).

Розв'язання: Поверхня Ω складається з циліндричної поверхні (круговий циліндр) та двох паралельних площин: координатної XOY та $z=1$ (рис. П3.3).

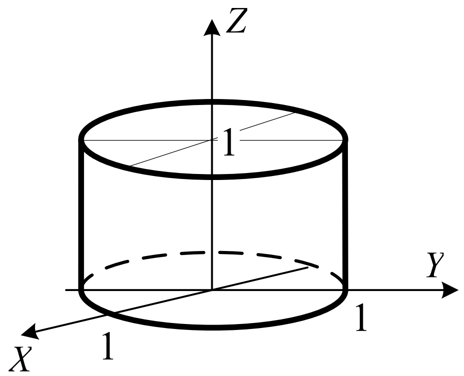


Рис. П3.3.

Дивергенція $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=0+x+2y+x+1=2x+2y+1$.

Потік

$$\Pi_{\Omega}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=\iiint\limits_V \left(2x+2y+1\right)dxdydz=\left|\begin{array}{l}\text{перехід в циліндричну}\\ \text{систему координат}\\ x=\rho\cos\varphi,\, y=\rho\sin\varphi,\\ z=z\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^1\left(2\rho\cos\varphi+2\rho\sin\varphi+1\right)dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(2\rho\cos\varphi+2\rho\sin\varphi+1\right)\rho d\rho\cdot z\Big|_0^1=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(2\rho^2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)+\rho\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2\rho^3}{3}\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)+\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)+\frac{1}{2}\right)d\varphi=\left|\begin{array}{l}\cos\varphi,\sin\varphi-\text{функції періоду } 2\pi,\\ \text{тому інтеграл на проміжку довжиною}\\ \text{в період буде від таких функцій}\\ \text{дорівнювати нулю}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi\,.$$

Відповідь: π .

Розглянемо **приклад 3** з попереднього практичного заняття і запропонуємо для розв'язання інший спосіб, що використовує теорему Гауса-Остроградського. Нагадаємо умову.

Приклад 4: Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x\vec{\mathbf{i}}+\left(y+z\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(z-y\right)\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні $x^2+y^2+z^2=9$, яка відтинається площиною $z=0\left(z\geq 0\right)$ (нормаль зовнішня).

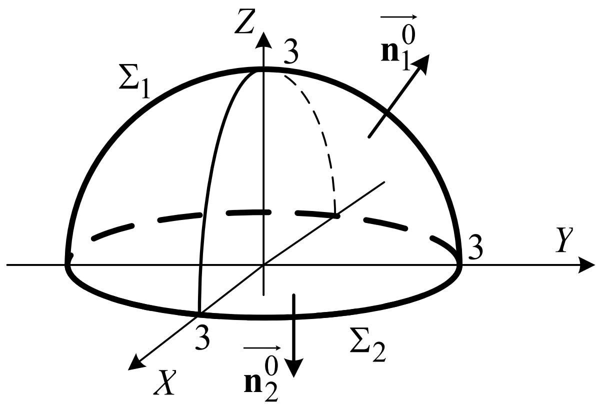


Рис. П3.4.

<u>*Розв'язання:*</u> Обчислимо потік Π_1 векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$ як різницю потоку Π через замкнену поверхню, що складається з півсфери $x^2+y^2+z^2=9(z\geq 0)$ і площини, яка її «замикає», і потоку Π_2 через дану частину площини $z=0$ (рис. П3.4).

Для обчислення потоку Π застосуємо формулу Гауса-Остроградського:

$$\Pi_\Omega\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\right)=\oiint_{\Omega}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^{\mathbf{0}}}(M)\right)d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)dxdydz;$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=1+1+1=3;$$

$$\Pi=\iiint_V 3dxdydz=3\cdot V_{\text{півкулі}}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\Big|_{R=3}=54\pi.$$

Тепер потік через частину площини $z=0$, для якої нормаль $\overrightarrow{\mathbf{n}_2}=\{0;0;-1\}$:

$$\Pi_2=\iint_{\Sigma_2}\left(\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}_2}(M)\right)d\sigma=-\iint_{\Sigma_2}(z-y)d\sigma=$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Переходимо до подвійного інтеграла по проекції} \\ \text{на площину } XOY : D_{xy} - \text{круг;} \\ z = 0 \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1+0+0}\, dxdy = dxdy \end{array} \right|$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} y dxdy = \left| \begin{array}{l} \text{перехід в полярну} \\ \text{систему координат} \end{array} \right| = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^2 \sin\varphi d\rho = \cos\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Bigg|_0^3 = 0$$

.

Остаточно

$$\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = 54\pi - 0 = 54\pi .$$

<u>Відповідь:</u> 54π.

<u>Приклад 5</u>: Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = (x + y + z)\vec{\mathbf{i}} + (2y - x)\vec{\mathbf{j}} - z\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню $\Omega : y^2 + z^2 = x^2, x = 2$.

<u>Розв'язання:</u> Поверхня Ω – частина кругового конуса, віссю якого є координатна пряма OX; його висота $H = 2$, а основа – круг $y^2 + z^2 = 4$ (рис. П3.5).

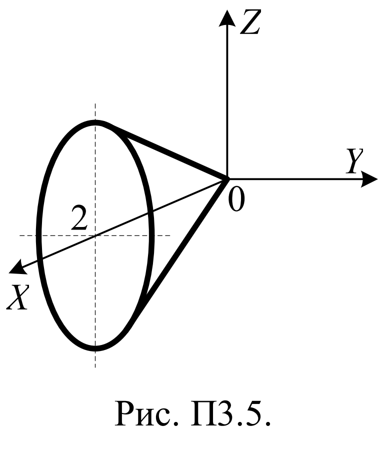


Рис. П3.5.

Для застосування формули Гауса-Остроградського обчислимо

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) = 1 + 2 - 1 = 2.$$

Тоді

$$\Pi = \iiint\limits_V 2dxdydz = 2 \cdot V_{\text{конуса}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi \cdot 4 \cdot 2 = \frac{16}{3}\pi.$$

Відповідь: $\frac{16}{3}\pi$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}} + (5 - z)\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню Ω: $x^2 + y^2 = 5 - z,\ z = 1$. Нормаль зовнішня. Обчислення провести безпосередньо і за допомогою теореми Гаусса-Остроградського. (24π)

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x^2\vec{\mathbf{i}} + (x - y)\vec{\mathbf{j}} + 2z\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню Ω: $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 2$. ($8\pi$)

3. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}} - z\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню поверхню конуса: $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$, $z = 0$. ($\frac{8\pi}{3}$)

4. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \{x - 2z; x + 3y + z; 5x + y\}$

через замкнену поверхню: $x + y + z = 1,\ z = 0,\ x = 0,\ y = 0$. ($\frac{2}{3}$)

Заняття 4. Робота силового поля.

Циркуляція векторного поля.

Питання:

1. *Властивості криволінійного інтеграла.*
2. *Обчислення роботи силового поля за допомогою криволінійного інтеграла на площині та в просторі.*
3. *Циркуляція векторного поля. Безпосереднє обчислення за допомогою криволінійного інтеграла на площині та в просторі.*

Приклад 1: Обчислити роботу силового векторного поля $\vec{F} = x \cdot \vec{\mathbf{i}} - xy^2 \cdot \vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні вздовж відрізка MN: точка $M(1,0)$, $N(0,2)$.

Розв'язання: Обчислимо роботу сили $\vec{F}$, застосовуючи формулу

$$A = \int\limits_{MN} \vec{F} \cdot \vec{d\mathbf{s}} = \int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Тобто $A = \int\limits_{MN} xdx - xy^2dy .$

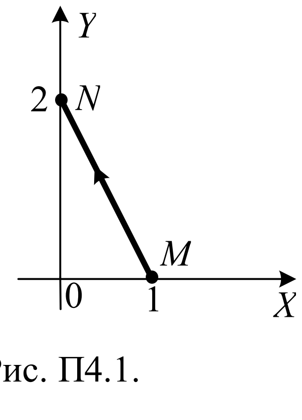


Рис. П4.1.

Рівняння прямої MN: $y = kx + b$ або, підставляючи координати точки N: $2 = k \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2$. Далі підставимо координати точки M: $0 = k \cdot 1 + 2 \Rightarrow k = -2$. Таким чином, рівняння MN (рис. П4.1) : $y = -2x + 2$, і $dy = -2dx$.

Обчислимо роботу, враховуючи напрям руху:

$$A = \int\limits_{MN} xdx - xy^2dy = \int\limits_1^0 xdx - x \cdot (-2x+2)^2 \cdot (-2)\,dx = \int\limits_1^0 \left(8x^3 - 16x^2 + 9x\right)dx =$$

$$= \left(2x^4 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{7}{6}.$$

Відповідь: $-\dfrac{7}{6}$.

Приклад 2: Обчислити роботу силового векторного поля $\vec{F} = (x - y) \cdot \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні вздовж лінії $L: x^2 + y^2 = 4\,(y \geq 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$ (рис. П4.2).

Розв'язання: Запишемо рівняння лінії L в параметричній формі:

$$\{x = 2\cos t, y = 2\sin t.$$

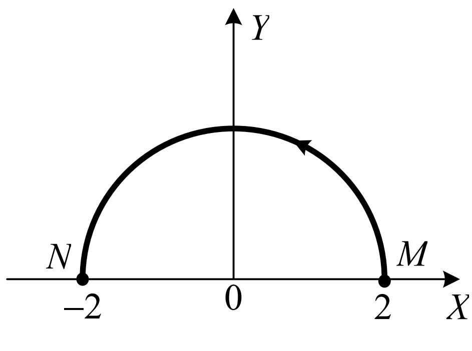


Рис. П4.2.

Точці $M(2,0)$ відповідає значення параметра $t_1 = 0$, а точці $N(-2,0)$ – $t_2 = \pi$.

Обчислимо роботу сили за формулою

$$A = \int_L \vec{F} \cdot \vec{d\mathbf{s}} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'_t + Q\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'_t \right] dt .$$

Відповідно

$$A = \int_L \vec{F} \cdot \vec{d\mathbf{s}} = \int_L (x-y)dx + dy = \int_0^\pi \left((2\cos t - 2\sin t) \cdot (-2\sin t) + 2\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(-2\sin 2t + 4\sin^2 t + 2\cos t \right) dt = \int_0^\pi \left(-2\sin 2t + 2 - 2\cos 2t + 2\cos t \right) dt =$$

Функції $\cos 2t$ і $\sin 2t$ є періодичними з періодом π, тому інтеграл від таких функцій на проміжку довжиною в період дорівнює нулю.

$$= \int_0^\pi (2 + 2\cos t) dt = (2t + 2\sin t)\Big|_0^\pi = 2\pi.$$

Відповідь: 2π.

Приклад 3: Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = \left\{ y^2 + z^2; yz; x \right\}$ вздовж дуги гвинтової лінії $\left\{ x = t, y = 2\cos t, z = 2\sin t; 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right.$.

Розв'язання: За формулою робота сили вздовж кривої

$$A = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

В нашому випадку

$$P(x,y,z)=y^2+z^2, Q(x,y,z)=yz, R(x,y,z)=x;$$

похідні $x'_t=1, y'_t=-2\sin t, z'_t=2\cos t$ і далі

$$A=\int_0^{\pi/2}\left[\left(4\cos^2 t+4\sin^2 t\right)+4\sin t\cos t\cdot\left(-2\sin t\right)+t\cdot 2\cos t\right]dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[4-8\sin^2 t\cdot\cos t+t\cdot 2\cos t\right]dt.$$

Розглянемо окремо інтеграл $\int_0^{\pi/2} 2t\cdot\cos t dt$, який обчислимо методом інтегрування частинами

$$\int_0^{\pi/2} 2t\cdot\cos t dt=\left|\begin{matrix} u=t \\ dv=\cos t dt\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix} du=dt \\ v=\sin t\end{matrix}\right|=2\left(t\cdot\sin t\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin t dt\right)=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}+\cos t\Big|_0^{\pi/2}\right)=\pi-2.$$

Повернемось до обчислення роботи, враховуючи отриманий результат

$$A=\left(4t-\frac{8}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+\pi-2=2\pi-\frac{8}{3}+\pi-2=3\pi-\frac{14}{3}.$$

Відповідь: $3\pi-\frac{14}{3}$.

