МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю. І. Першина, О. П. Пріщенко,

Т. Т. Черногор

ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Навчально-методичний посібник
з курсу вищої математики

для студентів та викладачів технічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 28.06.2023

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

УДК 517.1:517.3(075)
П 27

Рецензенти:
О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Української інженерно-педагогічної академії

Г. Я. Тулученко, д-р техн. наук, проф. Національного технічного
університету «Харківський політехнічний інститут»

Першина Ю. І.
П 27 Границі та неперервність функцій : навч.-метод. посіб. / Першина Ю. І., Пріщенко О. П., Черногор Т. Т. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – 148 с.

У навчально-методичному посібнику викладається техніка обчислення границь та детально пояснюються розв'язання типових завдань. Містить 30 варіантів розрахунково-графічних завдань і тестових завдань для контролю знань.

Призначено для студентів та викладачів технічних спеціальностей.

Табл. 225. Іл. 29. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 517.1:517.3(075)

ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичний посібник призначений для студентів технічних спеціальностей, які вивчають тему «Границі та неперервність функцій». Складено на основі досвіду авторів читання лекцій та проведення практичних занять.

Автори вважають за доцільне зібрати воєдино весь напрацьований матеріал з цієї теми, тому до цієї роботи увійшли раніше видані тести та розрахунково-графічні завдання на тему «Границі та неперервність».

За допомогою навчально-методичного посібника студенти краще зможуть засвоїти визначення границі, техніку обчислення границь, поняття невизначеності та методи розкриття невизначеностей різних видів.

Робота складається з одинадцяти розділів. У першому розділі надані короткі відомості з теорії границь. В розділах з другого по восьмий викладається техніка обчислення границь та детально пояснюються методи розв’язання типових завдань, які представлені в дев’ятому розділі «Розрахунково-графічні завдання». Для того, щоб краще орієнтуватися в матеріалі при виконанні завдань РГЗ, поряд з кожним заголовком вказаний у дужках номер цього завдання. Десятий розділ – це тести для оперативного контролю викладачами знань студентів. РГЗ і тести розроблені на 30 варіантів. Одинадцятий розділ – довідковий матеріал. Наприкінці посібника надано відповіді до розрахунково-графічних завдань.

Слід зазначити графічне оформлення даної розробки рисунками, які допоможуть при розв’язанні задач.

Зміст навчального матеріалу відповідає робочій програмі з вищої математики для студентів технічних спеціальностей.

Список рекомендованої літератури складається як з традиційних класичних підручників, так і навчально-методичних видань кафедри.

Короткий довідник, який містить основні теореми про границі, методи розкриття невизначеностей різних видів, таблиці еквівалентних величин та класифікацію точок розриву, наведений наприкінці, стане у пригоді студентам при вивчені даної теми.

Головне призначення навчально-методичного посібника – допомогти студентам в вивченні даних розділів курсу вищої математики в умовах скороченої кількості аудиторних занять. Посібник може стати в нагоді також студентам заочного відділення та студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом та для молодих викладачів без достатнього досвіду роботи.

Автори

1. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

1.1 Основні означення

Множина точок *x*, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, називається δ*-околом точки* x_0, тобто δ-окіл точки x_0 є інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, який можна записати також у вигляді:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \ .$$

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0, крім, може бути, самої точки x_0. Тоді вводиться поняття границі функції в точці x_0.

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0, якщо для будь-якого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для кожного значення *x* із δ-околу точки x_0 виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon \ .$$

Інакше кажучи, число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Символічно це можна записати $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрично це означає, що для всіх значень x, що розташовані від точки x_0 не далі, ніж на δ, точки M графіка функції належать полосі 2ε, що обмежена прямими $y = A \pm \varepsilon$.

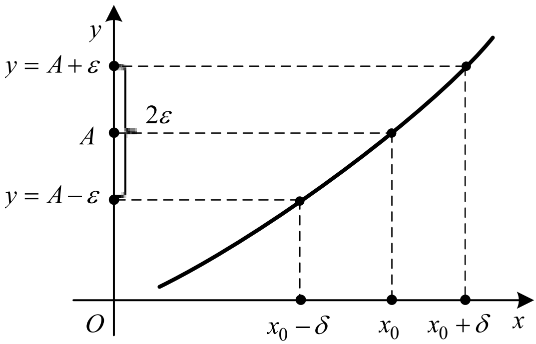


Рисунок 1

Теорема. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *то вона єдина.*

Введемо поняття односторонніх границь, які будують необхідні в подальшому.

Якщо $x\to x_0$ та $x<x_0$, то говорять, що x наближається до x_0 зліва, та позначають $x\to x_0-0$.

Аналогічно, якщо $x\to x_0$ та при цьому $x>x_0$, то говорять, що x наближається до x_0 справа, та позначають $x\to x_0+0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – *лівостороння границя*, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – *правостороння границя*.

Поряд з вивченням поведінки функції в кінцевій точці вивчають поведінку функції на нескінченності.

Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, якщо для $\forall\varepsilon>0$, $\exists M=M(\varepsilon)>0$, $\forall x: x>M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ або коротко це можна записати так:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, якщо для $\forall\varepsilon>0$ $\exists M=M(\varepsilon)<0$, $\forall x: x<N \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ або коротко:

$$\lim_{x\to x_0-\infty} f(x)=A.$$

Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x\to\infty$ (по абсолютній величині), якщо $\forall\varepsilon>0$, $\exists M=M(\varepsilon)>0$, $\forall x:|x|>M \quad \Rightarrow$ $|f(x)-A|<\varepsilon$, тобто коротко буде так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

1.2 Нескінченно малі та нескінченно великі величини, їх властивості

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою величиною (НМВ)* при $x\to x_0$, якщо $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\forall x:|x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x)|<\varepsilon$ або коротко:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x)=0.$$

Теорема (про зображення функції, що має границю). *Якщо*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{, то } f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ *– нескінченно мала величина при* $x \to x_0$.

Теорема (обернена). *Якщо при* $x \to x_0$ *функція* $f(x) = A + \alpha(x)$, *де* $\alpha(x)$ *– НМВ, то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною (НВВ)* при $x \to x_0$, якщо

$$\forall M > 0,\ \exists \delta = \delta(M),\ \forall x : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > M,$$

тобто коротко це записується так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

(враховуючи знак, вибирають відповідний варіант).

Існує зв’язок між НММ та НВВ.

Теорема. *Якщо* $y = f(x)$ *– НВВ при* $x \to x_0$, *то функція*

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$$

є НМВ при $x \to x_0$ *(обернене твердження вірне).*

Властивості НМВ

Теорема. *Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*

Тобто, якщо $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$ – НМВ при $x \to x_0$, то $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)$ – НМВ при $x \to x_0$.

Теорема. *Добуток нескінченно малої величини на обмежену є величина нескінченно мала, тобто, якщо* $f(x)$ *обмежена в деякому околі точки* x_0, $\alpha(x)$ *– НМВ при* $x \to x_0$, *тоді* $\alpha(x) \cdot f(x)$ *– НМВ при* $x \to x_0$, *або коротко* $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot f(x)) = 0$.

Наслідок. Добуток НМВ на сталу (const) є НМВ, тобто, якщо $\alpha(x)$ – НМВ при $x \to x_0$, а $C = \text{const}$, то $C \cdot \alpha(x)$ – НМВ при $x \to x_0$, або коротко:

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot \alpha(x) = 0 .$$

Наслідок. Добуток скінченного числа нескінченно малих є величина нескінченно мала, тобто, якщо $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$ – НМВ при $x \to x_0$, то $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) \cdot ... \cdot \alpha_n(x)$ – також нескінченно мала, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \left(\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)\right) = 0 .$$

Теорема. *Частка від ділення нескінченно малої на обмежену є величина нескінченно мала, тобто якщо* $\alpha(x)$ *– НМВ при* $x \to x_0$, *а* $f(x)$ *– обмежена в деякому околі точки* x_0, то $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ *є НМВ, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0 .$$

1.3 Основні теореми про границі

Теорема. *Нехай* $f(x) \equiv C$, *де* C – const, *тоді*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} C = C .$$

Теорема. *Нехай* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} U(x) = A$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = B$. *Тоді*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(U(x) \pm V(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = \pm AB$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(U(x) \cdot V(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = AB$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{U(x)}{V(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} U(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} V(x)} = \dfrac{A}{B}$, *якщо* $B \neq 0$.

Теорема (про граничний перехід в нерівностях). Нехай $\exists \lim\limits_{x\to x_0} U(x)$ та $\exists \lim\limits_{x\to x_0} V(x)$. *Тоді:*

а) *якщо* $U(x)\ge 0$ *при* $x\to x_0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} U(x)\ge 0$;

б) *якщо* $U(x)\ge V(x)$ *при* $x\to x_0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} U(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} V(x)$.

Теорема. *Якщо* $U(x)\le f(x)\le V(x)$ *та* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} U(x)=A$, *і* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=A$, *тоді* $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=A$.

Необхідно також підкреслити ознаки існування границі:
– монотонно зростаюча та обмежена зверху функція має границю;
– монотонно спадна та обмежена знизу функція має границю.

1.4 Порівняння нескінченно малих величин

Для порівняння НМВ необхідно спочатку обчислити границю їх відношення, а вже потім з'ясувати, з яким випадком довелося зіштовхнутися (про це детально далі).

А от випадок, коли $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – НМВ при $x\to x_0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ дає змогу стверджувати, що НМВ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні.

Позначається так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, якщо $x\to x_0$.

Теорема. *Якщо* $\alpha(x)$ *та* $\beta(x)$ – НМВ *при* $x\to x_0$ *та* $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$, $\beta(x)\sim\beta^*(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

Теорема. *Різниця двох еквівалентних НМВ є величина нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж кожна з них.*

Тобто, якщо $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – НМВ при $x\to x_0$ та $\alpha(x)\sim\beta(x)$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0.$$

1.5 Неперервність функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену в точці x_0 та деякому її околі. Виберемо довільну точку з цього околу. Тоді прийнято говорити, що змінна x отримала приріст $\Delta x = |x - x_0|$, тобто $x = x_0 + \Delta x$, (немає значення $\Delta x < 0$ чи $\Delta x > 0$). При цьому нове значення функції буде

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

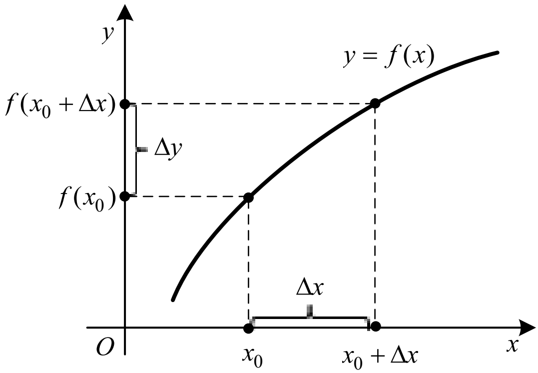


Рисунок 2

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 та

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

(тобто нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy).

Цю рівність можна переписати так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$$

або

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

або

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Приклад. Довести, що функція $y=\cos x$ неперервна на всій числовій осі, тобто $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Розв'язання.

Запишемо

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} =$$

$$= -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}\,.$$

Обчислимо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\right]=0\,,$$

оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$, тобто НМВ, а $\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ – обмежена.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \;\Rightarrow$ функція $y=\cos x$ неперервна на всій числовій осі.

Функція, неперервна в кожній точці інтервалу (a,b), називається *неперервною на* даному *інтервалі*.

Умову неперервності функції $y=f(x)$ в точці x_0 (1) можна записати в такому еквівалентному вигляді:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Тобто, функція називається *неперервною в точці* x_0, якщо лівостороння границя = правосторонній границі = значенню функції в цій точці.

Якщо хоча б одна з цих умов не виконана, тоді точка x_0 називається *точкою розриву*.

Розрізняють розриви I та II роду.

1.6 Властивості неперервних функцій

Теорема (про неперервність суми, добутку та частки). *Якщо функції* $U(x)$ *та* $V(x)$ *неперервні в точці* x_0, *тоді функції*

$$U(x)\pm V(x),\quad U(x)\cdot V(x),\quad \frac{U(x)}{V(x)}$$

також неперервні в точці x_0. *Слід відзначити, що останнє твердження має місце за умови, що* $V(x) \neq 0$.

Теорема (про неперервність складної функції). *Якщо функція* $U(x)$ *неперервна в точці* x_0, *а функція* $y = f(u)$ *неперервна в точці* $U_0 = U(x_0)$, *тоді складна функція* $y = f(U(x))$ *неперервна в точці* x_0.

Теорема (про неперервність оберненої функції). *Якщо монотонна функція* $y = f(x)$ *неперервна в точці* x_0, *тоді обернена функція* $x = \varphi(y)$ *неперервна в точці* $y_0 = f(x_0)$.

Властивості функцій, неперервних на інтервалі $[a, b]$

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на* $[a, b]$, *то на* $[a, b]$ *вона набуває свого найбільшого* M *та найменшого* m *значення.*

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на* $[a, b]$, *то вона обмежена на цьому інтервалі.*

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на* $[a, b]$ *та приймає на цьому інтервалі своє найбільше* M *та найменше* m *значення, то існує хоча б одна точка інтервалу, в якій функція приймає своє проміжне значення.*

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на інтервалі* $[a, b]$ *та* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *то існує хоча б одна точка* $C \in (a, b)$, *в якій* $f(C) = 0$.

При обчисленні границь функцій використовується правило граничного переходу під знаком неперервної функції, яке коротко можна записати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Відомо, що всі елементарні функції неперервні в своїх областях визначення.

Починати обчислення границі необхідно з першого обов’язкового кроку, а саме підставити граничне значення аргументу в умову.

Якщо в результаті ми отримаємо визначений вираз, то границя обчислена.

Наступні вирази вважаються визначеними:

$$C\cdot 0=0;\; C\cdot\infty=\infty;\; \frac{C}{0}=\infty;\; \frac{C}{\infty}=0;\; 0+0=0;\; 0\cdot 0=0;$$

$$\infty\cdot\infty=\infty;\; \frac{0}{\infty}=0, \text{ де } C=\text{const}.$$

До невизначених виразів (невизначеностей) відносяться наступні:

$$\frac{0}{0};\;\; \frac{\infty}{\infty};\;\; 0\cdot\infty;\;\; \infty-\infty;\;\; \infty^0;\;\; 0^0;\;\; 1^{\infty}.$$

Якщо в результаті першого кроку отримаємо невизначеність, то далі необхідно виконати тотожні перетворення, які дадуть змогу позбавитися невизначеності, а вже потім обчислити границю.

2. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА УМОВИ $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ (завдання 1а, 1б)

В такому випадку корисно врахувати, що при $x \to \infty$:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \sim a_0x^n;$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m \sim b_0x^m.$$

Маємо правило «*старших степенів*»:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ \infty, & n > m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Приклад 1. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 8x^2 + 127}{9x^3 + 5x^2 - 13x - 1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 8x^2 + 127}{9x^3 + 5x^2 - 13x - 1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{4\cancel{x^3}}{9\cancel{x^3}} = \frac{4}{9} \quad \begin{pmatrix} n = 3; \\ m = 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{9}$.

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 + 3x^3 - x^2 + 7}{3x^2 + 8x - 11}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 + 3x^3 - x^2 + 7}{3x^2 + 8x - 11} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^{\cancel{4}\,2}}{3\cancel{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3} = \infty$$

$$(n = 4, m = 2, n > m).$$

Відповідь: ∞.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-13x^3+x-9}{7x^9+13x^6-11}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-13x^3+x-9}{7x^9+13x^6-11}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x^5}}{7x^{\cancel{9}\,4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{7x^4}=0$$

$$\left(n=5,\, m=9,\, n<m\right).$$

Відповідь: 0.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3-x^3}{7x^2-5x+4}$.

Розв'язання.

Скористаємось в чисельнику формулою:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Тоді маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3-x^3}{7x^2-5x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}+6x^2+12x+8-\cancel{x^3}}{7x^2-5x+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+12x+8}{7x^2-5x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{6\cancel{x^2}}{7\cancel{x^2}}=\frac{6}{7}\ \begin{pmatrix}n=2,\\ m=2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\dfrac{7}{6}$.

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-x)^3-x^3-6x^2}{(2x+5)(3x-1)}$.

Розв'язання.

В чисельнику та знаменнику виконаємо алгебраїчні дії. Тоді:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2-x)^3-x^3-6x^2}{(2x+5)(3x-1)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{8-12x+\cancel{6x^2}-x^3-x^3-\cancel{6x^2}}{6x^2+13x-5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3-12x+8}{6x^2+13x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^{\cancel{3}}}{6\cancel{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{6}=-\infty$$

$$\left(n=3,\ m=2,\, n>m\right).$$

Відповідь: $-\infty$.

Приклад 6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(8x^3+36x^2+54x+27\right)(x+1)-8x^4}{\left(9x^2+12x+4\right)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{8x^4}+36x^3+54x^2+27x+8x^3+36x^2+54x+27-\cancel{8x^4}}{9x^3+12x^2+4x-36x^2-48x-16}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{44x^3+90x^2+81x+27}{9x^3-24x^2-44x-16}=\frac{44}{9}\ \begin{pmatrix}n=3,\\ m=3\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\dfrac{44}{9}$.

Приклад 7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\sqrt[3]{x^3-5x^2+19}}{\sqrt{9x^6+x^5-4x+2}-\sqrt[4]{x^3}}$.

Розв'язання.

У даному випадку в чисельнику та знаменнику дробу є функції вигляду $\varphi(x)=\sqrt[k]{P_n(x)}$, де $P_n(x)$ – многочлен $n-$ого степеня відносно x. В подібних випадках також працює правило «старших степенів».

Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3-5x^2+19}}{\sqrt{9x^6+x^5-4x+2}-\sqrt[4]{x^3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{array}{r}x\to\infty: x^3-5x^2+19\sim x^3,\\ 9x^6+x^5-4x+2\sim 9x^6\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{9x^6}-\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{3x^3-x^{3/4}}=\frac{1}{3}\ \begin{pmatrix}n=3,\\ m=3\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

Приклад 8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-\sqrt{x^3+5}}{\sqrt[4]{81x^6-7x^2+1}+2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^2+3}-\sqrt{x^3+5}}{\sqrt[4]{81x^6-7x^2+1}+2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{array}{c} x\to\infty: 2x^2+3\sim 2x^2, \\ x^3+5\sim x^3, \\ 81x^6-7x^2+1\sim 81x^6 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{81x^6}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2}\cdot x^{2/3}-x^{3/2}}{3x^{3/2}+2x}=-\frac{1}{3}\ \left(\begin{array}{l} n=3/2, \\ m=3/2 \end{array}\right).$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{3}$.

Приклад 9. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^4-x^3+7x-3}+\sqrt[5]{3x^4+x^2-9}}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^4-x^3+7x-3}+\sqrt[5]{3x^4+x^2-9}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{array}{l} x\to\infty: 9x^2+1\sim 9x^2, \\ x^2+5\sim x^2, \\ x^4-x^3+7x-3\sim x^4, \\ 3x^4+x^2-9\sim 3x^4 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[5]{3x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^{2/3}}{x+\sqrt[5]{3}\cdot x^{4/5}}=3\ \left(\begin{array}{l} n=1, \\ m=1 \end{array}\right).$$

Відповідь: 3.

Приклад 10. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^3+16x^2}}}{\sqrt{x^4-9x+13}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^3+16x^4}}}{\sqrt{x^4-9x+13}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{array}{l} x\to\infty: x^3+16x^4\sim 16x^4, \\ \sqrt{x^3+16x^4}\sim\sqrt{16x^4}=4x^2 \\ x^4-9x+13\sim x^4 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+4x^2}}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{7x^2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{7}\cdot\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{7}}{x}=0\ \left(\begin{array}{l} n=1, \\ m=2 \end{array}\right).$$

Відповідь: 0.

3. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ, ЗА УМОВИ $x \to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, ДЕ $P_n(x)$ ТА $Q_m(x)$ – МНОГОЧЛЕНИ ВІДПОВІДНО СТЕПЕНІ n ТА m ВІДНОСНО x (завдання 2)

Очевидно, що підставляючи граничне значення x_0 замість x, можемо отримати наступні ситуації:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{C_1}{C_2}=C$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\|\dfrac{0}{C}\right\|=0$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\|\dfrac{C}{0}\right\|=\infty$, де C_1, C_2, C – const;

г) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left|\dfrac{0}{0}\right|$ – маємо справу з невизначеністю.

Для усунення невизначеності необхідно виділити в чисельнику та знаменнику множник $(x-x_0)$, що наближається до 0 за умови $x \to x_0$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{(x-x_0)R_{n-1}(x)}{(x-x_0)S_{m-1}(x)}.$$

Невизначеність $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ може зникнути після скорочення дробу під знаком границі. Щоб виділити множник $(x-x_0)$, необхідно скористатися наступними відомостями з елементарної математики:

1) *квадратний тричлен* $P_2(x)=ax^2+bx+c$, у якого

$$D=b^2-4ac\ge 0,$$

завжди можна записати у вигляді добутку лінійних множників, а саме:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, що обчислюються за формулою:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

2) *наслідок теореми Безу*: якщо x_0 – корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(x_0)=0$, то $P_n(x)$ ділиться без залишку на вираз $x-x_0$:

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot R_{n-1}(x).$$

3) доцільно також згадати *формули скороченого множення*:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right);$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Приклад 11. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 7x - 5}{3x^2 - 10}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 7x - 5}{3x^2 - 10} = \left|\frac{9 + 21 - 15}{27 - 30}\right| = \frac{15}{-3} = -5.$$

У даному випадку відповідь отримуємо відразу, оскільки підстановка граничного значення $x = 3$ дає відношення двох чисел, при цьому знаменник не дорівнює 0.

