МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

СЕРИЯ «ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ
практических занятий и контрольных работ
по высшей математике
по теме «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

для студентов технических специальностей
НТУ «ХПИ»

Харьков
НТУ «ХПИ»
2017

Методические указания для проведения практических занятий и контрольных работ по высшей математике по теме «Линейная алгебра» для студентов технических специальностей НТУ «ХПИ» / Сост. Т.С.Полянская. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2017. – 36 с.

Составитель Т.С.Полянская

Рецензенты: В.А.Ванин, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины,

Н.А.Чикина, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»

Кафедра высшей математики

Вступление

В методических указаниях приведены задачи по теме «Линейная алгебра» для шести практических занятий, предусмотренных действующей рабочей учебной программой по высшей математике для студентов технических специальностей НТУ «ХПИ».

Каждое практическое занятие состоит из трёх частей. В первой части сформулированы теоретические вопросы, которые представляют собой необходимый минимум для успешного усвоения материала. Во второй части приведены задания, которые рекомендованы для решения на доске и для самостоятельного решения на практических занятиях. В третьей части собраны задания, которые могут быть даны для самостоятельного решения дома.

В методических указаниях приведены также варианты итоговой контрольной работы по теме «Линейная алгебра».

В конце дан список рекомендованной литературы [1-7], в которой студенты могут найти как ответы на поставленные вопросы, так и подробное решение типовых задач.

Практическое занятие 1
МАТРИЦЫ ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Вопросы

1. Определение матрицы.
2. Типы матриц. Единичная матрица.
3. Транспонирование матриц.
4. Умножение матрицы на число.
5. Сложение матриц.
6. Умножение матриц. Перестановочные матрицы.
7. Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень. Многочлен от матрицы.

Задачи

а) Транспонировать матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

б) Найти произведение матрицы A на число α :

4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$. **5.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$.

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

в) Найти сумму $A + B$**:**

7. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 4 & -3 & 2\\ 5 & 7 & -1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 5\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}.$

г) Найти линейную комбинацию $\alpha \cdot A+\beta \cdot B$, если:

9. $\alpha=-1, \quad A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}, \quad \beta=2, \quad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 0\end{pmatrix}.$

10. $\alpha=3, \quad A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}, \quad \beta=-1, \quad B=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$

11. $\alpha=2, \quad A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ 4 & 2 & -5\\ 6 & 9 & 7\end{pmatrix}, \quad \beta=3, \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 6\\ -2 & -5 & 1\end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельной работы

12. $\alpha=3, \quad A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}, \quad \beta=4, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 7 & -5\\ 3 & 1 & 6\end{pmatrix}.$

13. $\alpha=4, \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\\ 6 & 5 & -5\end{pmatrix}, \quad \beta=-2, \quad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -7 & 9\end{pmatrix}.$

д) Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

14. $3A+2X=B,$ где $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 16 & 17\end{pmatrix}.$

15. $2X-3A=B,$ где $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 0 & -15 & 5 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

16. $A-4X=2B,$ где $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 4 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$.

17. $2X+5A=B,$ где $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \\ -13 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

e) Вычислить произведения матриц:

18. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

21. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, найти произведения $A \cdot B^T$ и $A^T \cdot B$.

Задачи для самостоятельной работы

22. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 7 & -8 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **25.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, найти произведения $A \cdot B^T$ и $A^T \cdot B$.

ж) Найти значение многочлена от матрицы:

26. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

27. $f(x) = 3 + x - 4x^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

28. $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 18 & -21 & 6 \\ 9 & -9 & -3 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 9 & 19 \\ -1 & -8 \\ 1 & -18 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 11 & -5 & 8 \\ 6 & 3 & 17 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} -20 & -19 & 23 \\ -18 & 2 & -24 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 8 \\ 18 & 34 & -38 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 \\ 52 & -25 & -11 \\ -17 & -15 & -17 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix}$. **21.** $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 15 & -16 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$,