Приклад 4: Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-x^2y\vec{\mathbf{i}}+y^2\vec{\mathbf{j}}$ вздовж контуру еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Розв'язання: За означенням циркуляції

$$\text{Ц}_\Gamma\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\oint\limits_\Gamma \vec{\mathbf{a}}\left(M\right)\cdot\overrightarrow{d\mathbf{s}}=\oint\limits_\Gamma P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy .$$

Параметричні рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \left\{x=a\cos t, y=b\sin t\right.$.

Відповідно $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \left\{x=2\cos t, y=3\sin t\right.$ і $t\in\left[0;2\pi\right]$; тому $dx=-2\sin tdt, dy=3\cos tdt$.

Далі

$$\text{Ц}_\Gamma\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\oint\limits_\Gamma -x^2ydx+y^2dy=\int\limits_0^{2\pi}\left[-4\cos^2 t\cdot 3\sin t\cdot\left(-2\sin t\right)+9\sin^2 t\cdot 3\cos t\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[24\cos^2 t\cdot\sin^2 t+27\sin^2 t\cdot\cos t\right]dt=\int\limits_0^{2\pi}\left[6\sin^2 2t+27\sin^2 t\cdot\cos t\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[3-3\cos 4t+27\sin^2 t\cdot\cos t\right]dt=\left(3t-\frac{3}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi}+27\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 td\left(\sin t\right)=$$

$$=6\pi+9\sin^3 t\Big|_0^{2\pi}=6\pi .$$

Відповідь: 6π.

Приклад 5: Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\dfrac{y}{3}\vec{\mathbf{i}}-3x\vec{\mathbf{j}}+x\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\begin{cases} x=2\cos t\\ y=2\sin t\\ z=1-2\cos t-2\sin t\end{cases}$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра.

<u>*Розв'язання:*</u> Виключаючи параметр t з рівняння контуру Γ, можна переконатися, що даний контур – еліпс, який є перетином циліндра $x^2 + y^2 = 4$ і площини $x + y + z = 1$ (рис. П4.3).

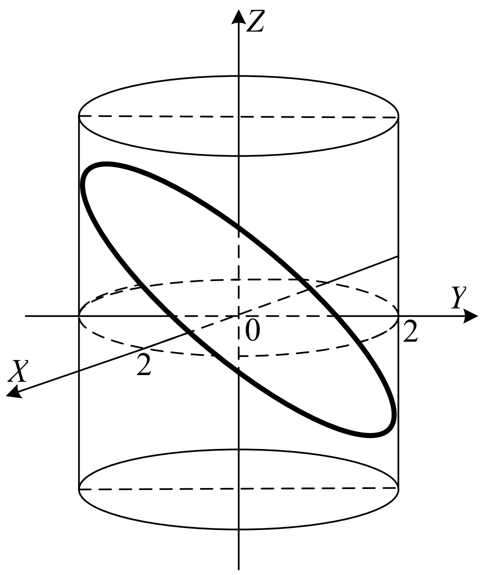


Рис. П4.3.

Обчислимо циркуляцію:

$$Ц_{\Gamma}\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = \oint\limits_{\Gamma} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}} = \oint\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \oint\limits_{\Gamma} \frac{y}{3}dx - 3xdy + xdz = \left| \begin{array}{l} \text{переходимо до обчислення інтеграла} \\ \text{по параметру } t, \text{ враховуючи, що} \\ dx = -2\sin t dt, dy = 2\cos t dt, dz = \left(2\sin t - 2\cos t\right) dt \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left[\frac{2\sin t}{3}\left(-2\sin t\right) - 3 \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t + 2\cos t \cdot \left(2\sin t - 2\cos t\right) \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{4\sin^2 t}{3} - 16\cos^2 t + 2\sin 2t \right] dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2 - 2\cos 2t}{3} - 8 - 8\cos 2t + 2\sin 2t \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{26}{3} - \frac{22}{3}\cos 2t + 2\sin 2t \right] dt = -\frac{26}{3} \cdot 2\pi = -\frac{52}{3}\pi \ .$$

<u>Відповідь:</u> $-\dfrac{52}{3}\pi$.

<u>Приклад 6</u>: Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = (2x + y)\vec{\mathbf{i}} + (y - z)\vec{\mathbf{j}} + (3x + y + z)\vec{\mathbf{k}}$ вздовж лінії перетину площини $x + y + z - 5 = 0$ з координатними площинами.

<u>Розв'язання:</u> Лініями перетину площини $x + y + z - 5 = 0$ з координатними площинами будуть сторони трикутника ABC (рис. П4.4).

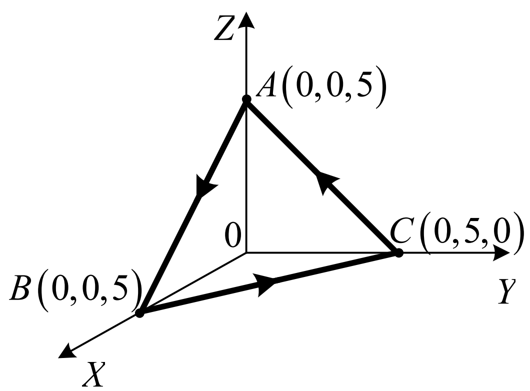


Рис. П4.4.

Тому

$$Ц_{\Gamma}(\vec{\mathbf{a}}) = \oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \vec{d\mathbf{s}} = \int_{AB} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \vec{d\mathbf{s}} + \int_{BC} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \vec{d\mathbf{s}} + \int_{CA} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \vec{d\mathbf{s}} .$$

Розглянемо окремі ланки ламаної –

$$AB: y=0, dy=0, z=5-x, dz=-dx;$$
$$BC: z=0, dz=0, y=5-x, dy=-dx;$$
$$CA: x=0, dx=0, z=5-y, dz=-dy.$$

$$\int\limits_{AB} \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{d\mathbf{s}} = \int\limits_{AB} (2x+y)dx+(y-z)dy+(3x+y+z)dz =$$

$$=\int\limits_{0}^{5} 2xdx+(3x+(5-x))(-dx) = -\int\limits_{0}^{5} 5dx = -25.$$

$$\int\limits_{BC} \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{d\mathbf{s}} = \int\limits_{BC} (2x+y)dx+(y-z)dy+(3x+y+z)dz =$$

$$=\int\limits_{5}^{0} (2x+(5-x))dx+(5-x)(-dx) = \int\limits_{5}^{0} 2xdx = x^2\Big|_{5}^{0} = -25.$$

$$\int\limits_{CA} \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{d\mathbf{s}} = \int\limits_{CA} (2x+y)dx+(y-z)dy+(3x+y+z)dz =$$

$$=\int\limits_{5}^{0} (y-(5-y))dy+(y+(5-y))(-dy) = \int\limits_{5}^{0} (2y-10)dy = \left(y^2-10y\right)\Big|_{5}^{0} = 25.$$

Остаточно $Ц_Г\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = -25-25+25 = -25$.

<u>Відповідь:</u> -25.

Домашнє завдання:

1. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = (2a - y)\vec{\mathbf{i}} + (y - a)\vec{\mathbf{j}}$ вздовж першої арки циклоїди

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]. \ (a^2\pi)$$

2. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = (y^2 - z^2) \cdot \vec{\mathbf{i}} + (z^2 - x^2) \cdot \vec{\mathbf{j}} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{\mathbf{k}}$ при переміщенні одиничної маси вздовж контуру, утвореного лінією перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ з координатними площинами $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$, в додатному напрямі обходу контуру. (– 4)

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = (x + 2y)\vec{\mathbf{i}} - y\vec{\mathbf{j}} + (z - 1)\vec{\mathbf{k}}$ вздовж лінії перетину площини $2x + y + z = 2$ з координатними площинами. (– 2)

4. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = xy \cdot \vec{\mathbf{i}} + xz \cdot \vec{\mathbf{j}} - (x^2 + y^2) \cdot \vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L : x^2 + y^2 = 1, z = 2$. (2π)

5. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = y^2 \cdot \vec{\mathbf{i}} - xz \cdot \vec{\mathbf{j}} + xyz \cdot \vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L : x^2 + y^2 = z + 6, z = -2$. (8π)

Заняття 5. Формула Гріна. Формула Стокса.

Питання:

1. *Ротор векторного поля.*
2. *Формула Гріна.*
3. *Формула Стокса.*
4. *Обчислення циркуляції векторного поля та роботи силового поля за допомогою формул Гріна і Стокса.*

Приклад 1: Обчислити ротор векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(x^2-xy\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(zx-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+(zx-yz)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ в точці $M(1;-2;1)$.

Розв'язання: Згідно з формулою для обчислення ротора векторного поля

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{k}},$$

отримуємо

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-xy & zx-y^2 & zx-yz\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(zx-yz)-\frac{\partial}{\partial z}\left(zx-y^2\right)\right)\vec{\mathbf{i}}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2-xy\right)-\frac{\partial}{\partial x}(zx-yz)\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(zx-y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-xy\right)\right)\vec{\mathbf{k}}=$$

$$=(-z-x)\vec{\mathbf{i}}-z\vec{\mathbf{j}}+(z-x)\vec{\mathbf{k}}.$$

В точці $M(1;-2;1)$ відповідно $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\{-2;-1;0\}$.

Відповідь: $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\{-2;-1;0\}$.

Приклад 2: Обчислити ротор векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(3x-2z)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\sin y\cdot\vec{\mathbf{j}}+(z-2x)\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Розв'язання:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x-2z & \sin y & z-2x\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(z-2x)-\frac{\partial}{\partial z}(\sin y)\right)\vec{\mathbf{i}}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(3x-2z)-\frac{\partial}{\partial x}(z-2x)\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(\sin y)-\frac{\partial}{\partial y}(3x-2z)\right)\vec{\mathbf{k}}=$$

$\{0;0;0\}$.

Відповідь: $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=0$.

Приклад 3: Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(y-x)\cdot\vec{\mathbf{i}}+(2x-y)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ вздовж контуру, що складається з відрізків координатних осей і дуги кола з центром в початку координат і радіуса 3. Напрям руху додатний.

Розв'язання: Дане векторне поле задане в площині, тому для обчислення циркуляції застосуємо формулу Гріна

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де $\vec{\mathbf{a}}(M)=P(x,y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+Q(x,y)\cdot\vec{\mathbf{j}}$, D – область, межею якої є контур L.

Контур L – межа чверті круга D, що міститься в першому координатному куті координатної площини (рис. П5.1).

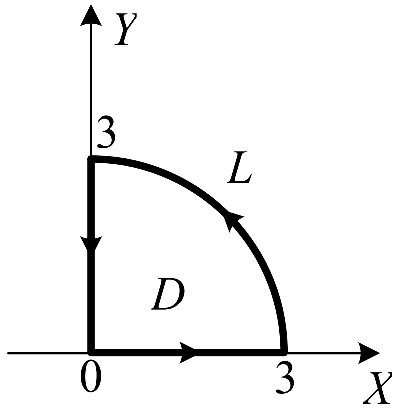


Рис. П5.1.

Функції $P(x,y)=y-x, Q(x,y)=2x-y$. Відповідно частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2$.

Тоді

$$Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\oint_L (y-x)dx+(2x-y)dy=\iint_D (2-1)dxdy=\iint_D dxdy.$$

Такий інтеграл визначає площу області D: $S_D=\dfrac{1}{4}\pi R^2$.

Тобто $S_D=\dfrac{9}{4}\pi$.

Остаточно $Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\dfrac{9}{4}\pi$.

<u>**Відповідь:**</u> $Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\dfrac{9}{4}\pi$.

<u>**Приклад 4:**</u> Обчислити роботу силового поля $\vec{F}=\left(x^2-3y^2+1\right)\vec{\mathbf{i}}-(xy-5)\vec{\mathbf{j}}$ вздовж контуру трикутника OAB:

$O(0;0), A(2;0), B(0;1)$. Рух вздовж контуру здійснюється проти годинникової стрілки.

<u>*Розв'язання:*</u> Зробимо креслення контуру (рис. П5.2). Контур є межею трикутника OAB – області D.

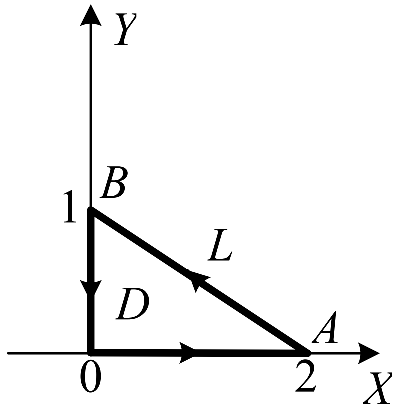


Рис. П5.2.

