МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Н.О. Чікіна, І.В. Антонова

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. СКАЛЯРНІ ПОЛЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 12.10.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

УДК 517.2 (075)
Ч 60

Рецензенти:

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат.наук, професор,
Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків)

Ю.І. Першина, д-р ф.-мат. наук, професор, НТУ «ХПІ»

Чікіна Н.О.

Ч 60 Функції декількох змінних. Скалярні поля : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 84 с.

Навчально-методичний посібник містить основні теоретичні положення, приклади розв’язання задач та завдання для самостійної роботи різних рівнів складності з розділів курсу вищої математики «Функції декількох змінних», «Скалярні поля».

Призначений для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Іл. 17. Бібліогр. 8 назв.

УДК 517.2 (075)

Передмова

Навчально-методичний посібник охоплює два розділу курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей, а саме «Функції декількох змінних» і тему «Скалярні поля» з розділу «Теорія поля». Основною метою посібника є засвоєння студентами системи фундаментальних уявлень розділів курсу «Вища математика» на рівні, достатньому для засвоєння технічних дисциплін в спектрі електротехнічних спеціальностей і спеціальностей ННІ МІТ НТУ «ХПІ».

Посібник містить теоретичну частину курсу та достатню кількість розв'язаних практичних завдань, який вже кілька років викладається студентам кафедрою вищої математики НТУ «ХПІ». Зміст посібника повністю відповідає Робочій програмі навчальної дисципліни «Вища математика. Частина 2». Автори поєднали ці дві теми не випадково, бо вважають це доцільним, оскільки є прямий зв'язок між практичним застосуванням цих двох тем. Мова йде про задачі знаходження найменшого та найбільшого значення функцій в замкненій області і відомого ітераційного алгоритму – методу градієнтного спуску.

Теоретична частина посібника викладена в чіткій логічній послідовності, наводяться основні означення, теореми та методи дослідження як функцій двох змінних, так і функцій декількох змінних.

До кожної частини навчально-методичного посібника пропонуються завдання двох рівней складності для самостійної роботи, на які надаються відповіді. Така форма викладу матеріалу дозволяє студентам використовувати посібник в сучасних умовах навчання.

Особливістю цього навчально-методичного посібника є його наближеність до електронного навчального видання із систематизованим викладом навчального матеріалу, що відповідає певній освітній програмі, містить об'єкти різних форматів та забезпечує інтерактивну взаємодію.

Посібник має активний зміст з навігацією, що дає можливість робити переходи до будь-якої теми з 4-х його частин. Наприкінці кожної частини є посилання для зручного переходу на початок цієї частини або на певний її зміст. В тексті є активні посилання для переходу до теорем, означень тощо, що сприяє активізації процесу on-line навчання.

Частина 1

Тема: Функції декількох змінних. Геометричний зміст частинних похідних функції $z = f(x, y)$

1.1. Функції двох змінних

1.1.1. Поняття функції двох змінних

Розглянемо довільну множину D точок, що лежать в координатній площині OXY.

Означення. Якщо кожній точці $P(x; y) \in D$ поставити у відповідність одне дійсне число z, то, як кажуть, на множині D задано *функцію* $z = f(x, y)$ або $z = f(P)$.

Змінні x, y називаються *аргументами* або *незалежними змінними*; множина називається D *областю* визначення функції.

Приклад 1.1. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{1}{\sqrt{2x - y^2}}$.

Розв'язання. Задана функція містить корінь парного степеню, що стоїть у знаменнику дробу. Знайдемо область визначення цієї функції з системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - y^2 \geq 0, \\ 2x - y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Об'єднуючи обидві умови в одну, одержимо: $2x > y^2$, або

$$x > \frac{1}{2} y^2. \tag{1.1}$$

Межа області визначення – парабола $x = \dfrac{1}{2} y^2$, яка поділяє координатну площину на дві частини. Очевидно, парабола не належить області визначення.

Для того, щоб визначити в якій з частин площини виконується нерівність $x > \frac{1}{2}y^2$, візьмемо будь-яку точку площини, що не належить межі області, наприклад, точку $(1;0)$, і підставимо її координати у нерівність (1.1): $1 > \frac{1}{2}\cdot 0^2$, $1 > 0$. Отримали вірну нерівність. З цього виходить, що обрана нами точка $(1;0)$ та всі інші точки, що знаходяться у тій же самій частині координатної площини, і є шуканою областю визначення.

Отже, областю визначення заданої функції є частина площини, що знаходиться між гілками параболи $x = \frac{1}{2}y^2$ (рис. 1.1).

Лінія параболи позначена пунктиром, оскільки вона не належить області визначення.

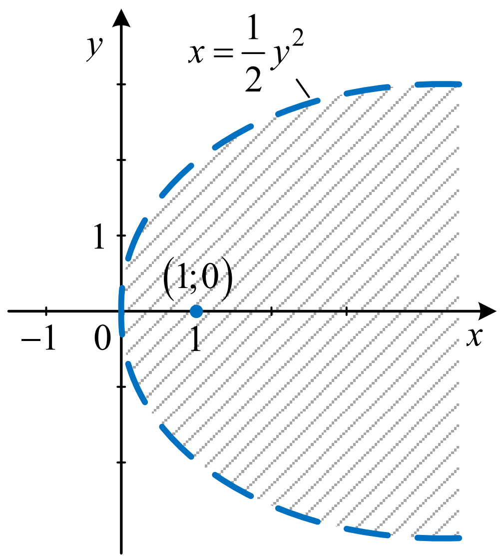

Рисунок 1.1

Приклад 1.2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{x+y} + \frac{1}{\sqrt{y-3x}}$.

Розв'язання. Задана функція складається з двох доданків, кожен з яких має свою область визначення. В таких випадках область визначення функції $z = f(x,y)$ знаходиться з системи нерівностей, які задають область визначення кожного з доданків:

$$\begin{cases} x+y\geq 0, \\ y-3x\geq 0, \\ y-3x\neq 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+y\geq 0, \\ y-3x>0, \end{cases}$$

тобто, область визначення заданої функції задається наступним чином:

$$\begin{cases} y\geq -x, \\ y>3x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Отже, межами шуканої області визначення є прямі $y=-x$ (належить області) та $y=3x$ (не належить області). Дві прямі поділяють координатну площину на чотири частини.

Для того, щоб визначити в якій з частин площини виконуються умови (1.2), візьмемо, наприклад, точку $(0;1)$ площини, що не належить межі області, і підставимо її координати у систему нерівностей (1.2):

$$\begin{cases} 1\geq -0, \\ 1>3\cdot 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1\geq 0, \\ 1>0. \end{cases}$$

Обидві умови виконуються, це означає, що одна з чотирьох частин площини, в якій знаходиться обрана точка $(0;1)$, є областю визначення заданої функції (рис. 1.2). В інших трьох частинах площини або не виконується одна з умов (1.2), або обидві.

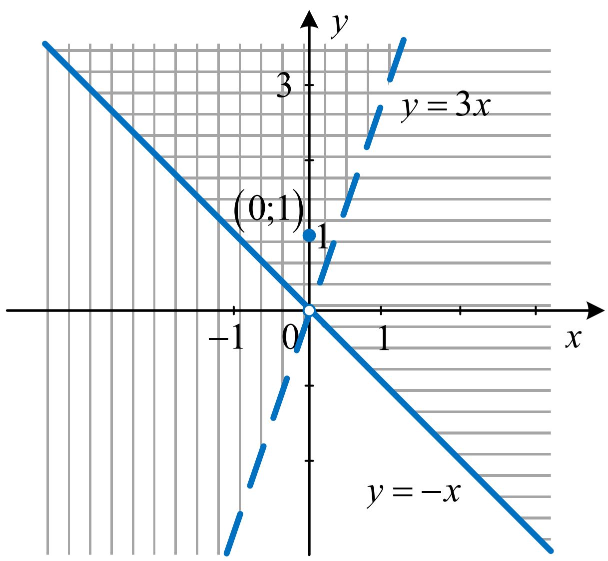

Рисунок 1.2

Приклад 1.3. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{\ln(x-y)}{\sqrt{y-x^2+1}}$.

Розв'язання. В даному випадку потрібно врахувати наступні обмеження:

$$\begin{cases} x-y>0, \\ y-x^2+1\geq 0, \\ y-x^2+1\neq 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-y>0, \\ y-x^2+1>0, \end{cases}$$

звідки маємо

$$\begin{cases} y<x, \\ y>x^2-1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Межами шуканої області визначення є пряма $y=x$ та парабола $y=x^2-1$. Обидві лінії не належать області визначення.

Для того, щоб визначити в якій з частин площини виконуються умови (1.3), візьмемо, наприклад, точку $\left(\frac{1}{2};0\right)$ площини, що не належить межі області. Маємо:

$$\begin{cases} 0<\frac{1}{2}, \\ 0>\left(\frac{1}{2}\right)^2-1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0<\frac{1}{2}, \\ 0>-\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Обидві умови виконуються, це означає, що одна з чотирьох частин площини, в якій знаходиться обрана точка $\left(\frac{1}{2};0\right)$, є областю визначення заданої функції (рис. 1.3). В інших частинах площини або не виконується одна з умов (1.3), або обидві.

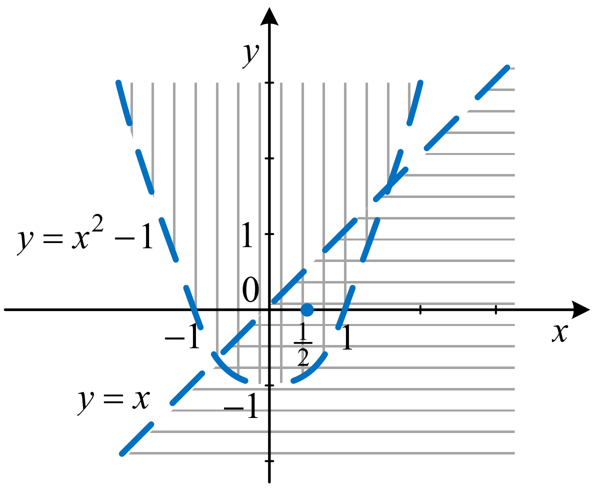

Рисунок 1.3

Приклад 1.4. Знайти область визначення функції

$$z = \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} + \arccos(x+y-2).$$

Розв'язання. Область визначення заданої функції задається системою відповідних нерівностей:

$$\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ |x+y-2| \leq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \neq 1, \\ x+y-2 \leq 1, \\ -1 \leq x+y-2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ y \leq 3-x, \\ y \geq 1-x. \end{cases} \tag{1.4}$$

Межами шуканої області визначення є паралельні прямі $y = 3 - x$ та $y = 1 - x$, що поділяють координатну площину на три частини.

Для того, щоб визначити в якій з частин площини виконуються умови (1.4), візьмемо, наприклад, точку $(0;2)$. Маємо:

$$\begin{cases} 0 \neq 1, \\ 2 \leq 3, \\ 2 \geq 1. \end{cases}$$

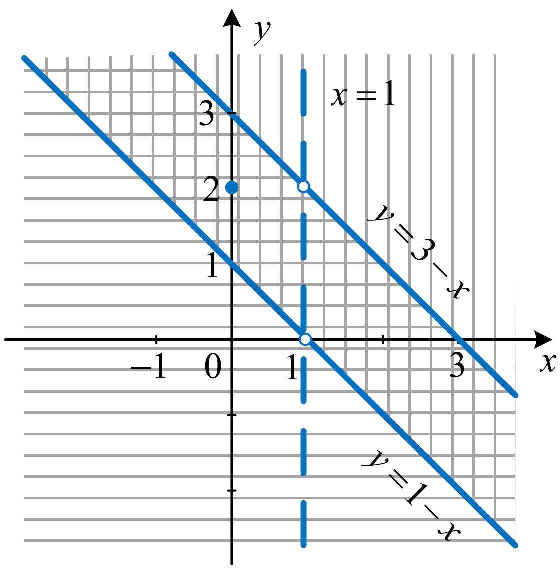

Рисунок 1.4

Умови (1.4) виконуються, це означає, що смуга між паралельними прямими, де знаходиться обрана точка, є областю визначення заданої функції. Крім того, зі смуги видалені точки, що належать прямій $x = 1$ (рис. 1.4). В інших частинах площини або не виконується одна з умов (1.4), або усі.

Виберемо систему координат у просторі $OXYZ$ і розглянемо функцію $z = f(x, y)$, визначену на множині D.

Означення. Множина всіх точок $M(x;y;z)$, де координати x,y точок $M(x;y;z)$ знаходяться в області D визначення функції $z=f(x,y)$, називається *поверхнею.*

Тому рівняння $z=f(x,y)$ називається *рівнянням поверхні.*

1.1.2. Функції декількох змінних

Точкою тривимірного простору називається впорядкована трійка чисел (x,y,z). Множина усіх можливих впорядкованих сукупностей n чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ називається *n-вимірним координатним простором* і позначається R^n. Кожна впорядкована сукупність $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається *точкою* цього простору і позначається таким чином: $M(x_1;x_2;\ldots;x_n)$. Числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$ називаються *координатами точки* M.

Означення. Нехай Ω – довільна множина n-вимірного простору. Кажуть, що *функція f визначається на множині* Ω, якщо кожній точці $(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in\Omega$ поставлено у відповідність дійсне число W.

Позначення: $W=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, де $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – незалежні змінні, є функцією W.

Відстанню між двома точками $M_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ і $M_2(y_1;y_2;\ldots;y_n)$ координатного просторору R^n називається число $d(M_1,M_2)$, що визначається формулою:

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}\,.$$

Множина точок $\{M:d(M,M_0)<\varepsilon\}$, де $\varepsilon>0$, називається *ε-околом точки M_0*.