Відповідь: -5.

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 7x - 2}{x^3 - 3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^3 - 3} = \left|\frac{16 - 14 - 2}{8 - 3} = \frac{0}{5}\right| = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 13. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + x - 9}{x^2 + x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + x} = \left|\frac{2 - 1 - 9}{1 - 1} = \frac{-8}{0}\right| = -\infty$$

Відповідь: $-\infty$.

Приклад 14. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{4x^2 + x - 5}$.

Розв'язання.

При підстановці граничного значення $x=1$ в умову прикладу, отримаємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$. Щоб позбавитись цієї невизначеності необхідно в чисельнику та знаменнику виділити множник $(x-1)$. Чисельник, використовуючи формули скороченого множення, можна записати у вигляді:

$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Для того, щоб знаменник розкласти на множники, знайдемо корені квадратного рівняння $4x^2+x-5=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 4\cdot(-5)}}{2\cdot 4}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{-1\pm 9}{8},$$

тоді

$$x_1=\frac{-1+9}{8}=1; \quad x_2=\frac{-1-9}{8}=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}.$$

Таким чином,

$$4x^2+x-5=4(x-1)\left(x+\frac{5}{4}\right)=(x-1)(4x+5).$$

Отже, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{4x^2+x-5}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(4x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{4x+5}=\frac{2}{9}.$$

Відповідь: $\frac{2}{9}$.

Приклад 15. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4}$.

Розв'язання.

Даний приклад аналогічний попередньому. Маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Розкладемо чисельник та знаменник на множники. Маємо:

$$3x^2+x-14=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 3(-14)}}{2\cdot 3}=\frac{-1\pm\sqrt{169}}{9}=\frac{-1\pm 13}{6},$$

$$x_1=\frac{-1+13}{6}=2, \quad x_2=\frac{-1-13}{6}=\frac{-14}{6}=\frac{7}{3}.$$

Тоді

$$3x^2+x-14=3(x-2)\left(x+\frac{7}{3}\right)=(x-2)(3x+7).$$

Вираз, що записаний в знаменнику, можна згорнути, використовуючи формулу скороченого множення, а саме: $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

Таким чином, маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(3x+7)}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+7}{x-2}=\left|\frac{3}{0}\right|=\infty.$$

Відповідь. ∞.

Приклад 16. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4x-12}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4x-12}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\left(x^2-2x+4\right)}{\cancel{(x+2)}(x-6)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x-6}=$$

$$=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}.$$

При цьому в чисельнику скористались формулою скороченого множення, а знаменник розклали на множники, попередньо обчисливши корені квадратного рівняння $x^2-4x-12=0$.

Відповідь: $-\frac{3}{2}$.

Приклад 17. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^3-x^2-1}$.

Розв'язання.

В цьому випадку необхідно позбутися невизначеності $\left|\frac{0}{0}\right|$, тобто в чисельнику та знаменнику виділити множник, що наближається до 0, а саме: $x-1$. З цією метою в чисельнику скористаємось формулою скороченого множення, в результаті чого маємо:

$$x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Знаменник по наслідку теореми Безу ділиться без залишку на $(x-1)$. Маємо:

$$\begin{array}{r|l}
-\;2x^3-x^2-1 & x-1 \\
\underline{2x^3-2x^2} & \overline{2x^2+x+1} \\
-\;x^2-1 & \\
\underline{x^2-x} & \\
-\;x-1 & \\
\underline{x-1} & \\
0\;. &
\end{array}$$

Тепер знаменник набуває наступного вигляду:

$$2x^3-x^2-1=(x-1)\left(2x^2+x+1\right).$$

Таким чином, маємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^3-x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(x^2+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{2x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2\cdot 2}{2+1+1}=\frac{4}{4}=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 18. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}=\left|\frac{-27+63-45+9}{-27+72+18}\right|=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Очевидно, що $x=-3$ є коренем многочленів, що записані в чисельнику та знаменнику. Тоді по наслідку теореми Безу ці многочлени діляться без залишку на вираз $\left(x-x_0\right)$, тобто на $x-(-3)=x+3$. Виконаємо ділення:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-\,x^3 & +7x^2 & +15x & +9 & x+3\\
x^3 & +3x^2 & & & \overline{x^2+4x+3}\\
\cline{1-4}
 & -\,4x^2 & +15x & +9 & \\
 & 4x^2 & +12x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\,3x & +9 & \\
 & & 3x & +9 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0\ , &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
-\,x^3 & +8x^2 & +21x & +18 & x+3\\
x^3 & +3x^2 & & & \overline{x^2+5x+6}\\
\cline{1-4}
 & -\,5x^2 & +21x & +18 & \\
 & 5x^2 & +15x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\,6x & +18 & \\
 & & 6x & +18 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0\ , &
\end{array}
$$

Очевидно, що вирази x^2+4x+3 та x^2+5x+6 при $x=-3$ також обертаються в 0. Тоді ще раз виконаємо ділення:

$$
\begin{array}{rrr|l}
-\,x^2 & +4x & +3 & x+3\\
x^2 & +3x & & \overline{x+1}\\
\cline{1-3}
 & -\,x & +3 & \\
 & x & +3 & \\
\cline{2-3}
 & & 0\ , &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
-\,x^2 & +5x & +6 & x+3\\
x^2 & +3x & & \overline{x+2}\\
\cline{1-3}
 & -\,2x & +6 & \\
 & 2x & +6 & \\
\cline{2-3}
 & & 0\ , &
\end{array}
$$

В результаті кожний многочлен може бути записаний у вигляді добутку:

$$x^3+7x^2+15x+9=(x+3)\left(x^2+4x+3\right)=(x+3)(x+3)(x+1)=$$
$$=(x+3)^2(x+1);$$
$$x^3+8x^2+21x+18=(x+3)\left(x^2+5x+6\right)=(x+3)(x+3)(x+2)=$$
$$=(x+3)^2(x+2).$$

Таким чином в чисельнику та знаменнику виділено множник $(x+3)^2$, який наближається до 0 за умови, що $x\to-3$.

Отже,

$$A=\lim_{x\to-3}\frac{\cancel{(x+3)^2}\,(x+1)}{\cancel{(x+3)^2}\,(x+2)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+1}{x+2}=\left|\frac{-3+1}{-3+2}\right|=2.$$

Відповідь: 2.

4. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ВИГЛЯДУ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\frac{R_t(x)}{S_k(x)}\right)=\left|\infty-\infty\right|$, ДЕ $P_n(x)$, $Q_m(x)$, $R_t(x)$, $S_k(x)$ – ВІДПОВІДНО МНОГОЧЛЕНИ СТЕПЕНЮ n, m, t, k ВІДНОСНО ЗМІННОЇ x (завдання 3)

У даному випадку необхідно виконати тотожні перетворення, в результаті яких перейдемо до невизначеностей $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ або $\left|\frac{0}{0}\right|$, які детально були розглянуті раніше.

Приклад 19. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{3x+7}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{3x+7}\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3(3x+7)-x^2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)(3x+7)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+14x^3-5x^4-x^2}{15x^3+35x^2+3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+14x^3-x^2}{15x^3+35x^2+3x+7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{15x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{15}=\infty\,.$$

Відповідь: ∞.

Приклад 20. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x^3}{5x^2}+\frac{x^2}{\frac{5}{2}x-4}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x^3}{5x^2}+\frac{x^2}{\frac{5}{2}x-4}\right)=\left|-\infty+\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-2x^3\right)\left(\frac{5}{2}x-4\right)+x^2\cdot 5x^2}{5x^2\left(\frac{5}{2}x-4\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{2}x - 4 - \cancel{5x^4} + 8x^3 + \cancel{5x^4}}{\frac{25}{2}x^3 - 20x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^3 + \frac{5}{2}x - 4}{\frac{25}{2}x^3 - 20x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8\cancel{x^3}}{\frac{25}{2}\cancel{x^3}} = \frac{8\cdot 2}{25} = \frac{16}{25}.$$

Відповідь: $\frac{16}{25}$.

Приклад 21. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right) = \left|\infty - \infty\right| = A.$$

Пам'ятаючи, що $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, приведемо дроби до спільного знаменника.

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2} = -\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Приклад 22. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \left|\infty - \infty\right| = A.$$

Очевидно, що $8-x^3 = (2-x)\left(4+2x+x^2\right)$. Тоді маємо:

$$A = \lim_{x\to 2}\frac{4+2x+x^2-12}{(2-x)\left(4+2x+x^2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(2-x)\left(4+2x+x^2\right)} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{(2-x)}\left(4+2x+x^2\right)} = -\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{4+2x+x^2} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Приклад 23. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right).$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right)=\left|\infty-\infty\right|=A.$$

Маємо справу з невизначеністю $\left|\infty-\infty\right|$. Оскільки при $x=1$ знаменники обох дробів перетворюються в 0, розкладемо їх на множники:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4),\quad x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

та приведемо заданий під знаком границі вираз до спільного знаменника:

$$A=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+2)}{(x-1)(x-4)}+\frac{(x-4)}{3(x-1)(x-2)}\right)=\left|\infty-\infty\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-2)(x+2)+(x-4)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-4\right)+x^2-8x+16}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12+x^2-8x+16}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-8x+4}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-4)}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-2)(x-4)}=0.$$

Відповідь: 0.

5. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ У СОБІ ІРРАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ (завдання 4)

При потребі обчислити границю функції, що має невизначеність $|\infty-\infty|$ при $x\to\infty$, необхідно виконати тотожні перетворення, які б дозволили привести її до вигляду $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ або $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

Як правило, у випадку невисокого показника кореня, цього можна досягти шляхом домноження та ділення заданого виразу на «спряжений».

При цьому часто користуються формулами скороченого множення:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,\quad (a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)=a^3\pm b^3.$$

Приклад 24. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Розв'язання.

Підставимо граничне значення в умову, при цьому маємо:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=|\infty+\infty|=\infty.$$

(Оскільки алгебраїчна сума двох нескінченно великих величин одного знаку є величина нескінченно велика).

Відповідь: ∞.

Приклад 25. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=|\infty-\infty|=\left|\begin{array}{l}\text{домножимо та поділимо даний}\\ \text{вираз на спряжений, а саме на}\\ \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\text{ та скористаємось}\\ \text{формулою скороченого множення}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 26. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=|\infty+\infty|=\infty .$$

Відповідь: ∞.

Приклад 27. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{x^2+ax+bx+ab}+x}=\left\|\begin{array}{c}\sqrt{x^2+ax+bx+ab}\sim\sqrt{x^2}=x\\ \text{при } x\to+\infty\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax+bx+ab-x^2}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{2x}=\frac{a+b}{2} .$$

Відповідь. $\dfrac{a+b}{2}$.

Приклад 28. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=|\infty-\infty|=A .$$

Як і в наведених вище прикладах домножимо та розділимо заданий вираз на спряжений. Маємо:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}\left(\cancel{x^3}+1-\cancel{x^3}+1\right)}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{3/2}}{2x^{3/2}}=1 .$$

Відповідь: 1 .

Приклад 29. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=|\infty-\infty|=\left|a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^3}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-\left(x^2-2x+1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot\cancel{x}}{3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\cancel{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 30. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^9+4x^4-x^3-11}-x\right)$.

Розв'язання.

Дана границя містить у собі корінь з високим показником, а тому множення та ділення на спряжений вираз тут є недоречним. Перепишемо даний вираз наступним чином:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^9+4x^4-x^3-11}-x\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[9]{1+\frac{4x^4}{x^9}-\frac{x^3}{x^9}-\frac{11}{x^9}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[9]{1+\underbrace{\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^6}-\frac{11}{x^9}}_{\to 0}}-1\right)=A.$$

Скористаємось наслідком II визначної границі $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$, $x\to 0$:

$$\sqrt[9]{1+\underbrace{\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^6}-\frac{11}{x^9}}_{\to 0}}-1\sim\frac{\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^6}-\frac{11}{x^9}}{9}\sim\frac{4}{9x^5}.$$

Оскільки величина $-\frac{1}{x^6}-\frac{11}{x^9}$ є нескінченно малою більш високого порядку малості, ніж $\frac{1}{x^5}$, то нею можна знехтувати.

Таким чином,

$$A=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{4}{9x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{9x^4}=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 31. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+7x^3-x^2-1}-\sqrt[5]{32x^5-8x^4+x-3}\right).$$

Розв'язання.

Маємо невизначеність $|\infty-\infty|$. Виділимо головну частину в кожному доданку. Очевидно, що при $x\to\infty$ $16x^4+7x^3-x^2-1\sim 16x^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{16x^4+7x^3-x^2-1}\sim\sqrt[4]{16x^4}=2x.$$

$$32x^5-8x^4+x-3\sim 32x^5\Rightarrow\sqrt[5]{32x^5-8x^4+x-3}\sim\sqrt[5]{32x^5}=2x.$$

Таким чином, обидва корені мають однакову головну частину $2x$. Віднімемо її від кожного кореня, тоді отримаємо:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt[4]{16x^4+7x^3-x^2-1}-2x\right)-\left(\sqrt[5]{32x^5-8x^4+x-3}-2x\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{7x^3}{16x^4}-\frac{1}{16x^4}}-1\right)-\left(\sqrt[5]{1-\frac{8x^4}{32x^5}+\frac{x}{32x^5}-\frac{3}{32x^5}}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{7}{16x}-\frac{1}{16x^4}}-1\right)-\left(\sqrt[5]{1-\frac{1}{4x}+\frac{x}{32x^4}-\frac{3}{32x^5}}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{7}{16x}}-1\right)-\left(\sqrt[5]{1-\frac{1}{4x}}-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}2x\left(\frac{7}{4\cdot 16x}+\frac{1}{5\cdot 4x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4}\left(\frac{7}{16x}+\frac{1}{5x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(35+16)}{2\cdot 80\cancel{x}}=\frac{51}{160}.$$

Відповідь: $\frac{51}{160}$.

У випадку, коли границя дробу при $x \to x_0$ містить в собі ірраціональний вираз та має невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$, необхідно в чисельнику та знаменнику виділити множник $(x - x_0)$.

Приклад 32. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2-5x}$.

Розв'язання.

При підстановці граничного значення маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$. Оскільки $x \to 5$, то $x - 5 \to 0$. Виділимо множник $(x-5)$ в чисельнику та знаменнику. Для цього домножимо чисельник та знаменник дробу на спряжений для $\left(\sqrt{3x+1}-4\right)$ множник, а саме на $\left(\sqrt{3x+1}+4\right)$.

Тоді чисельник набуває вигляду:

$$\left(\sqrt{3x+1}-4\right)\left(\sqrt{3x+1}+4\right) = \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 - 4^2 = 3x+1-16 = 3x-15 = 3(x-5).$$

У знаменнику множник $\left(\sqrt{3x+1}+4\right) \to 8$ за умови, що $x \to 5$. Таким чином, обчислення заданої границі зводиться до наступних дій:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2-5x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to 5} \frac{3\cancel{(x-5)}}{8x\cancel{(x-5)}} = \lim_{x \to 5} \frac{3}{8x} = \frac{3}{40}.$$

Відповідь $\frac{3}{40}$.

Приклад 33. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}-4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}-4} = \left|\frac{0}{0}\right| = A.$$

За умовою $x \to -2 \;\Rightarrow\; x+2 \to 0$. Виділимо в чисельнику та знаменнику множник $(x+2)$. Виконаємо дії, аналогічні тим, що наведені в попередньому прикладі. Оскільки в даному випадку ірраціональний вираз записано у знаменнику, то знаменник набуває вигляду:

$$\left(\sqrt{x^2-2x+8}-4\right)\left(\sqrt{x^2-2x+8}+4\right)=\left(\sqrt{x^2-2x+8}\right)^2-4^2=$$

$$=x^2-2x+8-16=x^2-2x-8=(x+2)(x-4).$$

В чисельнику множник $\left(\sqrt{x^2-2x+8}+4\right)\to 8$. Отже, маємо:

$$A=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\overbrace{\left(\sqrt{x^2-2x+8}+4\right)}^{8}}{\cancel{(x+2)}(x-4)}=\lim_{x\to -2}\frac{8}{x-4}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $-\frac{4}{3}$.

Приклад 34. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}+3x}{x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}+3x}{x+1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{6x^2+3}+3x\right)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{6x^2+3-9x^2}{(x+1)\cdot 6}=\lim_{x\to -1}\frac{3-3x^2}{(x+1)\cdot 6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{3(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{(x+1)}\cdot 6}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3(1-x)}{6}=1.$$

Відповідь: 1 .

Приклад 35. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Користуючись наведеними вище зразками обчислення границь з ірраціональностями, маємо:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\underbrace{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+16-16\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\cdot 8}{2\cdot\cancel{x^2}}=4.$$

Відповідь: 4 .

Приклад 36. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2+3x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2+3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=A .$$

Виділимо в чисельнику та знаменнику множник, що наближається до 0 . Знаменник: $x^2+3x=x\left(x+3\right)$, чисельник:

$$\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)=\left|\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3\Rightarrow a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\right|=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+1\cdot\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+1\cdot\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1^3}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}=$$

$$=\frac{x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}.$$

Таким чином, границя набуває вигляду:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(x+3\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(x+3\right)\cdot 3}=0.$$

Відповідь: 0 .

Приклад 37. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{5+3x}}$.

Розв'язання.

При підстановці граничного значення $x=1$ в умову отримаємо:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{5+3x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=A\,.$$

Виділимо в чисельнику та знаменнику множник, що наближається до 0 . Чисельник: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, знаменник:

$$\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{5+3x}=\left|(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3\Rightarrow a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\right|=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{5+3x}\right)\left(\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5+3x)^2}\right)}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5+3x)^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{9-x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5+3x}\right)^3}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5-3x)^2}}=$$

$$=\frac{9-x-5-3x}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5-3x)^2}}=$$

$$=\frac{4-4x}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5-3x)^2}}=$$

$$=\frac{4(1-x)}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5-3x)^2}}\,.$$

Отже, задана границя набуває вигляду:

$$A=\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(x-1)}\,(x-2)\left(\sqrt[3]{(9-x)^2}+\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt[3]{(5+3x)^2}\right)}{4\cancel{(1-x)}}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(4+4+4)}{4}=-\frac{(1-2)\cdot\cancel{12}}{\cancel{4}}=3\,.$$

Відповідь: 3 .

6. І ТА ІІ ВИЗНАЧНІ ГРАНИЦІ ТА ЇХ НАСЛІДКИ (завдання 5 та 6)

Перша визначна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=1 .$$

Зміст І визначної границі полягає в тому, що синус нескінченно малого кута еквівалентний своєму аргументу.

Наслідки першої визначної границі:

$$\sin\sim x ,\ \operatorname{tg} x\sim x ,\ \arcsin x\sim x ,\ \operatorname{arctg} x\sim x ,$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} ,\ x\to 0 .$$

В більш загальному вигляді це можна записати так:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=1 :$$

наслідки:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x) ,\ \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x) ,\ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x) ,$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x) ,\ 1-\cos\alpha(x)\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2} ,\text{ де } \alpha(x)\to 0 .$$

Має сенс також нагадати зі шкільного курсу, що

$$\sin 0=0 ,\ \operatorname{tg} 0=0 ,\ \arcsin 0=0 ,\ \operatorname{arctg} 0=0 ,\ \cos 0=1 .$$

Друга границя записується так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left|1^\infty\right|=e ,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\left|1^\infty\right|=e ,\text{ де } e\approx 2,718... .$$

Наслідки другої визначної границі:

$$e^x-1\sim x ,\ a^x-1\sim x\cdot\ln a ,\ \ln(1+x)\sim x ,\ \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a} ,$$

$$(1+x)^\mu-1\sim\mu x ,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n} ,\ x\to 0 .$$

В більш загальному вигляді це можна записати:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\left|1^\infty\right|=e .$$

Наслідки:

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x) ,\ a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a ,\ \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x) ,$$

$$\log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a},\ \left(1+\alpha(x)\right)^{\mu}\sim\mu\cdot\alpha(x),$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}\sim\frac{\alpha(x)}{n},\ \text{де}\ \alpha(x)\to 0.$$

Нагадаємо, що:

$$e^0=1,\ a^0=1,\ \ln 1=0.$$

Перш ніж почати обчислювати границі, має сенс ознайомитися з прикладами заміни нескінченно малих функцій їх еквівалентними величинами:

1. $\sin 4x\sim 4x,\ \ x\to 0;$
2. $\operatorname{arctg} 5x\sim 5x,\ \ x\to 0;$
3. $1-\cos 9x\sim\dfrac{(9x)^2}{2}=\dfrac{81x^2}{2};$
4. $\operatorname{tg} x-\sin x=\operatorname{tg} x(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^3}{2},\ \ x\to 0;$
5. $e^{2x}-1\sim 2x,\ \ x\to 0;$
6. $e^{\sqrt{x}}-1\sim\sqrt{x},\ \ x\to 0;$
7. $\sqrt[6]{1+\sqrt[3]{x}}\sim\dfrac{\sqrt[3]{x}}{6}=\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt[3]{x},\ \ x\to 0;$
8. $\ln(1+5x)\sim 5x,\ \ x\to 0;$
9. $\log_2(1+3x)\sim\dfrac{3x}{\ln 2},\ \ x\to 0;$
10. $\ln\left(1+5\sin^2 3x\right)\sim 5\sin^2 3x\sim 5\cdot(3x)^2=45x^2,\ \ x\to 0;$
11. $\operatorname{arctg}\left(\cos x-\sqrt{\cos x}\right)\sim\cos x-\sqrt{\cos x}=\dfrac{\cos^2 x-\cos x}{\cos x+\sqrt{\cos x}}=$

$$=\frac{-\cos x(1-\cos x)}{1+1}\sim\frac{-x^2}{2\cdot 2}=\frac{-x^2}{4},\ \ x\to 0;$$

12. $\ln(2-x)=\ln\left(1+(1-x)\right)\sim 1-x,\ \ x\to 1;$
13. $2^{x-5}-1\sim(x-5)\ln 2,\ \ x\to 5;$

14. $1-\sin x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sim\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{2},\ x\to\frac{\pi}{2}$;

15. $\arcsin\left(9-x^2\right)\sim 9-x^2=(3-x)(3+x)\sim 6(3-x),\ x\to 3$;

16. $\log_3 x=\log_3(1+x-1)\sim\frac{x-1}{\ln 3},\ x\to 1$.