Роботу силового поля $\vec{F} = P(x,y)\cdot\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ можна обчислити за допомогою криволінійного інтеграла, але через те, що кривою є замкнений контур, то доцільно застосувати формулу Гріна:

$$A = \oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy .$$

Частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -6y, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -y$.

Тоді

$$A = \oint_L \left(x^2 - 3y^2 + 1\right)dx - \left(xy - 5\right)dy = \iint_D 5y\,dxdy .$$

Складемо рівняння прямої AB:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{1-0},$$

або $-2y = x - 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{2-x}{2}$.

Продовжимо обчислення роботи:

$$A = \iint\limits_D 5y\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{2-x}{2}} 5y\,dy = \int\limits_0^2 dx \cdot \frac{5}{2} y^2 \Big|_0^{\frac{2-x}{2}} = \frac{5}{8}\int\limits_0^2 (2-x)^2\,dx =$$

$$= -\frac{5}{8} \cdot \frac{(2-x)^3}{3}\Big|_0^2 = 0 + \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{5}{3}.$$

Відповідь: $A = \dfrac{5}{3}$.

Приклад 5: Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = xy \cdot \vec{\mathbf{i}} - zx \cdot \vec{\mathbf{j}} + (z-2y) \cdot \vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру, що є перетином двох поверхонь $(x-3)^2 = y^2 + z^2, x = 4$.

Розв'язання: Контур, вздовж якого слід обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$, є перетином конуса $(x-3)^2 = y^2 + z^2$ (вершина в точці $(3;0;0)$, віссю є координатна вісь OX) і площини $x = 4$ (паралельна координатній площині YOZ). Очевидно, що це коло (рис. П5.3):

$$(4-3)^2 = y^2 + z^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 1.$$

Для обчислення циркуляції застосуємо формулу Стокса

$$\oint\limits_L \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = \iint\limits_\Omega \left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0} \right) d\sigma,$$

де Ω – частина площини $x = 4$, обмежена колом L, і, відповідно, $\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \{1;0;0\}$.

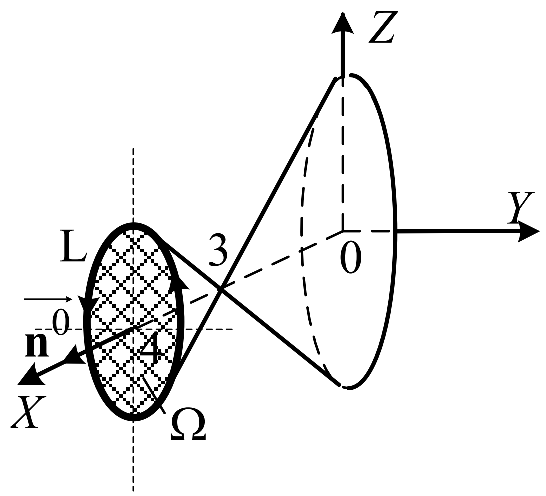


Рис. П5.3.

Ротор векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -zx & z-2y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z-2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-zx)\right)\vec{\mathbf{i}} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(z-2y)\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)\vec{\mathbf{k}} = \{x-2; 0; -z-x\}.$$

Скалярний добуток

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = x-2.$$

Циркуляція

$$\text{Ц}_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right) = \iint\limits_{\Omega}\left(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}\right)d\sigma = \iint\limits_{\Omega}(x-2)\,d\sigma.$$

Продовжимо обчислення, переходячи до подвійного інтеграла по проекції Ω на площину YOZ. Проекцією є круг $D: y^2+z^2=1$. Елемент площі $d\sigma = \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}\,dydz = dydz$, через те, що $x=4, x'_y=0, x'_z=0$.

Остаточно

$$Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\iint\limits_D (4-2)\,dydz=2\iint\limits_D dydz=2\cdot S_D=2\pi R^2=2\pi\ .$$

<u>Відповідь:</u> $Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=2\pi$.

<u>Приклад 7:</u> Розглянемо приклад з попереднього практичного заняття (**<u>приклад 6</u>**). Обчислити за <u>допомогою формули Стокса</u> циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(2x+y)\vec{\mathbf{i}}+(y-z)\vec{\mathbf{j}}+(3x+y+z)\vec{\mathbf{k}}$ вздовж лінії перетину площини $x+y+z-5=0$ з координатними площинами.

<u>Розв'язання:</u> Контур, вздовж якого слід обчислити циркуляцію – межа трикутника ABC. Поверхня Ω, в якій він міститься, є площина $x+y+z-5=0$ (рис. П5.4). Нормаллю до цієї площини, очевидно, є вектор $\vec{\mathbf{n}}=\{1;1;1\}$, тому що $\vec{\mathbf{n}}=\left\{F'_x;F'_y;F'_z\right\}$, де $F(x,y,z)=x+y+z-5$.

Відповідно орт нормалі $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=\dfrac{\vec{\mathbf{n}}}{\left|\vec{\mathbf{n}}\right|}=\dfrac{\vec{\mathbf{n}}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\vec{\mathbf{n}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1;1;1\}$.

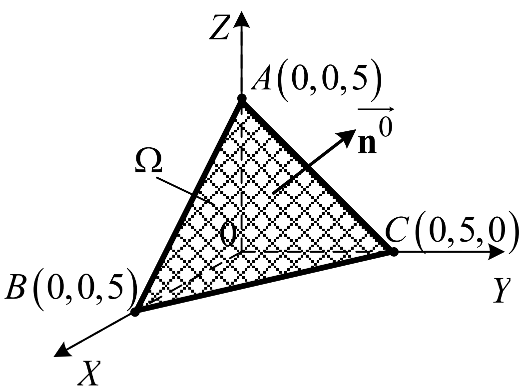


Рис. П5.4.

Обчислимо $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}$:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+y & y-z & 3x+y+z\end{vmatrix}=\{2;-3;-1\};$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2-3-1)=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

За формулою Стокса

$$Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=\iint\limits_{\Omega}\left(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}\right)d\sigma=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Omega}d\sigma.$$

Інтеграл $\iint\limits_{\Omega}d\sigma$ визначає площу поверхні Ω. Трикутник ABC є правильним, сторона має довжину $AB=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$. Площа трикутника $S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 50=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{25\sqrt{3}}{2}=-25$.

Дана відповідь збігається з тією, що була отримана безпосереднім обчисленням циркуляції.

<u>**Відповідь:**</u> $Ц_L\left(\vec{\mathbf{a}}\right)=-25$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = -2y \cdot \vec{\mathbf{i}} + (2x + y) \cdot \vec{\mathbf{j}} - z \cdot \vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L: x^2 + y^2 + z^2 = 5, z = 1$ (рух проти годинникової стрілки) безпосередньо і за формулою Стокса. (16π)

2. Обчислити роботу силового поля $\vec{F}(M) = (x + 2y) \cdot \vec{\mathbf{i}} - y \cdot \vec{\mathbf{j}} + (z - 1) \cdot \vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L: 2x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$. (–2)

3. Обчислити двома способами циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = y \cdot \vec{\mathbf{i}} - x \cdot \vec{\mathbf{j}}$ вздовж контуру $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ в від'ємному напрямі. (8π) (***Підказка***: для лінії обрати параметризацію згідно правилу –

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow \{x = x_0 + R\cos t, y = y_0 + R\sin t)$$

4. Обчислити роботу поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = xy \cdot \vec{\mathbf{i}} + yz \cdot \vec{\mathbf{j}} + xz \cdot \vec{\mathbf{k}}$ при переміщенні точки одиничної маси вздовж замкненої лінії, що складається з трьох прямолінійних відрізків, які містяться в координатних площинах, що відтинають на координатних осях відрізки рівні одиниці. ($-\frac{1}{2}$)

Заняття 6. Спеціальні векторні поля.

Потенціал потенціального поля.

Питання:

1. *Повний диференціал функції двох змінних.*
2. *Дивергенція векторного поля.*
3. *Ротор векторного поля.*
4. *Соленоїдальне,потенціальне, гармонійне векторне поле.*
5. *Оператори Гамільтона і Лапласа.*
6. *Обчислення потенціалу потенціального векторного поля.*

Приклад 1. Чи є дане векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M) = x\left(z^2 - y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + y\left(x^2 - z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}} + z\left(y^2 - x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

соленоїдальним?

Розв'язання: Скористаємося критерієм соленоїдальності. Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 \equiv 0.$$

Так, насправді, поле є соленоїдальним.

Приклад 2. Чи є дане векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M) = 3z\left(x^2 + y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} - 2y\left(x^2 + z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}} + 4x\left(y^2 + z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

соленоїдальним?

Розв'язання: Скористаємося критерієм соленоїдальності. Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=6xz-2\left(z^2+x^2\right)+8xz\neq 0.$$

Поле не є соленоїдальним.

<u>Приклад 3.</u> Чи є дане векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=2xy\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x^2-2yz\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}-y^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$

потенціальним?

<u>Розв'язання:</u> Скористаємося критерієм потенціальності. Обчислимо $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2-2yz & -y^2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\mathbf{i}}\left(-2y+2y\right)-\vec{\mathbf{j}}\left(0-0\right)+\vec{\mathbf{k}}\left(2x-2x\right)\equiv 0.$$

Так, дане векторне поле є потенціальним.

<u>Приклад 4.</u> Чи є дане векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+zx\cdot\vec{\mathbf{j}}+yx\cdot\vec{\mathbf{k}}$

гармонійним?

<u>Розв'язання:</u> Скористаємося критерієм гармонійності векторного поля. Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$ і $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=0+0+0\equiv 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ zy & xz & xy\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\mathbf{i}}\left(x-x\right)-\vec{\mathbf{j}}\left(y-y\right)+\vec{\mathbf{k}}\left(z-z\right)\equiv 0.$$

Дане векторне поле є гармонійним.

<u>**Приклад 5.**</u> Переконатися, що вираз $\dfrac{dx}{x+y^2}+\dfrac{2ydy}{x+y^2}$ є повним диференціалом певної функції і знайти її за допомогою криволінійного інтеграла другого роду.

<u>*Розв'язання:*</u> Насамперед переконаємося, що наведений вираз є повним диференціалом певної функції $\Phi(x,y)$.

Позначимо $P(x,y)=\dfrac{1}{x+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{2y}{x+y^2}$.

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{2y}{\left(x+y^2\right)^2},\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{2y}{\left(x+y^2\right)^2}.$$

Очевидно, що $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, тобто, насправді, даний вираз є повним диференціалом певної функції $\Phi(x,y)$: $d\Phi(x,y)=\dfrac{dx}{x+y^2}+\dfrac{2ydy}{x+y^2}$.

Знайдемо функцію $\Phi(x,y)$, обчислюючи криволінійний інтеграл, наприклад, вздовж кривої ABC, що складається з двох відрізків: AB і BC (рис. П6.1), тобто $\Phi(x,y)=\int\limits_{(1;1)}^{(x;1)}\dfrac{dx}{x+y^2}+\dfrac{2ydy}{x+y^2}+\int\limits_{(x;1)}^{(x;y)}\dfrac{dx}{x+y^2}+\dfrac{2ydy}{x+y^2}$.

Слід зауважити, що при розв'язанні даного приклада ми не можемо помістити точку A в початок координат, тому що в цьому випадку підінтегральна функція буде мати розрив, тобто порушиться умова теореми існування визначеного інтеграла.

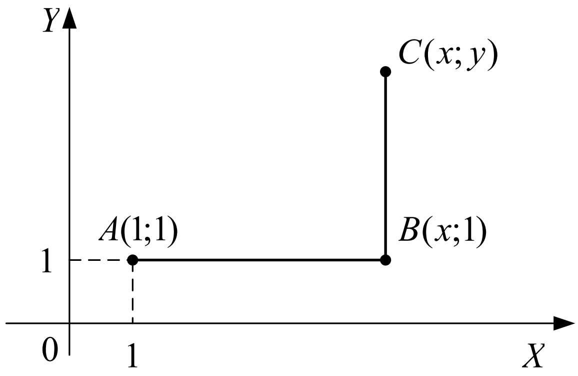


Рис. П6.1.