1.2. Границя і неперервність

Кажуть, що точка $P(x;y)$ *наближається до точки* $P_0(x_0;y_0)$, якщо відстань $d(P,P_0)$ між точками P і P_0 наближається до нуля, тобто $d(P,P_0)\to 0$ за умови $P(x;y)\to P_0(x_0;y_0)$. При цьому, очевидно, $x\to x_0$ і $y\to y_0$ водночас.

Розглянемо функцію $z=f(x,y)$, визначену в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$, за винятком хіба що самої точки $P_0(x_0;y_0)$.

Означення. Число називається A називається *границею функції* $z=f(x,y)$ при $P\to P_0$, якщо $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що з умови $d(P,P_0)<\delta$ слідує умова $|f(P)-A|<\varepsilon$.

Символічно це пишеться так: $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

Для функції двох змінних мають місце теореми з теорії границь, які були отримані для функції однієї змінної, зокрема, теореми про границю суми, добутку, частки і теореми про граничний перехід в нерівностях.

Приклад 1.5. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{\sin(x+y)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{\sin(x+y)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left|\begin{array}{c}\sin\alpha\underset{\alpha\to 0}{\sim}\alpha,\\ \sin(x+y)\underset{x+y\to 0}{\sim}(x+y)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-xy+y^2}{1}=0.$$

При розкладанні чисельника дробового виразу на множники скористались формулою суми кубів: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною в точці* $P_0(x_0;y_0)$, якщо вона визначена в деякому околі точки P_0 і

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0) \text{ або } \lim_{x\to x_0} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною на деякій множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Для неперервних функцій двох змінних, як і для функції однієї змінної, мають місце наступні теореми:

<u>Теорема 1.1</u> (неперервність суми, добутку, частки). *Нехай функції* $u(x,y)$ *і* $v(x,y)$ *неперервні в точці* $P_0(x_0;y_0)$, *тоді функції* $u(x,y)\pm v(x,y), u(x,y)\cdot v(x,y)$ *та* $\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$, *також є неперервними в точці* $P_0(x_0;y_0)$, *а частка неперервна за умови* $v(x_0,y_0)\neq 0$.

<u>Теорема 1.2</u> (неперервність складної функції). *Нехай функції* $u(x,y)$ *і* $v(x,y)$ *є неперервними в точці* $P_0(x_0;y_0)$, *а функція* $z=f(u,v)$ *неперервна в точці* $Q_0(u(x_0,y_0);v(x_0,y_0))$, *тоді складна функція* $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ *також є неперервною в точці* $P_0(x_0;y_0)$.

<u>Теорема 1.3</u> (властивості неперервних функцій в обмеженій замкненій області). *Нехай функція $z = f(x,y)$ буде неперервною в обмеженій замкненій області $\bar{D}$, тоді:*

1) *функція $z = f(x,y)$ обмежена в області $\bar{D}$;*

2) *функція $z = f(x,y)$ приймає свої найменше і найбільше значення в області $\bar{D}$;*

3) *нехай m – найменше, а M – найбільше значення функції $z = f(x,y)$ в області $\bar{D}$. Тоді для будь-якого c, $m \le c \le M$, існує точка $P \in \bar{D}$, в якій $f(P) = c$, тобто $f(x,y)$ приймає будь-яке проміжне значення в області $\bar{D}$.*

1.3. Частинні похідні функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$ двох змінних. Дамо приріст однієї зі змінних шляхом фіксації іншої змінної, і розглянемо наступні вирази:

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \Delta_x z;$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta_y z;$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta z.$$

Величини $\Delta_x z, \Delta_y z$ називаються *частинними приростами* за змінними x і y, відповідно, а вираз Δz називається *повним приростом.*

Означення. Границя (якщо вона існує) $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ за умови $\Delta x \to 0$, називається *частинною похідною функції* $z = f(x,y)$ за змінною x і позначається одним з символів: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, f'_x(x,y), z'_x$.

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно, частинна похідна за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Приклад 1.6. Знайти частинні похідні функції $z=x^3-3y^2+5xy$.

Розв'язання. Застосуємо правила диференціювання суми функцій та виразів, що мають постійні множники. Частинну похідну функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ знайдемо за умовою, що $y=const$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3-3y^2+5xy\right)'_x=3x^2-0+5y\cdot 1=3x^2+5y.$$

Аналогічно діємо при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$, але тепер вважаємо, що $x=const$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3-3y^2+5xy\right)'_y=0-3\cdot 2y+5x\cdot 1=-6y+5x.$$

Приклад 1.7. Знайти частинні похідні функції $z=\frac{3y-x}{x+5y}$.

Розв'язання.

Використаємо правило диференціювання частки функцій.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{3y-x}{x+5y}\right)'_x=\frac{(3y-x)'_x\cdot(x+5y)-(3y-x)\cdot(x+5y)'_x}{(x+5y)^2}=\left\|y=const\right\|=$$

$$=\frac{(-1)\cdot(x+5y)-(3y-x)\cdot 1}{(x+5y)^2}=\frac{-x-5y-3y+x}{(x+5y)^2}=\frac{-8y}{(x+5y)^2}.$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{3y-x}{x+5y}\right)'_y=\frac{(3y-x)'_y\cdot(x+5y)-(3y-x)\cdot(x+5y)'_y}{(x+5y)^2}=\|x=const\|=$$

$$=\frac{3\cdot(x+5y)-(3y-x)\cdot 5}{(x+5y)^2}=\frac{3x+15y-15y+5x}{(x+5y)^2}=\frac{8x}{(x+5y)^2}.$$

Приклад 1.8. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x}{y}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$, якщо $z=e^{-\frac{y}{x}}$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)'_x=\|y=const\|=e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)'_x=e^{-\frac{y}{x}}\cdot(-y)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{y}{x^2}\cdot e^{-\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)'_y=\|x=const\|=e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)'_y=e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot 1=-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}.$$

Підставимо знайдені похідні у задану рівність:

$$z'_x\cdot\frac{x}{y}+z'_y=\frac{y}{x^2}\cdot e^{-\frac{y}{x}}\cdot\frac{x}{y}-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x}}=0.$$

Рівність доведено.

1.4. Геометричний зміст частинних похідних функції $z=f(x,y)$

Відомо, що графік функції $z=f(x,y)$ являє собою певну поверхню (рис. 1.5).

Розглянемо на площині OXY довільну точку $P_0(x_0;y_0)$ і відповідну точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на поверхні. Проведемо площину $y=y_0$ через точку M_0. У перерізі з поверхнею отримуємо лінію L_x. Тоді

$$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=\operatorname{tg}\alpha.} \qquad (1.5)$$

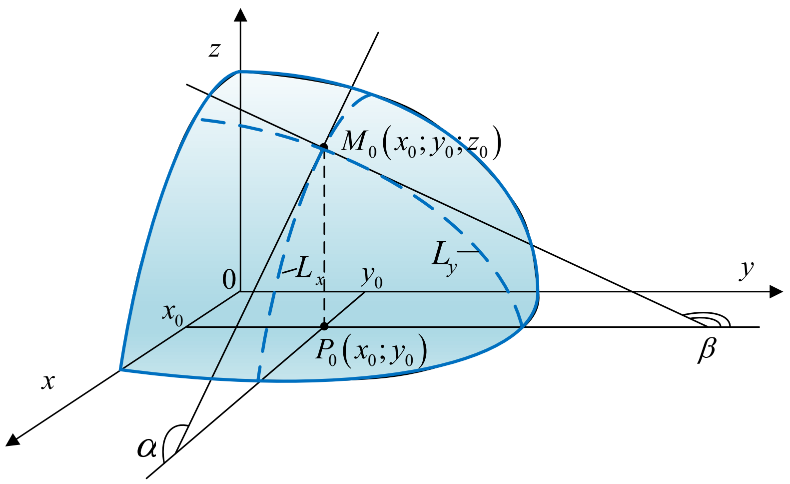

Рисунок 1.5

Аналогічним чином при побудові площини $x = x_0$ в перерізі з поверхнею отримуємо лінію L_y і

$$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = \operatorname{tg}\beta\,.} \tag{1.6}$$

Приклад 1.9. Який кут утворює з додатним напрямом осі ординат

дотична до лінії $\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \\ x = 1 \end{cases}$ в точці $M_0\left(1;1;\sqrt{3}\right)$?

Розв'язання. За формулою (1.6) маємо: $\operatorname{tg}\beta = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$. Оскільки

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, то $\operatorname{tg}\beta = \left.\frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тобто $\beta = \frac{\pi}{6}$.

1.5. Диференціал функцій двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому δ-околі точки $P(x; y)$.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною в точці* $P(x; y)$, якщо її повний приріст може бути представлений в наступному вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{1.7}$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, A і B величини, які не залежать від $\Delta x, \Delta y$.

Приріст Δz складається з двох частин: основна частина приросту $A\Delta x + B\Delta y$, лінійна по відношенню до $\Delta x, \Delta y$, і нелінійна частина $o(\rho)$ – нескінченно мала більш вищого порядку, ніж ρ.

Основна частина приросту $A\Delta x + B\Delta y$ називається *повним диференціалом функції* $z = f(x, y)$ і позначається символом dz. Тобто,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{1.8}$$

Таким чином, у випадку диференційовної функції маємо:

$$\Delta z = dz + o(\rho).$$

<u>Теорема 1.4</u> (достатня умова існування частинних похідних). *Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $P(x; y)$. Тоді в заданій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, більш того:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Таким чином, записуємо вираз (1.8) у вигляді

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, під диференціалами dx, dy незалежних змінних розуміють довільні прирости $\Delta x, \Delta y$. Таким чином,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \tag{1.9}$$

Вирази $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ і $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ називаються *частинними диференціалами функції* $z = f(x, y)$ *за змінними* x *і* y відповідно і позначаються $d_x z$ і $d_y z$.

Аналогічно, *диференціал функції* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виглядає наступним чином:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\,.$$

<u>Теорема 1.5</u> (достатня умова диференційованості функції). *Нехай функція* $z = f(x, y)$ *має частинні похідні в деякому околі точки* $P(x; y)$, *неперервні в самій точці* $P(x; y)$, *тоді вона диференційована в заданій точці.*

Приклад 1.10. Знайти повний диференціал функції $z = \frac{x^3}{y^2}$.

Розв'язання. Повний диференціал функції знайдемо за формулою (1.9). Частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x^3}{y^2}\right)'_x = \left\| y = const \right\| = \frac{1}{y^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{y^2}.$$

Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{y^2}\right)'_y = \left\| x = const \right\| = x^3 \cdot \left(-2y^{-3}\right) = -\frac{2x^3}{y^3}$.

Тоді повний диференціал заданої функції має вигляд:

$$dz = \frac{3x^2}{y^2}dx - \frac{2x^3}{y^3}dy\,.$$

Приклад 1.11. Знайти частинні диференціали функції $z = \ln\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Частинні диференціали знайдемо за формулами: $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$,

$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Попередньо спростимо задану функцію, використовуючи властивість логарифму: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\frac{y}{x}\right)'_x = (\ln y - \ln x)'_x = \|y = const\| = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln y - \ln x)'_y = \|x = const\| = \frac{1}{y} - 0 = \frac{1}{y}.$$

Частинні диференціали заданої функції мають вигляд:

$$d_x z = -\frac{dx}{x}, \; d_y z = \frac{dy}{y}.$$

1.6. Застосування повного диференціала до наближених обчислень

Розглянемо диференційовну функцію $z = f(x, y)$. Повний її приріст Δz виражається формулою

$$\Delta z = dz + o(\rho).$$

При достатньо малих $\Delta x, \Delta y$

$$\Delta z \approx dz. \tag{1.10}$$

Запишимо рівняння (1.10) в розгорнутому вигляді:

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) \approx \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\Delta y,$$

Звідки

$$\boxed{z(x + \Delta y, y + \Delta y) \approx z(x, y) + \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\Delta y.} \tag{1.11}$$

Формула (1.11) може бути використана для апроксимації значення функції двох змінних в точці $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$, достатньо близькій до точки $P(x; y)$.

Приклад 1.12. Обчислити наближено значення виразу $\frac{\sqrt{9{,}03}}{(0{,}49)^2}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z=\frac{\sqrt{x}}{y^2}$. Виберемо $x=9$, $y=\frac{1}{2}$, тоді $\Delta x=0,03$, $\Delta y=-0,01$. Наближене значення заданого виразу знайдемо за формулою (1.11).

Частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)'_x=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)'_y=\sqrt{x}\cdot\left(-2y^{-3}\right)=-\frac{2\sqrt{x}}{y^3},$$

обчислимо їх значення при відомих значеннях x та y:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\left.\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{2}{3},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=-\left.\frac{2\sqrt{x}}{y^3}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=-\frac{2\sqrt{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-48.$$

Значення функції: $\quad z\Big|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\left.\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right|_{\substack{x=9\\ y=\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=12.$

Тоді наближене значення заданого виразу:

$$\frac{\sqrt{9,03}}{\left(0,49\right)^2}\approx 12+\frac{2}{3}\cdot 0,03-48\cdot\left(-0,01\right)=12+0,02+0,48=12,5.$$

До речі, значення виразу, що обчислено за допомогою калькулятора:

$$\frac{\sqrt{9,03}}{\left(0,49\right)^2}\approx 12,5156011.$$

Завдання для самостійної роботи

Рівень 1

1. Знайти область визначення функції $z=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{y-x}}$.

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin 2xy}{y}$.

3. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z=x^3+\dfrac{y^2}{6}+5\sqrt{xy}$.

4. Який кут утворює з додатним напрямком осі ординат дотична до лініїї $\begin{cases} z=4-x^2-y^2, \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ у точці $M_0\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

5. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, якщо $z=e^{\frac{y}{x}}$.

6. Знайти повний диференціал функції $z=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ в точці $P_0(-1;1)$.

Рівень 2

7. Знайти область визначення функції $z=\sqrt{\ln\left(y^2-3x+7\right)}-\dfrac{1}{x-y}$.

8. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{y}{xy^2+x^3}}$.

9. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z=\cos(3x-y)+\ln\sqrt[3]{x^2-y^2}.$$

10. Який кут утворює з додатним напрямком осі абсцис дотична до лінії $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ в точці $M_0(2;4;5)$?

11. Довести, що $\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=8\cos^2\left(x^2+y^2\right)$, якщо $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$.

12. Знайти повний диференціал функції $u=\cos\left(xy+yz\right)$ в точці $M_0\left(\frac{\pi}{6};1;\frac{\pi}{6}\right)$.

Відповіді

1. Частина площини OXY, що знаходиться вище прямої $y=x$ та зліва від прямої $x=2$. **2**. 0. **3**. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{3}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$. **4**. 135^0. **6**. $dz|_{P_0}=dx$.

7. Частина площини OXY, що знаходиться зовні параболи $y^2=3\left(x-2\right)$, без точок, в яких $x=y$. Точки параболи належать області визначення. **8**. 1.

9. $\frac{\partial z}{\partial x}=-3\sin\left(3x-y\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\sin\left(3x-y\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{2y}{x^2-y^2}$. **10**. 45^0.

12. $du|_{M_0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(dx+\frac{\pi}{3}dy+dz\right)$.

Перейти до початку Частини 1

Перейти до Змісту

Частина 2

Тема: Диференціювання складної та неявно заданої функції. Рівняння дотичної та нормалі до поверхні. Частинні похідні і диференціали вищих порядків

2.1. Диференціювання складної функції

1. Розглянемо функцію $z = f(x,y)$ в деякій відкритій області D. Нехай змінні x, y є функціями змінної t в деякому інтервалі, тобто $z = f(x,y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$ там, де $a \le t \le b$.

Підставляючи значення $(x(t), y(t))$ у вираз функції $z = f(x,y)$, отримаємо складну функцію $z = f[x(t), y(t)]$.

Теорема 2.1. *Нехай функція $z = f(x,y)$ має в області D неперервні частинні похідні z'_x і z'_y, і існують похідні $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ на $[a,b]$, тоді існує похідна $\frac{dz}{dt}$ складної функції на $[a,b]$, обчислена за формулою*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{2.1}$$

Приклад 2.1. Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{x^2+y}$, $x = t^2$, $y = \cos 2t$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (2.1), отримуємо:

$$\frac{dz}{dt} = e^{x^2+y} \cdot 2x \cdot 2t + e^{x^2+y} \cdot 1 \cdot (-2\sin 2t) =$$

$$= e^{t^4+\cos 2t} \cdot 2t^2 \cdot 2t + e^{t^4+\cos 2t} \cdot (-2\sin 2t) = 2e^{t^4+\cos 2t}\left(2t^3 - \sin 2t\right).$$

2. Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, за умови, що $y = y(x)$, і обчислимо $\frac{dz}{dx}$, застосовуючи формулу (2.1):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

Звідки

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.} \tag{2.2}$$

Приклад 2.2. Знайти похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = x^3 + 2xy^4 + \cos y, y = 2x^2 + e^x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.2):

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2y^4 + \left(8xy^3 - \sin y\right)\left(4x + e^x\right) = \left\| y = 2x^2 + e^x \right\| =$$

$$= 3x^2 + 2\left(2x^2 + e^x\right)^4 + \left(8x\left(2x^2 + e^x\right)^3 - \sin\left(2x^2 + e^x\right)\right)\left(4x + e^x\right).$$

3. Розглянемо випадок, коли x, y залежать не від однієї змінної t, а від декількох, наприклад $x = x(u,v), y = y(u,v)$. Складна функція набуває вигляду

$$z = f\left[x(u,v), y(u,v)\right].$$

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ обчислюються за такими формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.} \tag{2.3}$$

Приклад 2.3. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = \sin(2x - 3y)$, $x = u^2 - v^2, y = uv.$

Розв'язання. Застосуємо формули (2.3):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos(2x - 3y) \cdot 2 \cdot 2u + \cos(2x - 3y) \cdot (-3) \cdot v = \cos(2x - 3y) \cdot (4u - 3v);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\cos\left(2x - 3y\right) \cdot \left(4v + 3u\right).$$

Розглянемо складну функцію

$$z = f\left[x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right] \tag{2.4}$$

і припустимо, що частинні похідні $z'_x, z'_y, x'_u, x'_v, y'_u, y'_v$ є неперервними. Відомо, що диференціал функції $z = f\left(x, y\right)$, де x, y незалежні змінні, має вигляд $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Можна довести, що диференціал складної функції (2.4) має таку ж форму, тобто і в даному випадку $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

2.2. Диференціювання функцій, що задані неявно

Неявна функція двох змінних задається рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2.5}$$

що зв'язує три змінних.

<u>**Теорема 2.2**</u> (**існування неявної функції**). *Нехай функція $F(x, y, z)$ неперервна разом з її частинними похідними в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, і $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, тоді рівняння* (2.5) *має єдиний розв'язок $z = z(x, y)$, неперервний в околі точки $P_0(x_0; y_0)$, такий, що $z(x_0, y_0) = z_0$. Більш того, функція $z = z(x, y)$ має неперервні частинні похідні.*

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y.

Якщо підставити $z = z(x, y)$ в рівняння (2.5) замість z, отримаємо тотожність

$$F\left[x, y, z(x, y)\right] \equiv 0.$$

Обчислимо диференціал лівої і правої частин:

$$dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0,$$

звідки

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy. \qquad (2.6)$$

Але, з іншого боку,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (2.7)$$

Порівнюючи рівняння (2.6) і (2.7), отримуємо:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.} \qquad (2.8)$$

Зауваження. Розглядаючи окремий випадок для неявно заданої функції $f(x, y) = 0$ однієї змінної, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad (2.9)$$

Приклад 2.4. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції $y(x)$, що задана неявно рівнянням $x^2 y + \ln(x - y) = 5$.

Розв'язання. Функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $f(x, y) = x^2 y + \ln(x - y) - 5$. Похідну $\frac{dy}{dx}$ знайдемо за формулою (2.9):

Знайдемо частинні похідні функції $f(x, y)$:

$$f'_x = \left(x^2 y + \ln(x - y) - 5\right)'_x = \|y = const\| = 2x \cdot y + \frac{1}{x - y} \cdot (x - y)'_x - 0 = 2xy + \frac{1}{x - y},$$

$$f'_y = \left(x^2 y + \ln(x - y) - 5\right)'_y = \|x = const\| = x^2 \cdot 1 + \frac{1}{x - y} \cdot (x - y)'_y - 0 = x^2 - \frac{1}{x - y}.$$

Тоді похідна неявно заданої функції:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + \frac{1}{x - y}}{x^2 - \frac{1}{x - y}} = -\frac{2xy \cdot (x - y) + 1}{x^2 \cdot (x - y) - 1}.$$

Приклад 2.5. Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x, y)$, що задана неявно рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1 = 0$.

Розв'язання. Функція задана неявно рівнянням

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1.$$

Похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ знайдемо за формулами (2.8):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Частинні похідні функції $F(x, y, z)$:

$$F'_x = \left(x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1\right)'_x = \|y, z = const\| = 2x + 3yz,$$

$$F'_y = \left(x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1\right)'_y = \|x, z = const\| = 2y + 3xz,$$

$$F'_z = \left(x^2 + y^2 - z^2 + 3xyz + 1\right)'_z = \|x, y = const\| = -2z + 3xy.$$

Тоді похідні неявно заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + 3yz}{-2z + 3xy} = \frac{2x + 3yz}{2z - 3xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y + 3xz}{-2z + 3xy} = \frac{2y + 3xz}{2z - 3xy}.$$

2.3. Рівняння дотичної та нормалі до поверхні

Нехай поверхня S задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$.

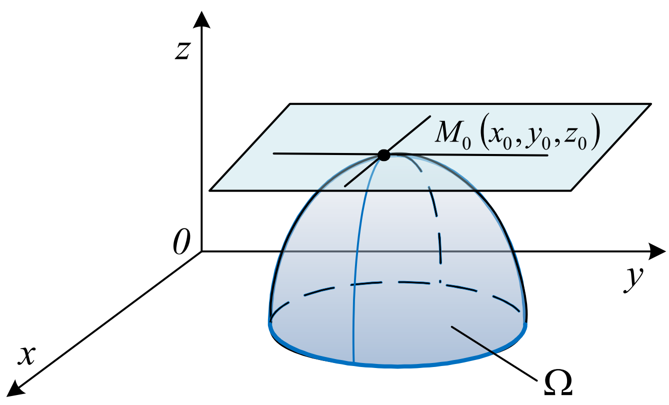

Рисунок 2.1

Означення. *Дотична площина* до поверхні S в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ є площиною, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і містить всі дотичні прямі до кривих, що проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (рис. 2.1).

<u>Теорема 2.3.</u> *Нехай функція $F(x,y,z)$ диференційована в точці M_0 і принаймні одна з її частинних похідних в цій точці не дорівнює нулю. Тоді рівняння дотичної площини має вигляд*

$$F'_x\big|_{M_0}\left(x-x_0\right)+F'_y\big|_{M_0}\left(y-y_0\right)+F'_z\big|_{M_0}\left(z-z_0\right)=0. \qquad (2.10)$$

З'ясуємо, як виглядає рівняння дотичної площини для випадку, коли поверхня задана рівнянням

$$z=f(x,y). \qquad (2.11)$$

Перепишемо рівняння (2.11) наступним чином:

$$F\left(x,y,z\right)=z-f\left(x,y\right)=0.$$

Звідки $F'_x=-f'_x,\;\; F'_y=-f'_y,\;\; F'_z=1$. Тоді з рівняння (2.10), отримуємо:

$$\boxed{z-z_0=f'_x\big|_{P_0}\left(x-x_0\right)+f'_y\big|_{P_0}\left(y-y_0\right).} \qquad (2.12)$$

Означення. Пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно дотичній площині, називається *нормаллю* до поверхні.

Очевидно, що нормальний вектор дотичної площини є напрямним вектором нормалі, тому *рівняння нормалі* прийме вигляд

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{M_0}}} \qquad (2.13)$$

у випадку неявно заданої функції, і

$$\frac{x-x_0}{f'_x\big|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{f'_y\big|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (2.14)$$

– у разі її явного завдання.

Приклад 2.6. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=(x+3)^3+(2y-1)^3-4$ у точці $P_0(-2;1)$.

Розв'язання. Поверхня задана явно рівнянням $z=f(x,y)$, тому для складання рівнянь дотичної площини та нормалі скористаємось формулами (2.12) і (2.14).

Знайдемо частинні похідні від заданої функції:

$$f'_x=\left((x+3)^3+(2y-1)^3-4\right)'_x=\|y=const\|=3(x+3)^2,$$

$$f'_y=\left((x+3)^3+(2y-1)^3-4\right)'_y=\|x=const\|=3\cdot(2y-1)^2\cdot 2=6(2y-1)^2.$$

Значення частинних похідних у точці P_0:

$$f'_x(P_0)=3(x+3)^2\Big|_{x=-2}=3(-2+3)^2=3,$$

$$f'_y(P_0)=6(2y-1)^2\Big|_{y=1}=6(2\cdot 1-1)^2=6.$$

Обчислимо координату z_0 точки дотику на заданій поверхні:

$$z_0=(x_0+3)^3+(2y_0-1)^3-4=(-2+3)^3+(2\cdot 1-1)^3-4=-2.$$

Тоді з рівняння (2.12) маємо:

$$z-(-2)=3\cdot\left(x-(-2)\right)+6\cdot(y-1), \text{ або } 3x+6y-z-2=0$$

– рівняння дотичної площини, а з рівняння (2.14)

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

Приклад 2.7. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^3+2y^2-z^2+1=0$ в точці $M_0(-2;2;1)$.

*Розв'язання***.** Оскільки функція $z=f(x,y)$ задана неявно, скористаємось формулами (2.10) і (2.13). Знайдемо частинні похідні: $F'_x\big|_{M_0} = 3x^2\big|_{M_0} = 12$, $F'_y\big|_{M_0} = 4y\big|_{M_0} = 8$, $F'_z\big|_{M_0} = -2z\big|_{M_0} = -2$.

Підставляючи в рівняння (2.10), отримуємо:

$$12(x+2)+8(y-2)-2(z-1)=0, \quad 6x+4y-z+5=0.$$

Відповідно, рівняння нормалі має вигляд: $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Зауваження. Приклад 2.6. теж можна було розв'язувати, використовуючи формули для випадку неявного завдання поверхні. Для цього рівняння поверхні $z=f(x,y)$ достатньо переписати у вигляді $F(x,y,z)=f(x,y)-z$, а потім скористатись формулами (2.10) і (2.13).

2.4. Частинні похідні і диференціали вищих порядків

2.4.1. Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Ці похідні, самі по собі, є функціями x, y, також можуть мати частинні похідні, які називаються *частинними похідними другого порядку* функції $z=f(x,y)$.

Символічні позначення:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Аналогічно визначаються частинні похідні третього, четвертого і т.д. порядків.

