

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ
практичних занять з вищої математики за темою
«ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»**

для студентів усіх спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 30.01.2018

Харків
НТУ «ХПІ»
2018

Методичні вказівки до проведення практичних занять за темою
«Похідна та її застосування» для студентів усіх спеціальностей / уклад.
О. П. Пріщенко, О. С. Чорна. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 36 с.

Укладачі: О. П. Пріщенко,
О. С. Чорна

Рецензент Ю.І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доцент

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Методичні вказівки розроблені як продовження серії «Практичні заняття з вищої математики» та призначені для викладачів та студентів, у тому числі тих, що навчаються за особистим навчальним планом. Методичні вказівки до проведення практичних занять з теми «Похідна та її застосування» складаються з 7 практичних занять та охоплюють навчальну програму з курсу вищої математики для студентів усіх спеціальностей.

Кожне практичне заняття розділено на підтеми. Вони одночасно являються і контрольними запитаннями, відповіді на які є необхідним мінімумом для успішного засвоєння матеріалу. Далі, згідно з даною темою, наведені задачі, до яких додаються відповіді.

Після кожного практичного заняття подано список літератури, яка рекомендована до самостійного ознайомлення. До цього списку увійшли: традиційний класичний підручник, навчально-методичні видання кафедр нашого університету і навчальний посібник, розроблений в ХТУРЕ. Завершуються методичні вказівки варіантами контрольних робіт.

Практичне заняття 1

ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІУВАННЯ. ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

1.1. Означення похідної

Користуючись означенням, знайти похідні функцій:

1. $y = \sin x$;

2. $y = x^2 + x - 1$.

1.2. Похідні основних елементарних функцій.

Правила диференціювання

Знайти похідні заданих функцій:

3. $y = 3x^2 - 5x + 1$;

14. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

4. $y = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1$;

15. $y = \frac{x}{1 - \cos x}$;

5. $y = ax^2 + bx + c$;

16. $y = x \arcsin x$;

6. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[8]{2}$;

17. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$;

7. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$;

18. $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$;

8. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;

9. $y = e^x \cos x$;

19. $y = x \lg x$;

10. $y = (x^2 - 2x + 3)e^x$;

20. $y = x \cdot 10^x$;

11. $y = \frac{x+1}{x-1}$;

21. $y = \frac{x^3 + 2^x}{e^x}$;

12. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

22. $y = xe^x (\cos x + \sin x)$.

13. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$;

1.3. Похідна складної функції

Знайти похідні функцій:

23. $y = (x^3 + 2x + 4)^{10}$;

24. $y = \sqrt{\ln x}$;

25. $y = \sin(2^x)$;

26. $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$;

27. $y = \cos^3 4x$;

28. $y = (1 + \sin^2 x)^4$;

29. $y = 10^{2x-3}$;

30. $y = \sin(e^{x^2+3x-2})$;

31. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$;

32. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$;

33. $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$;

34. $y = e^{-x^2} \ln x$;

35. $y = 4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}}$;

36. $y = \ln \operatorname{arcsin} \sqrt{1-e^{2x}}$;

37. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos^2 2x + \operatorname{arcsin} \frac{1}{x}$;

38. $y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arccos} x$;

39. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

40. $y = -\frac{2(2x+3)}{5\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Відповіді:

1. $y' = \cos x$;

2. $y' = 2x + 1$;

3. $y' = 6x - 5$;

4. $y' = 4x^3 - x^2 + 5x - 0,3$;

5. $y' = 2ax + b$;

6. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

7. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$;

8. $y' = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$;

9. $y' = e^x (\cos x - \sin x)$;

10. $y' = e^x (x^2 + 1)$;

11. $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$;

12. $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)}$;

13. $y' = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$;

14. $y' = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$;

15. $y' = \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}$;
16. $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
17. $y' = \frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$;
18. $y' = \frac{2x}{\operatorname{arctg} x} - \frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$;
19. $y' = \frac{\ln x + 1}{\ln 10}$;
20. $y' = 10^x(1 + x \ln 10)$;
21. $y' = \frac{2^x(\ln 2 - 1) + 3x^2 - x^3}{e^x}$;
22. $y' = e^x(\cos x + \sin x + 2x \cos x)$;
23. $y' = 10(x^3 + 2x + 4)^9(3x^2 + 2)$;
24. $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$;
25. $y' = 2^x \ln 2 \cdot \cos(2^x)$;
26. $y' = -\frac{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1+x^2}$;
27. $y' = -12 \cos^2 4x \sin 4x$;
28. $y' = 4(1 + \sin^2 x)^3 \sin 2x$;
29. $y' = 2 \cdot 10^{2x-3} \ln 10$;
30. $y' = \cos(e^{x^2+3x-2})e^{x^2+3x-2}(2x+3)$;
31. $y' = -\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$;
32. $y' = \frac{3}{2} \sin 2x(\cos x - 2)$;
33. $y' = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$;
34. $y' = e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$;
35. $y' = 4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}} \ln 4 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;
36. $y' = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}} \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}}$;
37. $y' = 2 \operatorname{tg}^2 2x \cdot (3 - 2 \sin^2 2x) - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;
38. $y' = -\frac{x \operatorname{arccos} x}{\sqrt{1-x^2}}$;
39. $y' = \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;
40. $y' = \frac{1}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$.