Зазначимо, що на AB: $y=1, dy=0, x\in[1,x]$;

на BC: $x=const, dx=0, y\in[1,y]$,

отже

$$\Phi(x,y)=\int_1^x \frac{dx}{x+1}+\int_1^y \frac{2ydy}{x+y^2}=\ln|x+1|\Big\|_1^x+\ln\left|x+y^2\right|\Big\|_1^y=$$

$$=\ln|x+1|-\ln 2+\ln\left|x+y^2\right|-\ln|x+1|=\ln\left|x+y^2\right|-\ln 2.$$

Відповідь: $\Phi(x,y)=\ln\left|x+y^2\right|+C$, де C – довільна стала.

Приклад 6: Обчислити потенціал векторного поля з **прикладу 3**.

Розв'язання: Координати векторного поля $P(x,y,z)=2yx$, $Q(x,y,z)=x^2-2yz$, $R(x,y,z)=-y^2$.

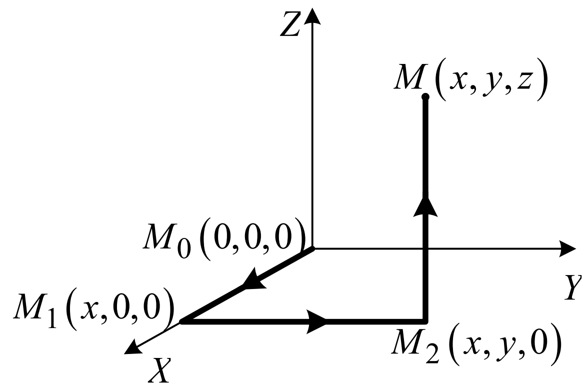


Рис. П6.2.

Розглянемо ламану $M_0M_1M_2M$, де $M_0(0,0,0)$ (рис. П6.2). Потенціал векторного потенціального поля:

$$u(x,y,z)=C+\int\limits_{M_0M_1M_2M} 2yx\cdot dx+\left(x^2-2yz\right)dy-y^2dz\,.$$

Розглянемо окремі ланки ламаної:

$$M_0M_1: 0\le x\le x, y=0, z=0;$$

$$M_1M_2: x=\text{const}, 0\le y\le y, z=0;$$

$$M_2M: x=\text{const}, y=\text{const}, 0\le z\le z\,.$$

Продовжимо обчислення потенціалу

$$u(x,y,z)=C+\int_0^x 0dx+\int_0^y x^2dy+\int_0^z\left(-y^2\right)dz=C+x^2y-y^2z\,.$$

Можна перевірити результат за допомогою означення $\vec{\mathbf{a}}(M)=\overrightarrow{\mathbf{grad}\,u(M)}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2yx=P(x,y,z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2yz=Q(x,y,z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -y^2 = R(x, y, z).$$

<u>**Відповідь:**</u> $u(x, y, z) = C + x^2 y - y^2 z$.

Домашнє завдання:

1. Для векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = (yz \cdot \cos xy)\vec{\mathbf{i}} + (zx \cdot \cos zy)\vec{\mathbf{j}} + \sin yx \cdot \vec{\mathbf{k}}$ обчислити основні диференціальні характеристики та встановити тип поля.

2. Довести, що векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M) = y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}} + \mathrm{e}^z \vec{\mathbf{k}}$$

є потенціальним і обчислити потенціал. ($u(x, y, z) = C + xy + \mathrm{e}^z$)

3. Обчислити потенціал плоского векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(3x^2 y - y^3\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(x^3 - 3xy^2\right)\vec{\mathbf{j}}$. ($u(x, y) = C + x^3 y - xy^3$)

4. Визначити тип векторного поля:

А) $\vec{\mathbf{a}}(M) = (2x + 5yz)\vec{\mathbf{i}} + (2y + 5xz)\vec{\mathbf{j}} + (2z + 5xy)\vec{\mathbf{k}}$;

Б) $\vec{\mathbf{a}}(M) = (3x - 2z)\vec{\mathbf{i}} + \sin y\vec{\mathbf{j}} + (z - 2x)\vec{\mathbf{k}}$;

В) $\vec{\mathbf{a}}(M) = \frac{x}{yz}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y}{xz}\vec{\mathbf{j}} - \frac{(x + y)\ln z}{xy}\vec{\mathbf{k}}$.

Зразок розв’язання варіанта розрахункового завдання.

<u>Приклад 1:</u> Визначити похідну скалярного поля $u(x,y,z)=\ln(1+x^2+y^2)-\sqrt{x^2+z^2}$ в точці $M(3,\ 1,\ 4)$ за напрямом:

а. вектора $\vec{\mathbf{s}}=2\vec{\mathbf{i}}-3\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}}$;

б. нормалі до поверхні Ω: $x^2+6x+9y^2+z^2=4z$, що утворює гострий кут з додатним напрямком осі OZ;

в. перпендикулярним до поверхні рівня функції $u(x,y,z)$, яка проходить через точку $M_1(0,0,1)$.

<u>Розв’язання:</u>

Похідну за напрямом обчислюємо за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=(\mathbf{grad}\,u\cdot\overrightarrow{\mathbf{s}^0})=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\frac{6}{11}-\frac{3}{5}=-\frac{3}{55},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\frac{2}{11},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}},\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=-\frac{4}{5}.$$

а. Знайдемо вектор $\overrightarrow{\mathbf{s}^0}=\cos\alpha\cdot\vec{\mathbf{i}}+\cos\beta\cdot\vec{\mathbf{j}}+\cos\gamma\cdot\vec{\mathbf{k}}$, тобто $\overrightarrow{\mathbf{s}^0}=\frac{\vec{\mathbf{s}}}{|\vec{\mathbf{s}}|}$,

$|\vec{\mathbf{s}}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$, тоді $\overrightarrow{\mathbf{s}^0}=\left\{\frac{2}{\sqrt{17}};-\frac{3}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}}\right\}$.

Таким чином

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_M = -\frac{3}{55}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{11}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right) - \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = \frac{52}{55\sqrt{17}} = \frac{52\sqrt{17}}{935}.$$

б. Знайдемо вектор $\vec{\mathbf{l}^0} = \cos\alpha\cdot\vec{\mathbf{i}} + \cos\beta\cdot\vec{\mathbf{j}} + \cos\gamma\cdot\vec{\mathbf{k}}$, тобто $\vec{\mathbf{l}^0} = \frac{\vec{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{n}}|}$, де $\vec{\mathbf{n}}$ – вектор нормалі до поверхні Ω:

$$F(x,y,z) = x^2 + 6x + 9y^2 + z^2 - 4z = 0.$$

Тоді

$$\vec{\mathbf{n}} = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}\right\},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M = (2x+6)|_M = 12,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = 18y|_M = 18,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M = (2z-4)|_M = 4.$$

Отримуємо $\vec{\mathbf{n}} = \{12;\ 18;\ 4\}$, $|\vec{\mathbf{n}}| = \sqrt{12^2 + 18^2 + 4^2} = 22$,

$$\vec{\mathbf{l}^0} = \left\{\frac{6}{11};\ \frac{9}{11};\ \frac{2}{11}\right\}.$$

Слід зауважити, що $\cos\gamma > 0$, тому знайдений вектор утворює гострий кут з віссю OZ.

Таким чином

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = -\frac{3}{55}\cdot\frac{6}{11} + \frac{2}{11}\cdot\frac{9}{11} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{11} = -\frac{16}{605}.$$

в. Знайдемо поверхню рівня функції $u(x,y,z)$, яка проходить через точку M_1:

$$u(x,y,z) = C = \ln(1+0+0) - \sqrt{0+1} = -1.$$

Отримуємо поверхню Ω_1: $\ln(1+x^2+y^2)-\sqrt{x^2+z^2}=-1$.

Аналогічно попередньому пункту знаходимо вектор $\vec{\mathbf{l}}^0=\dfrac{\vec{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{n}}|}$, де $\vec{\mathbf{n}}$ – вектор перпендикулярний поверхні рівня Ω_1:

$$F(x,y,z)=\ln(1+x^2+y^2)-\sqrt{x^2+z^2}+1=0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M=\frac{6}{11}-\frac{3}{5}=-\frac{3}{55},\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M=\frac{2}{11},\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M=-\frac{4}{5},$$

$$\vec{\mathbf{n}}=\left\{-\frac{3}{55};\ \frac{2}{11};\ -\frac{4}{5}\right\},\ |\vec{\mathbf{n}}|=\sqrt{\left(-\frac{3}{55}\right)^2+\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{2045}}{55},$$

$$\vec{\mathbf{l}}^0=\left\{-\frac{3}{\sqrt{2045}};\ \frac{10}{\sqrt{2045}};\ -\frac{44}{\sqrt{2045}}\right\}.$$

Таким чином

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left(-\frac{3}{55}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{2045}}\right)+\frac{2}{11}\cdot\frac{10}{\sqrt{2045}}+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{44}{\sqrt{2045}}\right)=\frac{2045}{55\sqrt{2045}}=\frac{\sqrt{2045}}{55}$$

<u>Приклад 2:</u> Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)$

а. $u(x,y,z)=x^2-y^2+y\cdot z-x$;

б. $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

Побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z)=0,\ \pm1$.

<u>Розв'язання:</u>

а. За означенням градієнту скалярного поля

$$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{\mathbf{i}}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{\mathbf{j}}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{\mathbf{k}}.$$

Обчислимо частинні похідні функції $u(x,y,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + z, \frac{\partial u}{\partial z} = y.$$

Таким чином $\mathbf{grad}\, u = (2x-1)\cdot\vec{\mathbf{i}} + (-2y+z)\cdot\vec{\mathbf{j}} + y\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

б. Аналогічно пункту а), отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial u}{\partial z} = -2z.$$

Таким чином $\mathbf{grad}\, u = 2x\cdot\vec{\mathbf{i}} + 2y\cdot\vec{\mathbf{j}} - 2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Побудуємо поверхні рівня: $u(x,y,z) = 0$.

Тоді $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$ – конус з вершиною в початку координат (рис. 1).

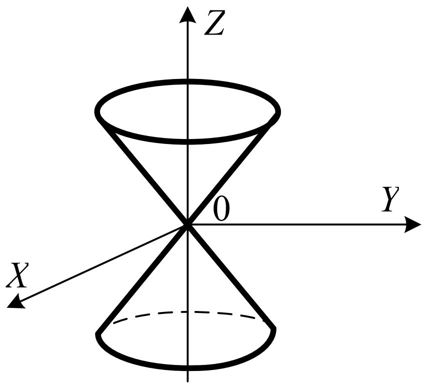


Рис. 1.

Якщо $u(x,y,z) = \pm 1$, то $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$:

$u(x,y,z) = 1$ $\qquad$ $u(x,y,z) = -1$

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (рис. 2) $\qquad$ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (рис. 3)

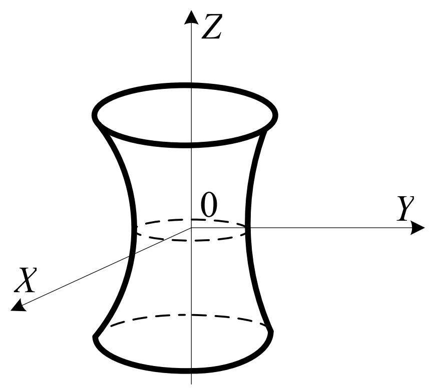


Рис. 2.
Однопорожниний гіперболоїд обертання навколо осі OZ

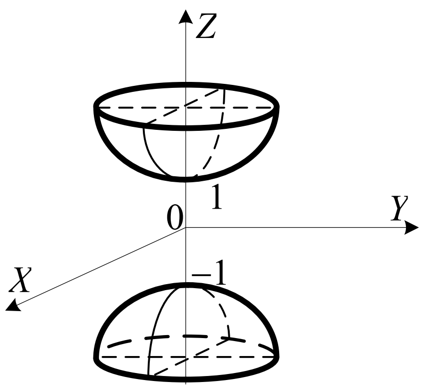


Рис. 3.
Двопорожнинний гіперболоїд обертання навколо осі OZ

<u>Приклад 3:</u> Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \{P;Q;R\}$:

а. $\vec{\mathbf{a}}(M) = -y \cdot \vec{\mathbf{i}} + x \cdot \vec{\mathbf{j}}$

б. $\vec{\mathbf{a}}(M) = y \cdot \vec{\mathbf{i}} + x \cdot \vec{\mathbf{j}} + z \cdot \vec{\mathbf{k}}$

<u>Розв'язання:</u>

а. Згідно з означенням, векторні лінії:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} \text{ або } \begin{cases} xdx = -ydy \\ 0 \cdot dy = xdz \end{cases}.$$

Розв'язуючи систему, отримуємо $x^2 + y^2 = C_1, z = C_2$. Таким чином, векторні лінії даного поля – кола з центрами на осі OZ, що містяться в площинах, перпендикулярних даній осі.