$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 2 \\ 12 & 27 & 3 \\ -20 & -44 & -4 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 37 \\ 26 & 5 & 22 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 19 \\ 62 \\ -21 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 21 & -16 & -19 \\ -37 & 26 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **25.** $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -24 & -14 & -6 \\ -21 & -8 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -11 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}.$$ **26.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} -62 & -27 & 49 \\ -14 & -65 & -111 \\ 46 & 8 & -54 \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} 19 & 25 & -157 \\ 53 & -3 & -28 \\ 109 & 3 & -37 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание

1. Найти $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, если $\alpha = -2$, $\beta = 5$,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$\frac{1}{2} X - 2A = B,$

где $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -7 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычислить произведения матриц:

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Найти $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 0 & 22 \\ 23 & -9 \\ 31 & -9 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 16 & -16 & 10 \\ -16 & 4 & 10 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 11 & 0 \\ -29 & 23 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 13 & -7 & 2 \\ -15 & 5 & 22 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 52 & -7 & 13 \\ -48 & 59 & 27 \\ 7 & 4 & 79 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие 2
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ. ПРАВИЛО КРАМЕРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Вопросы

1. Правило вычисления определителей второго порядка.
2. Разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.
3. Правило треугольника для вычисления определителей третьего порядка.
4. Правило Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.

Задачи

а) Вычислить определители второго порядка:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

б) Вычислить определители, разлагая их по первой строке:

4. $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

в) Вычислить по правилу треугольника:

7. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & -9 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить обоими способами:

10. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix}$.

13. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ 5 & x-2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2$.

14. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

проверить, что $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

г) Решить СЛАУ по правилу Крамера:

15. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -10, \\ 3x_1 + 2x_2 = 11. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -5. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

19. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = -2. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

Ответы

1. 5. **2.** 32. **3.** 8. **4**. -14. **5.** 40. **6.** -40. **7.** 28. **8.** -66. **9.** -19. **10.** -44. **11.** 0. **12.** 45. **13.** -1; 2. **15.** (1;4). **16.** (-1; 2). **17.** (1; -1; 0). **18.** (1; 2; 3). **19.** (4; -3). **20.** (-2; -1; 4). **21.** (3; -2; 1). **22.** (2; 1; -1).

Домашнее задание

1. Вычислить $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

Вычислить обоими способами:

2. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решить СЛАУ:

4. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

Ответы

1. 1. **2.** -30. **3.** 15. **4.** (2; -3; 5). **5.** (3; 0; -4).

Практическое занятие 3
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Вопросы

1. Определение определителя квадратной матрицы.
2. Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы.
3. Свойства определителей.
4. Вычисление определителей:
   а) разложением по элементам строки или столбца,
   б) приведением к треугольному виду.

Задачи

а) Вычислить определители разложением по элементам строки или столбца:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -7 & 0 \end{vmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

4. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

б) Вычислить определители, приведя их к треугольному виду:

6. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 8 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 2 & -8 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & -6 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

9. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -5 & 6 \end{vmatrix}$.

Ответы

1. -40. **2.** -125. **3.** 23. **4.** 12. **5.** -385. **6.** 153. **7.** -179.
8. -17. **9.** -174. **10.** -195.

Домашнее задание

Вычислить определители обоими способами:

1. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & -6 & -4 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответы

1. 259. **2.** 0.

Практическое занятие 4
ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Вопросы

1. Определение обратной матрицы.
2. Единственность обратной матрицы.
3. Определение вырожденной и невырожденной квадратных матриц.
4. Теорема существования обратной матрицы.
5. Основные типы матричных уравнений и их решение.

6 .Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы.

Задачи

а) Найти матрицы, обратные данным:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -5 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

б) Решить матричные уравнения:

10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -11 & 18 \end{pmatrix}$. **11.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -10 & 17 & 25 \\ -15 & -7 & 33 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

13. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 13 & -5 \\ 5 & -10 & 8 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

14. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 12 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$.

15. $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -16 & 8 \\ -13 & 17 & -1 \\ -14 & -13 & -7 \end{pmatrix}$.

16. $X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 22 & 16 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -26 & 34 \\ -10 & -36 & 53 \end{pmatrix}$.