Задачі для самостійного розв'язання:

Знайти похідні функцій:

1. $y = \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7;$

2. $y = x \ln x - x;$

3. $y = (1 + x^2) \arctg x;$

4. $y = \frac{\arccos x}{1 - x^2};$

5. $y = (1 + \sqrt{1 + x^2})^5;$

6. $y = \ln(x^3 + 7x + 2);$

7. $y = \sin x e^{\cos x};$

8. $y = \arctg \frac{x+1}{x-1};$

16. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

9. $y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x};$

10. $y = \cos 2x \ln x;$

11. $y = \arcsin(n \sin x);$

12. $y = \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^8 3x;$

13. $y = \sin^2 x \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right);$

14. $y = \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$

15. $y = \ln \cos \arctg \frac{e^x - e^{-x}}{2};$

Відповіді:

1. $y' = 7x^2 + -5x + 6;$

2. $y' = \ln x;$

3. $y' = 1 + 2x \arctg x;$

4. $y' = \frac{2x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2};$

5. $y' = 5(1 + \sqrt{1+x^2})^4 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

6. $y' = \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x + 2};$

7. $y' = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x);$

8. $y' = -\frac{1}{1+x^2};$

9. $y' = \frac{2 \sin 2x}{\cos^2 2x};$

10. $y' = \frac{\cos 2x}{x} - 2 \sin 2x \ln x;$

11. $y' = \frac{n \cos x}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 x}};$

12. $y' = \sin^5 3x \cos^3 3x;$

13. $y' = \frac{\ln x - 2}{x^2} \sin \left(2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) \right);$

$$14. \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}};$$

$$16. \quad y' = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$15. \quad y' = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x};$$

Література:

[2], гл. 5, § 20–22, с. 172–188;

[3], гл. 5, с. 266–270;

[4], гл.4, § 1–3, с. 172–174, 176–181;

[5], розділ 4, с. 90–91;

[6], гл. 8, § 1, с. 299–301, 306–308.

Практичне заняття 2

ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ НЕЯВНО І ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ. ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА

2.1. Диференціювання неявних функцій

Знайти y'_x :

1. $x^3y^2 + 5xy + 4 = 0$;

6. $y = \cos(x + y)$;

2. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

7. $2y \ln y = x$;

3. $e^y \cdot \sin x = e^{-x} \cdot \cos y$;

8. $x^y = y^x$;

4. $y^3 - 3y - 2ax = 0$;

9. $\cos(xy) = x$;

5. $x^4 + y^4 = x^2y^2$;

10. $y = 1 + xe^y$.

2.2. Логарифмічне диференціювання

Знайти похідні функцій:

11. $y = (x^3 + 5x^2)^{\frac{1}{x}}$;

16. $y = x^3 e^{x^2} \cdot \sin 2x$;

12. $y = x^{x^2}$;

17. $y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$;

13. $y = (\sin x)^{\cos x}$;

18. $y = x^{\sin x}$;

14. $y = \frac{x^3(x^2 + 1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$;

19. $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

15. $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

20. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

2.3. Похідна параметрично заданої функції

Знайти y'_x :

21.
$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{1-t}; \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2} t^2; \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t); \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4\left(\frac{t}{2}\right); \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Відповіді:

$$1. y' = -\frac{3x^2y^2 + 5y}{2x^3y + 5x};$$

$$2. y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

$$3. y' = -\frac{e^{-x} \cos y + e^y \cos x}{e^y \sin x + e^{-x} \sin y};$$

$$4. y' = \frac{2a}{3(1-y^2)};$$

$$5. y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2 - 2x^2}{2y^2 - x^2};$$

$$6. y' = -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)};$$

$$7. y' = \frac{1}{2(1 + \ln y)};$$

$$8. y' = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x};$$

$$9. y' = -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)};$$

$$10. y' = \frac{e^y}{2-y};$$

$$11. y' = (x^3 + 5x^2)^{\frac{1}{x}} \times \left(\frac{-1}{x^2} \ln(x^3 + 5x^2) + \frac{3x+10}{x^3 + 5x^2} \right);$$

$$12. y' = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1);$$

$$13. y' = (\sin x)^{\cos x} \times \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right);$$

$$14. y' = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \times \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right);$$

$$15. y' = \frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{-3(x-5)^4 \sqrt[3]{(x+1)^2}};$$

$$16. y' = x^2 e^{x^2} \sin 2x \times (3 + 2x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2x);$$

$$17. y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \left((\arcsin x)^2 - 1 \right)} \times \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}};$$