Частинні похідні вищого порядку, взяті за різними змінними, називаються *мішаними частинними похідними*, наприклад,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ldots$$

Приклад 2.8. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = 3x^2 + 5y^4 - 10x\sqrt{y} + 7.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо похідні першого порядку:

$$z'_x = \left(3x^2 + 5y^4 - 10x\sqrt{y} + 7\right)'_x = \left\| y = const \right\| = 6x - 10\sqrt{y},$$

$$z'_y = \left(3x^2 + 5y^4 - 10x\sqrt{y} + 7\right)'_y = \left\| x = const \right\| = 20y^3 - \frac{5x}{\sqrt{y}}.$$

Похідні другого порядку знаходимо як похідні від похідних першого порядку за відповідною змінною:

$$z''_{xx} = \left(6x - 10\sqrt{y}\right)'_x = \left\| y = const \right\| = 6,$$

$$z''_{xy} = \left(6x - 10\sqrt{y}\right)'_y = \left\| x = const \right\| = -10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = -\frac{5}{\sqrt{y}},$$

$$z''_{yx} = \left(20y^3 - \frac{5x}{\sqrt{y}}\right)'_x = \left\| y = const \right\| = -\frac{5}{\sqrt{y}},$$

$$z''_{yy} = \left(20y^3 - \frac{5x}{\sqrt{y}}\right)'_y = \left\| x = const \right\| = 20 \cdot 3y^2 - 5x \cdot \left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right) = 60y^2 + \frac{5x}{2\sqrt{y^3}}.$$

Приклад 2.9. Для функції $z = \ln\sqrt{4x - 3y}$ перевірити, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Розв'язання. Спочатку спростимо задану функцію, використавши наступну властивість логарифмів: $\ln a^b = b \ln a$. Маємо

$$\ln\sqrt{4x - 3y} = \ln\left(4x - 3y\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(4x - 3y\right).$$

Знайдемо похідні першого порядку:

$$z'_x = \left(\frac{1}{2}\ln(4x-3y)\right)'_x = \|y = const\| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x-3y}\cdot(4x-3y)'_x =$$
$$= \frac{1}{2\cdot(4x-3y)}\cdot 4 = \frac{2}{4x-3y},$$
$$z'_y = \left(\frac{1}{2}\ln(4x-3y)\right)'_y = \|x = const\| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x-3y}\cdot(4x-3y)'_y =$$
$$= \frac{1}{2\cdot(4x-3y)}\cdot(-3) = \frac{-3}{2\cdot(4x-3y)}.$$

Тоді мішані похідні другого порядку мають вигляд:

$$z''_{xy} = \left(\frac{2}{4x-3y}\right)'_y = \|x = const\| = 2\cdot\left((4x-3y)^{-1}\right)'_y =$$
$$= 2\cdot\frac{-1}{(4x-3y)^2}\cdot(4x-3y)'_y = \frac{-2}{(4x-3y)^2}\cdot(-3) = \frac{6}{(4x-3y)^2},$$
$$z''_{yx} = \left(\frac{-3}{2\cdot(4x-3y)}\right)'_x = \|y = const\| = -\frac{3}{2}\cdot\left((4x-3y)^{-1}\right)'_x =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{(4x-3y)^2}\cdot(4x-3y)'_x = \frac{3}{2\cdot(4x-3y)^2}\cdot 4 = \frac{6}{(4x-3y)^2}.$$

Бачимо, що знайдені мішані похідні рівні, в чому й потрібно було пересвідчитись.

Теорема 2.4 (про рівність мішаних похідних). *Якщо в точці* $P(x;y)$ *існують і неперервні мішані похідні* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ *і* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, *то вони рівні між собою.*

Аналогічна теорема справедлива для мішаних похідних будь-якого порядку.

2.4.2. Диференціали вищих порядків

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Якщо x, y незалежні змінні, то dx, dy є константами, тоді диференціал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ функції $z = f(x, y)$ буде функцією змінних x, y. Тому *можна говорити про диференціал диференціалу функції, який називається диференціалом функції другого порядку.*

Аналогічним чином визначаються *диференціали вищих порядків*. Символічно вони позначаються наступним чином:

$$d(dz) = d^2z, \quad d\left(d^2z\right) = d^3z, \ldots, \quad d\left(d^{k-1}z\right) = d^kz.$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними до порядку k включно. Якщо x, y незалежні змінні, то dx, dy константи, отже

$$d^2x = d^3x = \ldots = d^kx = 0,$$
$$d^2y = d^3y = \ldots = d^ky = 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} d^2z &= d\left(z'_x dx + z'_y dy\right) = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_x dx + \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_y dy = \\ &= z''_{xx}dx^2 + z''_{yx}dxdy + z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Неважко показати, що

$$d^3z = z'''_{xxx}dx^3 + 3z'''_{xxy}dx^2dy + 3z'''_{xyy}dxdy^2 + z'''_{yyy}dy^3.$$

Приклад 2.10. Знайти повний диференціал другого порядку функції $z = \sin(ax + by)$.

Розв'язання. Повний диференціал другого порядку заданої функції знайдемо за формулою (2.15).

Похідні першого порядку:

$$z'_x = \left(\sin(ax + by)\right)'_x = \|a, b, y = const\| = a\cos(ax + by),$$

$$z'_y = \left(\sin(ax + by)\right)'_y = \|a, b, x = const\| = b\cos(ax + by).$$

Похідні другого порядку:

$$z''_{xx}=\left(a\cos(ax+by)\right)'_x=\left\|a,b,y=const\right\|=-a^2\cdot\sin(ax+by),$$

$$z''_{xy}=\left(a\cos(ax+by)\right)'_y=\left\|a,b,x=const\right\|=-ab\cdot\sin(ax+by),$$

$$z''_{yx}=\left(b\cos(ax+by)\right)'_x=\left\|a,b,y=const\right\|=-ab\cdot\sin(ax+by),$$

$$z''_{yy}=\left(b\cos(ax+by)\right)'_y=\left\|a,b,x=const\right\|=-b^2\cdot\sin(ax+by).$$

Тоді повний диференціал другого порядку заданої функції має вигляд:

$$d^2z=-a^2\cdot\sin(ax+by)dx^2-2ab\cdot\sin(ax+by)dxdy-b^2\cdot\sin(ax+by)dy^2=$$
$$=-\sin(ax+by)\cdot\left(a^2dx^2+2abdxdy+b^2dy^2\right).$$

Завдання для самостійної роботи

Рівень 1

1. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dx}$ функції $z=4x\cdot e^y$, якщо $y=\mathrm{tg}\,3x$.

2. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=u^3+2v$, якщо $u=e^{x+y}$, $v=3x-4y$.

3. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $x^2+y^2=\sin(x-2z)$.

4. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2+3y^2-4z+5xy+9=0$ у точці $M_0(1;-2;3)$.

5. Знайти похідні другого порядку функції $z=3x^2+2y^4-8xy^2-1$.

Рівень 2

6. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dt}$ функції $z=\left(x^2+y^2\right)\cdot\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, якщо $x=\cos 2t$, $y=\sin 2t$.

7. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=u^3\cdot\cos 2v$, якщо $u=e^{x+y}$, $v=3x-4y$.

8. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $\sqrt{x^2-y^2}=\sin(2x+3z)$.

9. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=-3$ у точці $M_0(1;2;-4)$.

10. Для функції $z=\arccos(x+y)$ перевірити, що $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Відповіді

1. $4e^{\mathrm{tg}\,3x}\left(1+\dfrac{3x}{\cos^2 3x}\right)$. **2**. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3e^{3(x+y)}+6$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3e^{3(x+y)}-8$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{\cos(x-2z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\cos(x-2z)}$. **4**. Рівняння дотичної площини: $8x+7y+4z-6=0$; рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z-3}{4}$.

5. $z''_{xx}=6$; $z''_{xy}=z''_{yx}=-16y$; $z''_{yy}=24y^2-16x$. **6**. 2.

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3e^{3(x+y)}\cdot\left(\cos(6x-8y)-2\cdot\sin(6x-8y)\right)$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{3(x+y)}\cdot\left(3\cos(6x-8y)+8\sin(6x-8y)\right)$.

8. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-2\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(2x+3z)}{3\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(2x+3z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{3\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(2x+3z)}$.

9. Рівняння дотичної площини: $4x+z=0$; рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+4}{1}$.

Перейти до початку Частини 2

Перейти до Змісту

Частина 3

Тема: Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області

Одним з основних застосувань диференціального числення є задача дослідження функції на екстремум. Означення екстремуму функції $z = f(P)$ двох змінних в точці $P_0(x_0; y_0)$ відповідає означенню екстремуму функції однієї змінної. Крім того, з означення витікає, що точка $P_0(x_0; y_0)$ є внутрішньою точкою області визначення функції.

3.1. Екстремум функції двох змінних

Позначимо δ-окіл точки P_0 через $O(P_0, \delta)$.

Означення. *Точкою максимуму (мінімуму) функції* $z = f(P)$ називається точка P_0, якщо існує δ-окіл точки P_0, в якому виконується (крім самої точки) нерівність

$$f(P) < f(P_0) \quad \left(f(P) > f(P_0)\right) \quad \forall P \in O(P_0, \delta).$$

Точки максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму* функції.

3.1.1. Необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних

Теорема 3.1. *Нехай функція* $z = f(x, y)$ *диференційована в точці* $P_0(x_0; y_0)$ *і має екстремум в цій точці, тоді*

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Означення. Точки, в яких частинні похідні функції $z = f(x, y)$ дорівнюють нулю, називаються *критичними або стаціонарними точками*.

Однак бувають випадки, коли в деяких точках якихось частинних похідних функції декількох змінних не існує, а решта дорівнюють нулю. І в таких точках (поряд зі стаціонарними) можливий екстремум.

3.1.2. Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, що має неперервні частинні похідні першого і другого порядків в деякому околі стаціонарної точки $P_0(x_0; y_0)$. Введемо позначення:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}.$$

Теорема 3.2. *Якщо в стаціонарній точці $P_0(x_0; y_0)$ виконується нерівність $AC - B^2 > 0$, то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум. Причому, якщо $A < 0$ – максимум, а якщо $A > 0$ – мінімум.*

Якщо $AC - B^2 < 0$ – екстремуму немає. Якщо $AC - B^2 = 0$ може бути екстремум, може і не бути.

Приклад 3.1. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7$.

Розв'язання. Знайдемо точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремуму (стаціонарні точки). Для цього знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = \left(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7\right)'_x = 2x - 4,$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7\right)'_y = 2y + 8.$$

Складемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4, \\ 2y = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -4. \end{cases}$$

Отже, точка $P_0(2;-4)$ – стаціонарна. Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в ній. Для цього знайдемо другі похідні заданої функції:

$$A = z''_{xx} = (2x-4)'_x = 2, \quad B = z''_{xy} = (2x-4)'_y = 0, \quad C = z''_{yy} = (2y+8)'_x = 2.$$

Обчислимо величину Δ: $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4$.

Оскільки $\Delta > 0$, то робимо висновок, що екстремум у точці $P_0(2;-4)$ існує. Величина $A = 2 > 0$, тому цей екстремум – мінімум. Значення функції у знайденій точці мінімуму:

$$z_{\min} = z(P_0) = \left(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 7\right)\Big|_{P_0} = 2^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 2 + 8 \cdot (-4) + 7 = -13.$$

Приклад 3.2. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2.$$

Розв'язання. Знайдемо точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремуму: $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

Оскільки

$$z'_x = \left(x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2\right)'_x = 2x - 3y - 8,$$

$$z'_y = \left(x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2\right)'_y = 8y - 3x + 19,$$

то

$$\begin{cases} 2x - 3y - 8 = 0, \\ 8y - 3x + 19 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ -3x + 8y = -19. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $y = -2$, а $x = \frac{1}{2} \cdot (8 + 3y) = \frac{1}{2} \cdot (8 + 3 \cdot (-2)) = 1$. Отже, точка $P_0(1;-2)$ – стаціонарна.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в знайденій точці:

$$A = z''_{xx} = \left(2x - 3y - 8\right)'_x = 2, \quad B = z''_{xy} = \left(2x - 3y - 8\right)'_y = -3,$$

$$C = z''_{yy} = \left(8y - 3x + 19\right)'_y = 8.$$

Обчислимо величину Δ:

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 8 - (-3)^2 = 7.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то робимо висновок, що екстремум у точці $P_0\left(1;-2\right)$ існує. Величина $A = 2 > 0$, тому це мінімум. Обчислимо значення функції у знайденій точці мінімуму:

$$z_{\min} = z\left(P_0\right) = \left(x^2 + 4y^2 - 3xy - 8x + 19y + 2\right)\Big|_{P_0} =$$

$$= 1^2 + 4 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 + 19 \cdot (-2) + 2 = -21.$$

Приклад 3.3. Дослідити функцію на екстремум: $z = e^{\frac{y}{2}}\left(6 - x^2 - 2y\right)$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки функції:

$$z'_x = \left(e^{\frac{y}{2}}\left(6 - x^2 - 2y\right)\right)'_x = e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(6 - x^2 - 2y\right)'_x = e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(-2x\right) = -2xe^{\frac{y}{2}},$$

$$z'_y = \left(e^{\frac{y}{2}}\left(6 - x^2 - 2y\right)\right)'_y = \left(e^{\frac{y}{2}}\right)'_y \cdot \left(6 - x^2 - 2y\right) + e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(6 - x^2 - 2y\right)'_y =$$

$$= e^{\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(6 - x^2 - 2y\right) + e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(-2\right) = e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(3 - \frac{x^2}{2} - y - 2\right) = e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} - y\right).$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2xe^{\frac{y}{2}} = 0, \\ e^{\frac{y}{2}} \cdot \left(1 - \dfrac{x^2}{2} - y\right) = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{x^2}{2} + y = 1, \end{cases}$$

оскільки за властивостями показникової функції $e^{\frac{y}{2}} > 0$. Тому

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отримали стаціонарну точку $P_0\left(0;1\right)$. Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму у знайденій точці:

$$A=z''_{xx}=\left(-2xe^{\frac{y}{2}}\right)'_x=-2e^{\frac{y}{2}}\Big|_{P_0}==-2e^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{e},$$

$$B=z''_{xy}=\left(-2xe^{\frac{y}{2}}\right)'_y=-2x\cdot e^{\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2}=-xe^{\frac{y}{2}}\Big|_{P_0}=-0\cdot e^{\frac{1}{2}}=0,$$

$$C=z''_{yy}=\left(e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)\right)'_y=\left(e^{\frac{y}{2}}\right)'_y\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)+e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)'_y=$$

$$=e^{\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-y\right)+e^{\frac{y}{2}}\cdot(-1)=e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{2}-1\right)=$$

$$=e^{\frac{y}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{2}\right)\Big|_{P_0}=e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{0^2}{4}-\frac{1}{2}\right)=-e^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{e}.$$

Обчислимо величину Δ :

$$\Delta=AC-B^2\big|_{P_0}=-2\sqrt{e}\cdot\left(-\sqrt{e}\right)-0^2=2e.$$

Оскільки $\Delta>0,$ то екстремум у точці $P(0;1)$ існує. Величина $A=-2\sqrt{e}<0,$ тому це максимум. Обчислимо значення функції у знайденій точці максимуму:

$$z_{\max}=z(P_0)=\left(e^{\frac{y}{2}}\left(6-x^2-2y\right)\right)\Big|_{P_0}=e^{\frac{1}{2}}\left(6-0^2-2\cdot1\right)=4\sqrt{e}.$$

Зауваження 1. Зверніть увагу на необхідні умови (3.1) існування екстремуму функції двох змінних. Якщо ці умови виконуються, то

$$dz\big|_{P_0}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0}dy=0$$

для будь-яких значень диференціалів незалежних змінних dx, dy.