б. Аналогічно попередньому пункту, складаємо систему

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

Рівність $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ утворює першу інтегровану комбінацію. Маємо $x^2 = y^2 + C_1$. Для отримання ще однієї інтегрованої комбінації використаємо властивість пропорції:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3}.$$

Тоді, в нашому випадку $\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dz}{z}$. Інтегруємо дану рівність, отримуємо $x + y = C_2 z$.

Таким чином, векторні лінії задаються системою:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x + y = C_2 z \end{cases}.$$

Тобто векторні лінії даного поля є лініями перетину гіперболічних циліндрів $x^2 - y^2 = C_1$ з площинами $x + y - C_2 z = 0$.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x \cdot \vec{\mathbf{i}} + z \cdot \vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону бокової поверхні циліндра $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, обмеженого площинами $z = 0, z = h,\ (h > 0)$ (рис. 4).

<u>Розв'язання:</u>

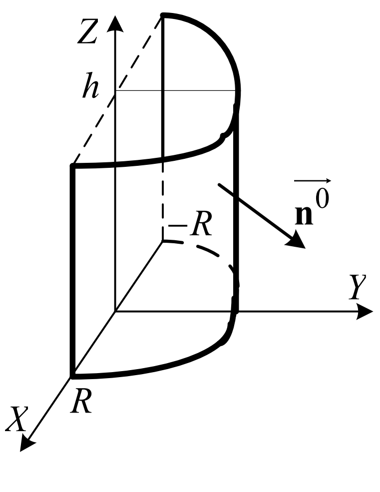


Рис. 4.

Обчислимо потік векторного поля за формулою:

$\Pi = \iint\limits_{\Omega} (\vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0})\, d\sigma$, де $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}$ – нормальний одиничний вектор до поверхні Ω.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}$. Запишемо рівняння поверхні Ω в неявному вигляді: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Тоді $\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \pm \dfrac{\mathbf{grad}\, F(x, y, z)}{|\mathbf{grad}\, F(x, y, z)|}$. Виходячи з $y > 0$ (за умовою задачі), то $\overrightarrow{\mathbf{n}^0}$ утворює гострий кут з віссю OY: $\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = \dfrac{x \cdot \vec{\mathbf{i}} + y \cdot \vec{\mathbf{j}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{x \cdot \vec{\mathbf{i}} + y \cdot \vec{\mathbf{j}}}{R}$.

Тому $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}^0}) = \dfrac{x^2}{R}$.

Потік векторного поля $\Pi = \iint\limits_{\Omega} \dfrac{x^2}{R} d\sigma$. Спроектуємо поверхню Ω: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ на площину XOZ, отримаємо область D, обмежену лініями:

$$x = -R, x = R, z = 0, z = h,$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dxdz = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dxdz.$$

Таким чином

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{R} d\sigma = \iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{R} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dxdz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int\limits_{0}^{h} dz = h \cdot \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{підстановка} \\ x = R\sin t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \pi \cdot R^2 \cdot h.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi h R^2}{2}$.

Приклад 5. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz \right) \cdot \vec{\mathbf{i}} + 2x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot \vec{\mathbf{j}} - \frac{2xz \cdot (1+y) + 1 + y^2}{1+y^2} \cdot \vec{\mathbf{k}}$$

через зовнішню сторону частини поверхні $z = 1 - x^2 - y^2$, розташованої над площиною XOY.

Розв'язання:

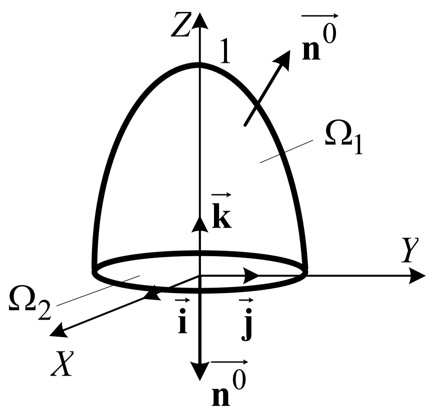


Рис. 5.

Замкнемо дану поверхню (рис. 5) куском площини XOY, який обмежений кругом $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$. Тоді можемо застосувати формулу Гауса-Остроградського.

Нехай V – об'єм тіла, обмеженого замкненою кусково-гладкою поверхнею Ω, яка складається з частини Ω_1 параболоїда обертання $z = 1 - x^2 - y^2$ і частини Ω_2 площини $z = 0$.

Потік даного векторного поля через поверхню Ω за теоремою Гауса-Остроградського дорівнює:

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega}\!\!\!\!\!\!\bigcirc (\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0})d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)dxdydz ,$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} ,$$

де $\vec{\mathbf{a}}(M) = P(x,y,z)\cdot\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\cdot\vec{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M) = \frac{2xy}{1+y^2} + \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x(1+y)}{1+y^2} \equiv 0 .$$

Тому потік $\Pi = 0$.

Враховуючи адитивність потоку, отримуємо

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega_1} (\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0})d\sigma + \iint\limits_{\Omega_2} (\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0})d\sigma = 0 .$$

Звідси шуканий потік

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Omega_1} (\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0})d\sigma = -\iint\limits_{\Omega_2} (\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0})d\sigma .$$

Обчислимо $\Pi_2 = \iint\limits_{\Omega_2} (\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0})d\sigma$. На площині $z=0$, тому

$\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(\dfrac{x^2 y}{1+y^2}\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + 2x\cdot arctgy\cdot\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{\mathbf{n}^0} = -\vec{\mathbf{k}}$ і тоді $(\vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}) = 1$.

Таким чином, потік Π_2 через круг Ω_2 буде дорівнювати площі круга Ω_2: $\Pi_2 = \iint\limits_{\Omega_2} d\sigma = \pi$.

Шуканий потік $\Pi_1 = -\pi$.

Відповідь: $-\pi$.

Приклад 6. Обчислити роботу векторного поля $F(x,y,z) = \{x; y; z\}$ вздовж лінії L, яка є перетином параболічного циліндра $z = y^2$ з площиною $z + x = 1$ від точки $A(0,1,1)$ до точки $B(1,0,0)$.

Розв'язання:

Задамо лінію L в параметричній формі: нехай $y=t$, тоді $z=t^2$, а $x=1-z=1-t^2$. Тоді $dx=-2tdt$, $dy=dt$, $dz=2tdt$. Точці A відповідає значення параметра $t=1$, а точці B – значення $t=0$.

Таким чином:

$$A=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_1^0 (1-t^2)\cdot(-2t)dt+tdt+t^2\cdot 2tdt=$$

$$=\int_1^0 (-2t+2t^3+t+2t^3)dt=\int_1^0 (4t^3-t)\,dt=\left(t^4-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0=0-\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Приклад 7. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=(x-2z)\cdot\vec{\mathbf{i}}+(x+3y+z)\cdot\vec{\mathbf{j}}+(5x+y)\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

вздовж периметра трикутника з вершинами $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ (рис.6).

Розв'язання:

За означенням циркуляції $Ц=\oint_L \vec{\mathbf{a}}(M)\cdot\vec{d\mathbf{s}}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$,

тому

$$Ц=\oint_L (x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz=$$

$$=\int_{AB} (x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz+$$

$$+\int_{BC} (x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz+$$

$$+\int\limits_{CA}(x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz\,.$$

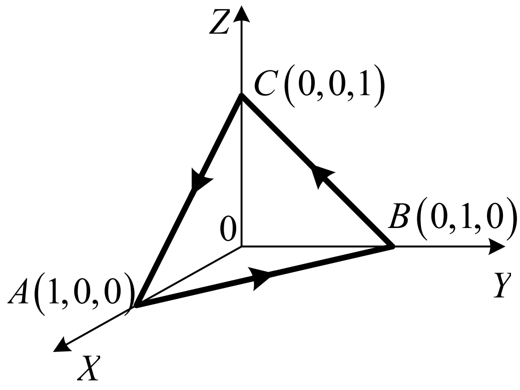


Рис. 6.

На проміжку $AB: x+y=1, z=0$, тому

$$\int\limits_{AB}(x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz=$$

$$=\int\limits_{1}^{0}(x-0)dx+(x+3-3x+0)(-dx)+0=\frac{3}{2}.$$

На проміжку $BC: z+y=1, x=0$, тому

$$\int\limits_{BC}(x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz=$$

$$=\int\limits_{1}^{0}0+(0+3y+1-y)dy+(0+y)(-dy)=-\frac{3}{2}.$$

На проміжку $CA: z+x=1, y=0$, тому

$$\int\limits_{CA}(x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(x-2+2x)dx+0+(5x+0)(-dx)=-3.$$

Остаточно

$$Ц = \oint\limits_{ABCA} (x-2z)dx + (x+3y+z)dy + (5x+y)dz = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + (-3) = -3.$$

Відповідь: –3.

Приклад 8. Знайти циркуляцію вектора $\vec{\mathbf{a}}(M) = y\vec{\mathbf{i}} + x^2\vec{\mathbf{j}} - z\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $Г: \left\{x^2 + y^2 = 4, z = 3\right.$ безпосередньо и за формулою Стокса.

Розв'язання:

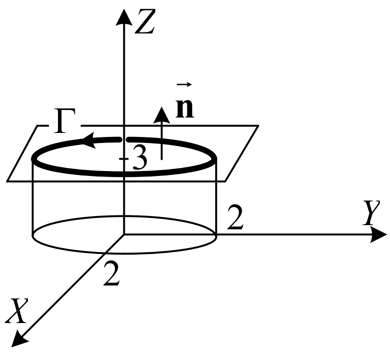


Рис. 7.

I спосіб.

Контур Г – коло радіуса $R = 2$, що міститься в площині $z = 3$ (рис. 7). Оберемо орієнтацію як показано на рисунку, тобто проти годинникової стрілки. Параметричні рівняння кола мають вигляд

$$Г: \left\{x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3,\ t \in [0; 2\pi]\right.,$$

і далі $dx = -2\sin t\, dt, dy = 2\cos t\, dt, dz = 0$.

$$Ц = \oint\limits_{Г} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}} = \oint\limits_{Г} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(2\sin t(-2\sin t) + 4\cos^2 t \cdot 2\cos t - 3 \cdot 0\right) dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(-4\sin^2 t + 8\cos^3 t\right) dt =$$

$$= -4\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + 8\int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t dt = \left(-2t + \sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$=8\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-4\pi .$$

II спосіб.

Для обчислення циркуляції за теоремою Стокса оберемо будь-яку поверхню Ω, «натягнуту» на контур Γ. Найбільш раціонально прийняти, що Ω – круг, у якого контур Γ – його межа. Рівняння поверхні Ω має вигляд: $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, z=3 \end{cases}$. Згідно з вибраною орієнтацією контуру нормаль до поверхні необхідно взяти рівною $\vec{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{k}}$.

Далі $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix}=(2x-1)\vec{\mathbf{k}}$.

За теоремою Стокса

$$Ц=\iint\limits_{\Omega}\left(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{n}^0}\right)d\sigma=\iint\limits_{\Omega}(2x-1)\,d\sigma=\begin{vmatrix} \Omega: z=3\Rightarrow d\sigma=dxdy \\ D: x^2+y^2=4 \end{vmatrix}=\iint\limits_{D}(2x-1)\,dxdy=$$

$$=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho\cdot d\rho d\varphi \end{vmatrix}=\iint\limits_{D}(2\rho\cos\varphi-1)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(2\rho\cos\varphi-1)\rho d\rho=-4\pi.$$

Відповідь: -4π .

<u>Приклад 9.</u> Довести, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=(y+z)\vec{\mathbf{i}}+(x+z)\vec{\mathbf{j}}+(x+y)\vec{\mathbf{k}}$ є потенціальним. Знайти його потенціал.

<u>*Розв'язання:*</u>

Необхідною і достатньою умовою потенціальності поля є нульовий вихор поля. В нашому випадку

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=(1-1)\vec{\mathbf{i}}-(1-1)\vec{\mathbf{j}}+(1-1)\vec{\mathbf{k}}=0.$$

Таким чином, поле $\vec{\mathbf{a}}(M)$ є потенціальним.