18. $y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right);$
19. $y' = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (2 + \ln x);$
20. $y' = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{3x(1-x^4)} \times$
 $\times \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}};$
21. $y'_x = \frac{t}{(1-t)^2};$
22. $y'_x = t + t^3;$
23. $y'_x = \operatorname{ctg} t;$
24. $y'_x = 2t;$
25. $y'_x = -\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right);$
26. $y'_x = 2(\cos t + \sin t).$

Задачі для самостійного розв'язання:

Знайти похідні функцій:

1. $y = x + \arctg y;$
2. $y^2 - 2xy + b^2 = 0;$
3. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x;$
4. $2^x + 2^y = 2^{x+y};$
5. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}};$
6. $y = (\ln x)^x;$
7. $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}};$
8. $y = \sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{\sin^2 x}};$
9. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = \arctg e^{\frac{t}{2}}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$

Відповіді:

1. $y' = \frac{1+y^2}{y^2};$
2. $y' = \frac{y}{y-x};$
3. $y' = \frac{3a^2 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x};$
4. $y' = 2^{x-y} \frac{2^y - 1}{1 - 2^x};$
5. $y' = 2^{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \times$
 $\times \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right);$
6. $y' = (\ln x)^x \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x \right);$

$$7. \quad y' = \frac{57x^2 - 302x + 361}{20(x-2)(x-3)} \times \\ \times \frac{(x+1)^2 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}};$$

$$8. \quad y' = \sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{\sin^2 x}} \times \\ \times \left(\frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{3x} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x \right);$$

$$9. \quad y'_x = -\operatorname{tg} t;$$

$$10. \quad y'_x = e^{\frac{t}{2}} \sqrt{1+e^t}.$$

Література:

[2], гл. 5, § 23–25, с. 188–194;

[3], гл. 5, с. 270–271, 273–274;

[4], гл.4, § 4–6, с. 182–185;

[5], розділ 4, с. 91–93;

[6], гл. 8, § 1, с. 301–302, 303, 308–309, 311–312.

Практичне заняття 3

РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ. ЗАДАЧІ НА ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

3.1 Аудиторна самостійна робота (техніка диференціювання)

Варіант 1

Знайти похідні функцій:

1. $y = x^5 + 2^3$;
2. $y = \sqrt[5]{x^4}$;
3. $y = \cos 3 + 4^x + 3x^3$;
4. $y = \arcsin^2 x$;
5. $y = \arctg(x^3)$;
6. $y = \ln x \cdot (x+3)$;
7. $y = \frac{x^2}{\sin x}$;
8. $x \operatorname{tg} y + y^3 = \cos x$;
9. $y = 9(\sin x)^{x+1}$;
10. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}, \\ y(t) = \ln t. \end{cases}$

Варіант 2

Знайти похідні функцій:

1. $y = x^3 + 4^3$;
2. $y = \sqrt[3]{x^6}$;
3. $y = \arcsin x + \arctg 1 + 3$;
4. $y = \ln(\operatorname{tg} x)$;
5. $y = \sin^3(3x+2)$;
6. $y = (x^2+1)(x^3+4)$;
7. $y = \frac{x^2+x}{e^x}$;
8. $y = (x+1)^{\sqrt{x}}$;
9. $y^2x + x^3 = \cos y$;
10. $\begin{cases} x(t) = \operatorname{ctg} t, \\ y(t) = t^2 + 3. \end{cases}$

3.2. Рівняння дотичної та нормалі, якщо функція задана явно

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих:

1. $y = \frac{x^2+1}{x^3-1}$ у точці, де $x_0 = -1$;
2. $y = e^{\sqrt{x-1}}$ у точці, де $y_0 = e$.

3.3. Рівняння дотичної та нормалі, якщо функція задана неявно

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих у заданих точках:

3. $x^2 - 2xy - y^3 + 2y - x + 1 = 0$, $M_0(1;1)$;

4. $x^4 + y^4 = x^2 y^2 + 5x + 4y$, $M_0(1; 2)$.