Крім того, в достатніх умовах існування екстремуму функції $z=f(x,y)$ двох змінних фігурують її частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{P_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$, обчислені в знайденій стаціонарній точці $P_0(x_0;y_0)$. Це пов'язує достатні умови існування екстремуму функції $z = f(x,y)$ в точці $P_0(x_0;y_0)$ з диференціалом другого порядку

$$d^2z\Big|_{P_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{P_0} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0} dy^2.$$

Зауваження 2. А якщо треба буде знайти екстремум функції трьох або чотирьох, і взагалі декількох змінних? Чи можливо це зробити і за яких умов?

Розглянемо функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка визначена у деякому околі точки $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Означення екстремуму такої функції аналогічно означенню екстремуму функції двох змінних.

3.1.3. Необхідні умови екстремуму функції декількох змінних

Необхідні умови існування екстремуму функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|_{M_0} = 0, \ k = 1, 2, ..., n,$$

тобто, якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має екстремум в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, то

$$du\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{M_0} dx_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{M_0} dx_n = 0$$

для будь-яких значень диференціалів незалежних змінних $dx_1, ..., dx_n$.

Тепер, щодо достатніх умов існування екстремуму функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Розглянемо так звані квадратичні форми, які мають такий вигляд: $Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, де a_{ij} – деякі числа, такі, що $a_{ij} = a_{ji}$. Числа a_{ij} називаються *коефіцієнтами квадратичної форми*, а побудована з них симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею квадратичної форми*. Визначники

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаються *головними (кутовими) мінорами матриці A.*

Квадратична форма $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *додатно визначеною (від'ємно визначеною)*, якщо вона приймає додатні (від'ємні) значення при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що одночасно не дорівнюють нулю. Очевидно, $Q(0,0,\dots,0) = 0$.

Приклади:

1) квадратична форма $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$ додатно визначена;

2) квадратична форма $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$ є знакозмінною, тому що вона приймає як додатні, так і від'ємні значення;

3) квадратична форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ є квазізнакозмінною, оскільки $Q(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$ для всіх x_1, x_2, але $Q(x_1, x_2) = 0$ не тільки в точці $(0;0)$, а і, наприклад, в точці $(2;1)$.

Знаковизначеність квадратичної форми здійснюється за допомогою ***критерію Сильвестра***:

1. Для того, щоб квадратична форма $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці A були додатними: $\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad ..., \quad \Delta_n > 0.$

2. Для того, щоб квадратична форма $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів її матриці A чергувалися наступним чином: $\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad ...$.

Існує певний зв'язок між квадратичними формами та диференціалами другого порядку в точці $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$:

$$d^2u\Big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{M_0} dx_i\, dx_j.$$

Цей вираз свідчить, що другий диференціал функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ є квадратичною формою від змінних $dx_1,\ dx_2, ..., dx_n$, а частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{M_0}$ – коефіцієнти цієї квадратичної форми.

3.1.4. Достатні умови існування екстремуму функції декількох змінних

<u>**Теорема 3.3.**</u> *Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в деякому околі точки $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ і двічі диференційована в самій точці $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, причому M_0 є стаціонарною точкою функції, тобто $du\big|_{M_0} = 0$. Тоді в цій точці функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має мінімум (максимум), якщо $d^2u\big|_{M_0}$ є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від змінних $dx_1,\ dx_2, ..., dx_n$.*

Якщо $d^2u\big|_{M_0}$ є знакозмінною квадратичною формою, то в точці $M_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ функція не має екстремума.

Якщо $du\big|_{M_0}=0$, а $d^2u\big|_{M_0}$ є квазізнакозмінною квадратичною формою, то функція $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ може мати в точці $M_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ екстремум, а може і не мати його.

Приклад 3.4. Знайти точки екстремуму функції

$$u=x^2+2y^2+z^2-xy+2z-7x+2.$$

Розв'язання. Складемо систему рівнянь для знаходження стаціонарних точок функції:

$$\begin{cases} u'_x=2x-y-7=0, \\ u'_y=4y-x=0, \\ u'_z=2z+2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=7, \\ x=4y, \\ z=-1. \end{cases} \Rightarrow \text{ т. } M_0\left(4;1;-1\right).$$

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму функції обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$u''_{xx}=2,\ u''_{xy}=u''_{yx}=-1,\ u''_{yy}=4,\ u''_{xz}=u''_{zx}=0,\ u''_{yz}=u''_{zy}=0,\ u''_{zz}=2.$$

Таким чином, $d^2u\big|_{M_0}=2dx^2-2dxdy+4dy^2+2dz^2$. Матриця цієї квадратичної форми від змінних dx, dy, dz має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо головні мінори матриці:

$$\Delta_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=7>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0.$$

За критерієм Сильвестра маємо, що $d^2u\big|_{M_0}$ є додатно визначена квадратична форма від змінних $dx,\ dy, dz$. Це означає, що в точці $M_0(4;1;-1)$ функція має мінімум, і $u_{\min} = u(M_0) = -13$.

Зауваження 3. З **Теореми 3.3** випливає як частковий випадок **Теорема 3.2**. Дійсно, нехай $dz\big|_{P_0} = 0$, тобто точка $P_0(x_0; y_0)$ є стаціонарною точкою функції $z = f(x, y)$.

Введемо позначення: $A = a_{11} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}$, $B = a_{12} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}$, $C = a_{22} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}$.

Тоді з **Теореми 3.3** і **критерію Сільвестра** випливають наступні твердження:

1) якщо $AC - B^2 = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} \cdot \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0} - \left(\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} \right)^2 > 0,$ то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум (максимум при $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} < 0$ і мінімум при $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} > 0$);

2) якщо $AC - B^2 < 0,$ то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ не має екстремуму;

3) якщо $AC - B^2 = 0,$ то в точці $P_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ може мати екстремум, а може і не мати його, що повністю співпадає зі змістом **Теореми 3.2**.

3.2. Найбільше і найменше значення функції двох змінних в замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в деякій обмеженій замкненій області $\overline{D}$. Відомо, що в області $\overline{D}$ неперервна функція приймає найменше і найбільше значення.

Якщо функція $z = f(x, y)$ приймає найменше (найбільше) значення у внутрішній точці області $\overline{D}$, то в ній, очевидно, функція має екстремум – мінімум (максимум). Тобто, нас цікавлять точки, в яких можливий екстремум.

Однак функція $z = f(x, y)$ також може досягати свого найменшого (найбільшого) значення на межі області $\overline{D}$. Тому, щоб знайти ***найменше (найбільше) значення функції в області*** $\overline{D}$, необхідно:

1. Знайти значення функції в точках, в яких можливий екстремум – в стаціонарних точках функції, які належать області D.

2. Знайти найменше та найбільше значення функції на межі області $\overline{D}$.

3. Порівнюючи отримані результати, знайти найменше і найбільше значення функції в обмеженій замкненій області $\overline{D}$.

Приклад 3.5. Знайти найменше і найбільше значення функції $z = 4xy - x^2y - y^2x$ в замкненій області $\overline{D}$, що задана нерівностями $x \geq -1,\ y \geq 3,\ y \leq 6 - x$.

Розв'язання. Побудуємо задану область (рис. 3.1).

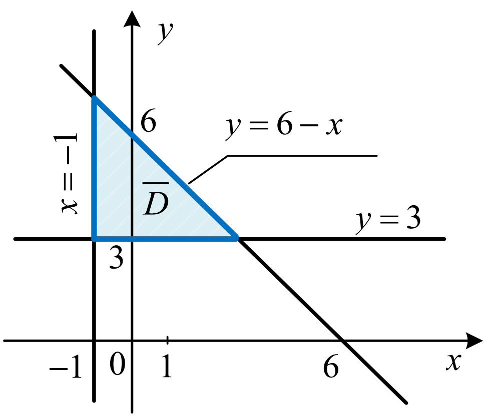

Рисунок 3.1

Знайдемо частинні похідні і складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y - 2xy - y^2 = 0, \\ 4x - x^2 - 2xy = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(4 - 2x - y) = 0, \\ x(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Звідки отримуємо чотири точки: $P_1(0;0)$; $P_2(0;4)$; $P_3(4;0)$; $P_4\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Лише точка $P_2(0;4)$ є внутрішньою точкою області (рис. 3.2).

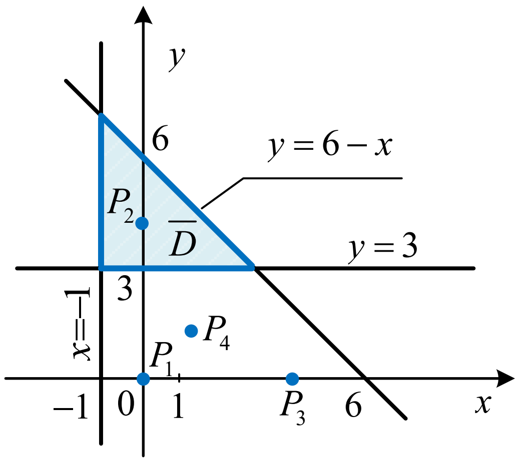

Рисунок 3.2

Значення функції в цій точці $z(P_2) = 0$. Розберемо поведінку функції на межі області.

На прямій $L_1: \ y = 3$ функція $Z_1 = z\big|_{L_1} = 3x - 3x^2, \ (-1 \le x \le 3)$.

На прямій $L_2: \ x = -1$ функція $Z_2 = z\big|_{L_2} = -5y + y^2, \ (3 \le y \le 7)$.

На прямій $L_3: \ y = 6 - x$ функція $Z_3 = z\big|_{L_3} = 2x^2 - 12x, \ (-1 \le x \le 3)$.

У кожному з цих випадків вирішується задача пошуку найбільшого й найменшого значення функції однієї змінної на відповідних відрізках.

Застосовуючи відомий алгоритм, отримаємо:

На прямій $L_1: \ y = 3$: $z_{\text{найм.}} = z(3;3) = -18$, $z_{\text{найб.}} = z\left(\frac{1}{2};3\right) = \frac{3}{4}$.

На прямій $L_2: \ x = -1$: $z_{\text{найм.}} = z(-1;3) = -6$, $z_{\text{найб.}} = z(-1;7) = 14$.

На прямій $L_3: \ y = 6 - x$: $z_{\text{найм.}} = z(3;3) = -18$, $z_{\text{найб.}} = z(-1;7) = 14$.

Порівнюючи отримані результати, маємо

$$z_{\text{найм.}} = z(3;3) = -18, \;\; z_{\text{найб.}} = z(-1;7) = 14.$$

Приклад 3.6. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 2y + 3$ в замкненій області $\overline{D}$, що обмежена лініями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$.

Розв'язання. Задана область є прямокутником, обмеженим вертикальними прямими $x = 0$, $x = 2$ і горизонтальними прямими $y = 0$, $y = 3$. Досліджувана функція $z(x, y)$ неперервна в цій області (рис. 3.3).

Знайдемо стаціонарні точки заданої функції, для цього знайдемо її частинні похідні:

$$z'_x = \left(x^2 + y^2 + xy + 5x - 2y + 3\right)'_x = 2x + y + 5,$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2 + xy + 5x - 2y + 3\right)'_y = 2y + x - 2.$$

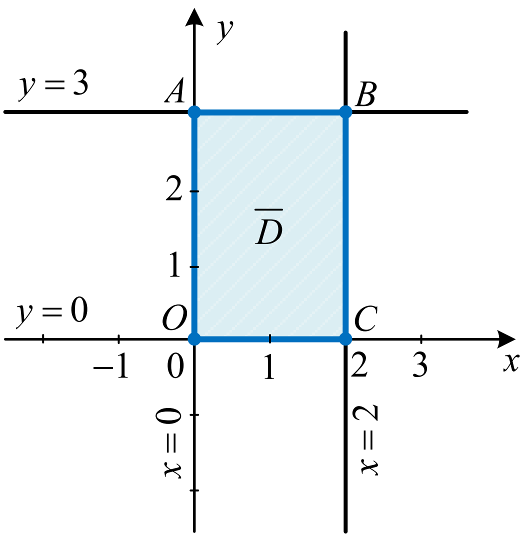

Рисунок 3.3

Запишемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 5 = 0, \\ 2y + x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = -5, \\ x + 2y = 2, \end{cases}$$

звідки отримуємо $x = -4$, а з першого рівняння системи знаходимо $y = -2x - 5 = -2 \cdot (-4) - 5 = 3$.

Отже, $P_1(-4;3)$ – стаціонарна точка заданої функції. Вона не належить заданій області, а, значить, виключаємо її з подальшого розгляду.

Проаналізуємо поведінку заданої функцій на межі області, для цього розглянемо окремо кожну лінію – сторону прямокутника $OABC$ (рис. 3.3).