в) Решить системы с помощью обратной матрицы:

18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

20. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Ответы

1. $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.** $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **3.** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $-\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -15 & 20 & 5 \\ -9 & 12 & -2 \\ -1 & -7 & -3 \end{pmatrix}$. **5.** $-\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 3 & -29 & -4 \\ 7 & -21 & 0 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

6. $-\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 11 & 15 & 1 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. **7.** $-\frac{1}{42}\begin{pmatrix} 4 & -22 & -17 \\ -10 & -8 & -10 \\ 6 & -12 & -15 \end{pmatrix}$.

8. - $\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -12 & -3 & 6 \\ -22 & 2 & 6 \\ 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **9.** $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 7 & -13 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \\ -5 & 19 & -6 \end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. **13.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

18. $(5; 6)$. **19.** $(1; 2; -2)$. **20.** $(0; 3; -1)$. **21.** $(2; 1; -1)$.

Домашнее задание

а) Найти матрицы, обратные данным:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

б) Решить матричные уравнения:

3. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -5 \\ 9 & -21 & -15 \end{pmatrix}$.

5. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & -10 \\ -4 & 14 & -7 \end{pmatrix}$.

в) Решить системы с помощью обратной матрицы:

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - .x_3 = 5. \end{cases}$

Ответы

1. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **6.** $(-1;\ 2)$. **7.** $(3;\ -3;\ 1)$.

8. $(-2;\ 4;\ -3)$.

Практическое занятие 5
РАНГ МАТРИЦЫ. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА. (СЛУЧАИ НЕСОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ И ОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ)

Вопросы

1. Определение базисного минора.
2. Определение ранга матрицы.
3. Элементарные преобразования матрицы.
4. Методы вычисления ранга матрицы.
5. Совместные и несовместные системы.
6. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Метод Гаусса решения СЛАУ.

Задачи

а) Найти ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -9 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & -9 & 9 \\ 5 & -3 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

7. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -6 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

б) Исследовать системы по теореме Кронекера-Капелли и решить те из них, которые имеют решение:

9. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 - 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -1. \end{cases}$

Ответы

1. 2. **2.** 3. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 4. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 3. **9.** $(2;\ 1;\ -1)$. **10.** Нет решений. **11.** $(1;\ 2;\ -1;\ -2)$. **12.** $(1;\ 1;\ 1;\ 1)$. **13.** Нет решений. **14.** Нет решений.**15.** $(1;\ 2;\ 3;\ 4)$. **16.** Нет решений.

Домашнее задание

а) Найти ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 6 & 5 & -7 & 10 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 5 & 15 & -11 & 1 & 18 \\ 7 & -24 & 26 & 5 & -27 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

б) Исследовать системы по теореме Кронекера-Капелли и решить те из них, которые имеют решение:

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -1. \end{cases}$

Ответы

1. 2. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** $(-3;\ 2;\ 0;\ 5)$. **6.** $(4;\ 2;\ -3;\ 1)$. **7.** Нет решений. **8.** Нет решений.

Практическое занятие 6
РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА. (СИСТЕМА ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНО МНОГО РЕШЕНИЙ). ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Вопросы

1. Базисные и свободные неизвестные.
2. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ.
3. Запись общего решения однородной СЛАУ с помощью фундаментальной системы решений.

Задачи

а) Найти общее решение:

1. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 10x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 8, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы

3. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

б) Найти фундаментальную систему решений:

5. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$ **8 .** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы

К номерам 1-8 даётся один из возможных вариантов ответа. Здесь C, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

1. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{16}{21}C, \\ x_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{13}{21}C, \\ x_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{22}{21}C, \\ x_4 = C. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 = \dfrac{6}{7} - C_1 + \dfrac{4}{7}C_2, \\ x_2 = \dfrac{5}{7} + C_1 - \dfrac{6}{7}C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 = 0{,}2 - 0{,}6C_1 - C_2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 0{,}2 + 1{,}4C_1 + C_2, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x_1 = -1{,}5C_1, \\ x_2 = 1 + 3{,}5C_1 - 0{,}2C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = -1 - 2{,}5C_1 + 0{,}8C_2, \\ x_5 = C_{2.}. \end{cases}$