3.4. Рівняння дотичної та нормалі, якщо функція задана параметрично

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих:

5. $\begin{cases} x = 3^t \cos t, \\ y = 3^t \sin t \end{cases}$ у точці, де $t_0 = 0$; 6. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$ у точці, де $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

3.5. Задачі на геометричний зміст похідної

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 5$, яка перпендикулярна прямій $2x - 6y + 1 = 0$.

8. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x + \sqrt{x^3}$, яка паралельна прямій $y = x - 4$.

9. Під яким кутом перетинаються парабола $y = x^2$ і пряма $3x - y - 2 = 0$?

10. Під яким кутом перетинаються параболи $y = x^2$ і $y = x^3$?

Відповіді:

1. $x + 2y + 3 = 0$, $2x - y + 1 = 0$; 6. $x + y - 1 = 0$, $2x - 2y + 1 = 0$;

2. $ex - 4y = 0$, $\frac{4}{e}x + y - \frac{16 + e^2}{e} = 0$; 7. $3x + y + 4 = 0$;

3. $x + 3y - 4 = 0$, $3x - y - 2 = 0$; 8. $x - y = 0$;

4. $9x - 24y + 39 = 0$, 9. $\arctg \frac{1}{7}$, $\arctg \frac{1}{13}$;

$24x + 9y - 42 = 0$; 10. $\arctg \frac{1}{7}$, 0 .

5. $\frac{x}{\ln 3} - y - \frac{1}{\ln 3} = 0$,

$\ln 3 \cdot x + y - \ln 3 = 0$;

Задачі для самостійного розв'язання:

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих:

1. $y = \arcsin \frac{x-2}{2}$ у точці, де

$$x_0 = 0;$$

2. $x^3 + y^3 - 2x^2y^2 + 3y - 1 = 0$
у точці $M_0(1;0)$;

3. $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ у точці

$$M_0(1;6);$$

4. $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}$ у точці

$$M_0 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

5. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 4x + 1$, яка перпендикулярна прямій $3y + x + 5 = 0$.

6. Під яким кутом перетинаються графіки функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = \sqrt{x}$?

Відповіді:

1. $x - \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} = 0,$

$$\sqrt{3}x + y + \frac{\pi}{6} = 0;$$

2. $x + y - 1 = 0, x - y - 1 = 0;$

3. $6x - y = 0, 6y + x - 37 = 0;$

4. $x + y - 1 = 0, x - y = 0;$

5. $12x - 4y - 45 = 0;$

6. $\arctg 3.$

Література:

[2], гл. 5, § 26, с. 195–201;

[3], гл. 5, с. 272;

[4], гл.4, § 1, с. 174–175;

[5], розділ 4, с. 93–94;

[6], гл. 8, § 2, с. 302, 330–333.

Практичне заняття 4

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ.

НАБЛИЖЕННІ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛУ.

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.

ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

4.1. Диференціал функції

Знайти диференціал функції:

1. $\frac{1}{4x^4}$;

3. $2 \frac{1}{\cos x}$;

2. $\operatorname{tg}^2 x$;

4. $0,25\sqrt{x}$.

4.2. Застосування диференціала до наближених обчислень

Обчислити наближено:

5. $\sqrt[3]{26,19}$;

7. $\ln 1,01$;

6. $\sin 29^\circ$;

8. $\operatorname{arctg} 1,02$.

4.3. Похідні та диференціали вищих порядків

9. Знайти $y''(x)$, якщо $y = x^2 - 3x^2 + 2$.

10. $y = e^{2x-1}$, $y''(0) = ?$

11. $y = (x+10)^6$. Знайти $y'''(2)$.

12. $y = \frac{1}{1-x}$. $y^{\vee}(x) = ?$

13. $y = e^{-x}$. Знайти похідну n -го порядку.

14. $y = \sin x$, $y^{(n)} = ?$

15. Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ від функції, заданої неявно рівнянням $x^2 + y^2 = 1$.

16. Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$

Знайти диференціал другого порядку для функції:

17. $y = \sqrt[3]{x^2}$;

18. $y = 4^{-x^2}$.

Знайти $d^3 y$:

19. $y = x^m$;

20. $y = \sin^2 x$.