При використанні еквівалентних нескінченно малих потрібно обережно виділяти головну частину у випадку різниці двох еквівалентних нескінченно малих, оскільки різниця двох еквівалентних нескінченно малих є нескінченно малою величиною більш високого порядку малості. І потрібно вірно визначити порядок нескінченно малої, еквівалентної даній, різниці.

Очевидно, якщо функція, що стоїть під знаком границі, складається з тригонометричних або обернених тригонометричних функцій, то необхідно застосувати першу визначну границю або її наслідки.

Приклад 38. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l}x\to 0:\\ \operatorname{tg}2x\sim 2x\\ \sin 5x\sim 5x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{5\cancel{x}}=\frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\frac{2}{5}$.

Приклад 39. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x^2}{x\cdot\operatorname{arctg}3x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x^2}{x\cdot\operatorname{arctg}3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l}x\to 0:\\ \sin 4x^2\sim 4x^2\\ \operatorname{arctg}3x\sim 3x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x\cdot 3x}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

Приклад 40. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{4x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l} x\to 0: \\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot 4x^2}=\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{8}$.

Приклад 41. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{4\cdot\sin 2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\cdot\sin 2x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 0: \\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2} \\ \sin 2x\sim 2x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{2\cdot\cancel{x}\cdot 2\cancel{x}}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\dfrac{3}{4}$.

Приклад 42. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt[3]{(1-\cos 3x)^2}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt[3]{(1-\cos 3x)^2}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l} x\to 0:\operatorname{tg} 2x\sim 2x \\ 1-\cos 3x\sim\dfrac{(3x)^2}{2}=\dfrac{9x^2}{2} \\ \sqrt[3]{(1-\cos x)^2}=(1-\cos 3x)^{2/3}\sim \\ \sim\left(\dfrac{9x^2}{2}\right)^{2/3}=\dfrac{9^{2/3}\cdot x^{4/3}}{2^{2/3}}\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot 2^{2/3}}{9^{2/3} \cdot x^{4/3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{5/3}}{9^{2/3} \cdot x^{1/3}} = \left| \frac{\text{const}}{0} \right| = \infty .$$

Відповідь: ∞.

Приклад 43. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x - \cos x}{1 - \cos 5x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x - \cos x}{1 - \cos 5x} = \left| \frac{0}{0} \right| = A .$$

Як відомо, при $x \to 0$ $1 - \cos 5x \sim \dfrac{25x^2}{2}$. Для виразу $\cos 7x - \cos x$ скористаємось формулою тригонометрії:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

згідно з якою

$$\cos 7x - \cos x = 2\sin 4x \cdot \sin(-3x) .$$

А далі використаємо ланцюжок еквівалентних нескінченно малих. Таким чином,

$$\cos 7x - \cos x = 2\sin 4x \cdot \sin(-3x) \sim 2 \cdot 4x(-3x) = -24x^2 .$$

Тоді

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-24\cancel{x^2} \cdot 2}{25\cancel{x^2}} = -\frac{48}{25} .$$

Відповідь: $-\dfrac{48}{25}$.

Приклад 44. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5 + \cos 4x}}{\arcsin^2 \sqrt{2x}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5 + \cos 4x}}{\arcsin^2 \sqrt{2x}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \begin{array}{l} x \to 0 : \\ \arcsin\sqrt{2x} \sim \sqrt{2x} \\ \arcsin^2\sqrt{2x} \sim \left(\sqrt{2x}\right)^2 = 2x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5+\cos 4x}}{2x}.$$

Позбавитись від ірраціональності в чисельнику можна шляхом домноження дробу на відповідний спряжений множник, та скористатись формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Отже, маємо:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5+\cos 4x}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5+\cos 4x}\right)}{2x\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{5+\cos 4x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{6-(5+\cos 4x)}{2x\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{4\sqrt{6}\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{8}x^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\sqrt{6}\cdot \cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{6}} = 0.$$

Відповідь: 0.

Якщо $x \to a \ (a \neq 0)$, то в ряді випадків спочатку необхідно ввести нову нескінченно малу функцію $t = x-a$ (або $a-x$). При цьому $t \to 0$, а отже, отримаємо змогу безпосереднього використання таблиці еквівалентних нескінченно малих величин.

Приклад 45. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Розв'язання.

В даному випадку чисельник та знаменник – нескінченно малі функції. Однак x не є нескінченно малою величиною (наближається не до 0, а до π), тому вираз $\sin 2x \sim 2x$ не має сенсу!

Позначимо $t = x-\pi$, тоді при $x \to \pi \ \Rightarrow \ x-\pi \to 0$. Перепишемо умову заданої границі за допомогою змінної t. Оскільки $x = t+\pi$, маємо:

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3(t+\pi)}{\sin 2(t+\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t+3\pi)}{\sin(2t+2\pi)} = \left|\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t+\pi)}{\sin 2t} = \left|\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha\right| = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 3t}{2t} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{3t}{2t} = -\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{3}{2}$.

Приклад 46. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=|0\cdot\infty|=A.$$

Введемо позначення $x-1=t$, тоді при $x\to 1 \Rightarrow t\to 0$ та виразимо змінну x за допомогою t: $x=t+1$.

Таким чином,

$$A=\lim_{t\to 0}(-t)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(t+1)}{2}=-\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)=\left|\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}=|0\cdot\infty|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}\cdot 2}{\pi\cdot\cancel{t}}=\frac{2}{\pi}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{\pi}$.

Приклад 47. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\left(x^2-4\right)}{\sin\pi x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}\left(x^2-4\right)}{\sin\pi x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x-2=t,\;\; x=t+2,\\ \operatorname{tg}\left(x^2-4\right)=\operatorname{tg}\left((t+2)^2-4\right)=\operatorname{tg}\left(t^2+4t\right)\sim t^2+4t=t(t+4);\\ \sin\pi x=\sin\pi(t+2)=\sin(2\pi+\pi t)=\sin\pi t\sim\pi t\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}(t+4)}{\pi\cancel{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{t+4}{\pi}=\frac{4}{\pi}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{\pi}$.

Приклад 48. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\cos(x-3)}{\arcsin\left(x^2-3x\right)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{1-\cos(x-3)}{\arcsin(x^2-3x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l} x-3=t,\ \ x=t+3 \\ 1-\cos(x-3)=1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2} \\ \arcsin(x^2-3x)=\arcsin\left((t+3)^2-3(t+3)\right)= \\ =\arcsin\left(t^2+6t+\cancel{9}-3t-\cancel{9}\right)=\arcsin\left(t^2+3t\right)\sim \\ \sim t^2+3t=t(t+3) \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^{\cancel{2}}}{2\cancel{t}(t+3)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2(t+3)}=0\ .$$

Важливо підкреслити, що заміну змінної можна було і не робити, оскільки при $x\to 3$ величина $x-3\to 0$, тобто є нескінченно малою, а, отже,

$$1-\cos(x-3)\sim\frac{(x-3)^2}{2}\ ;$$

при цьому аналогічно маємо $\arcsin(x^2-3x)\sim x^2-3x$.

Таким чином,

$$\lim_{x\to 3}\frac{1-\cos(x-3)}{\arcsin(x^2-3x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{3}=0\ .$$

Відповідь: 0 .

Приклад 49. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin x-\sin 4}{\operatorname{arctg}(x^2-4x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sin x-\sin 4}{\operatorname{arctg}(x^2-4x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=A\ .$$

Для виразу $\sin x-\sin 4$ скористаємось формулою тригонометрії:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\text{ , згідно з якою}$$

$$\sin x-\sin 4=2\sin\frac{x-4}{2}\cos\frac{x+4}{2}\ .$$

Маємо

$$A=\lim_{x\to 4}\frac{2\sin\frac{x-4}{2}\cdot\cos\frac{x+4}{2}}{\operatorname{arctg}\left(x^2-4x\right)}=\left|\begin{array}{l}x\to 4:\\ \sin\frac{x-4}{2}\sim\frac{x-4}{2},\\ arctg\left(x^2-4x\right)\sim x^2-4x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{2}\cdot\frac{x-4}{\cancel{2}}\cos\frac{x+4}{2}}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}\cos\frac{x+4}{2}}{x\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}\frac{\cos\frac{x+4}{2}}{x}=\frac{\cos 4}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\cos 4}{4}$.

При розкритті невизначеності $\left|1^{\infty}\right|$ необхідно скористатись II визначною границею

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Аналіз виразу, що стоїть під знаком II визначної границі показує, що його конструкція така: до одиниці додаємо нескінченно малу величину $\frac{1}{x}$ і ця сума підноситься до степеню, що дорівнює оберненій величині для тієї, що додається до 1, тобто x.

Приклад 50. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{\frac{4x}{7}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{\frac{4x}{7}}=\left|1^{\infty}\right|=A.$$

В даному випадку до основи степеню додамо та віднімемо одиницю, при цьому вираз не зміниться, але ми зможемо визначити вигляд нескінченно малої величини, що додається до 1.

Тобто,

$$\frac{x-5}{x+3}=1+\frac{x-5}{x+3}-1=1+\frac{x-5-x-3}{x+3}=1+\frac{-8}{x+3}.$$

Таким чином, роль нескінченно малої величини відіграє вираз $\frac{-8}{x+3}$, який наближається до 0 при $x\to\infty$. Обернена величина буде $\frac{x+3}{-8}$. Виконаємо перетворення:

$$\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{\frac{4x}{7}}=\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^{\frac{4x}{7}}=\left(\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-8}}\right)^{\frac{-8}{x+3}\cdot\frac{4x}{7}}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-8}}=e\left|\begin{array}{l}\text{за II визначною}\\ \text{границею}\end{array}\right|.$$

Тоді

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-8}}\right)^{\frac{-8\cdot 4x}{(x+3)\cdot 7}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-32x}{7(x+3)}}=e^{\frac{-32}{7}}.$$

Відповідь: $e^{\frac{-32}{7}}$.

Приклад 51. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x+5}-1\right)^{\frac{x^2}{x-4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x-5}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-2}}\right)^{\frac{-2}{2x+5}\cdot\frac{x^2}{x-4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{(2x+5)(x-4)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{2x^2-3x-20}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Відповідь: $\frac{1}{e}$.

Для більш швидкого отримання результату, обчислюючи такі границі, можна скористатись формулою:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} U(x)^{V(x)} = \left|1^{\infty}\right| = e^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\left[U(x)-1\right]\cdot V(x)}.$$

Приклад 52. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{\frac{7}{x^2-4}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{\frac{7}{x^2-4}} = \left|1^{\infty}\right| = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}-1\right)\frac{7}{x^2-4}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3-3x+1)7}{(3x-1)\left(x^2-4\right)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(4-2x)7}{(3x-1)\left(x^2-4\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2\cancel{(x-2)}7}{(3x-1)\cancel{(x-2)}(x+2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-14}{(3x-1)(x+2)}} = e^{\frac{-14}{20}} = e^{\frac{-7}{10}}.$$

Відповідь: $e^{\frac{-7}{10}}$.

Приклад 53. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4x}{3x^2-8}\right)^{x^2+x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x}{3x^2-8}\right)^{x^2+x} = \left|1^{\infty}\right| = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^2-8}-1\right)\left(x^2+x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\cancel{3x^2}+4-\cancel{3x^2}+8\right)\left(x^2+x\right)}{3x^2-8}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12\left(x^2+x\right)}{3x^2-8}} = e^{\frac{12}{3}} = e^{4}.$$

Відповідь: e^4.

Приклад 54. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos 5x)^{(3x+7)/2x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}(\cos 5x)^{(3x+7)/2x^2} = \left|1^{\infty}\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x-1)\frac{3x+7}{2x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-25\cancel{x^2}(3x+7)}{2\cdot 2\cancel{x^2}}} =$$

$$= e^{\frac{-25\cdot 7}{4}} = e^{\frac{-175}{4}}.$$

Відповідь: $e^{\frac{-175}{4}}$.

Має сенс розглянути як працюють наслідки II визначної границі.

Приклад 55. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+5x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+5x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}x\to 0:\\ e^{3x}-1\sim 3x\\ \ln(1+5x)\sim 5x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

Приклад 56. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{7x}-1}{\ln(2+x)-\ln 2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{7x}-1}{\ln(2+x)-\ln 2}=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Очевидно, що при $x\to 0$ $5^{7x}-1\sim 7x\cdot\ln 5$.

Для виразу $\ln(2+x)-\ln 2$ скористаємось формулою:

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b},$$

згідно з якою

$$\ln(2+x)-\ln 2=\ln\frac{2+x}{2}=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\sim\frac{x}{2}\text{ при }x\to 0.$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{7x\cdot\ln 5}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{14\cancel{x}\ln 5}{\cancel{x}}=14\ln 5.$$

Відповідь: $14\ln 5$.

Приклад 57. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{3x}}{\log_4(1+7x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-e^{3x}}{\log_4(1+7x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix} e^{-2x}-e^{3x}=e^{3x}\left(e^{-5x}-1\right)\sim -5x, \\ \log_4(1+7x)\sim\dfrac{7x}{\ln 4},\ \ x\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5x}{\dfrac{7x}{\ln 4}}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x\cdot\ln 4}{7x}=-\frac{5\ln 4}{7}.$$

Відповідь: $-\dfrac{5\ln 4}{7}$.

Приклад 58. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-3^x}{\ln\left(1+x\cdot\sin^2 x\right)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-3^x}{\ln\left(1+x\cdot\sin^2 x\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix} x\to 0: \\ 8^x-3^x=3^x\left(\left(\dfrac{8}{3}\right)^x-1\right)\sim x\cdot\ln\dfrac{8}{3} \\ \ln\left(1+x\cdot\sin^2 x\right)\sim x\cdot\sin^2 x\sim x^3\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot\ln\dfrac{8}{3}}{x^{\cancel{3}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{8}{3}}{x^2}=\infty.$$

Відповідь: ∞.

Приклад 59. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{3x+2}-25}{\ln\left(1-4\sin^2 3x\right)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{3x+2}-25}{\ln\left(1-4\sin^2 3x\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5^2\left(5^{3x}-1\right)}{\ln\left(1-4\sin^2 3x\right)}=$$

$$=\left|\begin{matrix} x\to 0: 5^{3x}-1\sim 3x\cdot\ln 5 \\ \ln\left(1-4\sin^2 3x\right)\sim -4\sin^2 3x\sim 4(3x)^2=-36x^2\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{25\cdot\cancel{3}\,\cancel{x}\cdot\ln 5}{-\cancel{36}x^{\cancel{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{25\ln 5}{12x}\right)=-\infty$$

Відповідь: $-\infty$.

Приклад 60. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{1/\left(\ln\left(1+\pi x^3\right)\right)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{1/\left(\ln\left(1+\pi x^3\right)\right)}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-x\cdot\sin^2 x\right)^{\frac{-1}{x\cdot\sin^2 x}}\right)^{\frac{-x\cdot\sin^2 x}{\ln\left(1+\pi x^3\right)}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 0: \\ \sin^2 x\sim x \\ \ln\left(1+\pi x^3\right)\sim \pi x^3 \end{array}\right|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\cdot x^2}{\pi x^3}}=e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

Відповідь: $e^{-\frac{1}{\pi}}$.

Приклад 61. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-4\right)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-4\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Оскільки при $x\to 2$ величина $x^2-4\to 0$, то $\operatorname{tg}\left(x^2-4\right)\sim x^2-4$.

Перетворимо чисельник

$\ln\left(9-2x^2\right)=\ln\left(1+8-2x^2\right)=\ln\left(1+2\left(4-x^2\right)\right)\sim 2\left(4-x^2\right)$ при $x\to 2$.

Тоді

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(4-x^2\right)}{x^2-4}=-2.$$

Відповідь: -2.

Приклад 62. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Розв'язання.

Враховуючи, що $\ln e=1$, можна записати:

$$A=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right)}{x-e}=$$

$$=\left|x\to e\Rightarrow\frac{x}{e}-1\to 0\right|=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

Відповідь: $\frac{1}{e}$.

Приклад 63. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Для того, щоб скористатись формулою

$$\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)\ \text{ при }\ \alpha(x)\to 0,$$

під знаком логарифма додамо та віднімемо 1:

$$\ln\cos x=\ln\left(1+\underbrace{\cos x-1}\right)\sim\cos x-1,\ x\to 0.$$

За теоремою про заміну еквівалентної, маємо:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Приклад 64. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{\ln(3-2x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{\ln(3-2x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Над чисельником та знаменником виконаємо такі перетворення, які дозволять скористатись наслідком II визначної границі. А саме:

$$\ln\left(x^2-2x+2\right)=\ln\left(1+x^2-2x+1\right)=\ln\left(1+\left(x-1\right)^2\right)\sim\left(x-1\right)^2,\ x\to 1;$$

$$\ln\left(3-2x\right)=\ln\left(1+2-2x\right)=\ln\left(1+2\left(1-x\right)\right)\sim 2\left(1-x\right),\ x\to 1.$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-1\right)^2}{2\left(1-x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(x-1\right)^{\cancel{2}}}{2\cancel{\left(x-1\right)}}=-\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2}=0.$$

Відповідь: 0 .

Приклад 65. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)=\left|\frac{0}{0}\right|=A.$$

Очевидно, що при $x\to\infty$ функція $\frac{1}{x}$ є нескінченно мала величина.

Користуючись наслідками, маємо (при $x\to\infty$, величина $\frac{1}{x}\to 0$):

$$a^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{1}{x}\cdot\ln a.$$

Отже,

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}}\ln a=\ln a.$$

Відповідь: $\ln a$.

7. ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ВЕЛИЧИН (завдання 7)

Для порівнюваних нескінченно малих величин часто виникає питання про їх відносний порядок малості. Відповідь можна отримати при обчисленні границі їх відношення:

$$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ \beta(x)\to 0}} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)},$$

де k підбирають таким чином, щоб у відповіді отримати константу, що не дорівнює 0.

Якщо

$$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ \beta(x)\to 0}} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = \text{const} \neq 0,$$

то говорять, що нескінченно мала величина $\alpha(x)$ $k-$ого порядку малості відносно нескінченно малої $\beta(x)$.

Якщо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі величини при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, тобто:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \alpha(x) = 0 \text{ та } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \beta(x) = 0,$$

то для їх порівняння необхідно обчислити границю їх відношення.

Можливі наступні варіанти:

1) $\lim\limits_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ \beta(x)\to 0}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 0$, то $\alpha(x)$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$;

2) $\lim\limits_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ \beta(x)\to 0}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left|\dfrac{0}{\infty}\right| = \infty$, то $\beta(x)$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж $\alpha(x)$;

3) $\lim\limits_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ \beta(x)\to 0}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються нескін-

ченно малими величинами одного порядку малості.

Якщо ж $A=1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні нескінченно малі, тобто $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

4) $\lim\limits_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ \beta(x)\to 0}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то такі нескінченно малі називаються *непорівнянними*.

Приклад 66. Визначити порядок малості відносно x функції $y=\arcsin\left(\sqrt{4+x^3}-2\right)$, що є нескінченно малою при $x\to 0$.

Розв'язання.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(\sqrt{4+x^3}-2\right)}{x^k}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^3}-2}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{4}+x^3-\cancel{4}}{x^k\left(\sqrt{4+x^3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k\left(\sqrt{4+x^3}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{4x^k}\underset{k=3}{=}\frac{1}{4}.$$

Отже, функція $y=\arcsin\left(\sqrt{4+x^3}-2\right)$ нескінченно мала третього порядку малості $(k=3)$ відносно $x\to 0$.

Відповідь: $k=3$.