Розглянемо ламану $M_0M_1M_2M$, де $M_0(0,0,0)$ (рис. 8). Потенціал:

$$u(x,y,z)=C+\int\limits_{M_0M_1M_2M}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz.$$

Розглянемо окремі ланки ламаної:

$$M_0M_1: 0\le x\le x, y=0, z=0;$$

$$M_1M_2: x=\text{const}, 0\le y\le y, z=0;$$

$$M_2M: x=\text{const}, y=\text{const}, 0\le z\le z.$$

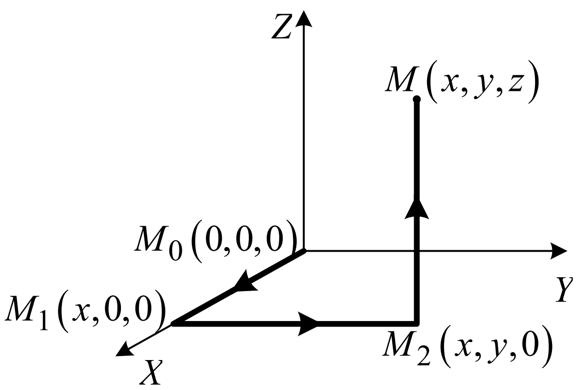


Рис. 8.

Продовжимо обчислення потенціалу

$$u(x,y,z)=C+\int_0^x 0dx+\int_0^y xdy+\int_0^z (x+y)\,dz=C+xy+(x+y)z\,.$$

Можна перевірити результат за допомогою означення $\vec{\mathbf{a}}(M)=\mathbf{grad}\,u(M)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z=P(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}=x+z=Q(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}=x+y=R(x,y,z).$$

Відповідь: $u=C+xy+(x+y)z$.

Варіант 1.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z)=4\ln(x^2+y^2)-8x\cdot y\cdot z\,,\ \Omega: x^2-2y^2+2z^2=1\,,\ M(1,1,1)\,.$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z)$:

$u(x,y,z)=\ln|\vec{\mathbf{r}}|$, де $\vec{\mathbf{r}}$ – радіус-вектор точки поля, $u=\pm 1, u=0$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$:

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=4y\cdot\vec{\mathbf{i}}-9x\cdot\vec{\mathbf{j}}\,.$$

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}-(x+y)\cdot\vec{\mathbf{j}}+z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню циліндра $x^2+z^2=4,\ y=0,\ y=2$;

б) основу цього циліндра, що міститься в площині $y=2$ в додатному напряму осі OY.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+y+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+\sqrt{x^2+y^2-1}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону гіперболоїда $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$, обмеженого площинами $z=0, z=\sqrt{3}$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x^2-2y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(y^2-2x\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$, при переміщенні _матеріальної точки вздовж лінії $L: MN$ від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,3)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\dfrac{1}{3}y\cdot\vec{\mathbf{i}}-3x\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=2\cos t, y=2\sin t, z=1-2\cos t-2\sin t$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(x^2-y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+x\cdot\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\{x^2+y^2=1, z=1$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(\dfrac{y}{z}+2x\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\dfrac{x}{z}\cdot\vec{\mathbf{j}}-\dfrac{xy}{z^2}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 2.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z)=x\sqrt{y}+y\sqrt{z},\quad \Omega: 2x^2-y^2+4z=0,\ M(0,2,1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\dfrac{12z}{x^2+y^2}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень: $u=0,\ \pm1,\ \pm3$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2y\cdot\vec{\mathbf{i}}+3x\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=z^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}-4xz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню призми, обмеженої площинами $x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=3$;

б) верхню основу цієї призми в додатному напрямі осі OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+y+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=3x\cdot\vec{\mathbf{i}}-y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону параболоїда $x^2+y^2=9-z$, розташованого в першому октанті.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: MN$ від точки $M\left(-4,0\right)$ до точки $N\left(0,2\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=-x^2y^3\cdot\vec{\mathbf{i}}+4\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=2\cos t, y=2\sin t, z=4\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+2xz\cdot\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\left\{x^2+y^2+z^2=25, x^2+y^2=9,\right.\ \left(z>0\right)$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\dfrac{yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+xz\cdot\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}}{1+x^2y^2z^2}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 3.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z) = -2\ln(x^2+5) - 4x\cdot y\cdot z,\ \Omega:\ x^2+2y^2-2z^2=1,\ M(1,\ 1,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z) = \left(9x^2+y^2-1\right)/z^2$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень: $u=0,\ 1,\ 9$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x\cdot\vec{\mathbf{i}} + 4y\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля

$$\vec{\mathbf{a}}(M) = (x+y)\cdot\vec{\mathbf{i}} - (y+z)\cdot\vec{\mathbf{j}} + \left(x+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}} \text{ через}$$

а) повну поверхню піраміди, вершини якої $S(0,\ 0,\ 0),\ A(3,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 3,\ 0),\ C(0,\ 0,\ 3)$;

б) грань ASC в додатному напрямі осі OY.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x\cdot\vec{\mathbf{i}} + y\cdot\vec{\mathbf{j}} + z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+y+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\cdot\vec{\mathbf{i}} + y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}$ через частину поверхні $x = y^2+z^2$, яку відтинає площина $x=2$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}} = \left(x^2+2y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + \left(y^2+2x\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: y = 2-\dfrac{x^2}{8}$ від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\cdot\vec{\mathbf{i}} - 2z^2\cdot\vec{\mathbf{j}} + y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L: \{x=3\cos t, y=4\sin t, z=6\cos t-4\sin t+1,$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = y\cdot\vec{\mathbf{i}} + x\cdot\vec{\mathbf{j}} + (x-y)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ безпосередньо і за формулою Стокса вздовж контуру $\Gamma: \{x^2+y^2+z^2=R^2, x=0, y=0, z=0$.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(y - z/x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + (x+1/z)\cdot\vec{\mathbf{j}} + \left(1/x - y/z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 4.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ: $u(x,y,z)=\frac{1}{4}x^2\cdot y-\sqrt{x^2+5z^2}$,

Ω: $z^2=x^2+4y^2-4$, $M(-2;0,5;1)$.

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень: $u=1,\ e,4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}$

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2y\cdot\vec{\mathbf{i}}-2x^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+4z(x-1)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню циліндра $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=4$;

б) переріз даного циліндра площиною $x=0$ в додатному напрямі осі OX.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}+2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+y+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(y-x)\cdot\vec{\mathbf{i}}+(z-y)\cdot\vec{\mathbf{j}}+(x-z)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через бокову поверхню піраміди, обмеженої площинами $x+y+z=1, x-y+z=1, x=0, z=0$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=(x+y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+2x\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2=4, y\ge 0$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2z\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}+y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=2\cos t, y=2\sin t, z=1$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+yz\cdot\vec{\mathbf{j}}-x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\{x^2+y^2=1, x^2+y^2=4z^2, z>0$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\dfrac{x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 5.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$U(x,y,z)=x\cdot z^2-\sqrt{x^3\cdot y}\,,\ \Omega:\ x^2-y^2-3z+12=0, \qquad M(2;\ 2;\ 4).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень: $u=0,\ \pm 1,\ \pm 4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+4y\cdot\vec{\mathbf{j}}$

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=3x\cdot\vec{\mathbf{i}}-4y\cdot\vec{\mathbf{j}}+7z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню сфери $x^2+y^2+z^2=1$;

б) переріз сфери площиною $z=1/2$ в додатному напрямі осі OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}$ через площину $P: x+y+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}-y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню $\Omega: x^2+y^2+z^2=4, 3z=x^2+y^2$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=x^3\cdot\vec{\mathbf{i}}-y^3\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2=4, x\ge 0$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+z^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=\cos t, y=2\sin t, z=2\text{cot}-2\sin t-1,$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t. **Завдання 9.** Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+xz\cdot\vec{\mathbf{j}}+(xy+4y)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\{z^2+4y^2=4, x=2,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\dfrac{x^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}}{x^3+y^3+z^3}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 6.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ: $u(x,y,z)=x\sqrt{y}-y\cdot z^2$, Ω: $x^2+y^2=4z$, $M(1,\ 1,\ 0{,}5)$.

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\dfrac{x+3y^2}{z^2}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень: $u=0,\ \pm 1,\ \pm 3$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=3x\cdot\vec{\mathbf{i}}+6z\cdot\vec{\mathbf{k}}$

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\left(x+y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-\left(y+z\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(x+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню конуса $x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le 4$;

б) переріз цього конуса площиною $y=0$ в додатному напрямі осі OY.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+2y+2z=2$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=-x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+yz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону бокової поверхні конуса $y^2=x^2+z^2$ $\left(0\le y\le 1\right)$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x+y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x-y\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: y=x^2$ від точки $M\left(-1,1\right)$ до точки $N\left(1,1\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x^2y^3\cdot\vec{\mathbf{i}}+2\cdot\vec{\mathbf{j}}+xz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=\sqrt{2}\cos t, y=\sqrt{2}\sin t, z=1,\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2z\cdot\vec{\mathbf{i}}-\left(3x+z\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}-x^2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\left\{y^2=1-x-z, x=0,\ y=0,\ z=0,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{y^2}\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{z^2}\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 7.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z)=7\ln(x^2+1/13)-4x\cdot y\cdot z,\ \Omega:\ 7x^2-4y^2+4z^2=7,$$

$$M(1,\ 1,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y^2+z^2}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ 1,\ 2$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=4z\cdot\vec{\mathbf{i}}-9x\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=y(2x+1)\cdot\vec{\mathbf{i}}-3yz\cdot\vec{\mathbf{j}}+3x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню конуса, якщо конус спирається на площину XOY, його висота співпадає з віссю OZ і дорівнює 3, радіус основи дорівнює одиниці;

б) переріз цього конуса площиною $x=0$ в додатному напрямі осі OX.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+2y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x/2+y+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+(1-2y)\cdot\vec{\mathbf{j}}+2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону параболоїда $1-2y=x^2+z^2$, яку відтинає площина $y=0$ $(y\ge 0)$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=x^2y\cdot\vec{\mathbf{i}}-y\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: MN$ від точки $M(-1,0)$ до точки $N(0,1)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=z\cdot\vec{\mathbf{i}}+y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}-x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=\sqrt{2}\cos t, y=2\sin t, z=\sqrt{2}\cos t,\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x\cdot z-x^3/8\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\left\{x+2y-4z=8, x=0,\ y=0, z=0,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\dfrac{y+z}{x^2}\cdot\vec{\mathbf{i}}-\dfrac{1}{x}\cdot\vec{\mathbf{j}}-\dfrac{1}{x}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 8.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ: $u(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+x\cdot z$, Ω: $x^2+y^2-2z=10$, $M(2,\ 2,\ -1)$.

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\arcsin\left(2y/\left(x^2+z^2\right)\right)$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ \pm\pi/6,\ \pm\pi/4,\ \pm\pi/2$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}(M)=2z\cdot\vec{\mathbf{i}}+3x\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік вихорів вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=7y\cdot\vec{\mathbf{i}}-y\cdot\vec{\mathbf{j}}+2yz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого поверхнею $z=9-x^2-y^2$ и площиною $z=0$;
б) бокову поверхню цього тіла.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=y\cdot\vec{\mathbf{j}}+3z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+2y+2z=2$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=4x\cdot\vec{\mathbf{i}}-2y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через бокову поверхню і верхню основу тіла, обмеженого площинами $3x+2y=12, 3x+y=6, x+y+z=6, y=0, (z>0)$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=(2xy-y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x^2+x\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2=9, y\geq 0$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(-3,0)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-x^2y^3\cdot\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=\sqrt[3]{4}\cos t, y=\sqrt[3]{4}\sin t, z=3\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(y-z)\cdot\vec{\mathbf{i}}+z\cdot\vec{\mathbf{j}}+y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\left\{y=9-x^2-z^2, x=0, y=0, z=0,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(\dfrac{2x}{y}+1\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-\dfrac{x^2}{y^2}\cdot\vec{\mathbf{j}}-6z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 9.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ: $u(x,y,z)=\ln(1+x^2)-x\cdot y\cdot\sqrt{z}$, Ω: $4x^2-y^2+z^2=16$, $M(1,\ -2,\ 4)$.

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=x^2/4+y^2/9+z^2/4$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ 1,\ 4,\ 5$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля: $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=4y\cdot\vec{\mathbf{j}}+8z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=4x\cdot\vec{\mathbf{i}}-4y\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(3x+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню півкулі $x^2+y^2+z^2=1,\ z=0$ ($z\ge 0$);

б) зовнішню поверхню півсфери $x^2+y^2+z^2=1$, ($z\ge 0$).