4.4. Правило Лопітала

Знайти границі:

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$;

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$;

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

28. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right)$;

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;

29. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$;

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

30. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$;

25. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$;

31. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x})$;

32. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Відповіді:

1. $-\frac{4dx}{x^5}$;

5. 2,97;

2. $\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$;

6. 0,4848;

3. $-2^{\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$;

7. 0,01;

8. 0,795;

4. $\frac{0,125}{\sqrt{x}} dx$;

9. 2;

10. $\frac{4}{e}$;

11. $120 \cdot 12^3 = 207306$;

- | | | | |
|-----|---|-----|----------------------|
| 12. | $\frac{5!}{(1-x)^6}$; | 21. | 1; |
| 13. | $(-1)^n e^{-x}$; | 22. | $\frac{1}{3}$; |
| 14. | $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; | 23. | -2; |
| 15. | $-\frac{1}{y^3}$; | 24. | 2; |
| 16. | $9t^3+2t$; | 25. | 1; |
| 17. | $-\frac{2dx^2}{9x^3\sqrt{x}}$; | 26. | 0; |
| 18. | $4^{-x^2} \cdot 2\ln 4(2x^2 \ln 4 - 1)dx^2$; | 27. | 0; |
| 19. | $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$; | 28. | ∞ ; |
| 20. | $-4\sin 2x dx^3$; | 29. | 1; |
| | | 30. | 1; |
| | | 31. | $e^{-\frac{1}{2}}$; |
| | | 32. | e^2 . |

Задачі для самостійного розв'язання:

Знайти диференціал функції:

- | | | | |
|----|--|----|----------------------------------|
| 1. | $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x}$; | 2. | $y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}$. |
| 3. | Знайти диференціал другого порядку функції $y = \operatorname{tg} x$. | | |
| 4. | Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^x \ln x$. | | |
| 5. | Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ від функції, заданої неявно рівнянням $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. | | |
| 6. | Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$ | | |

Обчислити наближено:

- | | | | |
|----|-----------------|----|-----------------------|
| 7. | $\sqrt{4,02}$; | 8. | $\cos 46^\circ 20'$. |
|----|-----------------|----|-----------------------|

Знайти границі:

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$;

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$;

10. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \cos 5x}{x^2}$;

13. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{2}{1+\ln x}}$;

11. $\lim_{x \rightarrow +0} (x - \sin x) \ln x$;

14. $\lim_{x \rightarrow +0} (5^x - 1)^{\sin x}$.

Відповіді:

1. $\frac{dx}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}}$;

7. 2,005 ;

8. 0,703 ;

2. $-\frac{2 \sin x dx}{3\sqrt[3]{2 + \cos x}}$;

9. $-\frac{1}{2}$;

3. $\frac{2 \sin x dx^2}{\cos^3 x}$;

10. $-\frac{25}{2}$;

4. $e^x \left(\ln x + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx^3$;

11. 0;

12. 0 ;

13. e^2 ;

5. $-\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}$;

14. 1.

6. $(t + 3t^2)(1 + t^2)$;

Література:

[2], гл. 5, § 28–30, § 32, с. 205–215, 220–229;

[3], гл. 5, с. 272–276, 277–283;

[4], гл.4, § 7–8, § 10, с. 186–191, 197–201;

[5], розділ 4, с. 92–93;

[6], гл. 8, § 1, с. 302–305, 309–312.

Практичне заняття 5

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА МОНОТОННІСТЬ ТА ЕКСТРЕМУМ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

5.1. Монотонність та екстремуми функцій

Дослідити функцію на монотонність та знайти екстремуми:

1. $y = x^2 + \frac{2}{x^3};$

5. $y = \frac{1}{x^2 + 3};$

2. $y = \frac{x}{x^2 - 4};$

6. $y = x^2 e^{-x^2};$

3. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9};$

7. $y = xe^{-x};$

8. $y = x^2 e^{-x};$

4. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$

9. $y = (x + 1)e^{2x}.$

5.2. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку:

10. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1; 4];$

14. $y = x \ln x, [1; 2];$

11. $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [0; 4];$

15. $y = x^3 e^{4x}, [-4; 0];$

12. $y = 3 - x - \frac{4}{(x + 2)^2}, [-1; 2];$

16. $y = \frac{3x}{x^3 + 1}, [0; 5];$

13. $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3];$

17. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}, [-0,5; 0].$

Відповіді:

1. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[5]{3}) \downarrow; x \in (\sqrt[5]{3}, +\infty) \uparrow; y_{\min} = y(\sqrt[5]{3}) = 4,04.$

2. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty) \downarrow; \text{екстремумів немає.}$