1) На прямій $L_1: x = 0$ функція $Z_1 = z|_{L_1} = y^2 - 2y + 3, \ (0 \le y \le 3)$.

Похідна функції $Z_1'(y) = (y^2 - 2y + 3)' = 2y - 2, \quad y = 1$. Це значення належить відрізку $[0,3]$. Отже, отримали точку $P_2(0;1)$, що належить стороні OA прямокутника. Значення заданої функції у точці P_2: $z(P_2) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$.

2) На прямій $L_2: x = 2$ функція $Z_2 = z|_{L_2} = y^2 + 17, \ (0 \le y \le 3)$. Її похідна $Z_2'(y) = (y^2 + 17)' = 2y$. З умови існування стаціонарних точок: $2y = 0$, звідки $y = 0$. Стаціонарна точка $P_3(2;0)$ співпадає з вершиною C прямокутника $OABC$.

Відповідне значення функції

$$z(P_3) = z(C) = 0^2 + 17 = 17.$$

3) На прямій $L_3: y = 0$ функція $Z_3 = z|_{L_3} = x^2 + 5x + 3, \quad (0 \le x \le 2)$. Її похідна $Z_3'(x) = (x^2 + 5x + 3)' = 2x + 5, x = -\frac{5}{2}$. Знайдена стаціонарна точка $P_4\left(-\frac{5}{2};0\right)$ не належить заданій області $\overline{D}$, отже, теж виключаємо її з подальшого розгляду.

4) На прямій $L_4: y = 3$ функція $Z_4 = z|_{L_4} = x^2 + 8x + 6, \quad (0 \le x \le 2)$. Похідна $Z_4'(x) = (x^2 + 8x + 6)' = 2x + 8, x = -4$. Знайдена стаціонарна точка $P_5(-4;3)$ співпадає з точкою $P_1(-4;3)$, яка не належить заданій області $\overline{D}$, і вже виключена з подальшого розгляду.

Обчислимо також значення заданої функції $z(x,y)$ у кутових точках (прямокутника $OABC$:

$$z(O)=z(0;0)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_O=3,$$

$$z(A)=z(0;3)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_A=0+3^2+0+0-2\cdot 3+3=6,$$

$$z(B)=z(2;3)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_B=2^2+3^2+2\cdot 3+5\cdot 2-2\cdot 3+3=26,$$

$$z(C)=z(2;0)=\left(x^2+y^2+xy+5x-2y+3\right)\Big|_C=17.$$

Доповнимо рисунок 3.3 усіма знайденими точками (рис. 3.4)

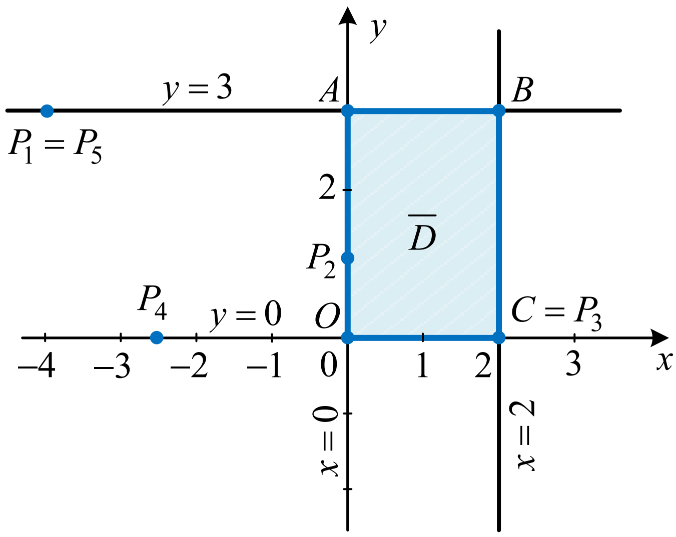

Рисунок 3.4

Аналізуючи всі знайдені значення функції, робимо висновок, що

$$z_{найм.}=z(P_2)=2,\ z_{найб.}=z(B)=26.$$

Приклад 3.7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-2y^2-4x+6y+1$ в замкненій області $\overline{D}$, що обмежена лініями $y=x$, $x+y=4$, $y=1$.

Розв'язання. Область $\overline{D}$ є трикутник, обмежений похилими прямими $y=x$ і $x+y=4$ та горизонтальною прямою $y=1$ (рис. 3.5).

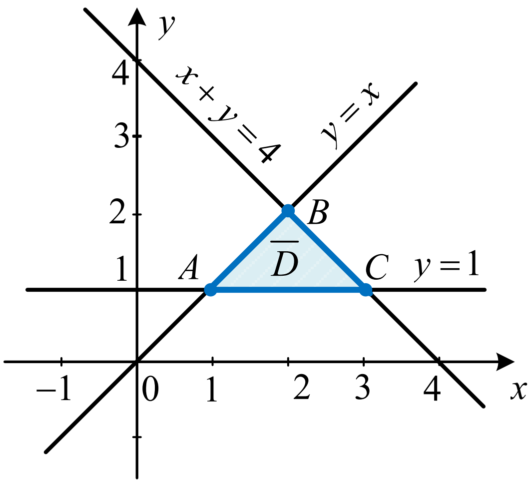

Рисунок 3.5

Задана функція неперервна в цій області. Знайдемо стаціонарні точки функції, для чого дослідимо її перші частинні похідні:

$$z'_x = \left(x^2 - 2y^2 - 4x + 6y + 1\right)'_x = 2x - 4,$$

$$z'_y = \left(x^2 - 2y^2 - 4x + 6y + 1\right)'_y = -4y + 6.$$

Запишемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ -4y + 6 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4, \\ -4y = -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Стаціонарна точка $P_1\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$ належить області $\bar{D}$. Обчислимо значення функції в цій точці:

$$z(P_1) = \left(x^2 - 2y^2 - 4x + 6y + 1\right)\Big|_{P_1} = 2^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\cdot 2 + 6\cdot\frac{3}{2} + 1 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

Тепер дослідимо задану функцію на межі області, тобто на відрізках прямих, що утворюють трикутник ABC. Розглянемо окремо кожний відрізок.

1) На прямій $L_1:\ y = x$ функція $Z_1 = z\big|_{L_1} = -x^2 + 2x + 1,\ \left(1 \le x \le 2\right)$.

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції, для чого потрібно дослідити її першу похідну: $Z_1'(x)=\left(-x^2+2x+1\right)'=-2x+2,\quad -2x+2=0,$ тоді $x=1,$ а відповідне значення $y=1$. Знайдена точка $P_2(1;1)$ співпадає з вершиною A трикутника.

Обчислимо значення функції в цій точці:

$$Z_1(P_2)=Z_1(A)=\left(-x^2+2x+1\right)\Big|_{x=1}=-1^2+2\cdot1+1=2.$$

2) На прямій $L_2:\ y=4-x,$ функція $Z_2=z\big|_{L_2}=-x^2+6x-7,\ (2\le x\le 3).$

Дослідимо першу похідну цієї функції: $Z_2'(x)=\left(-x^2+6x-7\right)'=-2x+6,$ тому $-2x+6=0,$ і $x=3,$ а $y=4-3=1$. Знайдена точка $P_3(3;1)$ співпадає з вершиною C трикутника.

Обчислимо значення функції в цій точці:

$$Z_2(P_3)=Z_2(C)=\left(-x^2+6x-7\right)\Big|_{x=3}=-3^2+6\cdot3-7=2.$$

3) На прямій $L_3:\ y=1,$ функція $Z_3=z\big|_{L_3}=x^2-4x+5,\ (1\le x\le 3).$

Досліджуємо першу похідну цієї функції: $Z_3'(x)=\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4.$ Тоді $2x-4=0,\ \ x=2$ при $y=1$. Знайдена точка $P_4(2;1)$ належить відрізку AC.

Обчислимо значення функції в цій точці:

$$Z_3(P_4)=\left(x^2-4x+5\right)\Big|_{x=2}=2^2-4\cdot2+5=1.$$

Залишилось знайти значення функції в кутовій точці $B(2;2)$:

$$z(B)=\left(x^2-2y^2-4x+6y+1\right)\Big|_{B}=\ 2^2-2\cdot2^2-4\cdot2+6\cdot2+1=1.$$

Доповнимо наш рисунок всіма знайденими точками (рис. 3.6).

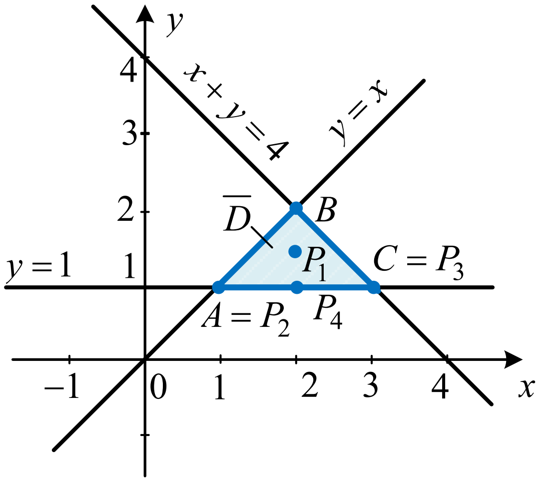

Рисунок 3.6

Аналізуючи отримані результати, робимо висновок, що найменшим та найбільшим значеннями функції в заданій області $\overline{D}$, відповідно, є наступні:

$$z_{найм.} = z(P_4) = z(B) = 1,\ z_{найб.} = z(A) = z(C) = 2.$$

Приклад 3.8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4 - (x+1)^2 - y^2$ в замкненій області $\overline{D}$, що обмежена лінією $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Розв'язання. Межею області $\overline{D}$ є еліпс з центром у початку координат та півосями $a = 2$, $b = 1$. Побудуємо задану область (рис. 3.7).

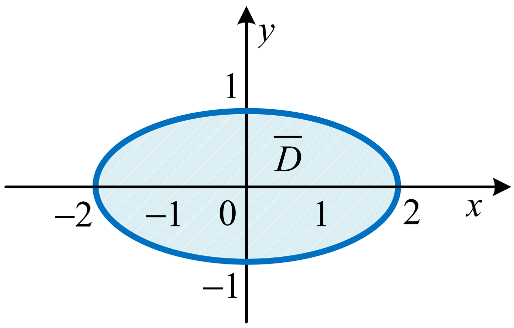

Рисунок 3.7

Як і в прикладах вище, почнемо з дослідження заданої функції на існування стаціонарних точок. Частинні похідні цієї функції:

$$z'_x = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)'_x = -2\cdot(x+1),$$

$$z'_y = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)'_y = -2y.$$

З необхідної умови існування екстремумів запишемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2\cdot(x+1) = 0, \\ -2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Знайдена стаціонарна точка $P_1(-1;0)$ належить області $\overline{D}$.

Обчислимо значення заданої функції в цій точці:

$$z(P_1) = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)\Big|_{P_1} = 4 - (-1+1)^2 - 0^2 = 4.$$

Переходимо до дослідження функції на межі області, тобто за умови, що $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ або $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$. Підставимо це значення у задану функцію та отримаємо функцію однієї змінної:

$$z_1(x) = \left(4 - (x+1)^2 - y^2\right)\Big|_{y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}} = 4 - (x+1)^2 - \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) =$$

$$= 4 - \left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 + \frac{x^2}{4} = 3 - x^2 - 2x - 1 + \frac{x^2}{4} = 2 - \frac{3}{4}x^2 - 2x.$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції. Її похідна

$$z'_1(x) = \left(2 - \frac{3}{4}x^2 - 2x\right)' = -\frac{3}{4}\cdot 2x - 2 = -\frac{3}{2}x - 2.$$

Тоді з умови $z'_1(x) = 0$ виходить, що

$$-\frac{3}{2}x - 2 = 0, \quad -\frac{3}{2}x = 2, \quad x = -\frac{4}{3},$$

звідки знаходимо $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, тобто $y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Отже, отримали стаціонарні точки $P_2\left(-\frac{4}{3};\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ і $P_3\left(-\frac{4}{3};-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ на межі області $\overline{D}$.

Обчислимо значення заданої функції в цих точках:

$$z(P_2)=z(P_3)=z_1\left(-\frac{4}{3}\right)=\left(2-\frac{3}{4}x^2-2x\right)\Bigg|_{x=-\frac{4}{3}}=2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=2-\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9}+\frac{8}{3}=2-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}.$$

Доповнимо наш рисунок знайденими точками (рис. 3.8).

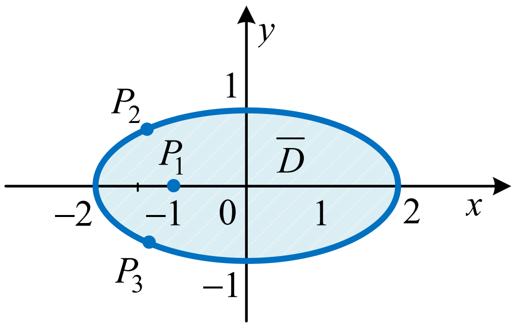

Рисунок 3.8

Серед всіх знайдених вище значень функції оберемо найменше та найбільше значення:

$$z_{найм.}=z(P_2)=z(P_3)=\frac{10}{3},\ z_{найб.}=z(P_1)=4.$$

3.3. Умовний екстремум

Нехай на площині OXY задана функція $z=f(x,y)$ і лінія L рівнянням $\varphi(x,y)=0$. На лінії L потрібно знайти точку $P_0(x_0;y_0)$, в якій значення функції найменше або найбільше в порівнянні зі значеннями цієї функції в точках лінії L, розташованих в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Такі точки називаються *точками умовного екстремуму функції* $z=f(x,y)$ *на лінії* L. Очевидно, що точки звичайного екстремуму також є точками *умовного екстремуму* функції для будь-якої лінії, що проходить через цю точку.