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=8x\cdot\vec{\mathbf{i}}+2y\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через поверхню тіла, обмеженого площинами $x+y=1, x=0, y=0$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$ $\left(z\ge 0\right)$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x+y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x-y\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2/9=1, y\ge 0$ від точки $M\left(1,0\right)$ до точки $N\left(0,3\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\begin{cases} x=\cos t, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t, z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t\end{cases}$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=5y^2z\cdot\vec{\mathbf{i}}+5z^2x\cdot\vec{\mathbf{j}}+5x^2y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma: x+y^2=4, z=2, x=0,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(18x^2/z\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-e^{2z}\cdot\vec{\mathbf{j}}-\left(6x^3/z^2+2ye^{2z}\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 10.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z\,,\ \Omega:\ x^2+y^2=25z\,,\ M(3,\ 4,\ 1)\,.$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=2z/\left(x^2+y^2+z^2\right)$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z):u=\pm 1,\ \dfrac{1}{2},\ 2$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=y\cdot\vec{\mathbf{j}}+3z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=3y\cdot\vec{\mathbf{i}}-2xz\cdot\vec{\mathbf{j}}+5xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) бокову поверхню і верхню основу паралелепіпеду, обмеженого площинами $x=0,\ \ x=2,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ z=4$;

б) переріз паралелепіпеда площиною $y=x$ в напрямі нормалі, що утворює гострий кут з віссю OX.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P:6x+3y+2z=6$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=6x\cdot\vec{\mathbf{i}}-2y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні параболоїда $z=3-2\left(x^2+y^2\right)$, яку відтинає конус $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=y\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L:x^2+y^2=1, y\ge 0$ від точки $M\left(1,0\right)$ до точки $N\left(-1,0\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2y\cdot\vec{\mathbf{i}}-3x\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=2\cos t, y=2\sin t, z=2-2\cos t-2\sin t$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(4y^2+y^2z\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}-4z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:z^2+y^2=9, x=1,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=2xyz\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x^2z-1/2z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+y\left(x^2+1/z^3\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 11.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z) = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}\,,\ \Omega:\ x^2 - y^2 + z^2 = 4\,,\ M(1,\ 1,\ -2).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z) = \operatorname{arctg}|\vec{\mathbf{r}}|$, де $\vec{\mathbf{r}}$ – радіус-вектор точки поля, та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u = \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ 0$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x\cdot\vec{\mathbf{i}} + 8z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік вихорів вектора $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\cdot\vec{\mathbf{i}} - y^2\cdot\vec{\mathbf{j}} + 2yz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) бокову поверхню циліндра $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$, який спирається на площину XOY;

б) переріз цього циліндра площиною $y = x$ в напрямі нормалі, що утворює гострий кут з віссю OX.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 3x\cdot\vec{\mathbf{i}} + 2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(3z^2 + x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + \left(e^x - 2y\right)\cdot\vec{\mathbf{j}} + (3z - xy)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через замкнену поверхню $\Omega: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}} = \left(x^2 + y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + \left(x^2 - y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: y = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, 1 \le x \le 2 \end{cases}$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,0)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = y\cdot\vec{\mathbf{i}} - x\cdot\vec{\mathbf{j}} + z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L: \{x = \cos t, y = \sin t, z = 3$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 4x\cdot\vec{\mathbf{i}} + 2\cdot\vec{\mathbf{j}} - xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma: z = 2\left(x^2 + y^2\right) + 1, z = 7,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(1/y + z/x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + \left(2z - x/y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}} + (2y - 1/x)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал

Варіант 12.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z)=\sqrt{x\cdot y}-\sqrt{4+z^2}\ ,\ \Omega:\ \ z=x^2-y^2,\ M(2,\ 1,\ 3).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{4+x^2+y^2-z}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z):u=1,\ 2,\ 3.$

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}-y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+2yz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площиною $z=9$;

б) площу круга $z=x^2+y^2$, $z=9$ в від'ємному напрямі осі OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P:2x+6y+3z=6$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=y^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+x^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+(xy-3z)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через бокову поверхню піраміди, основа якої знаходиться на площині XOY і вершини в точках $A(2,0,0),B(0,2,0),O(0,0,0),C(0,0,1)$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=y\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L:x^2+y^2=2,y\ge 0$ від точки $M\left(\sqrt{2},0\right)$ до точки $N\left(-\sqrt{2},0\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=3y\cdot\vec{\mathbf{i}}-3x\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=3\cos t,y=3\sin t,z=3-3\cos t-3\sin t$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=4y\cdot\vec{\mathbf{i}}-3x\cdot\vec{\mathbf{j}}+z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:z=x^2+y^2,z=1,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(-\dfrac{2}{y^2}+6z\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{4x}{y^3}\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(6x-\dfrac{y}{z^2}\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал

Варіант 13.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом нормалі до поверхні Ω, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі OZ:

$$u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{3/2},\ \Omega:\ 2x^2-y^2+z^2-7=0,\ M(0,\ -3,\ 4).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\arcsin|\vec{\mathbf{r}}|$, де $\vec{\mathbf{r}}$ – радіус-вектор точки поля, та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=4z\cdot\vec{\mathbf{j}}-9y\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=2y^2\cdot\vec{\mathbf{i}}-z^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+4xz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню призми, яка утворена перетином площин $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z+y=3,\ x=3$;

б) переріз призми площиною $y=x$ в напрямі нормалі, що утворює гострий кут з віссю OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P:\frac{1}{3}x+y+\frac{1}{2}z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=xy\cdot\vec{\mathbf{i}}+yz\cdot\vec{\mathbf{j}}+xz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=1$, яка міститься в першому октанті, в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=xy\cdot\vec{\mathbf{i}}+2y\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2=1, y\ge 0$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,1)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=6z\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=3\cos t, y=3\sin t, z=3$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(xz+x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma: x^2+9y^2=36, z=2$, безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$\vec{\mathbf{a}}(M)=\sqrt{\frac{yz}{x}}\cdot\vec{\mathbf{i}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}\cdot\vec{\mathbf{j}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 14.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x,y,z)=x^2-\ \operatorname{arctg}(y+z),\ \ \vec{\mathbf{s}}=3\cdot\vec{\mathbf{j}}-4\cdot\vec{\mathbf{k}},\ M(2,\ 1,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\dfrac{4x^2+(y-1)^{1/2}}{z^2}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ 1,\ 4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}(M)=2z\cdot\vec{\mathbf{j}}+3y\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}-2x^3\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого циліндром $z=0,5\cdot y^2$ і площинами $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+2y=4$;

б) переріз цього тіла площиною $x=0$ в додатному напрямі осі OX .

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+4z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 2x+6y+3z=6$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}-y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні $9-z=x^2+y^2$, яка міститься між площинами $z=0, z=5$, в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=y\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: 2x^2+y^2=1, y\geq 0$ від точки $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ до точки $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+2z^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=\cos t, y=3\sin t, z=2\cos t-3\sin t-2$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2y\cdot\vec{\mathbf{i}}+5z\cdot\vec{\mathbf{j}}+3x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\{x=0, y=0, z=0, x+y+z=3,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$\vec{\mathbf{a}}(M)=\dfrac{1}{y}\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{y^2}\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}-\dfrac{y}{z^2}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 15.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},\ \vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}},\ M(1,\ 1,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left[\left(x^2 + z^2\right)/\, y\right]$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x, y, z): u = 0,\ \pi/6,\ \pi/4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = 5x\cdot\vec{\mathbf{i}} + 10y\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x\cdot\vec{\mathbf{i}} - (3yz - x)\cdot\vec{\mathbf{j}} + 3x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) бокову поверхню циліндра $4x^2 + y^2 = 4$, що спирається на площину XOY і зверху обмежений площиною $z = 2$;

б) верхню основу цього циліндра, яка міститься в площині $z = 2$ в додатному напрямі осі OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\cdot\vec{\mathbf{i}} - y\cdot\vec{\mathbf{j}} + 6z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 3x + 2y + 6z = 6$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = zx\cdot\vec{\mathbf{i}} + zy\cdot\vec{\mathbf{j}} + \left(z^2 - 1\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка міститься між площинами $z = 1, z = 4$, в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}} = \left(x^2 + y^2\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}}\right)$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2 + y^2 = R^2, y \ge 0$ від точки $M(R, 0)$ до точки $N(-R, 0)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x\cdot\vec{\mathbf{i}} - \dfrac{z^2}{3}\cdot\vec{\mathbf{j}} + y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L: \left\{ x = \dfrac{1}{2}\cos t, y = \dfrac{1}{3}\sin t, z = \cos t - \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{4} \right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = (zy + 4z)\cdot\vec{\mathbf{i}} + xz\cdot\vec{\mathbf{j}} + yx\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma: \left\{ 9z^2 + 4x^2 = 36, y = 0, \right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$\vec{\mathbf{a}}(M) = (y/z + z)\cdot\vec{\mathbf{i}} + \left(x/z - 1/y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}} + \left(x - yx/z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 16.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x,y,z)=x+\ln(y^2+z^2),\ \ \vec{\mathbf{s}}=2\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}-\vec{\mathbf{k}},\qquad M(2,\ 2,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=\pm\dfrac{\pi}{6},\ \pm\dfrac{\pi}{4}$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}(M)=4x\cdot\vec{\mathbf{i}}+6y\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}-(3yz-x)\cdot\vec{\mathbf{j}}+3x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню конуса $x^2=y^2+z^2$, $x=4$;

б) бокову поверхню цього конуса.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+5y\cdot\vec{\mathbf{j}}+5z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 3x+2y+6z=6$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону частину поверхні $z^2=1-x-y^2$, яка відтинається від неї площинами $x=0, y=0, z=0$ і розташована в першому октанті.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=(x-y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2=4, y\ge 0$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-z\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}+xz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=5\cos t, y=5\sin t, z=4$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x^2(z+4)\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}-4z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma:\{z^2+x^2=9, y=1,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(\dfrac{2xy}{x^2+z^2}+z\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{n}\left(x^2+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(\dfrac{2yz}{x^2+z^2}+x\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 17.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x,y,z) = x^2 \cdot y - \sqrt{x \cdot y + z^2}\,,\ \vec{\mathbf{s}} = 2\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}},\ M(1,\ 5,\ -2).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z) = \dfrac{2z-1}{x^2+y^2}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u = \pm 1,\ \pm 2,\ 0$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = \{P;Q;R\}$: $\vec{\mathbf{a}}(M) = y \cdot \vec{\mathbf{j}} + 4z \cdot \vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M) = 2x \cdot \vec{\mathbf{i}} - (3yz - x) \cdot \vec{\mathbf{j}} + 3x \cdot \vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 9$, площинами $z = x,\ z = 0,\ (z \ge 0)$;

б) площину $z = x$ цієї поверхні в напрямі нормалі, яка утворює тупий кут з віссю OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x \cdot \vec{\mathbf{i}} + y \cdot \vec{\mathbf{j}} + z \cdot \vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 4x + y + 2z = 2$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x \cdot \vec{\mathbf{i}} + xyz \cdot \vec{\mathbf{j}} + y \cdot \vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні $4 - z = x^2 + y^2$, яка міститься між площинами $z = 2, z = 4$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}} = x^2 y \cdot \vec{\mathbf{i}} - xy^2 \cdot \vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2 + y^2 = 4, x \ge 0$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = x \cdot \vec{\mathbf{i}} - 3z^2 \cdot \vec{\mathbf{j}} + y \cdot \vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L: \{x = \cos t, y = 4\sin t, z = 2\cos t - 4\sin t + 3$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M) = xz \cdot \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + y \cdot \vec{\mathbf{k}}$ по контуру $\Gamma: \left\{x^2 + y^2 = 1, z = 1,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M) = \left(y^2 e^{xy^2} + 3x\right) \cdot \vec{\mathbf{i}} + \left(2xye^{xy^2} - y\right) \cdot \vec{\mathbf{j}}$. Потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 18.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x,y,z) = y\cdot\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}(z),\ \vec{\mathbf{s}}=2\vec{\mathbf{i}}-3\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}},\ M(0,\ 1,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\operatorname{arctg} x/\left(x^2+y^2\right)$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z)$: $u=\pm\pi/6,\ \pm\pi/4, 0$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+2y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого циліндрами $y=x^2$, $y=4x^2$, $(x\ge 0)$ і площинами $y=1,\ z=y,\ z=0$;