3. $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \downarrow$; $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \uparrow$; $y_{\min} = y(0) = 0$;
 $y_{\max} = y(\pm\sqrt{3}) = 1$.
4. $x \in (0, 1) \cup (1, 2) \downarrow$; $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \uparrow$; $y_{\min} = y(2) = 2$;
 $y_{\max} = y(0) = -2$.
5. $x \in (-\infty, 0) \downarrow$; $x \in (0, +\infty) \uparrow$; $y_{\min} = y(0) = \frac{1}{3}$.
6. $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \downarrow$; $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \uparrow$; $y_{\min} = y(0) = 0$;
 $y_{\max} = y(\pm 1) = e^{-1}$.
7. $x \in (1, +\infty) \downarrow$; $x \in (-\infty, 1) \uparrow$; $y_{\max} = y(1) = e^{-1}$.
8. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \downarrow$; $x \in (0, 2) \uparrow$; $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(2) = 4e^{-2}$.
9. $x \in (-\infty, -2) \downarrow$; $x \in (-2, +\infty) \uparrow$; $y_{\min} = y(-2) = -e^{-4}$.
10. $y_{\text{наим}} = y(2) = -4$; $y_{\text{наиб}} = y(4) = 4$.
11. $y_{\text{наим}} = y(4) = 1$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 5$.
12. $y_{\text{наим}} = y(-1) = 0$; $y_{\text{наиб}} = y(2) = 0,75$.
13. $y_{\text{наим}} = y(1) = 0$; $y_{\text{наиб}} = y(3) = \ln 5$.
14. $y_{\text{наим}} = y(1) = 0$; $y_{\text{наиб}} = y(2) = \ln 4$.
15. $y_{\text{наим}} = y(-4) = -64e^{-16}$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 0$.
16. $y_{\text{наим}} = y(0) = 0$; $y_{\text{наиб}} = y(0,8) = 1,6$.
17. $y_{\text{наим}} = y(0) = -1$; $y_{\text{наиб}} = y(-0,5) = -\frac{8}{9}$.

Задачі для самостійного розв'язання:

Дослідити функцію на монотонність та знайти екстремуми:

1. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;

3. $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$;

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$;

4. $y = (x^2 - 1)^3$.

Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному від-
різку:

5. $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$, $[-1, 1]$;

8. $y = \sqrt{x - x^3}$, $[-2, 2]$;

6. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, $[1, 2]$;

9. $y = \frac{x}{9 - x^2}$, $[-2, 2]$;

7. $y = e^{4x - x^2}$, $[1, 3]$;

10. $y = \frac{x^3 - 8}{x^4}$, $[-3, -1]$.

Відповіді:

1. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \downarrow$; $x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \uparrow$; $y_{\min} = y(-1) = -2$;
 $y_{\max} = y(1) = 2$.

2. $x \in (0, 1) \downarrow$; $x \in (1, \infty) \uparrow$; $y_{\min} = y(1) = \frac{1}{2}$.

3. $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \downarrow$; $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \uparrow$; $y_{\max} = y(0) = -1$.

4. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \downarrow$; $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \uparrow$; $y_{\min} = y(-1) = 0$;
 $y_{\max} = y(0) = -1$.

5. $y_{\text{найм}} = y(-1) = -\frac{1}{3}$; $y_{\text{найб}} = y(1) = 1$.

6. $y_{\text{найм}} = y(2) = 3$; $y_{\text{найб}} = y(1) = 5$.

7. $y_{\text{найм}} = y(1) = y(3) = e^3$; $y_{\text{найб}} = y(2) = e^4$.

8. $y_{\text{найм}} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,6$; $y_{\text{найб}} = y(-2) = \sqrt{6}$.

9. $y_{\text{найм}} = y(-2) = -\frac{2}{5}$; $y_{\text{найб}} = y(2) = \frac{2}{5}$.

10. $y_{\text{найм}} = y(-1) = -9$; $y_{\text{найб}} = y(-3) = -0,43$.

Література:

[2], гл. 5, § 34, с. 240–252;

[5], розділ 4, с. 95–96;

[6], гл. 8, § 2, с. 358–359, 361–362.

Практичне заняття 6
ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ
НА ОПУКЛІСТЬ ТА УГНУТІСТЬ.
АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

6.1. Інтервали опуклості та угнутості графіка функції

Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції:

- | | |
|---|---------------------------------|
| 1. $y = x^5 + 5x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 3x + 1;$ | 3. $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5};$ |
| 2. $y = e^{-x^2} + 2x;$ | 4. $y = \frac{1}{x^2 - 4}.$ |

6.2. Точки перегину

Знайти точки перегину графіка функції:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 5. $y = x^2 \ln x;$ | 7. $y = 2x^3 + 2x^2 - 3;$ |
| 6. $y = 5 - \sqrt[3]{x-2};$ | 8. $y = x^4 - 2x^2 + 3.$ |

6.3. Асимптоти графіка функції

Знайти рівняння асимптот графіка функції:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| 9. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4};$ | 11. $y = x^3 e^{-\frac{1}{x}};$ |
| 10. $y = x \arctg x;$ | 12. $y = \frac{\ln(1+x)}{x}.$ |

Відповіді:

1. Інтервал опуклості $(-\infty, -2) \cup (-1, 0);$ інтервал угнутості $(-2, -1) \cup (0, +\infty).$
2. Інтервал угнутості $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right);$ інтервал опуклості $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

3. Інтервал опуклості $(0, \infty)$; інтервал угнутості $(-\infty, 0)$.
4. Інтервал угнутості $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; інтервал опуклості $(-2, 2)$.
5. Точка перегику $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3} \right)$.
6. Точка перегику $(2, 5)$.
7. Точка перегику $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{77}{27} \right)$.
8. Точки перегику $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9} \right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9} \right)$.
9. $x = 2; x = -2; y = x$.
10. $y = \frac{\pi}{2}x - 1; y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.
11. $x = 0$.
12. $x = -1; y = 0$.

Задачі для самостійного розв'язання:

Знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегику графіка функції:

1. $y = 2\sqrt{(x-3)^5} + 6\sqrt{(x-3)^3}$;
2. $y = (x+1)e^{2x}$;
3. $y = (x-1)e^{3x+1}$;
4. $y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x$.

Знайти рівняння асимптот графіка функції:

5. $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$;
6. $y = \ln x$;
7. $y = xe^x$;
8. $y = x \operatorname{arccot} x$.

Відповіді:

1. Інтервал угнутості $(-\infty, +\infty)$; точок перегику немає.

2. Інтервал опуклості $(-\infty, -2)$; інтервал угнутості $(-2, +\infty)$; точка перегину $(-2, -e^{-4})$.
3. Інтервал опуклості $(-\infty, \frac{1}{3})$; інтервал угнутості $(\frac{1}{3}, +\infty)$; точка перегину $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}e^2)$.
4. Інтервал опуклості $(1, 3)$; інтервал угнутості $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$; точки перегину $(1, \frac{11}{2}), (3, -\frac{225}{2})$.
5. $x = -1; y = x + 2$.
6. $x = 0$.
7. $y = 0$.
8. $y = 1; y = \pi x + 1$.

Література:

[2], гл. 5, § 34, с. 250–257;

[5], гл.5, с. 90–99;

[6], гл. 8, § 2, с. 359–361.

Практичне заняття 7

ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ І ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

7.1. Аудиторна самостійна робота

(дослідження поведінки функції)

Варіант 1

1. Розрахувати за правилом Лопітала: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}$.

2. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x - 2 \ln x$.

3. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x \cos x + 3$ в заданій точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$.

Варіант 2

1. Розрахувати за правилом Лопітала: $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x)$.

2. Знайти інтервали опуклості (угнутості) і точки перегину графіка функції $y = (2x+3)e^{-4x}$.

3. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100$ на відрізку $x \in [-4, 5]$.

7.2. Дослідження функцій та побутова графіків

Зробити повне дослідження функції та побудувати її графік:

1. $y = x + \frac{1}{x-1}$;

3. $y = \frac{x^2-1}{x^4}$.

2. $y = \ln(9-x^2)$;

Відповіді:

1. $D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; асимптоти $x = 1, y = x$; $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \uparrow$,
 $x \in (0, 1) \cup (1, 2) \downarrow$; $y_{\max} = y(0) = -1$; $y_{\min} = y(2) = 3$; $x \in (-\infty, 1) - \cap$;
 $x \in (1, +\infty) - \cup$.
2. $D(y) = (-3, 3)$; парна; асимптоти $x = -3, x = 3$;
 $x \in (-3, 0) \uparrow, x \in (0, 3) \downarrow$; $y_{\max} = y(0) = \ln 9$; $x \in (-3, 3) - \cap$.
3. $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; парна; асимптоти $y = 0, x = 0$;
 $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \uparrow, x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \downarrow$; $y_{\max} = y(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$;
 $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{10}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{10}{3}}, +\infty\right) - \cup, x \in \left(-\sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{10}{3}}\right) - \cap$; точки
перегину $y\left(\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 0, 21$.

Задачі для самостійного розв'язання:

Зробити повне дослідження функції та побудувати її графік:

1. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;
2. $y = \frac{x}{e^x}$.

Відповіді:

1. $D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$; асимптоти $x = -1, y = \frac{1}{2}x - 1$;
 $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \uparrow, x \in (-3, -1) \downarrow$; $y_{\max} = y(-3) = -3\frac{3}{8}$;
 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) - \cap$; $x \in (0, +\infty) - \cup$; точка перегину $y(0) = 0$.