5. (13; 9; 10; 0), (−6; −8; 0; 10). **6.** (1; 2; 1; 0). **7.** (1; 0; 0; 4; 5),

(−7; 5; 5; 2; 0). **8.** (−9; 10; 0; 7). **9.** $C_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание

а) Найти общее решение:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

б) Найти фундаментальную систему решений:

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответы

К номерам 1-4 даётся один из возможных вариантов ответа. Здесь C, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

1. $\begin{cases} x_1 = 1 - C, \\ x_2 = -0{,}5, \\ x_3 = C, \\ x_4 = 0{,}5 + 2C. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{11} - C_1 + \dfrac{2}{11} C_2, \\ x_2 = \dfrac{9}{11} + C_1 - \dfrac{7}{11} C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_{2.}. \end{cases}$

3. $(-8;\ 9;\ -13;\ -27)$. **4.** $(-1;\ -13;\ 6;\ 15;\ 0)$, $(-13;\ 6;\ 3;\ 0;\ 5)$.

5. $C_1 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Вариант 1

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ по правилу Крамера.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 11 & 1 \\ -3 & -10 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 3 \end{cases}$ методом Гаусса.

Вариант 2

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = -x^2 + 5x - 7$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ по правилу

Крамера.

3. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -7 & -12\\ -6 & 12 & -5\end{pmatrix}.$$

4. Решить систему $\begin{cases}x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 2,\\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1,\\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1,\\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 3\end{cases}$ методом Гаусса.

Вариант 3

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 7x + 4$, $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

2. Решить систему $\begin{cases}4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2,\\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2,\\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1\end{cases}$ по правилу Крамера.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & -2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -4 & 7\\ -16 & 7\end{pmatrix}$.

4. Решить систему $\begin{cases}x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1,\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2,\\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2\end{cases}$ методом Гаусса.

Вариант 4

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = 3x^2 + x + 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$ по правилу Крамера.

3. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 16 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases}$ методом Гаусса.

Вариант 5

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$ по правилу Крамера.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -8 & 9 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 - 7x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 4, \\ 5x_2 - 10x_3 + 9x_4 = -3 \end{cases}$ методом Гаусса.

Вариант 6

1. Найти $f(A)$, если $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ по правилу Крамера.

3.Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

.**4.** Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 13x_4 = -3 \end{cases}$ методом Гаусса.

Ответы

Вариант 1. **1.** $\begin{pmatrix} -8 & -16 & 22 \\ -5 & 14 & -27 \\ 2 & -60 & 66 \end{pmatrix}$. **2.** $(-1;\ 0;\ 3)$. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Один из возможных вариантов: $\begin{cases} x_1 = 1{,}8 - 1{,}8C, \\ x_2 = -0{,}6 - 0{,}4C, \\ x_3 = -1, \\ x_4 = C. \end{cases}$ Здесь C – произвольная постоянная.

Вариант 2. **1.** $\begin{pmatrix} -4 & -10 & 10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$. **2.** $(2;\ 1;\ -1)$. **3** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. **4.** Один из возможных вариантов: $\begin{cases} x_1 = 1 + 0{,}8C_1 + C_2, \\ x_2 = -1 - 2{,}2C_1, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Вариант 3. **1.** $\begin{pmatrix} 38 & -19 & -15 \\ -8 & 6 & 18 \\ -44 & -19 & 10 \end{pmatrix}$. **2.** $(-3;\ 2;\ -2)$. **3.** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Один из возможных вариантов: $\begin{cases} x_1 = 0{,}7 + 0{,}7C, \\ x_2 = -0{,}9 - 1{,}9C, \\ x_3 = 0{,}5 + 3{,}5C, \\ x_4 = C. \end{cases}$ Здесь C – произвольная постоянная.