Припустимо, функція $z=f(x,y)$ задана в області D на площині OXY і пряма L задана в цій області рівнянням зв'язку

$$\varphi(x,y)=0. \tag{3.2}$$

3.3.1. Метод виключення дослідження функції на умовний екстремум

Найпростішим методом дослідження функції $z=f(x,y)$ на умовний екстремум є *метод виключення*.

Виразивши з *рівняння зв'язку* $\varphi(x,y)=0$ змінну y явно через x, тобто, $y=y(x)$, і підставивши це в вираз функції $z=f(x,y)$, отримаємо функцію однієї змінної

$$z=f\left[x,y(x)\right]=\Phi(x).$$

Далі знайдемо значення x, при яких функція $\Phi(x)$ досягає екстремуму, і, визначивши відповідне значення y з рівняння зв'язку, отримаємо шукану точку умовного екстремуму.

Приклад 3.9. Знайти екстремум функції $z=4x^2+y^2$ за умови, що $x+y=2$.

Розв'язання. Знайдемо y з рівняння зв'язку і підставимо в вираз заданої функції:

$$y=2-x,\quad \Phi(x)=z\big|_{y=2-x}=4x^2+(2-x)^2=5x^2-4x+4.$$

Знайдемо стаціонарні точки отриманої функції:

$$\Phi'(x)=10x-4,\ \Phi'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2}{5}.$$

Обчислимо $\Phi''(x)$: $\Phi''(x)=10>0$, таким чином, в точці $x=\dfrac{2}{5}$ функція має мінімум. Обчислимо $y\left(\dfrac{2}{5}\right)$: $y\left(\dfrac{2}{5}\right)=2-\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$.

Таким чином, в точці $P_0\left(\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$ функція $z=4x^2+y^2$ має умовний мінімум і $z(P_0)=4\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$.

Зауваження 4. Схема застосування цього методу очевидна. Але застосувати цей метод на практиці, особливо для функцій декількох змінних, вдається дуже рідко, особливо на етапі виключення змінних.

Приклад 3.10. Знайти екстремум функції $z=3x^2+(y-1)^2-5$ за умови $x-y=2$.

Розв'язання. Застосуємо метод виключення. Виразимо з рівняння зв'язку змінну y через x: $y=x-2$. Підставимо його у вираз для заданої функції $z=f(x,y)$, отримаємо функцію однієї змінної:

$$f[x,y(x)]=\Phi(x)=\left(3x^2+(y-1)^2-5\right)\Big|_{y=x-2}=3x^2+(x-2-1)^2-5=$$

$$=3x^2+(x-3)^2-5=3x^2+x^2-6x+9-5=4x^2-6x+4.$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції:

$$\Phi'(x)=\left(4x^2-6x+4\right)'=8x-6.$$

З умови, що $\Phi'(x)=0$, знаходимо: $8x-6=0$, $x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Тоді $y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}-2=-\frac{5}{4}$. Отже, $P_0\left(\frac{3}{4};-\frac{5}{4}\right)$ – стаціонарна точка.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму у цій точці. Для цього знайдемо другу похідну функції $\Phi(x)$: $\Phi''(x)=(8x-6)'=8>0$. Згідно другої достатньої умови існування екстремуму функції однієї змінної маємо мінімум у точці P_0.

Таким чином, точка $P_0\left(\frac{3}{4};-\frac{5}{4}\right)$ – точка умовного мінімуму заданої функції.

Значення функції в цій точці:

$$z_{\min}=z(P_0)=\left(3x^2+(y-1)^2-5\right)\Big|_{P_0}=3\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{5}{4}-1\right)^2-5=$$

$$=\frac{27}{16}+\left(-\frac{9}{4}\right)^2-5=\frac{27}{16}+\frac{81}{16}-\frac{80}{16}=\frac{28}{16}=\frac{7}{4}.$$

3.3.2. Метод невизначених множників Лагранжа

Не завжди можна виразити явно y через x з рівняння зв'язку. Універсальним і ефективним методом дослідження функції на умовний екстремум є метод невизначених множників Лагранжа, або просто *метод Лагранжа.*

У точках умовного екстремуму сумарна похідна функції $z=f\left[x,y(x)\right]$ дорівнює нулю, тому

$$\frac{dz}{dx}=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad (3.3)$$

З рівняння (3.2) зв'язку

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}. \qquad (3.4)$$

Підставляючи вираз (3.4) в рівняння (3.3), отримуємо:

$$f'_x(x,y)-f'_y(x,y)\cdot\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}=0.$$

Точки умовного екстремуму задовольняють рівнянню зв'язку, тому маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} f'_x-f'_y\cdot\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

З першого рівняння системи (3.5):

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda.$$

Таким чином, отримуємо систему з трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Для того щоб полегшити запам'ятовування цих рівнянь, вводиться допоміжна функція:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \tag{3.7}$$

Тоді система (3.6) прийме такий вид:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}} \tag{3.8}$$

Вищевказаний метод був запропонований Лагранжем.

Приклад 3.11. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1 = 0.$

Розв'язання. Складемо допоміжну функцію

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1\right) = 0.$$

Обчислимо частинні похідні та застосуємо умови (3.8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \dfrac{\lambda}{2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \dfrac{\lambda}{8} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{8} - 1 = 0. \end{cases}$$

З першого і другого рівнянь системи знаходимо λ:

$$\lambda = -4x, \quad \lambda = -16y.$$

Порівнюючи ці вирази, отримуємо:

$$4x = 16y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{4}.$$

Підставляємо результат в третє рівняння системи:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{32} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 17x = 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32}{17} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{17}.$$

До речі, $\lambda = -4x$, тому $\lambda = -\dfrac{128}{17}$.

Таким чином, точка $P_0\left(\dfrac{32}{17}; \dfrac{8}{17}\right)$ є стаціонарною точкою, яку дослідимо за допомогою достатніх умов існування екстремуму. Для цього запишемо функцію Лагранжа $F(x, y, \lambda)$ при $\lambda = -\dfrac{128}{17}$:

$$F\left(x, y, -\frac{128}{17}\right) = \left(x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1\right)\right)\Bigg|_{\lambda = -\frac{128}{17}} = x^2 + y^2 - \frac{128}{17}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{8} - 1\right).$$

Знайдемо другі похідні цієї функції. Для цього використаємо знайдені вище значення перших похідних при відомому значенні $\lambda = -\dfrac{128}{17}$:

$$F'_x = 2x - \frac{64}{17}, \quad F'_y = 2y - \frac{16}{17}.$$

Далі, нехай

$$A = F''_{xx} = \left(2x - \frac{64}{17}\right)'_x = 2, \quad B = F''_{xy} = \left(2x - \frac{64}{17}\right)'_y = 0, \quad C = F''_{yy} = \left(2y - \frac{16}{17}\right)'_y = 2.$$

Тоді $\Delta(P_0)=\left(AC-B^2\right)\Big|_{P_0}=2\cdot 2-0^2=4>0$. Робимо висновок, що умовний екстремум у точці $P_0\left(\frac{32}{17};\frac{8}{17}\right)$ існує. А оскільки величина $A(P_0)=4>0$, то це точка умовного мінімуму.

Значення функції в цій точці: $z_{\min}=z(P_0)=\left(x^2+y^2\right)\Big|_{P_0}=\frac{64}{17}$.

Приклад 3.12. Знайти екстремум функції $z=x^3+y^3$ за умови $x^2+y^2=8$ $(x>0,\ y>0)$.

Розв'язання. Застосуємо метод невизначених множників Лагранжа.

Складемо функцію Лагранжа за формулою (3.7), де $f(x,y)=x^3+y^3$, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-8$, тоді

$$F(x,y,\lambda)=x^3+y^3+\lambda\left(x^2+y^2-8\right)=x^3+y^3+\lambda x^2+\lambda y^2-8\lambda.$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції за кожною з трьох змінних:

$$F'_x=\left(x^3+y^3+\lambda x^2+\lambda y^2-8\lambda\right)'_x=3x^2+2\lambda x,$$

$$F'_y=\left(x^3+y^3+\lambda x^2+\lambda y^2-8\lambda\right)'_y=3y^2+2\lambda y,$$

$$F'_\lambda=\left(x^3+y^3+\lambda x^2+\lambda y^2-8\lambda\right)'_\lambda=x^2+y^2-8.$$

Запишемо необхідну умову існування екстремуму функції у вигляді системи:

$$\begin{cases} F'_x=3x^2+2\lambda x=0, \\ F'_y=3y^2+2\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-8=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(3x+2\lambda)=0, \\ y(3y+2\lambda)=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

Оскільки за умовою $x>0,\ y>0$, то перше та друге рівняння можемо поділити на множники x та y, що не містять розв'язків системи. Тоді

$$\begin{cases} 3x+2\lambda=0, \\ 3y+2\lambda=0, \\ x^2+y^2=8, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-\dfrac{2\lambda}{3}, \\ y=-\dfrac{2\lambda}{3}, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

Підставимо значення x та y з перших двох рівнянь у третє:

$$\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2+\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2=8,\ 2\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2=8,\ \lambda^2=9, \text{ звідки } \lambda_{1,2}=\pm 3.$$

Оскільки $x=y=-\dfrac{2\lambda}{3}>0$, то обираємо від'ємне значення λ. Отже, $x=y=2$.

Таким чином, отримали стаціонарну точку $P_0(2;2)$, яку дослідимо за допомогою достатніх умов існування екстремуму. Для цього запишемо функцію Лагранжа $F(x,y,\lambda)$ при $\lambda=-3$:

$$F(x,y,-3)=\left(x^3+y^3+\lambda x^2+\lambda y^2-8\lambda\right)\Big|_{\lambda=-3}=x^3+y^3-3x^2-3y^2+24.$$

Знайдемо другі похідні цієї функції. Для цього використаємо знайдені вище значення перших похідних при відомому значенні $\lambda=-3$:

$$F'_x=3x^2-6x,\ \ F'_y=3y^2-6y.$$

Далі, нехай

$$A=F''_{xx}=\left(3x^2-6x\right)'_x=6x-6,\quad B=F''_{xy}=\left(3x^2-6x\right)'_y=0,$$

$$C=F''_{yy}=\left(3y^2-6y\right)'_y=6y-6.$$

Обчислимо значення цих величин у стаціонарній точці $P_0(2;2)$:

$$A(P_0)=(6x-6)\big|_{x=2}=6\cdot 2-6=6,\ B(P_0)=0,\ C(P_0)=(6y-6)\big|_{y=2}=6\cdot 2-6=6.$$

Тоді $\Delta(P_0) = \left(AC - B^2\right)\Big|_{P_0} = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36 > 0$. Робимо висновок, що умовний екстремум у точці $P_0(2;2)$ існує. А оскільки величина $A(P_0) = 6 > 0$, то це точка умовного мінімуму.

Значення функції в цій точці:

$$z_{\min} = z(P_0) = \left(x^3 + y^3\right)\Big|_{\substack{x=2 \\ y=2}} = 2^3 + 2^3 = 16.$$

Завдання для самостійної роботи

Рівень 1

1. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = 5x^2 + y^2 + 2x - 4y$; б) $z = 6(x + y) - x^2 - y^2$.

2. Знайти найменше і найбільше значення функції в замкненій області $\bar{D}$:

а) $z = x^2 - xy + y^2$, $\bar{D}: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$;

б) $z = x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 1$, $\bar{D}: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$.

Рівень 2

3. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = 2x^3 + xy^2 - 216x$; б) $z = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(x + y^2\right)$.

4. Знайти найменше і найбільше значення функції в замкненій області $\bar{D}$:

а) $z = x^2 - y^2$, $\bar{D}$: $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$;

б) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $\bar{D}$: $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Відповіді

1. а) $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{5};2\right) = -\frac{21}{5}$; б) $z_{\max} = z(3;3) = 18$.

2. а) $z_{найм.} = z(0;0) = 0$, $z_{найб.} = z(0;3) = z(3;0) = 9$;

б) $z_{найм.} = z(2;0) = -5$; $z_{найб.} = z(0;2) = z(4;2) = 23$.

3. а) $z_{\min} = z(6;0) = -864$, $z_{\max} = z(-6;0) = 864$; б) $z_{\min} = z(-2;0) = -\frac{2}{e}$.

4. а) , $z_{найб.} = z(2;0) = 4 z_{найм.} = z(0;2) = -4$;

б) $z_{найм.} = z(0;0) = 0$; $z_{найб.} = z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Перейти до початку Частини 3

Перейти до Змісту

Частина 4

Тема: Скалярні поля. Похідна за напрямком. Градієнт

4.1. Скалярні поля

Означення. Якщо в області D двовимірного або тривимірного простору визначена деяка скалярна функція $U(M)=U(x,y)$ або $U(M)=U(x,y,z)$, відповідно, то говорять, що *в області D задано* скалярне поле $U(M)$.

Якщо функція $U(M)=U(x,y)$ визначена в області D двовимірного простору, то поле $U(M)$ називається *пласким*. Якщо функція не залежить від часу, то скалярне поле $U(M)$ називається *стаціонарним*. Скалярне поле, яке змінюється з плином часу, називається *нестаціонарним* полем.

Застосуємо розглянутий раніше математичний апарат диференціювання функцій декількох змінних до скалярних полів. При цьому фактично мова піде про певну інтерпретацію операції диференціювання. Реальні скалярні поля не залежать від вибору системи координат у тому розумінні, що поле є функцією точки множини (лінії, поверхні, області на площині або у просторі) і, можливо, часу (нестаціонарні поля) без будь яких посилань на системи координат.

Обмежимося розглядом таких скалярних полів, в яких функція $U(x,y)$ або, відповідно, $U(x,y,z)$ є неперервною і має неперервні частинні похідні по всіх змінних необхідного порядку.

Приклади скалярних полів

1. Плаські поля.

Пласкими полями вважаються, наприклад, поля в метеорології: температурне поле або поле тиску в даний момент часу на поверхні землі і так далі.