б) через частину площини $y=1$ цієї поверхні в додатному напрямі осі OY.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}-2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 2x+y/2+z=1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\left(y^2+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+2yz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через бокову поверхню конуса $y^2=x^2+z^2\left(0\le y\le 1\right)$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2/9+y^2/4=1, y\ge 0$ від точки $M\left(3,0\right)$ до точки $N\left(-3,0\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=\cos^2 t, y=\sin t\cdot\cos t, z=\sin t\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(xz+4x\right)\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\left\{4x^2+y^2=4, z=0,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\left(2x/y-1/z\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-\left(x^2+z^2\right)/y^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(2z/y+x/z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 19.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x,y,z)=x\cdot\ln(y)-\operatorname{arctg}(z),\ \vec{\mathbf{s}}=8\vec{\mathbf{i}}+4\vec{\mathbf{j}}+8\vec{\mathbf{k}},\ M(-2,\ 1,\ -1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{z}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{4}$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\{P;Q;R\}$:

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=9y\cdot\vec{\mathbf{i}}-4x\cdot\vec{\mathbf{j}}.$$

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=(y+z)\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}-x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого параболоїдом $2y=x^2+z^2$ і площиною $y=1$;

б) переріз цієї поверхні площиною $z=0$ в додатному напрямі осі OZ.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 4x+y+2z=2$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}-xy\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню сторону циліндра $x^2+z^2=4$, обмежену площинами $y=1, x+y=4$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=y^2\cdot\vec{\mathbf{i}}-x^2\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2+y^2=9, y\ge 0$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(3y^2+x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=2\cos t, y=2\sin t, z=\cos t$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=3y^2\cdot\vec{\mathbf{i}}-3x^2\vec{\mathbf{j}}+3z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\{x^2+y^2+z^2=4, x=0,\ y=0,\ z=0,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(\dfrac{2x}{y^2}+2z\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(\dfrac{2y}{z^2}-\dfrac{2x^2}{y^3}\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(2x-\dfrac{2y^2}{z^3}\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 20.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом вектора $\vec{\mathbf{s}}$:

$$u(x,y,z)=\ln(3-x^2)+x\cdot y^2\cdot z,\ \vec{\mathbf{s}}=-\vec{\mathbf{i}}+2\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}},\ M(1,\ 3,\ 2).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=\ln\dfrac{x}{x^2+y^2}$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z):u=1,\ \pm\mathrm{e}$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=5y\cdot\vec{\mathbf{i}}+7x\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=2(x-y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+(x-z)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+3y^2+1, z=0, x^2+y^2=1$, і площиною $y=1$;

б) переріз цієї поверхні площиною $x=0$ в додатному напрямі осі OX.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+12z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P:4x+y+2z=2$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(3x-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+x^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(x^2-y^2+2z\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через бокову поверхню конуса $4z^2=x^2+y^2\ (0\le z\le H)$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x+y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L:MN$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,1)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=z\cdot\vec{\mathbf{i}}+xy\cdot\vec{\mathbf{j}}-\left(y^2+x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=2\cos t, y=3\sin t, z=4\cos^2 t+9\sin^2 t\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-y\cdot\vec{\mathbf{i}}+2\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\left\{x^2+y^2-z^2=0, z=1,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(\frac{y}{z(1+xy)}+2xy\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(\frac{x}{z(1+xy)}+x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}-\frac{\ln(1+xy)}{z^2}\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 21.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом, перпендикулярним до лінії рівня функції $u(x,y,z)$, що проходить через точку $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$u(x,y,z)=\ln(x^2+y^2),\ M(1,\ 2).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-3x+6y-4z$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ 1,\ 4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\frac{1}{x}\cdot\vec{\mathbf{i}}+\frac{1}{y}\cdot\vec{\mathbf{j}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=(x-z)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+(x+z)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню циліндра $x^2+z^2=4,\ y=0,\ y=2$ і площиною $y=1$;

б) бокову поверхню цього тіла в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+4y\cdot\vec{\mathbf{j}}-5z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 3x+4y+6z=12$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+x\cdot\vec{\mathbf{j}}+xz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через зовнішню частину параболоїда $y=x^2+z^2$, розташовану в першому октанті і обмежену площинами $y=0, y=1$.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(2x^2+y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: MN$ від точки $M(1,3)$ до точки $N(2,4)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=xy\cdot\vec{\mathbf{i}}+z\cdot\vec{\mathbf{j}}-\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=3\cos t, y=2\sin t, z=9\cos^2 t-4\sin^2 t\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+z\cdot\vec{\mathbf{j}}-xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\left\{z=x^2+y^2, z=2,\quad x=0,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=(6xyz+2y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(3x^2z+2x\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+3x^2y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 22.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y)=\arcsin x/\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $M(1,\ 2)$ за напрямом, перпендикулярним до лінії рівня функції $u(x,y)$, що проходить через точку $M(x_0,y_0)$.

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=x^2+4x\cdot y+4y^2$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z):u=0,\ 1,\ 9$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left\{1/x^2;1/y^2;1/z^2\right\}$

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+\arcsin(xz)\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого поверхнями $x^2+z^2=4$ і $x^2+z^2=1,\ \ y=0,\ \ y=2$;

б) бокову поверхню цього тіла в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=-x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P:5x+3y+2z=30$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+(y+z)\cdot\vec{\mathbf{j}}+(z-y)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через верхню частину сферичної поверхні $x^2+y^2+z^2=9$, яку відтинає площина $z=3/2,z>0$ в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=x^2\cdot\vec{\mathbf{i}}-y^3\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L:x^2+y^2=16$ від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,4)$.

Завдання 8. Знайти вздовж контуру $L:\{x=2\cos t,y=\sin t,z=\sin t/2$ циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=z^4\cdot\vec{\mathbf{i}}+x\cdot\vec{\mathbf{j}}+\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=3y\cdot\vec{\mathbf{i}}-2x\cdot\vec{\mathbf{j}}+z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\{z=x^2+y^2,x^2+y^2=4,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+xz\cdot\vec{\mathbf{j}}+xy\cdot\vec{\mathbf{k}}\right)/(1+xyz)$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 23.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом, перпендикулярним до лінії рівня функції $u(x,y,z)$, що проходить через точку $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}, \qquad M(1,\ 1,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=9x^2-24x\cdot y+16y^2$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ 1,\ 9$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=3y\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+7yz\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2-32$ и $z=18-x^2-y^2$;

б) частину поверхні $z=x^2+y^2-32$, що обмежує тіло, в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}-y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 5x+3y+z=15$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=(x+z)\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+(z-x)\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через верхню частину сферичної поверхні $x^2+y^2+z^2=1$, яку відтинає конус $z^2=x^2+y^2$ в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\sqrt{x}\cdot\vec{\mathbf{i}}+y^4\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: y=\cos x$ від точки $M(0,1)$ до точки $N(\pi/2,0)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=4y\cdot\vec{\mathbf{i}}-3x\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=4\cos t, y=4\sin t, z=4-4\cos t-4\sin t$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=3x\cdot\vec{\mathbf{i}}+5\cdot\vec{\mathbf{j}}-xy\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\{z=x^2+y^2, z^2=x^2+y^2$, безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле
$\vec{\mathbf{a}}(M)=2xze^{x^2+y^2}\cdot\vec{\mathbf{i}}+2yze^{x^2+y^2}\cdot\vec{\mathbf{j}}+e^{x^2+y^2}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 24.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом, перпендикулярним до лінії рівня функції $u(x,y,z)$, що проходить через точку $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$u(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),\quad M(1,\ 2,\ 1).$$

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=3x^2+6x\cdot y+3y^2$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z):u=0,\ 1,\ 4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}(M)=5y\cdot\vec{\mathbf{i}}-5z\cdot\vec{\mathbf{j}}+z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=2$ і $z^2=x^2+y^2$, $(z\ge 0)$;

б) частину сфери $x^2+y^2+z^2=2$, що обмежує тіло, в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+3y\cdot\vec{\mathbf{j}}-z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P:4x+3y+6z=12$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=y^2\cdot\vec{\mathbf{i}}+x^2\cdot\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}$ через частину поверхні параболоїда $1-z=x^2+y^2,(0\le z\le 1)$ в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=(x+2\sin y)\cdot\vec{\mathbf{i}}+x\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L:y=\arcsin x$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1/2,\pi/6)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=z\cdot\vec{\mathbf{i}}+x\cdot\vec{\mathbf{j}}+y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\{x=2\cos t,y=2\sin t,z=0$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}(M)=2x\cdot\vec{\mathbf{i}}+yz\cdot\vec{\mathbf{j}}-3x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\{x^2+y^2+z^2=6,z=x^2+y^2,$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=\left(zy\cdot\vec{\mathbf{i}}+zx\cdot\vec{\mathbf{j}}-xy\cdot\vec{\mathbf{k}}\right)/z^2\sqrt{1-\left(\frac{xy}{z}\right)^2}$$

потенціальне. Знайти його потенціал.

Варіант 25.

Завдання 1. Обчислити похідну скалярного поля $u(x,y,z)=\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точці $M\left(0,\ 0,\ \pi/2\right)$ за напрямом, перпендикулярним до лінії рівня функції $u(x,y,z)$, що проходить через точку $M(x_0,y_0,z_0)$.

Завдання 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u(x,y,z)=5x^2-10x\cdot y+5y^2$ та побудувати поверхні рівня для заданих значень $u(x,y,z): u=0,\ 1,\ 4$.

Завдання 3. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=1/x\cdot\vec{\mathbf{i}}+1/y\cdot\vec{\mathbf{j}}-1/z\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

Завдання 4. Знайти потік поля вектора $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=y\cdot\vec{\mathbf{i}}-x\cdot\vec{\mathbf{j}}+0,5z^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через

а) повну поверхню тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$ і $z^2=x^2+y^2$;

б) частину поверхні $z=x^2+y^2$, що обмежує дане тіло, в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=x\cdot\vec{\mathbf{i}}-3y\cdot\vec{\mathbf{j}}+2z\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через площину $P: 3x+6y+4z=12$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}-4x\cdot\vec{\mathbf{j}}+2\cdot\vec{\mathbf{k}}$ через бокову поверхню конуса $\left(z-4\right)^2=x^2+y^2,\left(0\le z\le 4\right)$ в сторону зовнішньої нормалі.

Завдання 7. Знайти роботу сили $\vec{\mathbf{F}}=\left(3x+2y\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-\left(2x-3y\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії $L: x^2/4+y^2/9=1$ від точки $M\left(-2,0\right)$ до точки $N\left(0,3\right)$.

Завдання 8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=2y\cdot\vec{\mathbf{i}}-z\cdot\vec{\mathbf{j}}+x\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $L:\left\{x=\cos t, y=\sin t, z=4-\cos t-\sin t\right.$ в напрямі, який відповідає зростанню параметра t.

Завдання 9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=zx\cdot\vec{\mathbf{i}}-\vec{\mathbf{j}}+y\cdot\vec{\mathbf{k}}$ вздовж контуру $\Gamma:\left\{x^2+y^2+z^2=8, z^2=x^2+y^2, z>0,\right.$ безпосередньо і за формулою Стокса.

Завдання 10. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{a}}\left(M\right)=\left(x\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\cdot\vec{\mathbf{k}}\right)/\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2/3}$ потенціальне. Знайти його потенціал.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов / Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 1976. – 389 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие для студентов втузов: в 2 т. Т.2

3. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А. Гольдфайн. – М.: Физматгиз, 1962. – 132 с.

4. Ванин В.А., Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования [Текст]: специальные главы курса высшей математики / А.В. Ванин, Ю. Л. Геворкян, А.Л. Григорьев. – Т. 3. – Х.: Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 464 с. – на рус. яз. – (Серия «Фундаментальна освіта для високих технологій»)

5. Математика: учебное пособие. Часть 8: Теория поля / О.А. Кеда, Л.П. Мохрачева, Е.М. Пампура, А.Ф. Рыбалко, Н.М. Рыбалко. – Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2014. – 112 с.

Навчальне видання

ПОТАНІНА Тетяна Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА:
«ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ І ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

Теорія та практика

Навчальний посібник

Роботу до видання рекомендувала проф. *Л.В. Курпа*

В авторській редакції

План 2019, поз.