Приклад 67. Визначити порядок малості відносно x функції $y=e^{\sin^4 x}-1$, що є нескінченно малою при $x\to 0$.

Розв'язання.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^4 x}-1}{x^k}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\\ \alpha(x)\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^k}=\left|\begin{matrix}x\to 0\Rightarrow\\ \sin^4 x\sim x^4\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^k}\underset{k=4}{=}1.$$

Таким чином, функція $y=e^{\sin^4 x}-1$ є нескінченно мала четвертого порядку малості відносно x за умови, що $x\to 0$.

Відповідь: $k = 4$.

Приклад 68. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$ відносно $\beta(x) = x - 1$, якщо $x = 1$.

Розв'язання.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{(x-1)^k} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{l|l} -\begin{array}{r} x^3+2x-3 \\ x^3-x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^2+x+3 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ x^2-x \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} 3x-3 \\ 3x-3 \end{array} & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}{(x-1)^k} \underset{k=1}{=} 5.$$

Отже, маємо нескінченно малу $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$ першого порядку малості відносно $\beta(x) = x - 1$ за умови, що $x \to 1$

Відповідь: $k = 1$.

Приклад 69. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x) = e^{3x} - e^x$ та $\beta(x) = \sin 2x + \sin x$ при $x \to 0$.

Розв'язання.

Знайдемо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x + \sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{2x}-1)}{2\sin x\cos x + \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x\left(2\cos x+1\right)} = \left|\begin{array}{l} x\to 0: \\ e^{2x}-1 \sim 2x \\ \sin x \sim x \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(2\cos x+1\right)} = \frac{2}{3}.$$

Очевидно, що задані нескінченно малі одного порядку малості.

Відповідь: одного порядку малості.

Приклад 70. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=5^{x^2-6x+10}-5$ та $\beta(x)=\ln(x-2)$ при $x\to 3$.

Розв'язання.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{5^{x^2-6x+10}-5}{\ln(x-2)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{5\left(5^{x^2-6x+9}-1\right)}{\ln\left[1+(x-3)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5\left(x^2-6x+9\right)\ln 5}{x-3}=5\ln 5\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=5\ln 5\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}}=0,$$

тому $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$.

При обчисленні границі скористались тим, що при

$$\alpha(x)\to 0: a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$$

та

$$\ln\left[1+\alpha(x)\right]\sim\alpha(x).$$

Відповідь: $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$.

8. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ (завдання 8)

Як відомо, функція $y = f(x)$ вважається *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то точка x_0 називається *точкою розриву*. Розрізняють точки розриву І та ІІ роду.

Точка x_0 називається *точкою розриву І роду*, якщо лівостороння та правостороння границі функції в цій точці є скінченні числа, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \quad \text{та} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B.$$

Причому, якщо $A = B$, то точка x_0 називається *точкою усувного розриву І роду*.

Якщо ж хоча б одна з границь (ліво- або правостороння) дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то точка x_0 називається *точкою розриву ІІ роду*.

Приклад 71. Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції $y = \dfrac{5}{2x-3}$.

Розв'язання.

Очевидно, що функція не існує при $x = \dfrac{3}{2}$ (при цьому значенні x знаменник обертається в 0).

Обчислимо ліво- та правосторонню границю:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}+0} \frac{5}{2x-3} = \lim_{x \to \frac{3}{2}+0} \frac{5}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \left| \frac{5}{2\left(\cancel{\frac{3}{2}} + 0 - \cancel{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{5}{+0} \right| = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}-0} \frac{5}{2x-3} = \lim_{x \to \frac{3}{2}-0} \frac{5}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \left| \frac{5}{2\left(\cancel{\frac{3}{2}} - 0 - \cancel{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{5}{-0} \right| = -\infty.$$

Отже, в точці $x=\dfrac{3}{2}$ маємо розрив II роду.

Відповідь: $x=\dfrac{3}{2}$ – точка розриву II роду.

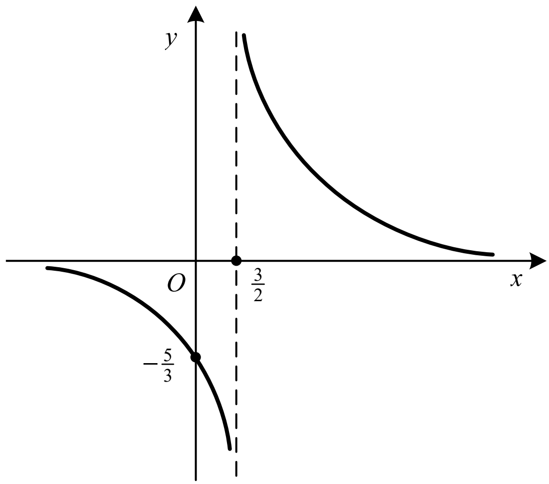


Рисунок 3

Приклад 72. Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції $y=\begin{cases} x+1, & x<3; \\ x^2-4, & x\ge 3. \end{cases}$.

Розв'язання.

Обчислимо односторонні границі в точці $x=3$.

$$\lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0}\left(x+1\right)=4,$$

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0}\left(x^2-4\right)=5.$$

Границі зліва та справа існують, скінченні, але не збігаються. Отже, при $x=3$ маємо справу з неусувним розривом I роду.

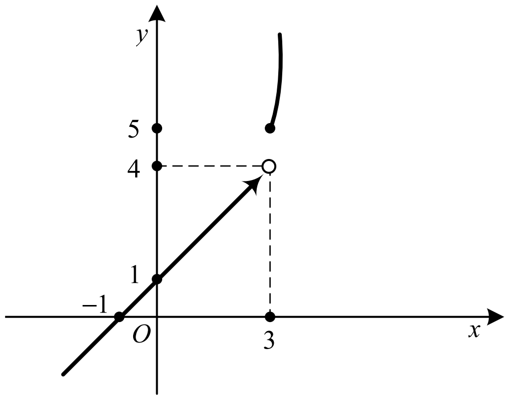


Рисунок 4

Відповідь: При $x = 3$ – неусувний розрив I роду.

Приклад 73. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву, вказати характер розриву та у випадку усувного розриву довизначити до неперервності функцію $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання.

Оскільки $\sin x$ та x неперервні на всій числовій осі, то неперервним буде і їх відношення $\dfrac{\sin x}{x}$ в усіх точках, окрім $x = 0$. В цій точці функція не визначена і тому має розрив. Але, як відомо, існує

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Відповідно, точка $x = 0$ є точкою усувного розриву I роду.

Довизначимо $y(0) = 1$, тоді функція

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

буде неперервною в точці $x = 0$.

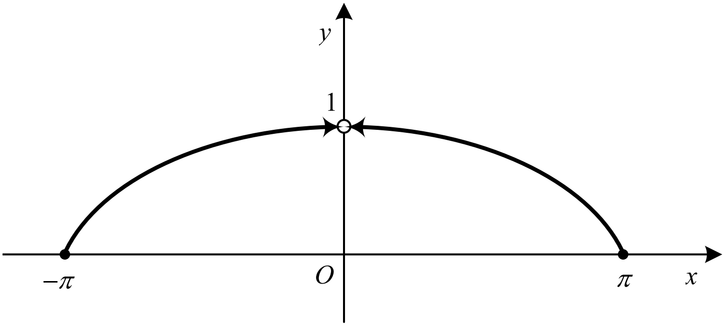


Рисунок 5

Відповідь: При $x=0$ – неусувний розрив I роду – функція неперервна.

Приклад 74. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву, вказати характер розриву функції $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1;\\ 0, & x=1.\end{cases}$.

Розв'язання.

При $x\neq 1$ функцію можна записати у вигляді:

$$y=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

і, очевидно, функція при будь-якому значенні $x\neq 1$ буде неперервною.

За умовою, при $x=1$ значення функції дорівнює 0, а

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y=\lim_{x\to 1\pm 0}(x+1)=2\ .$$

Отже, при $x=1$ функція буде розривною, оскільки границя функції не дорівнює значенню функції в цій точці.

Таким чином, $x=1$ є точкою неусувного розриву I роду.

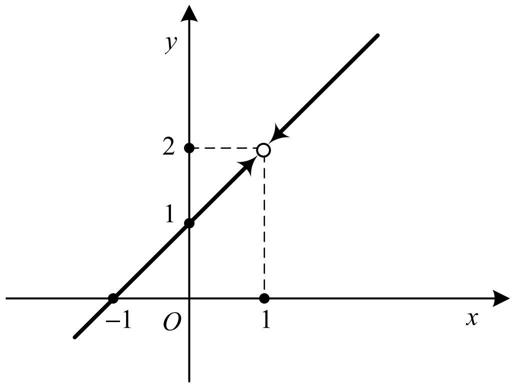


Рисунок 6

Відповідь: Точка $x=1$ – розрив I роду, неусувний; функція неперервна при будь-якому значенні $x \neq 1$.

Приклад 75. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву, вказати характер розриву та у випадку усувного розриву довизначити до неперервної функцію $y=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$.

Розв'язання.

При $x=3$ та $x=-1$ знаменник обертається в 0. Отже, $x=3$ та $x=-1$ – це точки розриву функції. Для визначення типу розриву необхідно обчислити ліво- та правосторонні границі. Тож визначимо їх.

Дослідимо поведінку функції поблизу $x=3$:

$$\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+1)}=\left|\frac{1}{3\pm 0+1}\right|=\frac{1}{4},$$

тому $x=3$ – точка розриву I роду, усувна.

Дослідимо поведінку функції поблизу $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+1)}=\left|\frac{1}{-1\pm 0+1}=\frac{1}{\pm 0}\right|=\pm\infty,$$

тому $x=-1$ – точка розриву II роду.

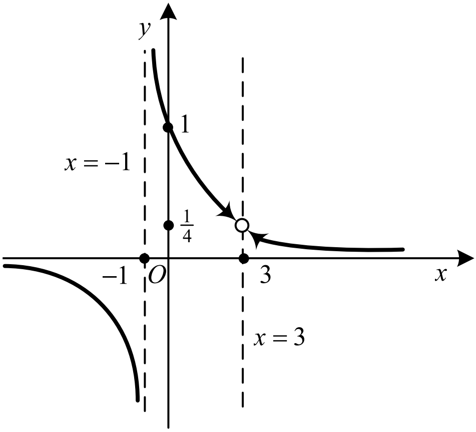


Рисунок 7

Відповідь: Точка $x = 3$ – розрив I роду, усувний; $x = -1$ – точка розриву II роду.

Приклад 76. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву, вказати характер розриву та у випадку усувного розриву довизначити до неперервної функцію $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

Розв'язання.

Очевидно, задана функція неперервна на всій числовій осі, за виключенням точки $x = -2$. Щоб визначити характер розриву в цій точці, обчислимо ліво- та правосторонні границі:

$$\lim_{x \to -2-0} e^{\frac{1}{x+2}} = \left| e^{\frac{1}{-2-0+2}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \right| = 0,$$

$$\lim_{x \to -2+0} e^{\frac{1}{x+2}} = \left| e^{\frac{1}{-2+0+2}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = -2$ є точкою розриву II роду, оскільки границя справа являє собою нескінченність.

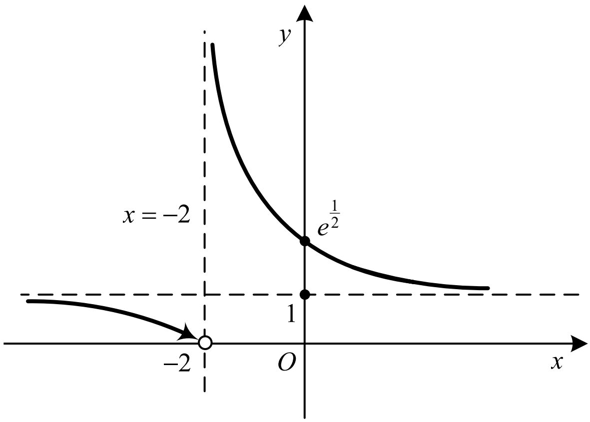


Рисунок 8

Відповідь: Точка $x=-2$ – розрив II роду.

Приклад 77. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву та вказати характер точки розриву функції $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Розв'язання.

Задана елементарна функція не визначена при $x=1$, отже, $x=1$ є точкою розриву. Обчислимо ліво- та правосторонню границі функції в цій точці:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\left|\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\cancel{1}+0-\cancel{1}}}}=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{+0}}}=\frac{1}{1+2^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\right|=0,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\left|\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\cancel{1}-0-\cancel{1}}}}=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{-0}}}=\frac{1}{1+2^{-\infty}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^{\infty}}}\right|=1.$$

Таким чином, границі зліва та справа існують, але не однакові. Отже, $x=1$ є точкою розриву I роду, неусувною.

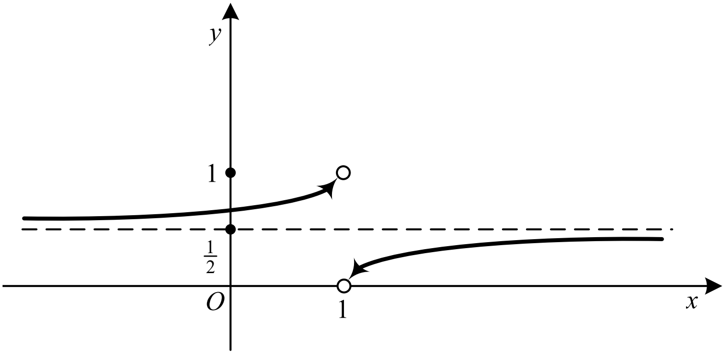


Рисунок 9

Відповідь: Точка $x=1$ – розрив I роду, неусувний.

Приклад 78. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву та вказати характер точки розриву функції $y=\dfrac{2}{1+9^{\frac{4}{x-2}}}$.

Розв'язання.

Точка розриву даної елементарної функції $x=2$. Дослідимо, як поводить себе функція, наближаючись до $x=2$ зліва та справа. Для цього обчислимо:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-2}}}=\left|\frac{2}{1+9^{\frac{4}{\cancel{2}+0-\cancel{2}}}}=\frac{2}{1+9^{+\infty}}=\frac{2}{\infty}\right|=0,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-2}}}=\left|\frac{2}{1+9^{\frac{4}{\cancel{2}-0-\cancel{2}}}}=\frac{2}{1+9^{-\infty}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9^{\infty}}}\right|=2.$$

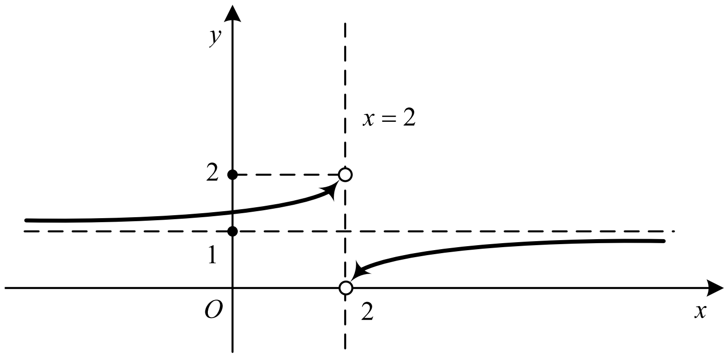


Рисунок 10

Відповідь: Точка $x = 2$ – розрив І роду, неусувний.

Приклад 79. Дослідити на неперервність, знайти точки розриву, вказати характер розриву та у випадку усувного розриву довизначити до неперервної функцію $y = \dfrac{|x|}{x}$.

Розв'язання.

Слід нагадати, що

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ маємо точку розриву. Перепишемо функцію у вигляді:

$$y = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1, & x > 0; \\ \dfrac{|x|}{x} = -\dfrac{x}{x} = -1, & x < 0. \end{cases}$$

Таким чином, можна зробити висновок, що $x = 0$ є точкою розриву І роду, розрив неусувний.

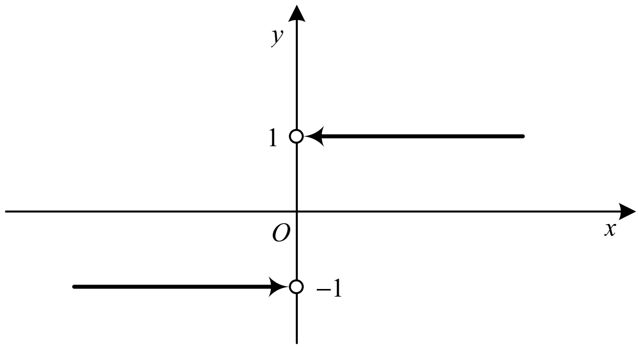


Рисунок 11

Відповідь: Точка $x=0$ – розрив I роду, неусувний.

Приклад 80. Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції $y=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x}\cdot x-1, & x\neq -1;\\ 1, & x=-1.\end{cases}$.

Розв'язання.

Задана функція визначена на всій числовій осі. Якщо $x>-1$, то $x+1>0$, $|x+1|=x+1$ і $\dfrac{|x+1|}{x+1}=1$. В цьому випадку $y=1\cdot x-1=x-1$, а, отже, для всіх значень $x>-1$ функція неперервна як многочлен першого степеня.

Аналогічно, при $x<-1$, $\dfrac{|x+1|}{x+1}=-1$ і $y=-x-1$ – неперервна як многочлен першого степеня.

Дослідимо точку $x=-1$. З'ясуємо, чи існує границя функції в цій точці. Обчислимо односторонні границі при $x\to -1$ зліва та справа:

$$\lim_{x\to -1-0} y=\lim_{x\to -1-0}\left(-x-1\right)=+1-1=0\,,$$

$$\lim_{x\to -1+0} y=\lim_{x\to -1+0}\left(x-1\right)=-1-1=-2\,.$$

Отже, односторонні границі в точці існують, але не рівні між собою. Таким чином, маємо справу з неусувним розривом I першого роду.

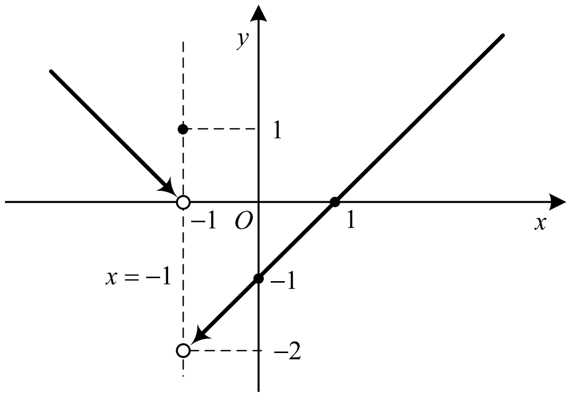


Рисунок 12

Відповідь: Точка $x=-1$ – розрив I роду, неусувний.

Приклад 81. Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції $y=\dfrac{4|x-2|}{2x^2-x^3}$.

Розв'язання.

Очевидно, що задана функція визначена та неперервна на всій числовій осі, окрім точок $x=0$ та $x=2$.

Розглянемо точку $x=0$ та обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{4|x-2|}{2x^2-x^3}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{4|x-2|}{x^2(2-x)}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{-4(x-2)}{x^2(2-x)}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{4}{x^2}=+\infty .$$

То ж $x=0$ є точкою розриву II роду.

Далі розглянемо точку $x=2$.

Оскільки $x-2>0$ при $x>2$ та $x-2<0$ при $x<2$, то:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4|x-2|}{2x^2-x^3}=\lim_{x\to 2-0}\frac{4(2-x)}{x^2(2-x)}=\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{x^2}=1,$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{4|x-2|}{2x^2-x^3}=\lim_{x\to 2+0}\frac{4(x-2)}{x^2(2-x)}=\lim_{x\to 2+0}\frac{-4}{x^2}=-1 .$$

Таким чином, $x=2$ – точка розриву I роду, розрив неусувний.

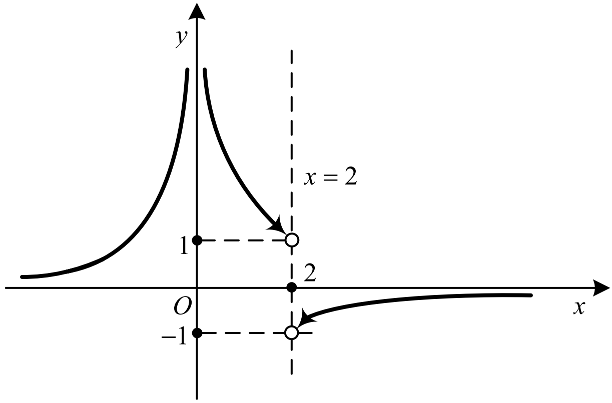


Рисунок 13

Відповідь: Точка $x=0$ – розрив II роду; точка $x=2$ – розрив I роду, неусувний.

Приклад 82. Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції $y=\operatorname{arctg}\dfrac{7}{x+5}$.

Розв'язання.

При $x=-5$ знаменник обертається в 0. Отже, $x=-5$ – точка розриву функції.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to-5+0}\operatorname{arctg}\frac{7}{(x+5)}=\left|\operatorname{arctg}\frac{7}{\cancel{-5}+0+\cancel{5}}=\operatorname{arctg}\frac{7}{+0}=\operatorname{arctg}(+\infty)\right|=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-5-0}\operatorname{arctg}\frac{7}{(x+5)}=\left|\operatorname{arctg}\frac{7}{\cancel{-5}-0+\cancel{5}}=\operatorname{arctg}\frac{7}{-0}=\operatorname{arctg}(-\infty)\right|=-\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $x=-5$ – точка розриву I роду, розрив неусувний.