***Вариант 4.* 1.** $\begin{pmatrix} 28 & -10 & -5 \\ 3 & 24 & 9 \\ -46 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. **2.** $(3;\ -2;\ 1)$. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Один из возможных вариантов: $\begin{cases} x_1 = -6 - 0{,}2C, \\ x_2 = C, \\ x_3 = 4 + 1{,}4C, \\ x_4 = 5. \end{cases}$ Здесь C − произвольная постоянная.

***Вариант 5.* 1.** $\begin{pmatrix} 6 & -6 & -16 \\ -5 & -17 & 7 \\ 15 & -3 & -17 \end{pmatrix}$. **2.** $(4;\ 2;\ -1)$. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Один из возможных вариантов: $\begin{cases} x_1 = -0{,}2 - 0{,}6C_2, \\ x_2 = -0{,}6 + 2C_1 - 1{,}8C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

Здесь C_1 и C_2 − произвольные постоянные.

***Вариант 6.* 1.** $\begin{pmatrix} -59 & -4 & 2 \\ -6 & -63 & -10 \\ 12 & -2 & -25 \end{pmatrix}$. **2.** $(2; -1; -5)$. **3.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.Один из возможных вариантов: $\begin{cases} x_1 = 29 + 22C, \\ x_2 = -37 - 27C, \\ x_3 = 10 + 10C, \\ x_4 = C. \end{cases}$ Здесь C − произвольная постоянная.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Умножение матрицы на число.

Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

2. Сложение матриц.

Складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Сумма матриц A и B размеров $m \times n$ есть матрица C размеров $m \times n$, каждый элемент c_{ij} которой есть сумма $a_{ij} + b_{ij}$.

3. Произведение матриц.

Произведение матриц $A \cdot B$ существует тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то есть, если матрица A имеет размеры $m \times n$, то матрица B должна иметь размеры $n \times p$, где $p -$ любое натуральное число. При этом произведение $C = A \cdot B$ будет иметь размеры $m \times p$, а элементы матрицы C вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

Две квадратные матрицы одинакового порядка всегда можно умножить. Причём их произведение будет квадратной матрицей того же порядка.

4. Возведение квадратной матрицы в целую неотрицательную степень.

Для квадратных матриц вводится действие возведения в целую неотрицательную степень. Если A $-$квадратная матрица, то

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, ..., A^n = A^{n-1} \cdot A, ...$$

Здесь $E -$ единичная матрица того же порядка, что и A.

5. Многочлен от матрицы.

Пусть дан многочлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

и квадратная матрица A. Многочленом от матрицы называется выражение

$$f(A) = a_0 \cdot A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot A + a_n \cdot E,$$

где $E -$ единичная матрица того же порядка, что и A.

6. Транспонирование матрицы.

Пусть дана матрица A. Транспонированной матрицей A^T называется матрица, строками которой служат столбцы матрицы A с теми же номерами.

7.Вычисление определителя второго порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

8. *Правило треугольника для вычисления определителя третьего порядка.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+ a_{23}a_{32}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

9. Вычисление обратной матрицы.

Любая квадратная невырожденная матрица имеет обратную. Если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

10. Правило Крамера.

Чтобы решить СЛАУ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_{1,} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_{2,} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_{3,} \end{cases}$

нужно составить определитель этой системы

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Если $\Delta\neq 0$, то составляем определители $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ по правилу: Δ_k – определитель, который получается, если в Δ заменить k–тый столбец столбцом правых частей. После этого неизвестные находим по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

11. Теорема Кронекера–Капелли.

СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы.

При этом, если указанные ранги совпадают с числом неизвестных, то СЛАУ имеет единственное решение. Если они меньше, чем число неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Геворкян Ю.Л. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. – 200 с.
2.Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – Ч.1. – 324 с.
3.Высшая математика в примерах и задачах / под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков: НТУ «ХПИ». – Т. 1. –2005. – 448 с.
4.Вища математика в прикладах і задачах / під ред.Л.В. Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – Т.1. – 532 с.
5.Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2 ч. – Ч.1 / Н.О.Чікіна, І.В.Антонова, Л.О.Балака [та ін.]; за ред. Н.О.Чікіної. – Харків: Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с.
6.Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
7.Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