2. $D(y) = (-\infty, +\infty)$; асимптота $y = 0$; $x \in (-\infty, 1) \uparrow$, $x \in (1, +\infty) \downarrow$;
 $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e}$; $x \in (-\infty, 2) - \cap$, $x \in (2, +\infty) - \cup$; точка перегину
 $y(2) = \frac{2}{e^2}$.

Література:

- [2], гл. 5, § 34, с. 258–268;
 [5], розділ 4, с. 96–99;
 [6], гл. 8, § 2, с. 358–362, 377–387.

Контрольна робота

(прикладі варіантів контрольних робіт)

Варіант 1

1. Знайти y' :

а) $y = \ln^2 \left(x^4 - \frac{\sin^3 x^5}{\operatorname{ctg} 2x} \right)$;

б) $y = (\operatorname{tg}(2x+1))^{\frac{3}{x}}$;

в) $y^2 = x \cdot \sin y$.

2. Знайти y''_{xx} функції, що задана параметрично: $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

3. Обчислити наближено $\sqrt[3]{27,01}$.

4. Скласти рівняння нормалі до кривої $y = x - \sqrt{x}$, яка перпендикулярна прямій $4y - 3x + 5 = 0$.

5. Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3}{x^{4+\ln x}}$.

6. Знайти інтервали монотонності і екстремуми функції $y = x^2 + \frac{2}{x}$.

Варіант 2

1. Знайти y' :

а) $y = \sqrt{\arctg x^3} - (2 - 3x) \cdot 4^{5\cos^2 3x^2}$; в) $x \cdot \ln y + \frac{y^2}{x} = -4$.

б) $y = (\sin(-x + 1))^{1/x^2}$;

2. Знайти y''_{xx} функції, що задана параметрично: $\begin{cases} x = 5t^4 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3. Обчислити наближено $\ln 0,9$.

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 4}$ у точці

з абсцисою $x_0 = 3$.

5. Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x}$.

6. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ на

відрізка $[1; 2]$.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Означення похідної

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

2. Таблиця похідних

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1},$	$n \in R, x > 0;$
$(a^x)' = a^x \ln a,$	$0 < a \neq 1, x \in R;$
$(e^x)' = e^x,$	$x \in R;$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$	$0 < a \neq 1, x > 0;$
$(\ln x)' = \frac{1}{x},$	$x > 0;$
$(\sin x)' = \cos x,$	$x \in R;$
$(\cos x)' = -\sin x,$	$x \in R;$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x \neq \pi n, n \in Z;$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$ x < 1;$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$ x < 1;$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R;$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x \in R;$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$	$x \in R;$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$	$x \in R;$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

3. Основні правила диференціювання

Якщо $U = U(x)$ та $V = V(x)$ – функції, що мають похідні, а C – стала, то:

$$(C)' = 0;$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U';$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{V}\right)' = \frac{-C \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$(f(U(x)))'_x = f'_U \cdot U'_x.$$

4. Формула для знаходження наближеного значення функції

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x.$$

5. Деякі тригонометричні формули

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha;$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha.$$

6. Квадратні рівняння

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходять за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Теорема Вієта:
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \end{cases}$$
 де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена.

7. Формули скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов. – 20-е изд. / Г.Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.
2. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. : в 2 т. Т. 1 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 408 с.
3. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Ж.Б. Кашуба, Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 532 с.
4. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 1 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 324 с.
5. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с.
6. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 1: Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХТУРЕ, 2002. – 552 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Практичне заняття 1. Техніка диференціювання. Похідна складної функції	4
Практичне заняття 2. Диференціювання неявно і параметрично заданих функцій. Логарифмічна похідна	9
Практичне заняття 3. Рівняння дотичної та нормалі. Задачі на геометричний зміст похідної	13
Практичне заняття 4. Диференціал функції. Наближенні обчислення за допомогою диференціалу. Похідні та диференціали вищих порядків. Правило Лопіталя.....	16
Практичне заняття 5. Дослідження функції на монотонність та екстремум. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.....	20
Практичне заняття 6. Дослідження графіка функції на опуклість та угнутість. Асимптоти графіка функції.....	24
Практичне заняття 7. Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка.....	27
Контрольна робота. Приклади варіантів контрольних робіт.....	29
Довідковий матеріал	31
Список літератури	34

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ
практичних занять з вищої математики за темою
«ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

для студентів усіх спеціальностей

Укладачі: ПРИЩЕНКО Ольга Петрівна,
ЧОРНА Олена Сергіївна

Відповідальний за випуск проф. Геворкян Ю. Л.

Роботу до видання рекомендував проф. Курпа Л. В.
В авторській редакції

План 2018 р., поз. 20

Підп. до друку 15.02.2018 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso – друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 2,0. Наклад 50 прим.
Зам. № 72. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХП». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Друкарня