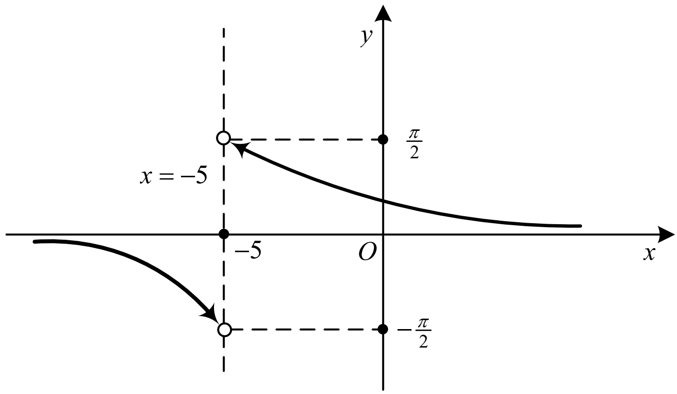


Рисунок 14

Відповідь: Точка $x=-5$ – розрив I роду, неусувний.

9. РОЗРАХУНКОВО ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1а. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+5)(x-9)}{\left(x^2+2\right)^2-x^4}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+3\right)^2-\left(x^2-3\right)^2}{(2x+4)(x-3)}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-\left(x^2+2\right)^2}{(2x+3)^3-8x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^2-(x-1)^2}{(2x+3)(7x-1)}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x+1)^2-x^4}{(2x+3)^3+3x^3}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^3-(x+3)^3}{(2x-3)(4x+5)-9x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-x)^3-x^3-6x^2}{(2x+5)(3x-1)}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^3-x^3}{9x^2+5x-4}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^3-(2x+1)^3}{x+100x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^2-(x+3)^2}{x^2+7x-4}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(x+1)^3}{5-x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(9x+1)(x+3)}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-4}{(2x+1)^2-4(x+2)^2}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(3x+4)^2}{(4x+5)(x-2)}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-4)(2x+3)}{5x^2-x+7}$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{(2x+1)^2-4(x+3)^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(2x-3)^2}{9x^2+4x+1}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3-(2x-1)^3}{3+2x^3}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3-x^3}{7x^2-5x+4}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^3-(3+2x)^3}{x(x+5)^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2+x)^2+(3+x)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^4}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+3\right)^2-x^4}{(2x+3)(x+7)}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+5)\left(x^3-4\right)}{\left(x^2+1\right)^2+7}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^2+(x+1)^2}{x^5+3}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(4x+3)^2}{(2-x)^3+(x+1)^3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^3-\left(2x^2+1\right)^2}{x^4+5}$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{(2x+1)^2-4(x+3)^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^2+(x-2)^2}{(x+3)(2x-3)}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-\left(x^2+2\right)^2}{(2x+3)^3-8x^3}$.

Завдання 1б. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt{x+3}-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[4]{x^3+x}}{\sqrt[3]{8x^3+3}-\sqrt{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^7+5x-1}-\sqrt[5]{x^3+7}}{\sqrt{9x^7-3}+\sqrt[3]{x^2+4}}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+7}}{\sqrt{25x^4-3}-\sqrt[3]{x^4}}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^7+1}-\sqrt[4]{x^3+5}}{\sqrt[5]{x^3+9}+\sqrt{x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5+4}+\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^9+8}+\sqrt{x+3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-3}}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{8x^3+11}}{\sqrt[4]{x^4-3x+5}+\sqrt[5]{x+2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[4]{x-7}}{x^2-\sqrt{x^5+3x^2+1}}$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^4+2}-\sqrt[3]{x^3+1}}$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\sqrt{x}-\sqrt{1+2x}}{4\sqrt{x}-\sqrt{5+2x^3}}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^6+7x+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{9x^{12}+7x^3+4}-\sqrt{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x^3+5}}{\sqrt[4]{81x^6+7x^2+9}}$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+\sqrt[3]{x^2+2x+5}}{\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+25}+\sqrt{x-3}}{\sqrt[7]{x^6+9}}$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^7+x^6+1}+x}$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3x}{\sqrt{x^3+7}+2}$.

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+12x}{5x+\sqrt{x^3}}$.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}-7x}{5x+\sqrt[4]{x+4}}$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^4-15}+\sqrt[5]{3x^4+7}}$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^4+x^2}}}{\sqrt{x^2+5}}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^4-x+3}+\sqrt[3]{x^2+7x-2}}$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt[3]{8x^2-5}}{\sqrt[3]{27x^3-x+4}-\sqrt{x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{25x^2-4x+1}+\sqrt[3]{x^5}}$.

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^8-x^7+3}-\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{49x^4+5x^3-1}+\sqrt{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^7+1}-\sqrt[4]{x^3+5}}{\sqrt[5]{x^3+9}+\sqrt{x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\sqrt[3]{x^3+19}}{\sqrt{9x^6+8x-5}-\sqrt[4]{x^3}}$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$.

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-\sqrt{x^3+5}}{\sqrt[4]{81x^6-7x^2+1}+2x}$.

Завдання 2. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$.

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+3x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-81}{x^2-5x+6}$.

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{3x^2-2x-16}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-8x+3}{2x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+x-1}{3x^2+17x-6}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x^3-x-6}$.

8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{x^3-5x+12}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-5x+1}{4x^2-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^3-2x+4}$.

11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{2x^2-3x-5}$.

12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{3x^2-5x-12}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4x-12}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+5x-14}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x-2}{x^3-1}$.

16. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+x}{2x^4-x^2-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{3x^2-x-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} \dfrac{9x^2-3x-2}{3x^2-2x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+5x-14}$.

28. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4x-12}$.

29. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-8x+3}{2x-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{3x^2+x-2}$.

Завдання 3. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x+1}-\dfrac{x^2+1}{2}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{1}{x-4}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+4}-x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2+4}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{2x-1}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}-\dfrac{x}{2}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{3x-1}-\dfrac{x}{5}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{5x^2+1}-\dfrac{x^2}{3x+7}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x-x^2}-\dfrac{5-3x^2}{3x+1}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-3x^3}{2x^2+x-1}+\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3-1}-x\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{x+1}-\dfrac{10+x^3}{x^2+1}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^3}{5x^2}+\dfrac{3x^5}{2x^4}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^4}{8x^3-1}-\dfrac{2x^4+3}{2x^3-3x}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{6x+4}-\dfrac{3+x^3}{x^2+2x}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2x^3}{2x^2+3}+\dfrac{3x^4+2}{8x^3-x}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{x+7}-\dfrac{x^5-x^4}{x^4+3x^2}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-7}+\frac{5-x^4}{4x^3-x}\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{10x^2+x}+\frac{x^2+5}{3x-7}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{4x-5}-\frac{x^3+3x}{2x^2-5}\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{2x-9}-\frac{6x^3+5}{4x^2+1}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^3-1}{3x+5}-\frac{x^2+3x}{5x-1}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{5x^2+2x}+\frac{3x^4}{2x^3-x^2+7}\right)$.

Завдання 4. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+4x^2}-\sqrt{x^4+4x^2-5}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+9}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x+5}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-5}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4+7}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x+1)}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-2}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

17. $\lim\limits_{x\to-7}\frac{\sqrt{2-x}-3}{x^2-49}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{5x^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

20. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2-25}$.

21. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{16-x^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x+2}}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{7x+2}-2x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$.

29. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{\sqrt{12+x}-3}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+11}-4}{x^2-1}$.

Завдання 5. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\cos x-\cos 3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin\left(x^3+1\right)}{x^2+3x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{\operatorname{tg}\left(x^2-25\right)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-3x+2\right)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{x\operatorname{tg}2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+7x\right)\operatorname{ctg}4x$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin\left(x^2+2x-3\right)}{1-\cos(x-1)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(x^2-3x\right)}{\operatorname{tg}(x-3)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 4x}{\operatorname{arctg}\left(x^2+x\right)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{1-\cos 4x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 7x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{3}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\cos(x-3)}{\operatorname{tg}\left(x^2-3x\right)}$.

14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1-\cos(x+3)}{x^2+4x+3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(3x^2-6x\right)}{\sin\left(x^2-4x\right)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}^2\sqrt{7x}}{1-\cos 2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\sqrt{x-2}}{1-\cos(x-2)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos^2 4x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\sqrt{5x}}{1-\cos^2 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)\mathrm{ctg}\,3x$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos 2x\right)\mathrm{ctg}\,4x$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x\,\mathrm{tg}\,x}-2}{x^2-x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\,\mathrm{arctg}(x-2)}{\sin x-\sin 2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 8x}{\mathrm{arctg}\left(4x^2+x\right)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+9x\right)\mathrm{ctg}\,5x$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin\left(2x^2-x-3\right)}{\mathrm{tg}\left(x^2+x\right)}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos 4x}}{x\sin 5x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos 9x}}{\mathrm{tg}^2\sqrt{7x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\arcsin(x-3)}{\sin x-\sin 3}$.

Завдання 6. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-4}\right)^{x^2+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{5+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{2x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-3x}{1-3x}\right)^{x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{2x-7}{x-2}\right)^{\frac{2}{x-5}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{\frac{x}{3}+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{3x-2}\right)^{\frac{5}{x^2-1}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x^2}{3-x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-5}{x-2}\right)^{\frac{x+1}{x-3}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{2x-1}{x-1}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{x-3}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{5x-2}\right)^{\frac{3}{x-1}}$.

15. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{2-x}{2x+11}\right)^{\frac{3x+2}{x+3}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{5x-4}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

17. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^{\frac{-x}{x+1}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-3}{x^2-5x+9}\right)^{2x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{4}{x-1}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^4)^{\frac{5}{7x^2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{4}{x^2-9}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{5}{x^2-5x+6}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{3x-2}\right)^{\frac{4}{x-1}}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+7x^2\right)^{\frac{4}{5x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{7x-4}$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^{\frac{4}{x+1}}$.

28. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{3-x}{4x+18}\right)^{\frac{x+4}{x+3}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{3x+4}{x^2-x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^2+5x}{3x^2-7x}\right)^{x^2+x}$.

Завдання 7. Порівняти нескінченно малі за умови, що $x\to x_0$:

1. $f(x)=\operatorname{arctg}2x^2,\ \varphi(x)=1-\cos^3 x,\ x\to 0.$
2. $f(x)=\sin\frac{1}{x},\ \varphi(x)=1-\cos\frac{1}{x},\ x\to\infty.$
3. $f(x)=e^x-e^{-x},\ \varphi(x)=\ln(1+\sin 4x),\ x\to 0.$
4. $f(x)=\operatorname{tg}(x-2),\ \varphi(x)=\sqrt{x+2}-2,\ x\to 2.$
5. $f(x)=e^{7x}-e^{2x},\ \varphi(x)=\ln(1+5x),\ x\to 0.$
6. $f(x)=\operatorname{tg}\left(x^2-3x+2\right),\ \varphi(x)=x-1,\ x\to 1.$
7. $f(x)=\sin 7x-\sin 6x,\ \varphi(x)=\operatorname{tg}3x,\ x\to 0.$
8. $f(x)=\arcsin\left(x^2-4\right),\ \varphi(x)=x^2-5x+6,\ x\to 2.$
9. $f(x)=e^{x^2}-e,\ \varphi(x)=\ln(2-x),\ x\to 1.$

10. $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x$, $\varphi(x)=\operatorname{tg}3x$, $x\to 0$.

11. $f(x)=x^3+1$, $\varphi(x)=\sin\left(\sqrt{5+x}-2\right)$, $x\to -1$.

12. $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2}{4+x^3}$, $\varphi(x)=\ln\left(1+7x^2\right)$, $x\to 0$.

13. $f(x)=\sin 2x-2\sin x$, $\varphi(x)=x^2$, $x\to 0$.

14. $f(x)=\operatorname{tg}5x$, $\varphi(x)=\sqrt{16-x^2-x}-4$, $x\to 0$.

15. $f(x)=\sqrt{x^2+9}-3$, $\varphi(x)=\cos 2x-\cos 4x$, $x\to 0$.

16. $f(x)=\sqrt{x}-2$, $\varphi(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x-4}$, $x\to 4$.

17. $f(x)=e^x-e$, $\varphi(x)=\sqrt{x+8}-3$, $x\to 1$.

18. $f(x)=\sin\left(4-x^2\right)$, $\varphi(x)=\sqrt{x+7}-3$, $x\to 2$.

19. $f(x)=\ln(x+3)$, $\varphi(x)=2^{\sqrt{6+x}}-4$, $x\to -2$.

20. $f(x)=\sqrt{x^2+3}-2$, $\varphi(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$, $x\to 1$.

21. $f(x)=\sin 2x-\sin 4x$, $\varphi(x)=e^{x^2+4x}-1$, $x\to 0$.

22. $f(x)=\arcsin\left(x^2+2x-3\right)$, $\varphi(x)=\sqrt{x^2+3}-2$, $x\to 1$.

23. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2-1\right)$, $\varphi(x)=\sin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)$, $x\to 1$.

24. $f(x)=e^{x^2-2x+1}-1$, $\varphi(x)=\ln x^2$, $x\to 1$.

25. $f(x)=\operatorname{arctg}4(x-2)$, $\varphi(x)=\ln(x-1)$, $x\to 2$.

26. $f(x)=\sqrt{3x+1}-2$, $\varphi(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$, $x\to 1$.

27. $f(x)=\ln\left(1+4\sqrt[3]{x}\right)$, $\varphi(x)=2\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^2}$, $x\to 0$.

28. $f(x)=6^{x^2+x-1}-6$, $\varphi(x)=\arcsin(x-1)$, $x\to 1$.

29. $f(x)=1-\cos(x+1)$, $\varphi(x)=\sqrt{x+2}-1$, $x\to -1$.

30. $f(x)=\sin\left(x^2-4x-5\right)$, $\varphi(x)=\ln(3+2x)$, $x\to -1$.

Завдання 8. Дослідити на неперервність:

1. $y=\dfrac{5x}{x^3-1}$.

2. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

3. $y=\dfrac{5}{2+3^{\frac{4}{x+1}}}$.

4. $y=\dfrac{5}{x^2-4}$.

5. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-3}$.

6. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+4}$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

8. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5}$.

9. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{x-6}$.

10. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{x+2}$.

11. $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{4}{x+3}}}$.

12. $y=\dfrac{1}{1+7^{\frac{2}{x-5}}}$.

13. $y=\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

14. $y=\dfrac{3}{(x-7)^2}$.

15. $y=\dfrac{5x+4}{x^3-27}$.

16. $y=\dfrac{|x|}{x}$.

17. $y=\dfrac{x^3+x}{2|x|}$.

18. $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

19. $y=\dfrac{|x-4|}{x-4}$.

20. $y=\dfrac{7}{x^2+2x}$.

21. $y=\dfrac{1}{x+1}+2^{\frac{1}{x}}$.

22. $y=\dfrac{4}{x-3}+5^{\frac{1}{x}}$.

23. $y=\dfrac{5}{1-3^{x+2}}$.

24. $y=\operatorname{arctg}5^{\frac{1}{x-1}}$.

25. $y=\operatorname{arctg}3^{\frac{4}{x+2}}$.

26. $y=\dfrac{x+3}{9-3^x}$.

27. $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{x+1}$.

28. $y=\dfrac{3x}{4+7^{\frac{1}{x}}}$.

29. $y=\dfrac{3}{5+2^{\frac{x}{x+7}}}$.

30. $y=\dfrac{2x+9}{1-2^{x+3}}$.

10. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

Контрольні питання

1. Поняття множини. Підмножина. Дії над множинами.

2. Поняття функції. Що таке область визначення функції, область значень функції?

3. Границя числової послідовності.

4. Границя функції за умови $x \to x_0$, $x \to \infty$.

5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Зв'язок між ними.

6. Властивості нескінченно малих функцій.

7. Класифікація нескінченно малих функцій.

8. Границя суми, добутку й частки функцій.

9. Ознаки існування границі функції.

10. Перша визначна границя. Наслідки.

11. Друга визначна границя. Наслідки.

12. Поняття неперервної функції у точці, на інтервалі.

13. Неперервність суми, добутку й частки функцій.

14. Неперервність складної і оберненої функції.

15. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Варіант 1

1. Продовжити речення: границя добутку скінченної кількості функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;

б) сумі значень границь;

в) сумі значень похідних цих функцій;

г) не існує.

2. Укажіть всі твердження, які справедливі для графіка функції, зображеного на рисунку 1.1:

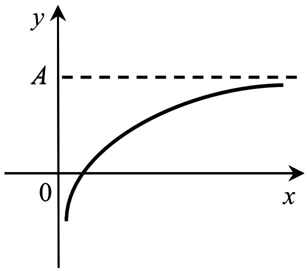


Рисунок 1.1

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

г) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$.

А	Б	В	Г
а, в	а, в	б, г	в, г

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+6x^5-14x^7}{7x^7-2x^5+3x^3}$.

А	Б	В	Г
∞	-2	3	-3

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^3+6x^5-14x^7}{7x^7-2x^5+3x^3}$.

А	Б	В	Г
∞	0	-2	3

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{4x-2}\right)^x$.

А	Б	В	Г
0	∞	3/4	$-1/2$

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sin(x-5)}{x-5}$.

А	Б	В	Г
не існує	1	-1	0

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)}$.

А	Б	В	Г
3	-1	0	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=\mathrm{tg}(x+2)$ і $\beta(x)=x+2$ за умови, що $x\to-2$.

А	Б	В	Г
еквівале-нтні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівня-ти

9. Точки, в яких функція не є неперервною, називаються:

а) точками екстремуму;

б) критичними точками;

в) точками розриву;

г) точками, в яких функція не існує.

10. Точка $x=3$ для функції $y=\dfrac{7}{x+5}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;

б) неусувною точкою розриву I роду;

в) точкою неперервності;

г) точкою розриву II роду.

Варіант 2

1. Продовжити речення: границя суми скінченної кількості функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;

б) сумі значень границь;

в) сумі значень похідних цих функцій;

г) не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$, тоді $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
5	–5	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4 + 2x^5 - 32x^8}{8x^8 - 5x^5 + 14x^4}$.

А	Б	В	Г
–32	∞	–4	0

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x^4 + 2x^5 - 32x^8}{8x^8 - 5x^5 + 14x^4}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{2}$	∞	2	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x-3}{4+2x} \right)^{x^2+1}$.

А	Б	В	Г
∞	$\dfrac{7}{2}$	$-\dfrac{3}{4}$	0

6. Обчислити $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\mathrm{tg}(x+3)}{2(x+3)}$.

А	Б	В	Г
0	∞	$\dfrac{1}{2}$	1

7. Обчислити $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3^{x-2} - 1}{\ln(1 + (x-2))}$.

А	Б	В	Г
$\ln 3 - 1$	$\ln 3$	0	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ та $\beta(x) = \dfrac{7}{x}$ за умови, що $x \to \infty$.

А	Б	В	Г
еквівалентні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівняти

9. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу, то вона називається:

а) монотонною на цьому інтервалі;
б) зростаючою на цьому інтервалі;
в) спадаючою на цьому інтервалі;
г) неперервною на цьому інтервалі.

10. Точка $x = -5$ для функції $y = \dfrac{7}{x+5}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 3

1. Продовжити речення: границя сталої величини c дорівнює …

а) числу до якого наближається x;
б) сталій величині c;
в) 0;
г) ∞.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3,$ та $f(x)$ – парна, тоді $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	–3	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3 + 5x^6 - 12x^7}{2x^7 - 7x^6 + 3x^3}$.

А	Б	В	Г
3	∞	–6	–4

4. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x^3 + 5x^6 - 12x^7}{2x^7 - 7x^6 + 3x^3}$.

А	Б	В	Г
2	0	∞	–6

5. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x^2 - 17}{6x^2 + x} \right)^{4x-1}$.

А	Б	В	Г
∞	0	$\dfrac{1}{2}$	–17

6. Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arcsin(4x - 4)}{x^2 - x}$.

А	Б	В	Г
0	4	∞	–4

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{\ln(1+x)}$.

А	Б	В	Г
∞	0	7	-1

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin(x-3)$ та $\beta(x)=2(x-3)$ за умови, що $x\to 3$.

А	Б	В	Г
еквівале-нтні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$	одного порядку малості	не можна порівня-ти

9. Якщо значення границі функції та значення самої функції в даній точці рівні, то функція в цій точці називається:

а) зростаючою;
б) розривною;
в) неперервною;
г) монотонною.

10. Точка $x=2$ для функції $y=\dfrac{x^2+1}{x+2}$ буде:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 4

1. Виберіть вірне твердження:
а) значення границі функції не єдине;
б) сталу величину не можна виносити за знак границі;
в) сталу величину можна виносити за знак границі;
г) границя сталої величини дорівнює нулю.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, тоді $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
1	-1	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3 + 7x^5 - 3x^7}{9x^7 - 4x^5 + 8x^3}$.

А	Б	В	Г
∞	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$	0

4. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^3 + 7x^5 - 3x^7}{9x^7 - 4x^5 + 8x^3}$.

А	Б	В	Г
0	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{1}{2}$

5. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{8x^2 - 5x}{4x^2 + x} \right)^{3 + x^3}$.

А	Б	В	Г
∞	-5	$-\dfrac{5}{4}$	8

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{x-2}$.

А	Б	В	Г
0	4	1	–4

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\ln(1+(x+3))}{2(x+3)}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{2}$	1	0	∞

8. При $x\to 1$ укажіть всі вірні твердження:

а) $\sin x \sim x$;

б) $\sin(x+1)\sim(x+1)$;

в) $\sin(x-1)\sim(x-1)$;

г) $\sin\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$.

9. Відомо, що $f(x)$ – неперервна функція. Яке з наступних тверджень справедливе?

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=1$;

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=\infty$;

в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=0$;

г) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=-\infty$.

10. Точка $x=5$ для функції $y=\dfrac{x^3-1}{x-4}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 5

1. Продовжити речення: функція може мати в даній точці…

а) дві границі;

б) множину границь;

в) одну границю;

г) кілька границь.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0,$ тоді $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	–3	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x^6-14x^7}{7x^7-3x^6+15x^3}$.

А	Б	В	Г
–2	–14	$\dfrac{5}{7}$	$-\dfrac{14}{15}$

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+7x^6-14x^7}{7x^7-3x^6+15x^3}$.

А	Б	В	Г
0	$\dfrac{1}{3}$	∞	$-\dfrac{14}{15}$

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-x^3}{x^3+3}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{5}{3}$	∞	не існує	1

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x\cdot \operatorname{tg} 2x}$.

А	Б	В	Г
0	∞	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+x)}$.

А	Б	В	Г
-1	4	0	∞

8. Відомо, що при $x\to x_0$ нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні. Яке з наступних тверджень має місце при $x\to x_0$?

А	Б	В	Г
$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	$\alpha(x)$ більш низького порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівняти

9. Укажіть, в якому випадку в точці c функція $f(x)$ має усувний розрив:

а) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-5;$

б) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=5,\ f(c)=5;$

в) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-\infty;$

г). $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-5,\ f(c)=-5.$

10. Точка $x=7$ для функції $y=\dfrac{\ln x}{x-4}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 6

1. Продовжити речення: границя добутку функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь кожної функції окремо;
б) сумі значень границь кожної функції окремо;
в) сумі значень похідних цих функцій;
г) не існує.

2. Нехай $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1\,000\,000\,000.$ Укажіть всі вірні твердження:

а) $f(x)$ обмежена в околі точки $x = 2$;

б) $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to 2$;

в) $\dfrac{f(x)}{2} \to 500\,000\,000$ при $x \to 2$;

г) $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала при $x \to 2$.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^5 + 3x^6 - 2x^7}{8x^7 - 6x^6 + 2x^5}$.

А	Б	В	Г
-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{14x^5 + 3x^6 - 2x^7}{8x^7 - 6x^6 + 2x^5}$.

А	Б	В	Г
$\frac{7}{4}$	0	7	-1

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 7}{5 + x^3}$.

А	Б	В	Г
0	∞	-1	1

6. Яка границя є визначною ?

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}=0$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}e^{x+1}=e^3$.

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-e^{x-3}}{\sin(x^2-9)}$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	0	не існує

8. Відомо, що при $x\to 0$ $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі та $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1000$. Яке з наступних тверджень справедливе при $x\to 0$?

А	Б	В	Г
$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	$\alpha(x)$ більш низького порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості

9. Відомо, що $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=-5,\ \lim\limits_{x\to c+0}f(x)=-5,\ f(c)=-5.$ Яке з наступних тверджень має місце?

а) c – точка неусувного розриву І роду;
б) c – точка усувного розриву І роду;
в) c – точка розриву ІІ роду;
г) c – точка неперервності.

10. Точка $x=2$ для функції $y=\dfrac{4}{2-x}$ є:

а) усувною точкою розриву І роду;
б) неусувною точкою розриву І роду;
в) точкою розриву ІІ роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 7

1. Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$, тоді $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
–5	0	∞	не існує

2. Продовжити речення: границя суми двох функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;
б) сумі значень границь;
в) сумі значень похідних цих функцій;
г) не існує.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{16x^3 - 5x^6 + 8x^7}{4x^7 + 9x^6 - 2x^3}$.

А	Б	В	Г
–8	4	2	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{16x^3 - 5x^6 + 8x^7}{4x^7 + 9x^6 - 2x^3}$.

А	Б	В	Г
–8	0	∞	–4

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+4}{x-2}\right)^{x^2+1}$.

А	Б	В	Г
3	∞	–2	0

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2} (x-2) \cdot \sin\dfrac{1}{x-2}$.

А	Б	В	Г
1	–1	0	не існує

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}$.

А	Б	В	Г
∞	0	2	-1

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=e^{x-3}-1$ та $\beta(x)=x-3$ за умови, що $x\to 3$.

А	Б	В	Г
$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	$\alpha(x)$ більш низького порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості

9. Серед графіків, які приведені на рисунку 7.1, укажіть всі, на яких функція має в точці a розрив II роду.

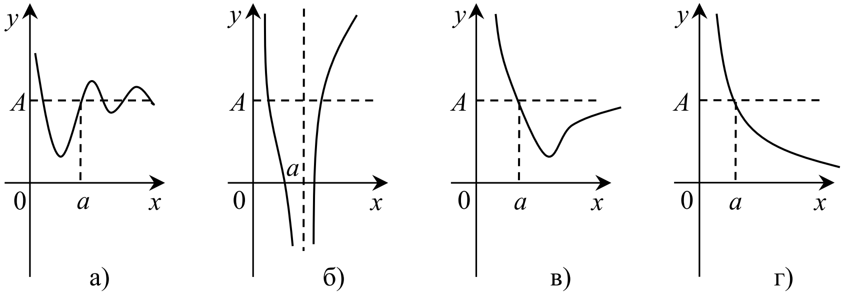


Рисунок 7.1

А	Б	В	Г
а	б	в, г	г

10. Точка $x=4$ для функції $y=\dfrac{7e^x}{x-1}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності

Варіант 8

1. Продовжити речення: границя добутку двох функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …
а) добутку значень границь;
б) сумі значень границь ;
в) сумі значень похідних цих функцій;
г) не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0,$ тоді $\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^2 f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
4	∞	0	3

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21x^5+2x^6-3x^7}{18x^7-14x^6+7x^4}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{7}{6}$	$-\dfrac{3}{7}$	$-\dfrac{1}{6}$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{21x^5+2x^6-3x^7}{18x^7-14x^6+7x^4}$.

А	Б	В	Г
0	3	$-\dfrac{3}{7}$	∞

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}(6-4x)(2x+1)$.

А	Б	В	Г
12	6	–8	–6

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-3}\right)^{3x^4+1}$.

А	Б	В	Г
∞	0	$\dfrac{2}{5}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$

7. Обчислити $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^{x-3} - 1}{x^2 - 9}$.

А	Б	В	Г
1/9	0	1/6	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x) = \mathrm{tg}(x^2 + x)$ та $\beta(x) = x + 1$ за умови, що $x \to -1$.

А	Б	В	Г
еквівале-нтні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівняти

9. Серед графіків, які приведені на рисунку 8.1, укажіть всі, на яких функція в точці a має усувний розрив І роду.

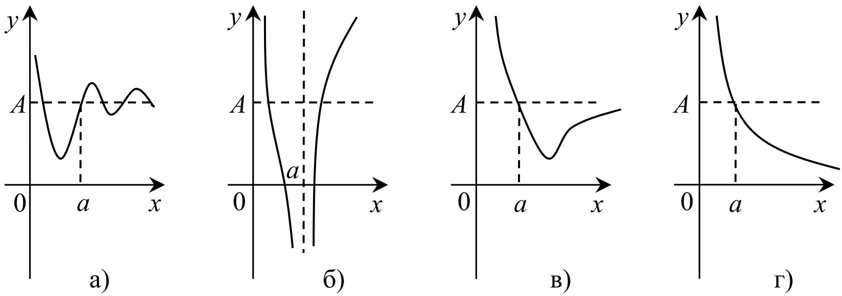


Рисунок 8.1

А	Б	В	Г
а	таких немає	в, г	б

10. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x = 1$.

а) $\sin(x-1)$; б) $\dfrac{x-1}{\sin x}$; в) $\dfrac{\sin x}{x-1}$; г) $\dfrac{\sin x}{x} - 1$.

А	Б	В	Г
а, б, г	б, в	в, г	а, г

Варіант 9

1. Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$, тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-3\right)\cdot x$ дорівнює:

А	Б	В	Г
∞	$-\infty$	-3	не існує

2. Серед графіків, які приведені на рисунку 9.1, укажіть всі, на яких функція неперервна в точці a.

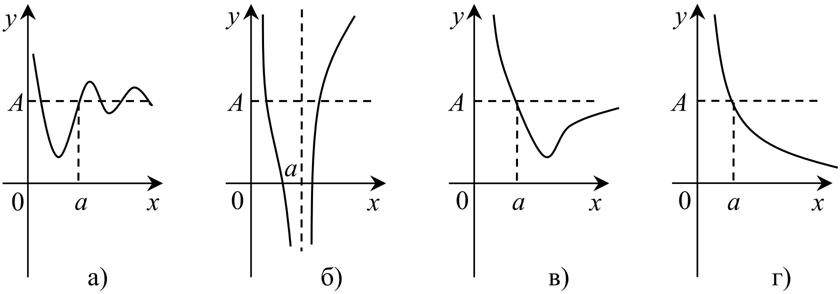


Рисунок 9.1

А	Б	В	Г
а, в, г	таких немає	б, в	г

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+6x^3-14x^5}{7x^5-2x^3+3x}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{9}{7}$	$-\dfrac{14}{3}$	-2	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x+6x^3-14x^5}{7x^5-2x^3+3x}$.

А	Б	В	Г
3	$-14/3$	-3	∞

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

А	Б	В	Г
-4	4	0	∞

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{x^2}$.

А	Б	В	Г
1	∞	-1	не існує

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{7-x}-2}{x^2-3x}$.

А	Б	В	Г
$-1/12$	0	3	∞

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin\left(x^3-1\right)$ та $\beta(x)=x-1$ за умови, що $x\to 1$.

А	Б	В	Г
не можна порівняти	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівалентні	одного порядку малості

9. Відомо, що $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні в точці $x=1$, $f(1)\neq 0, g(1)=0$. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x=1$.

а) $f(x)+g(x)$; б) $\dfrac{f(x)+g(x)}{x-1}$; в) $f(x)\cdot g(x)$; г) $\dfrac{x-1}{f(x)\cdot g(x)}$.

А	Б	В	Г
а, б, г	а, в	в, г	а, г

10. Точка $x=4$ для функції $y=\dfrac{x+4}{x-4}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 10

1. Серед графіків, приведених на рисунку 10.1, укажіть ті, які відповідають формулі $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

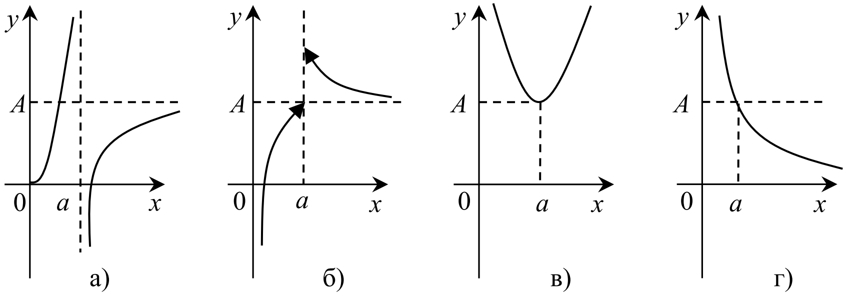


Рисунок 10.1

А	Б	В	Г
а	таких немає	г, в	а, б

2. Продовжити речення: функція може мати в одній точці…

а) дві границі;
б) множину границь;
в) одну границю;
г) кілька границь.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x^3-6x^4}{3x^4-7x^3+15x^2}$.

А	Б	В	Г
–2	1/3	0	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+4x^3-6x^4}{3x^4-7x^3+15x^2}$.

А	Б	В	Г
–2	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x \to 2}(x^2+1)(2x-3)$.

А	Б	В	Г
–5	7	5	–7

6. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

А	Б	В	Г
1	-1	∞	не існує

7. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3^{4x}-1}{x^2-2x}$.

А	Б	В	Г
$-2\ln 3$	1/2	$4\ln 3$	0

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x) = \operatorname{arctg}(x-2)^2$ та $\beta(x) = x^2 - 4x + 4$ за умови, що $x \to 2$.

А	Б	В	Г
не можна порівняти	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівалентні	одного порядку малості

9. Відомо, що $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні в точці $x = 3$, $f(3) = 0, g(3) \neq 0$. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x = 3$.

а) $f(x) - g(x)$; б) $\dfrac{f(x)}{x-3}$; в) $f(x)\cdot g(x)$; г) $\dfrac{x^2-3x}{f(x)\cdot g(x)}$.

А	Б	В	Г
а, б, г	а, в	в, г	а, г

10. Точка $x = -5$ для функції $y = \dfrac{x+5}{x}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 11

1. Продовжити речення: границя суми двох функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;

б) сумі значень границь;

в) сумі значень похідних цих функцій;

г) не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=5,$ тоді $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-5}{2x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$-\dfrac{5}{2}$	0	-5	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^5-32x^8}{8x^8-5x^5+14x^4}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{7}{8}$	-4	∞	$-\dfrac{16}{7}$

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^4+2x^5-32x^8}{8x^8-5x^5+14x^4}$.

А	Б	В	Г
0	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{2}{5}$	∞

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-7}{5+x}$.

А	Б	В	Г
25	2	$-1,4$	-2

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

А	Б	В	Г
1	-1	0	не існує

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{x-2}-1}{\ln(1+(x-2))}$.

А	Б	В	Г
$\ln 3-1$	$\ln 3$	0	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=e^{\sin x}-1$ та $\beta(x)=\operatorname{tg}5x$ за умови, що $x\to 0$.

А	Б	В	Г
еквівале-нтні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівня-ти

9. Відомо, що $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=18$. Яке з наступних тверджень справедливе?

а) c – точка неусувного розриву I роду;
б) c – точка усувного розриву I роду;
в) c – точка розриву II роду;
г) c – точка неперервності.

10. Точка $x=2$ для функції $y=\dfrac{7x}{x-2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 12

1. Серед графіків, приведених на рисунку 12.1, укажіть ті, які мають в точці *a* розрив II роду.

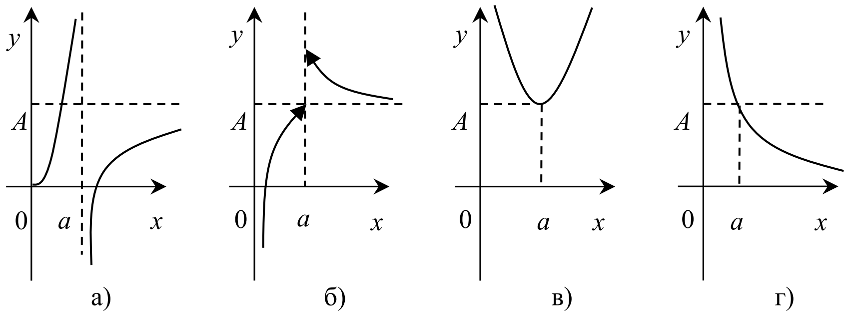


Рисунок 12.1

А	Б	В	Г
в	а, в	а	г

2. Якщо $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=5$, та $f(x)$ – непарна, тоді $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
–5	5	∞	0

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4-11x^5+13x^6}{2x^4+5x^5-3x^6}$.

А	Б	В	Г
9/2	–11/5	–13/3	–3

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^4-11x^5+13x^6}{2x^4+5x^5-3x^6}$.

А	Б	В	Г
–13/3	9/2	11/3	–11/5

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x^2-3x}{5x^2+7}\right)^{\frac{4}{x}}$.

А	Б	В	Г
2	1	$-3/5$	∞

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\mathrm{tg}^2\sqrt{x}}$.

А	Б	В	Г
0	∞	$49/2$	1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{e^{2x+8}-1}{\ln(5+x)}$.

А	Б	В	Г
∞	0	2	-1

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\arcsin\left(x-2\right)$ та $\beta(x)=5x-10$ за умови, що $x\to 2$.

А	Б	В	Г
не можна порівняти	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівалентні	одного порядку малості

9. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x=-3$.

а) $\mathrm{tg}(x+3)$; б) $\dfrac{x+3}{\mathrm{tg}\,x}$; в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x+3}$; г) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}-1$.

А	Б	В	Г
а, б	в, г	б, г	а, б, г

10. Точка $x=-5$ для функції $y=\dfrac{x^2+2}{(x+5)x}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 13

1. Виберіть вірне твердження:
а) значення границі функції не єдине;
б) границя суми функцій дорівнює добутку границь;
в) сталу величину можна виносити за знак границі;
г) границя сталої величини дорівнює нулю.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, тоді $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+5}{f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
5	∞	7	0

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{13x^6 - 5x^7 + 2x^8}{4x^6 + 3x^7 - x^8}$.

А	Б	В	Г
$13/4$	$-5/3$	-2	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{13x^6 - 5x^7 + 2x^8}{4x^6 + 3x^7 - x^8}$.

А	Б	В	Г
$-5/3$	$13/4$	-2	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x)^{3x+1}$.

А	Б	В	Г
1	$\pi/2$	$-\infty$	∞

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{arctg} 7x}{\sin^2 \sqrt{5x^2 + x}}$.

А	Б	В	Г
∞	0	$7/5$	1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln\left(1+(x-5)^2\right)}{x^2-5x}$.

А	Б	В	Г
1	5	0	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=\sin x^2$ та $\beta(x)=1-\cos 2x$ за умови, що $x\to 0$.

А	Б	В	Г
еквівалентні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівняти

9. Серед графіків, які приведені на рисунку 13.1, укажіть всі, на яких функція в точці a неперервна.

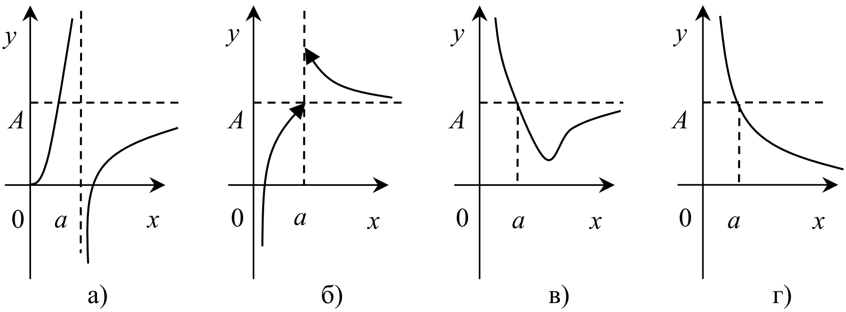


Рисунок 13.1

А	Б	В	Г
а	таких немає	в, г	б

10. Точка $x=3$ для функції $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2+x}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;

б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 14

1. Нескінченно мала величина $\alpha(x)$ еквівалентна $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq 0$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$, тоді $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+7}{x^2\cdot f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	0	7	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-10x-15}{x^3-17x+25}$.

А	Б	В	Г
5	0	$-\dfrac{3}{5}$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-10x-15}{x^3-17x+25}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{5}$	∞	$-\dfrac{3}{5}$	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{5-x}\right)^{\frac{8}{x+2}}$.

А	Б	В	Г
1	e	∞	$\dfrac{1}{5}$

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{4x^2}{x^2-1}}+\frac{3x^2-1}{9x^3+2}\right)$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$e^4+\frac{1}{3}$	$e^{-\frac{1}{4}}$	e^4

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\mathrm{tg}(x+5)}{2x+10}$.

А	Б	В	Г
1	∞	0	1/2

8. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha(x)=e^{x-2}-1$ та $\beta(x)=\arcsin(x-2)$ за умови, що $x\to2$.

А	Б	В	Г
одного порядку малості	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівале-нтні	не можна порівня-ти

9. Відомо, що $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=3$. Яке з наступних тверджень має місце?

а) c – точка неусувного розриву I роду;
б) c – точка усувного розриву I роду;
в) c – точка розриву II роду;
г) c – точка неперервності.

10. Точка $x=2$ для функції $y=\frac{5}{(x-2)^4}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 15

1. Продовжити формулу: $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)$ дорівнює …

а) $c+\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

б) $c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

в) $c-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

г) 0.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-3$, тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	–3	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-9x^2+7x}{4x^3+2x^2-14x}$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{9}{2}$	$\dfrac{5}{4}$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-9x^2+7x}{4x^3+2x^2-14x}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{5}{4}$	$-\dfrac{9}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7x+6}{-7x+2}\right)^{4x^2}$.

А	Б	В	Г
1	–1	3	0

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin(x+1)}{x^2-1}$.

А	Б	В	Г
0	∞	$-\dfrac{1}{2}$	1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^{x-3}-1}{\ln(1+(x-3))}$.

А	Б	В	Г
$\ln 4-1$	$\ln 4$	0	1/3

8. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\mathrm{tg}\dfrac{3}{x^2}$ та $\beta(x)=\dfrac{5}{x^4}$ за умови $x\to\infty$.

А	Б	В	Г
$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	$\alpha(x)$ більш низького порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівняти

9. Укажіть, в якому випадку в точці $x=3$ функція $f(x)$ має розрив II роду:

а) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=-7;$

б) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=7,\ f(3)=7;$

в) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=-\infty;$

г). $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=-7,\ f(3)=-7.$

10. Точка $x=2$ для функції $y=\mathrm{tg}\dfrac{5}{x-2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;

б) неусувною точкою розриву I роду;

в) точкою розриву II роду;

г) точкою неперервності.

Варіант 16

1. Серед графіків, приведених на рисунку 16.1, укажіть ті, які мають в точці a неусувний розрив I роду.

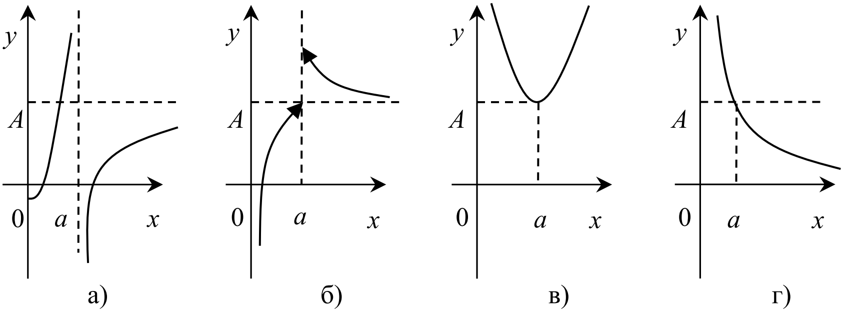


Рисунок 16.1

А	Б	В	Г
а, г	таких немає	в	б

2. Якщо $f(x) = A + \alpha(x)$, де A – стала величина та $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$A+\alpha(x)$	0	A	$f(x)+x_0$

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-5x}{2x^3-x+13}$.

А	Б	В	Г
2	$-5/13$	∞	$-\infty$

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+2x^2-5x}{2x^3-x+13}$.

А	Б	В	Г
2	0	-2	∞

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2-4}{5x+1}\right)^{x^2+2}$.

А	Б	В	Г
–4	16	3/5	0

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4^{\frac{3x^2+5}{6x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^3+4x}+4x}{\sqrt{x^5-4x^3}-x}\right)$.

А	Б	В	Г
4	2	0	∞

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{x^2}}{1-\cos\frac{5}{x}}$.

А	Б	В	Г
8/25	4/28	∞	4

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=(x+5)^2$ та $\beta(x)=\operatorname{tg}(x^2-25)$ за умови, що $x\to-5$.

А	Б	В	Г
не можна порівняти	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівалентні	одного порядку малості

9. Функція $f(x)$ в точці $x=2$ має усувний розрив I роду та $\lim\limits_{x\to2-0}f(x)=1$. Тоді $\lim\limits_{x\to2+0}f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
–1	1	0	інша відповідь

10. Точка $x=1$ для функції $y=5^{\frac{4}{x-1}}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 17

1. Продовжити формулу: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
1	0	не існує	∞

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=0$, тоді $\lim\limits_{x\to 5}(x-2)^3\cdot f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
-8	0	27	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^7+5x^8-13x^9}{-2x^7-3x^8+26x^9}$.

А	Б	В	Г
2	$\dfrac{2}{13}$	$-\dfrac{1}{2}$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-7x^7+5x^8-13x^9}{-2x^7-3x^8+26x^9}$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{7}{2}$	0	не існує

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)\cdot\log_2(x+7)$.

А	Б	В	Г
21	3	6	2

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+18x}{3x+\sqrt{x}}-5^{\frac{1}{x^2+4}}\right)$.

А	Б	В	Г
5	6	0	-1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{5x^2}}{x\cdot\sin 2x}$.

А	Б	В	Г
-5	$1/2$	$-5/2$	0

8. При $x\to -2$ укажіть всі вірні твердження:

а) $a^{x+2}-1\sim(x+2)\ln a$;

б) $a^{x-2}-1\sim(x-2)\ln a$;

в) $a^{x}-1\sim(x+2)$;

г) $a^{x+2}-1\sim\dfrac{1}{x+2}$.

9. Функція $f(x)$ в точці $x=7$ має усувний розрив I роду та $\lim\limits_{x\to 7+0}f(x)=3$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 7-0}f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
-3	0	інша від-повідь	3

10. Точка $x=2$ для функції $y=e^{(x-2)^2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 18

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	∞	1	не існує

2. Нескінченно мала величина $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ є більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	∞	1	не існує

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21x^4+13x^5+28x^6}{7x^4+26x^5-14x^6}$.

А	Б	В	Г
2	∞	-2	3

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{21x^4+13x^5+28x^6}{7x^4+26x^5-14x^6}$.

А	Б	В	Г
2	3	0	-2

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3)e^{\ln(x+2)}$.

А	Б	В	Г
3	e^2	6	0

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^3+4x^2)}{1-\cos 2x}$.

А	Б	В	Г
2	-2	0	4

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$.

А	Б	В	Г
$1/24$	$3/4$	0	∞

8. При $x\to 3$ укажіть всі вірні твердження:

а) $e^{x-3}-1\sim x-3$;

б) $e^{x-3}-1\sim x+3$;

в) $e^{x}-1\sim x-3$;

г) $e^{x-3}-1\sim \dfrac{1}{x-3}$.

А	Б	В	Г
а, б	г	а	а, в

9. Укажіть, в якому випадку в точці c функція $f(x)$ має розрив ІІ роду:

а) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-3,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-3;$

б) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-3,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=3,\ f(c)=3;$

в) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-3,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-\infty;$

г). $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-3,\ \lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-3,\ f(c)=-3.$

10. Точка $x=7$ для функції $y=\dfrac{3x+1}{x^2-7x}$ є:

а) усувною точкою розриву І роду;

б) неусувною точкою розриву І роду;

в) точкою розриву ІІ роду;

г) точкою неперервності.

Варіант 19

1. Продовжити речення: границя добутку функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;

б) сумі значень границь;

в) сумі значень похідних цих функцій;

г) не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0,$ тоді $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)+3}{x+5}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	3/10	∞	3/5

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^3+7x^2}{10x^4+9x^3-x^2}$.

А	Б	В	Г
-7	1/2	$-1/3$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^4+3x^3+7x^2}{10x^4+9x^3-x^2}$.

А	Б	В	Г
0	1/2	-7	$-1/3$

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2+x-4}{5x-8}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

А	Б	В	Г
0	3/5	1/2	$-4/5$

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to -3}\left(2x-10x^2+5\right)\sin(x+3)$.

А	Б	В	Г
5	2	0	-10

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{4x}{5x^2+1}}+\frac{3+6x^3}{2x^3-13x}\right)$.

А	Б	В	Г
∞	0	4	$-3/13$

8. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sin(x+1)$ та $\beta(x)=(x+1)^2$ за умови, що $x\to -1$?

А	Б	В	Г
$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	$\alpha(x)$ більш низького порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівняти

9. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x=-3$.

а) $\sin(x+3)$; б) $\frac{x+3}{\sin x}$; в) $\frac{\sin x}{x+3}$; г) $\frac{\sin x}{x}-1$.

А	Б	В	Г
а, б, г	б, в	в, г	а, г

10. Точка $x=2$ для функції $y=\frac{x^2-x+1}{x-2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 20

1. Серед графіків, приведених на рисунку 20.1, укажіть ті, які відповідають формулі $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

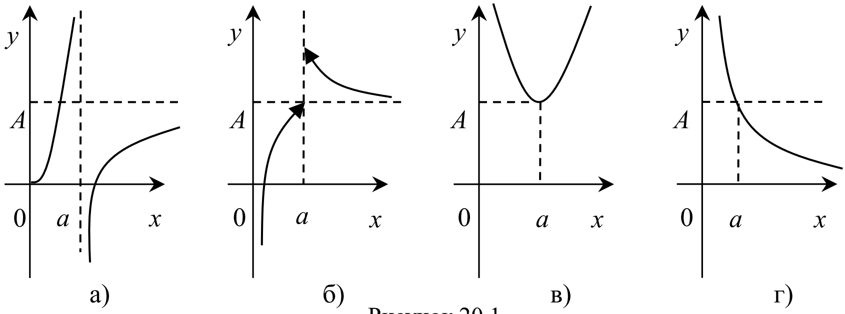


Рисунок 20.1

А	Б	В	Г
б	а, г	г	в

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, тоді $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+4}{f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
10	0	4	не існує

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+5x^2-12x^4}{8x^4-4x^2+2x}$.

А	Б	В	Г
$-3/2$	∞	-6	$3/4$

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x+5x^2-12x^4}{8x^4-4x^2+2x}$.

А	Б	В	Г
0	$3/4$	3	∞

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x+x^2)$.

А	Б	В	Г
-1	2	-3	-2

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{2x+3}$.

А	Б	В	Г
$-1/5$	не існує	0	-1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2+2x)}{x}$.

А	Б	В	Г
2	0	∞	-2

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)$ та $\beta(x)=4x^2$ за умови, що $x\to 0$.

А	Б	В	Г
не можна порівняти	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівалентні	одного порядку малості

9. Точки, в яких функція не є неперервною, називаються:

а) точками екстремуму;
б) критичними точками;
в) точками розриву;
г) точками, в яких функція не існує.

10. Точка $x=-7$ для функції $y=\dfrac{1}{(x+7)^2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 21

1. Продовжити речення: границя відношення двох функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;

б) сумі значень границь;

в) відношенню значень границь;

г) не існує.

2. Укажіть всі твердження, які справедливі для графіка функції, зображеного на рисунку 21.1:

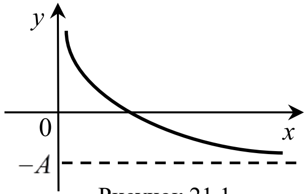


Рисунок 21.1

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-A$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

г) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$.

А	Б	В	Г
а, в	а, в	б, г	в, г

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-7x^3+9x^5}{2x^2+4x^4-7x^5}$.

А	Б	В	Г
–9/7	2	–7/4	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-7x^3+9x^5}{2x^2+4x^4-7x^5}$.

А	Б	В	Г
–9/7	2	–9/2	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{4x^2+2x-13}\right)^{x-7}$.

А	Б	В	Г
∞	0	3/4	–1/13

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2+2x)}{x+2}$.

А	Б	В	Г
не існує	2	-2	0

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{x\cdot\ln(1+5x)}$.

А	Б	В	Г
0	3/5	$-1/5$	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=\mathrm{tg}(x-3)$ і $\beta(x)=x-3$ за умови, що $x\to 3$.

А	Б	В	Г
еквівале-нтні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівня-ти

9. Укажіть, в якому випадку в точці $x=-2$ функція $f(x)$ має неусувний розрив I роду:

а) $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=-7;$

б) $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=7;$

в) $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=-\infty;$

г). $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=-7,\ \lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=-7.$

10. Точка $x=4$ для функції $y=\dfrac{3x}{x-4}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 22

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, де A – стала величина та $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$, тоді $f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$A+\alpha(x)$	A	$\alpha(x)$	$A\cdot\alpha(x)$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \cdot f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$+\infty$	$-\infty$	0	не існує

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15x^2 + 4x^3 - 10x^4}{5x^2 - 20x^4}$.

А	Б	В	Г
3	-2	$1/2$	$-1/5$

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{15x^2 + 4x^3 - 10x^4}{5x^2 - 20x^4}$.

А	Б	В	Г
3	-2	$1/2$	$-1/5$

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1} (5x+1)\log_3(4x+5)$.

А	Б	В	Г
20	25	5	12

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{(1-\cos 3x)}$.

А	Б	В	Г
0	$-2/9$	$2/3$	∞

7. Обчислити $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5^{x-3}-1}{\ln(1+(x-3))}$.

А	Б	В	Г
$\ln 5$	$\ln 3$	0	не існує

8. При $x \to -2$ укажіть всі вірні твердження:

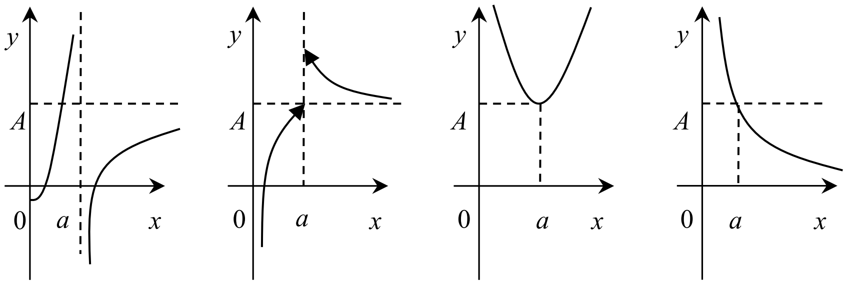
а) $\operatorname{tg} x \sim x$;

б) $\operatorname{tg}(x+2) \sim (x+2)$;

в) $\operatorname{tg}(x-2) \sim (x-2)$;

г) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$.

9. Серед графіків, приведених на рисунку 22.1, укажіть ті, де функція має в точці *a* розрив ІІ роду.



а) б) в) г)

Рисунок 22.1

А	Б	В	Г
г	таких немає	а	б, в

10. Точка $x = -7$ для функції $y = \dfrac{1}{(x+7)^2}$ є:

а) усувною точкою розриву І роду;

б) неусувною точкою розриву І роду;

в) точкою розриву ІІ роду;

г) точкою неперервності.

Варіант 23

1. Нескінченно мала величина $\alpha(x)$ одного порядку малості з $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$;

г) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -7$, тоді $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)+9}{x^2}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
9	0	2	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^3 - 9x^5 + 13x^9}{6x^3 + 8x^6 - 2x^9}$.

А	Б	В	Г
$-13/2$	$7/6$	$-7/2$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x^3 - 9x^5 + 13x^9}{6x^3 + 8x^6 - 2x^9}$.

А	Б	В	Г
0	$7/6$	$-13/2$	$-9/8$

5. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + 4\right) \operatorname{arctg}(3x+1)$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{\pi}{4}$	4	12	π

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+4x}{\sqrt{25x^2-x}}+7^{-x^2}\right)$.

А	Б	В	Г
-2	-4	$4/5$	0

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^x-5}{\ln x}$.

А	Б	В	Г
0	∞	-5	$5\ln 5$

8. При $x\to -3$ укажіть всі вірні твердження:

а) $\arcsin(x-3)\sim(x-3)$;

б) $\arcsin(x+3)\sim(x+3)$;

в) $\arcsin x \sim x$;

г) $\arcsin\dfrac{1}{x}\sim x$.

9. Функція $y=f(x)$ в точці $x=2$ має усувний розрив та $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1$. Тоді $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$ дорівнює

А	Б	В	Г
1	-2	0	∞

10. Точка $x=2$ для функції $y=\dfrac{3x-6}{x^2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 24

1. Продовжити речення: алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих…

а) є величина нескінченно мала;
б) не існує;
в) є величина нескінченно велика;
г) є величина стала.

2. Якщо функція $f(x)$ – непарна та $\lim\limits_{x\to-5} f(x)=3$, тоді $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	–3	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^9+10x^{10}+15x^{12}}{7x^9+2x^{10}-3x^{12}}$.

А	Б	В	Г
–5	∞	$\dfrac{13}{7}$	не існує

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{13x^9+10x^{10}+15x^{12}}{7x^9+2x^{10}-3x^{12}}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{13}{7}$	5	–5	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{3}{5}$	4	$\dfrac{1}{6}$	–3

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x\cdot\sin(x+2)}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x^2+2x}}$.

А	Б	В	Г
0	∞	не існує	1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{e^{x-3}-1}$.

А	Б	В	Г
3	$\dfrac{1}{6}$	0	∞

8. При $x\to 5$ укажіть всі вірні твердження:

а) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

б) $\operatorname{arctg}(x-5)\sim(x-5)$;

в) $\operatorname{arctg}(x+5)\sim(x+5)$;

г) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$.

9. Відомо, що $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні в точці $x=1$, $f(1)\neq 0, g(1)=0$. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x=1$:

а) $f(x)+g(x)$; б) $\dfrac{f(x)+g(x)}{x-1}$; в) $f(x)\cdot g(x)$; г) $\dfrac{x-1}{f(x)\cdot g(x)}$.

А	Б	В	Г
а, б, г	а, в	в, г	а, г

10. Точка $x=3$ для функції $y=\dfrac{x^3-8}{x-3}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;

б) неусувною точкою розриву I роду;

в) точкою розриву II роду;

г) точкою неперервності.

Варіант 25

1. Продовжити речення: добуток скінченної кількості нескінченно малих…

а) є величина нескінченно мала;
б) не існує;
в) є величина нескінченно велика;
г) є величина стала.

2. Серед графіків, приведених на рисунку 25.1, укажіть ті, які мають в точці *a* неусувний розрив І роду.

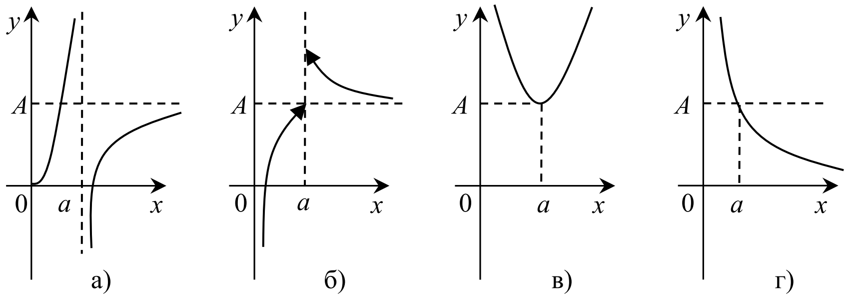


Рисунок 25.1

А	Б	В	Г
а	таких немає	б	в, г

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^5+3x^6-9x^{15}}{3x^5-2x^6+3x^{15}}$.

А	Б	В	Г
$-3/2$	6	∞	-3

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^5+3x^6-9x^{15}}{3x^5-2x^6+3x^{15}}$.

А	Б	В	Г
$-3/2$	6	0	-3

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}-4x}{8x+\sqrt[5]{x-3}}+5^{\frac{2x-1}{3+2x}}\right)$.

А	Б	В	Г
$-1/2$	5	$4,5$	∞

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\mathrm{tg}(x^2+x)}{(3x+2)\cdot\sin^2\sqrt{x+1}}$.

А	Б	В	Г
-1	1	$1/2$	0

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-7^{x-4}}{\ln(1+2(x-4))}$.

А	Б	В	Г
$-\ln 7/2$	$-\ln 7$	$1/2$	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$ та $\beta(x)=1-\cos\dfrac{5}{x}$ за умови, що $x\to\infty$.

А	Б	В	Г
еквівалентні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівняти

9. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу, то вона називається:

а) монотонною на цьому інтервалі; в) спадаючою на цьому інтервалі;
б) зростаючою на цьому інтервалі; г) неперервною на цьому інтервалі.

10. Точка $x=-2$ для функції $y=3^{\frac{7x}{x+2}}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 26

1. Продовжити речення: границя суми скінченної кількості функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь;

б) сумі значень границь;

в) сумі значень похідних цих функцій;

г) не існує.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5,$ тоді $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
5	–5	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^4 + 2x^5 - 32x^8}{8x^8 - 5x^5 + 14x^4}$.

А	Б	В	Г
–32	∞	–4	0

4. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x^4 + 2x^5 - 32x^8}{8x^8 - 5x^5 + 14x^4}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{2}$	∞	2	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{7x - 3}{4 + 2x} \right)^{x^2 + 1}$.

А	Б	В	Г
∞	$\dfrac{7}{2}$	$-\dfrac{3}{4}$	0

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{x-2}$.

А	Б	В	Г
0	4	1	–4

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\ln(1+(x+3))}{2(x+3)}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}$	1	0	∞

8. При $x\to 1$ укажіть всі вірні твердження:

а) $\sin x \sim x$;

б) $\sin(x+1)\sim(x+1)$;

в) $\sin(x-1)\sim(x-1)$;

г) $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$.

9. Відомо, що $f(x)$ – неперервна функція. Яке з наступних тверджень справедливе?

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=1$;

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=\infty$;

в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=0$;

г) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=-\infty$.

10. Точка $x=5$ для функції $y=\frac{x^3-1}{x-4}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 27

1. Продовжити речення: границя сталої величини c дорівнює …

а) числу до якого наближається x;

б) сталій величині c;

в) 0;

г) ∞.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3,$ та $f(x)$ – парна, тоді $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	–3	0	∞

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 + 5x^6 - 12x^7}{2x^7 - 7x^6 + 3x^3}$.

А	Б	В	Г
3	∞	–6	–4

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^3 + 5x^6 - 12x^7}{2x^7 - 7x^6 + 3x^3}$.

А	Б	В	Г
2	0	∞	–6

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 17}{6x^2 + x}\right)^{4x-1}$.

А	Б	В	Г
∞	0	$\dfrac{1}{2}$	–17

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(4x-4)}{x^2 - x}$.

А	Б	В	Г
0	4	∞	–4

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}$.

А	Б	В	Г
∞	0	2	-1

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=e^{x-3}-1$ та $\beta(x)=x-3$ за умови, що $x\to 3$.

А	Б	В	Г
$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	$\alpha(x)$ більш низького порядку малості	$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості

9. Серед графіків, які приведені на рисунку 7.1, укажіть всі, на яких функція має в точці a розрив II роду.

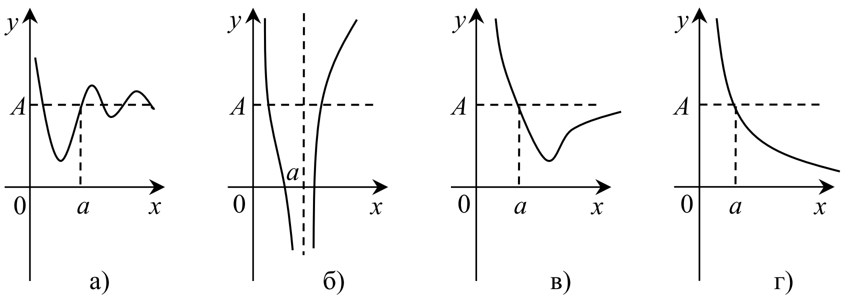


Рисунок 27.1

А	Б	В	Г
а	б	в, г	г

10. Точка $x=4$ для функції $y=\dfrac{7e^x}{x-1}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;

б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 28

1. Продовжити речення: границя добутку функцій, за умови, що границя кожної функції існує, дорівнює …

а) добутку значень границь кожної функції окремо;
б) сумі значень границь кожної функції окремо;
в) сумі значень похідних цих функцій;
г) не існує.

2. Нехай $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1\,000\,000\,000.$ Укажіть всі вірні твердження:

а) $f(x)$ обмежена в околі точки $x = 2$;

б) $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to 2$;

в) $\dfrac{f(x)}{2} \to 500\,000\,000$ при $x \to 2$;

г) $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала при $x \to 2$.

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^5+3x^6-2x^7}{8x^7-6x^6+2x^5}$.

А	Б	В	Г
-1	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{7}{4}$	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x^5+3x^6-2x^7}{8x^7-6x^6+2x^5}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{7}{4}$	0	7	-1

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7}{5+x^3}$.

А	Б	В	Г
0	∞	-1	1

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

А	Б	В	Г
1	-1	0	не існує

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{x-2}-1}{\ln(1+(x-2))}$.

А	Б	В	Г
$\ln 3-1$	$\ln 3$	0	∞

8. Порівняйте нескінченно малі $\alpha(x)=e^{\sin x}-1$ та $\beta(x)=\operatorname{tg}5x$ за умови, що $x\to 0$.

А	Б	В	Г
еквіввале-нтні	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	одного порядку малості	не можна порівня-ти

9. Відомо, що $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=18$. Яке з наступних тверджень справедливе?

а) c – точка неусувного розриву I роду;
б) c – точка усувного розриву I роду;
в) c – точка розриву II роду;
г) c – точка неперервності.

10. Точка $x=2$ для функції $y=\dfrac{7x}{x-2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;
б) неусувною точкою розриву I роду;
в) точкою розриву II роду;
г) точкою неперервності.

Варіант 29

1. Серед графіків, приведених на рисунку 12.1, укажіть ті, які мають в точці *a* розрив II роду.

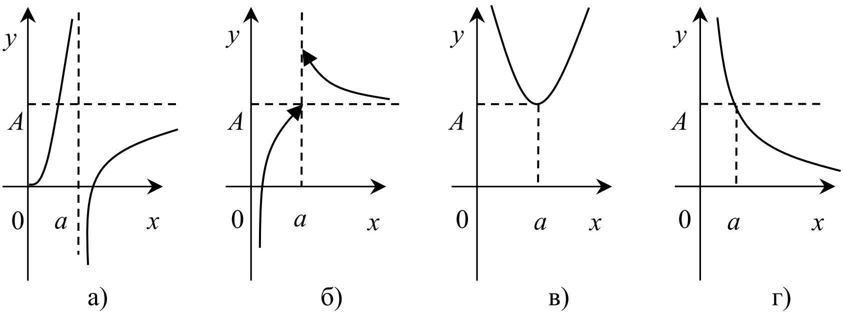


Рисунок 29.1

А	Б	В	Г
в	а, в	а	г

2. Якщо $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 5$, та $f(x)$ – непарна, тоді $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
–5	5	∞	0

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4-11x^5+13x^6}{2x^4+5x^5-3x^6}$.

А	Б	В	Г
9/2	–11/5	–13/3	–3

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^4-11x^5+13x^6}{2x^4+5x^5-3x^6}$.

А	Б	В	Г
–13/3	9/2	11/3	–11/5

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)(2x-3)$.

А	Б	В	Г
-5	7	5	-7

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

А	Б	В	Г
1	-1	∞	не існує

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{4x}-1}{x^2-2x}$.

А	Б	В	Г
$-2\ln 3$	1/2	$4\ln 3$	0

8. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\operatorname{arctg}(x-2)^2$ та $\beta(x)=x^2-4x+4$ за умови, що $x\to 2$.

А	Б	В	Г
не можна порівняти	$\alpha(x)$ більш високого порядку малості	еквівалентні	одного порядку малості

9. Відомо, що $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні в точці $x=3$, $f(3)=0, g(3)\neq 0$. Укажіть всі функції, неперервні в точці $x=3$.

а) $f(x)-g(x)$; б) $\dfrac{f(x)}{x-3}$; в) $f(x)\cdot g(x)$; г) $\dfrac{x^2-3x}{f(x)\cdot g(x)}$.

А	Б	В	Г
а, б, г	а, в	в, г	а, г

10. Точка $x=-5$ для функції $y=\dfrac{x+5}{x}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду; в) точкою розриву II роду;
б) неусувною точкою розриву I роду; г) точкою неперервності.

Варіант 30

1. Виберіть вірне твердження:
а) значення границі функції не єдине;
б) границя суми функцій дорівнює добутку границь;
в) сталу величину можна виносити за знак границі;
г) границя сталої величини дорівнює нулю.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0,$ тоді $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+5}{f(x)}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
5	∞	7	0

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{13x^6 - 5x^7 + 2x^8}{4x^6 + 3x^7 - x^8}$.

А	Б	В	Г
13/4	$-5/3$	-2	∞

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{13x^6 - 5x^7 + 2x^8}{4x^6 + 3x^7 - x^8}$.

А	Б	В	Г
$-5/3$	13/4	-2	0

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x)^{3x+1}$.

А	Б	В	Г
1	$\pi/2$	$-\infty$	∞

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{arctg} 7x}{\sin^2 \sqrt{5x^2 + x}}$.

А	Б	В	Г
∞	0	7/5	1

7. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{x-3}-1}{\ln(1+(x-3))}$.

А	Б	В	Г
$\ln 5$	$\ln 3$	0	не існує

8. При $x\to -2$ укажіть всі вірні твердження:

а) $\mathrm{tg}\, x \sim x$;

б) $\mathrm{tg}(x+2)\sim(x+2)$;

в) $\mathrm{tg}(x-2)\sim(x-2)$;

г) $\mathrm{tg}\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$.

9. Серед графіків, приведених на рисунку 22.1, укажіть ті, де функція має в точці *a* розрив II роду.

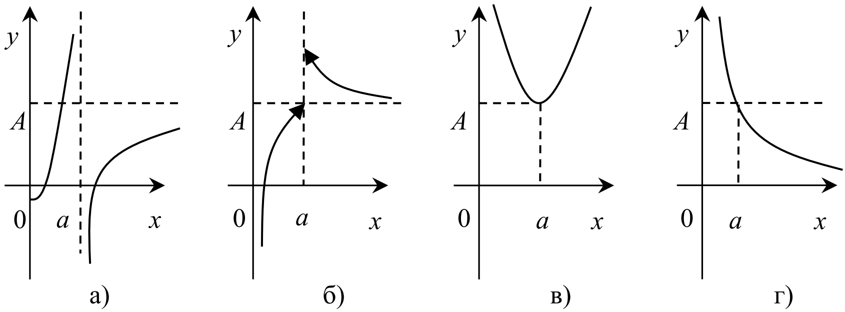


Рисунок 30.1

А	Б	В	Г
г	таких немає	а	б, в

10. Точка $x=-7$ для функції $y=\dfrac{1}{(x+7)^2}$ є:

а) усувною точкою розриву I роду;

б) неусувною точкою розриву I роду;

в) точкою розриву II роду;

г) точкою неперервності.

11. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ як тільки $0 < |x - x_0| < \delta$. Коротко це можна записати $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Основні теореми про границі

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) = A$ та $\lim\limits_{x \to x_0} V(x) = B$, тоді

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(U(x) \pm V(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = A \pm B$;

2. $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) \cdot V(x) = \lim\limits_{x \to x_0} U(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{U(x)}{V(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} U(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} V(x)} = \dfrac{A}{B}$, якщо $B \neq 0$.

Якщо існують $\lim\limits_{x \to x_0} U(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} V(x)$, тоді

4. якщо $U(x) \geq 0$, тоді $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) \geq 0$;

5. якщо $U(x) \leq V(x)$, тоді $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} V(x)$;

6. якщо $U(x) \leq f(x) \leq V(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) = A$ та $\lim\limits_{x \to x_0} V(x) = B$, тоді $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Техніка обчислення границь

В найпростіших випадках обчислення границі зводиться до підстановки в заданий вираз граничного значення аргументу. Якщо при підстановці граничного значення $x = x_0$ безпосередньо одержуємо вирази:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty \cdot 0,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,$$

то прийнято говорити, що маємо справу з *невизначеностями*.

В даних випадках необхідно виконати тотожні перетворення, в результаті яких *усовується невизначеність*, а потім обчислюється границя.

Обчислення границі відношення многочленів при $x \to \infty$

Якщо $P_k(x)$ та $Q_m(x)$ многочлени степені k та m відповідно:

$$P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k \sim a_0x^k ,$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + d_2x^{m-2} + \ldots + b_m \sim b_0x^m ,$$

тоді
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k}{b_0x^m} = \begin{cases} 0, & k < m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k = m; \\ \infty, & k > m. \end{cases}$$

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

Функція $\beta(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = \pm\infty$ (з урахування знаку $\beta(x)$ вибираємо той чи інший варіант).

Властивості нескінченно малих величин

1. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика величина при $x \to x_0$. Формально це можна записати $\dfrac{1}{0} = \infty$.

Зворотне твердження також має місце. Тобто, якщо $f(x)$ – нескінченна велика величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$. Формально можна записати $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

2. Алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

3. Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

4. Добуток нескінченно малої величини на обмежену є величина нескінченно мала.

5. Добуток нескінченно малої величини на сталу є величина нескінченно мала.

Порівняння нескінченно малих величин

Припустимо, що $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі величини при $x \to x_0$. Для порівняння двох нескінченно малих величин $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ необхідно обчислити границю їх відношення. Можливі варіанти:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Rightarrow$ нескінченно мала величина $\alpha(x)$ більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \Rightarrow$ нескінченно мала величина $\alpha(x)$ більш низького порядку малості, ніж $\beta(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \Rightarrow$ нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості; зокрема, при $A = 1$ нескінченно малі величини $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* $\big(\alpha(x) \sim \beta(x)\big)$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – не існує $\Rightarrow$ нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівняти.

Перша визначна границя та її наслідки

Рівність $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ або у загальному вигляді $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ носить назву *першої визначної границі*.

Її наслідки: якщо $\alpha(x) \to 0$, то

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.

Друга визначна границя та її наслідки

Рівність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ носить назву *другої визначної границі*; її також можна записати як $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

В загальному випадку ці рівності мають вигляд:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e \text{ та}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e.$$

Її наслідки: якщо $\alpha(x)\to 0$, то

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),$$

$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a,$$

$$\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x),$$

$$\log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a},$$

$$\left(1+\alpha(x)\right)^{\mu}\sim\mu\cdot\alpha(x).$$

Неперервність функції.
Класифікація точок розриву

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$. У випадку, якщо хоч одна з цих умов не виконується, то точка x_0 називається *точкою розриву*. Розрізняють точки розриву I та II роду.

Точка x_0 називається *точкою розриву I роду*, якщо лівостороння та правостороння границі функції в цій точці є скінченні числа, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = B$ (якщо $A=B$, то точка x_0 називається *усувною точкою розриву)*.

В протилежному випадку точка x_0 називається *точкою розриву II роду*.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1

1. а) ∞, б) 0. **2.** а) 6, б) -1. **3.** а) $-\frac{1}{9}$, б) $\frac{1}{2}$. **4.** а) $\frac{4}{7}$, б) $\frac{1}{3}$. **5.** а) $\frac{44}{9}$, б) $\frac{1}{5}$. **6.** а) $\frac{2}{11}$, б) $+\infty$. **7.** а) -6, б) $+\infty$. **8.** а) $-\infty$, б) 1. **9.** а) $\frac{5}{3}$, б) -2. **10.** а) ∞, б) 0. **11.** а) 0, б) 0. **12.** а) -7, б) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **13.** а) $\frac{2}{3}$, б) $\frac{5}{3}$. **14.** а) $-\infty$, б) $-\frac{1}{3}$. **15.** а) -2, б) -5. **16.** а) 2, б) $+\infty$. **17.** а) $-\infty$, б) 0. **18.** а) $\frac{5}{9}$, б) 0. **19.** а) $-\frac{7}{2}$, б) 0. **20.** а) $\frac{6}{7}$, б) $-\frac{7}{5}$. **21.** а) -7, б) 3. **22.** а) 1, б) 2. **23** а) 3, б) 3. **24.** а) 4, б) $\frac{1}{3}$. **25.** а) 0, б) $+\infty$. **26.** а) $\frac{17}{9}$, б) $\frac{2}{7}$. **27.** а) -4, б) $+\infty$. **28.** а) $-\infty$, б) $\frac{1}{3}$. **29.** а) $\frac{5}{2}$, б) 2. **30.** а) $-\frac{1}{9}$, б) $-\frac{1}{3}$.

Завдання 2

1. $\frac{1}{4}$. **2.** -3. **3.** 108. **4.** $-\frac{6}{7}$. **5.** -2. **6.** $\frac{5}{19}$. **7.** $\frac{7}{11}$. **8.** $-\frac{3}{22}$. **9.** $\frac{1}{4}$. **10.** $\frac{1}{10}$. **11.** 0. **12.** $\frac{5}{13}$. **13.** $-\frac{3}{2}$. **14.** $\frac{10}{9}$. **15.** $\frac{5}{3}$. **16.** -2. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $-\frac{1}{2}$. **19.** -1. **20.** $\frac{3}{2}$. **21.** $\frac{1}{2}$. **22.** 0. **23.** $-\frac{2}{5}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** $\frac{3}{5}$. **26.** $\frac{9}{2}$. **27.** $\frac{10}{9}$. **28.** $-\frac{3}{2}$. **29.** -2. **30.** 0.

Завдання 3

1. $\frac{1}{4}$. **2.** ∞. **3.** $\frac{2}{9}$. **4.** 3. **5.** $-\infty$. **6.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $-\frac{1}{8}$. **8.** -4. **9.** $\frac{1}{9}$. **10.** $-\infty$. **11.** $-\infty$. **12.** $-\infty$. **13.** $-\frac{1}{4}$. **14.** ∞. **15.** ∞. **16.** $-\frac{10}{3}$. **17.** $-\infty$. **18.** 0. **19.** ∞. **20.** ∞. **21.** $-\infty$. **22.** $-\infty$. **23.** $-\infty$. **24.** ∞. **25.** ∞. **26.** ∞. **27.** $\frac{11}{8}$. **28.** $\frac{29}{4}$. **29.** ∞. **30.** ∞.

Завдання 4

1. 0. **2.** -3. **3.** $\frac{5}{2}$. **4.** -3. **5.** -1. **6.** $\frac{7}{2}$. **7.** $\frac{3}{2}$. **8.** -3. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $\frac{3}{2}$. **12.** 1. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** 0. **15.** 2. **16.** $\frac{1}{6}$. **17.** $\frac{1}{84}$. **18.** $\frac{1}{30}$. **19.** 4. **20.** $\frac{3}{80}$. **21.** 4. **22.** $-\frac{1}{16}$. **23.** -16. **24.** 1. **25.** $-\frac{8}{9}$. **26.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **27.** $\frac{2}{3}$. **28.** $\frac{2}{3}$. **29.** -18. **30.** $\frac{5}{16}$.

Завдання 5

1. $\frac{3}{4}$. **2.** 3. **3.** $\frac{1}{10}$. **4.** -2. **5.** ∞. **6.** $\frac{7}{4}$. **7.** ∞. **8.** 3. **9.** -2. **10.** -1. **11.** $\frac{16}{49}$. **12.** -432. **13.** 0. **14.** 0. **15.** $\frac{3}{2}$. **16.** $\frac{7}{2}$. **17.** ∞. **18.** $\frac{3}{16}$. **19.** $\frac{5}{9}$. **20.** $\frac{1}{3}$. **21.** 0. **22.** $\frac{1}{2}$. **23.** 0. **24.** $\frac{4}{\cos 2}$. **25.** -5. **26.** $\frac{9}{5}$. **27.** 5. **28.** $\frac{4}{5\sqrt{3}}$. **29.** 0. **30.** $\frac{5}{\cos 3}$.

Завдання 6

1. e^7. **2.** e^{-2}. **3.** $e^{-\frac{8}{5}}$. **4.** 0. **5.** $e^{\frac{2}{3}}$. **6.** e^2. **7.** $e^{-\frac{7}{3}}$. **8.** $e^{-\frac{5}{2}}$. **9.** $e^{-\frac{2}{3}}$. **10.** 1. **11.** e^4. **12.** $e^{\frac{1}{3}}$. **13.** $e^{\frac{5}{3}}$. **14.** e^{-3}. **15.** $e^{\frac{21}{5}}$. **16.** e^4. **17.** e. **18.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **19.** e^{18}. **20.** e^4. **21.** 1. **22.** $e^{\frac{4}{3}}$. **23.** e^5. **24.** e^{-4}. **25.** 1. **26.** 1. **27.** e^4. **28.** $e^{-\frac{5}{6}}$. **29.** e^7. **30.** 0.

Завдання 7

1. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку малості. **2**. $f(x)$ більш низького порядку, ніж $\varphi(x)$. **3**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку малості. **4**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку малості. **5**. $f(x)\llcorner\varphi(x)$. **6**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **7**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **8**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **9**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **10**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **11**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **12**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **13**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **14**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **15**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **16**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **17**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **18**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **19**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **20**. $f(x)$ більш низького порядку, ніж $\varphi(x)$. **21**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **22**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **23**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **24**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **25**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **26**. $f(x)$ більш низького порядку, ніж $\varphi(x)$. **27**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **28**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **29**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **30**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку.

Завдання 8

1. $x=1$ – розрив II роду. **2**. $x=1$ – розрив I роду (неусувний). **3**. $x=-1$ – розрив I роду (неусувний). **4**. $x=\pm 2$ – розрив II роду. **5**. $x=3$ – розрив I роду (неусувний). **6**. $x=-4$ – розрив I роду (неусувний). **7**. $x=1$ – розрив I роду (неусувний). **8**. $x=-5$ – розрив I роду (неусувний). **9**. $x=6$ – розрив I роду (неусувний). **10**. $x=-2$ – розрив I роду (неусувний). **11**. $x=-3$ – розрив I роду (неусувний). **12**. $x=5$ – розрив I роду (неусувний). **13**. $x=-1$ – розрив II роду. **14**. $x=7$ – розрив II роду. **15**. $x=3$ – розрив II роду. **16**. $x=0$ – розрив I роду (неусувний). **17**. $x=0$ – розрив I роду (неусувний). **18**. $x=-3$ – розрив I роду (неусувний). **19**. $x=4$ –розрив I роду (неусувний). **20**. $\left.\begin{array}{r} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right\}$ –розриви II роду. **21**. $\left.\begin{array}{r} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right\}$ –розриви II роду. **22**. $\left.\begin{array}{r} x=3 \\ x=0 \end{array}\right\}$ – розриви II роду. **23**. $x=-2$ – розрив II роду. **24**. $x=1$ –розрив I роду (неусувний). **25**. $x=-2$ – розрив I роду (неусувний). **26**. $x=2$ –розрив II роду. **27**. $\left.\begin{array}{r} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right\}$ –розриви II роду. **28**. $x=0$ – розрив I роду (неусувний). **29**. $x=-7$ –розрив I роду (неусувний). **30**. $x=-3$ – розрив II роду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. : в 2 т. Т. 1 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 408 с.
2. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Ж.Б. Кашуба, Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 532 с.
3. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 1 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 324 с.
4. Границі і неперервність. Тестові завдання для контролю знань з вищої математики для студентів технічних спеціальностей / уклад. О. П. Пріщенко, Т. Т. Черногор. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 60 с.
5. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с.
6. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 1: Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХТУРЕ, 2002. – 552 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ПЕРШИНА Юлія Ігорівна
ПРІЩЕНКО Ольга Петрівна
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Навчально-методичний посібник
з курсу вищої математики
для студентів та викладачів технічних спеціальностей

Відповідальний за випуск Першина Ю. І.

Роботу до видання рекомендувала Чікіна Н. О.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 72

Підп. до друку 04.09.2023 р. Формат 60х84 1/16.
Riso – друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 4,5.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронне видання