2. **Поле щільності маси.**
3. **Поле щільністі заряду.**

У теоретичних основах електротехніки розглядається скалярне поле $\rho(M)$ об'ємної щільності V електричного заряду, що визначається в точках даної області $\Delta V \subset V$ відношенням $\rho(M) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V}$.

Нехай скалярне поле $U(M) = U(x, y, z)$ задано в області Ω тривимірного простору.

Означення. Геометричне розташування точок області Ω, в якій функція $U(x, y, z)$ приймає однакові значення, утворює деяку поверхню, яка називається поверхнею рівня (або еквіпотенціальною поверхнею) даного скалярного поля.

Звідси випливає, що рівняння поверхні рівня має вигляд $U(x, y, z) = C$, де C – константа, і кожному значенню константи відповідає своя поверхня рівня. Таким чином, через кожну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ даної області Ω проходить, єдина поверхня рівня $U(x_0, y_0, z_0) = C_0$ з відповідним значенням константи C_0. Тобто увесь простір заповнений цими поверхнями і, очевидно, поверхні рівня не перетинаються.

У разі плаского поля поняття поверхні рівня замінюється поняттям *лінії рівня*. Прикладами таких ліній можуть бути відображені ізобари (лінії рівного тиску) та ізотерми (лінії рівних температур).

Зауваження 1. Якщо припустити, що лінії або поверхні рівня перетинаються, то, наприклад, перетиналися би ізотерми – лінії рівних температур. Виникає питання: яка температура в точці перетину ізотерм?

Приклад 4.1. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=3x-y$.

Розв'язання. Лінії рівня заданого скалярного поля визначимо з умови $U(x,y)=C$ $(C=const)$. Тоді $3x-y=C$ або $y=3x+C$.

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю паралельних прямих.

Приклад 4.2. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=y^2-4x$.

Розв'язання. За означенням, лінії рівня заданого скалярного поля мають вигляд

$$y^2-4x=C \text{ або } y^2=4x+C \ \ (C=const).$$

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю парабол з вершиною на осі OX, гілки яких напрямлені вправо.

Приклад 4.3. Знайти лінії рівня скалярного поля

$$U(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-2y\right).$$

Розв'язання. За означенням, лінії рівня заданого скалярного поля мають вигляд

$$\ln\left(x^2+y^2-2y\right)=C \ \ (C=const),$$

звідки $x^2+y^2-2y=e^C$, $x^2+y^2-2y+1-1=e^C$, $x^2+(y-1)^2=e^C+1$.

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю концентричних кіл з центром у точці $(0;1)$ та радіусом $R=\sqrt{e^C+1}$.

Приклад 4.4. Знайти поверхні рівня скалярного поля

$$U(x,y,z)=2x-3y+5z.$$

Розв'язання. Поверхні рівня заданого скалярного поля визначимо з умови $U(x,y,z)=C$ $(C=const)$. Тоді $2x-3y+5z=C$.

Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім'ю паралельних площин з вектором нормалі $\vec{n}=(2;-3;5)$.

Приклад 4.5. Знайти поверхні рівня скалярного поля

$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+(z+1)^2.$$

Розв'язання. Поверхні рівня заданого скалярного поля мають вигляд:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\left(z+1\right)^2=C \ \ \left(C=const\right).$$

Якщо $C>0$, то поділивши обидві частини рівності на C, одержимо

$$\frac{x^2}{4C}+\frac{y^2}{9C}+\frac{\left(z+1\right)^2}{C}=1.$$

Надаючи C різних додатних дійсних значень, одержимо сім'ю еліпсоїдів з центром у точці $\left(0;0;-1\right)$ з півосями $a=\sqrt{4C}=2C_1$, $b=\sqrt{9C}=3C_1$, $c=\sqrt{C}=C_1$ $\left(C_1>0\right)$.

Якщо $C=0$, одержуємо точку $\left(0;0;-1\right)$. При $C<0$ задана скалярне поле $U\left(x,y,z\right)$ не існує.

4.2. Похідна за напрямом

Нехай задано скалярне поле $U\left(M\right)=U\left(x,y,z\right)$. Частинні похідні виражають швидкість зміни поля в напрямах відповідних осей координат. Наприклад, існує швидкість зміни поля $U\left(x,y,z\right)$ у напряму осі OX: U'_x.Передбачається, що точка рухається тільки по прямій, що паралельна цій осі. Тим часом у багатьох фізичних питаннях виникає інтерес до швидкість зміни поля і у інших напрямах.

Введемо поняття похідної функції $U\left(x,y,z\right)$ в будь-якому заданому напряму. Розглянемо скалярне поле $U=U\left(x,y,z\right)$ в деякій області D. Візьмемо довільну точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ в цій області і довільний промінь l, що проходить через цю точку (рис. 4.1).

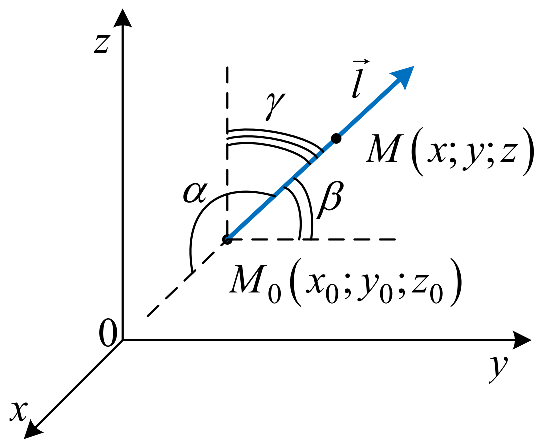

Рисунок 4.1

Візьмемо точку $M(x;y;z)\in D$ на промені l. Введемо позначення: $\Delta U = U(M) - U(M_0)$ і $\Delta l = \left|\overrightarrow{M_0M}\right|$. За означенням $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta U}{\Delta l}$ називається *похідною скалярного поля* $U(M)$ *за напрямом* l і позначається символом $\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial l}$ або $\left.\dfrac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Частинні похідні $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}$ можна розглядати як похідні функції $U = U(x,y,z)$ за напрямом осей координат.

Нехай промінь l утворює кути α, β, γ з осями координат OX, OY, OZ відповідно. Очевидно, що існує одиничний вектор $\vec{l}^{\,0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, який збігається за напрямом з променем l.

Теорема. *Нехай функція* $U = U(x,y,z)$ *має неперервні частинні похідні першого порядку в точці* $M_0(x_0;y_0;z_0)$. *Тоді, в цій точці скалярне поле* $U = U(x,y,z)$ *має похідну в будь-якому напрямі* l, *і*

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma. \tag{4.1}$$

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля $U(M)$ в точці M_0 в напряму l. Якщо похідна скалярного поля за напрямом l додатна, то функція в цьому напряму збільшується, і зменшується, якщо похідна від'ємна.

Якщо поле $U(M)$ пласке, то похідна за напрямом l розраховується за формулою:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\sin\alpha, \tag{4.2}$$

де α – кут, утворений напрямом l з додатним напрямом осі OX.

Зауваження 2. Відзначимо, що похідна $\dfrac{\partial U(M)}{\partial l}$ є функцією не тільки точки M, але і напряму l, тобто, може обчислюватися в одній і тій же точці, але в різних напрямах, і мати при цьому, взагалі кажучи, різні значення.

Приклад 4.6. Знайти похідну скалярного поля

$$U(x,y,z)=x^2-3y^2+5xz-10$$

у точці $M_0(1;3;-2)$ за напрямом вектора $\vec{l}=(-1;-2;2)$.

Розв'язання. Похідну скалярного поля за заданим напрямом $\vec{l}$ знайдемо за формулою (4.1).

Знайдемо частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(x^2-3y^2+5xz-10\right)'_x=2x+5z,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(x^2-3y^2+5xz-10\right)'_y=-3\cdot 2y=-6y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left(x^2-3y^2+5xz-10\right)'_z=5x.$$

Значення похідних у точці M_0:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}=(2x+5z)\Big|_{M_0}=2\cdot 1+5\cdot(-2)=-8,$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}=-6y\Big|_{M_0}=-6\cdot 3=-18, \qquad \frac{\partial U(M_0)}{\partial z}=5x\Big|_{M_0}=5\cdot 1=5.$$

Модуль вектора $\vec{l}$: $\left|\vec{l}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3.$

Його напрямні косинуси: $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$.

Тоді похідна заданого скалярного поля в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l}$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=-8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-18\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+5\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}+\frac{36}{3}+\frac{10}{3}=\frac{54}{3}=18.$$

Виходячи з отриманого результату, можна також зробити висновок, що скалярне поле $U(x,y,z)$ зростає в напрямі вектора $\vec{l}$.

Приклад 4.7. Знайти похідну скалярного поля

$$U(x,y,z)=3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2$$

у точці $A(-3;2;1)$ за напрямом від цієї точки до точки $B(-3;-1;5)$.

Розв'язання. Визначимо напрям: $\overrightarrow{AB}=(-3+3;-1-2;5-1)=(0;-3;4)$. Похідну заданого скалярного поля за напрямом $\overrightarrow{AB}$ знайдемо за формулою (4.1).

Знайдемо частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$U'_x=\left(3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2\right)'_x=3\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x+0=\frac{6x}{x^2-y^2},$$

$$U'_y=\left(3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2\right)'_y=3\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(-2y)+0=-\frac{6y}{x^2-y^2},$$

$$U'_z=\left(3\ln\left(x^2-y^2\right)+\sqrt[3]{z}-2\right)'_z=0+\frac{1}{3}\cdot z^{-\frac{2}{3}}-0=\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}.$$

Значення частинних похідних у точці $A(-3;2;1)$:

$$U'_x(A)=\left.\left(\frac{6x}{x^2-y^2}\right)\right|_A=\frac{6\cdot(-3)}{(-3)^2-2^2}=-\frac{18}{5},$$

$$U'_y(A)=\left.\left(-\frac{6y}{x^2-y^2}\right)\right|_A=-\frac{6\cdot 2}{(-3)^2-2^2}=-\frac{12}{5},\quad U'_z(A)=\left.\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}\right|_A=\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$, то маємо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha=\frac{0}{5}=0,\ \cos\beta=-\frac{3}{5},\ \cos\gamma=\frac{4}{5}.$$

Тоді похідна заданого скалярного поля за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_A=-\frac{18}{5}\cdot 0-\frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{25}+\frac{4}{15}=\frac{108+20}{75}=\frac{128}{75}.$$

З одержаного результату можна зробити висновок, що функція $U(x, y, z)$ зростає в напрямі вектора $\overrightarrow{AB}$.

Приклад 4.8. Знайти похідну скалярного поля $U(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2}$ у точці $M_0(2;0;1)$ за напрямом, який утворює з координатними осями OX і OY, відповідно, кути $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, а з віссю OZ – тупий кут γ.

Розв'язання. Похідну заданого скалярного поля знайдемо за формулою (4.1). Знайдемо частинні похідні функції $U(x, y, z)$:

$$U'_x = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2}\right)'_x = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{2x}{2z^2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{z^2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$U'_y = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2}\right)'_y = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{2y}{2z^2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{z^2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$U'_z = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2}\right)'_z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(-2z^{-3}\right) = -\frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{z^3}.$$

Значення похідних у точці $M_0(2;0;1)$:

$$U'_x(M_0) = \left.\frac{x}{z^2\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{M_0} = \frac{2}{1^2\sqrt{2^2 + 0^2}} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$U'_y(M_0) = \left.\frac{y}{z^2\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{M_0} = \frac{0}{1^2\sqrt{2^2 + 0^2}} = 0,$$

$$U'_z(M_0) = -\left.\frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{z^3}\right|_{M_0} = -\frac{2\sqrt{2^2 + 0^2}}{1^3} = -4.$$

Для того щоб знайти напрямний $\cos\gamma$, скористаємось основною тотожністю, що пов'язує напрямні косинуси: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Тоді, якщо $\cos\alpha = \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$, то

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}.$$

Оскільки з умови задачі відомо, що кут γ – тупий, тобто $\gamma > 90^0$, то його косинус від'ємний. А отже, виходить, що $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$.

Тоді похідна заданого скалярного поля за заданим напрямом

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,.$$

4.3. Градієнт скалярного поля

Означення. *Градієнтом скалярного поля* $U(M)=U(x,y,z)$ називається вектор

$$\text{grad}U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4.3)$$

Безпосередньо з означення випливає, що *градієнт в даній точці* M *спрямований по нормалі до поверхні рівня розглянутого скалярного поля, що проходить через цю точку.*

Якщо *скалярне поле пласке, то градієнт в цій точці спрямований, відповідно, по нормалі до лінії рівня поля, що проходить через цю точку*.

З урахуванням того, що $\vec{l}^{\,0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, отримуємо $\dfrac{\partial U(M)}{\partial l} = \text{grad}U(M)\cdot\vec{l}^{\,0}$, тобто похідна скалярного поля $U(M)$ в напряму $\vec{l}$ дорівнює скалярному добутку векторів $\text{grad}U(M)$ і $\vec{l}^{\,0}$.

Звідси випливають наступні ***властивості градієнта і похідної в напряму***.

Властивість 1. *Похідна скалярного поля* $U(M)$ *в напряму* $\vec{l}$ *дорівнює проекції градієнта поля на цей напрям:*

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \vec{l}^{\,0} = \left|\operatorname{grad} U(M)\right| \left|\vec{l}^{\,0}\right| \cos\varphi =$$
$$= \left|\operatorname{grad} U(M)\right| \cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} U(M),$$

де $\varphi -$ *кут між векторами* $\operatorname{grad} U(M)$ *і* $\vec{l}$.

Властивість 2. *Похідна у напряму не залежить від вибору кривої* L, *яка проведена в цьому напряму.*

Властивість 3. *Якщо напрям вектора* $\vec{l}$ *збігається з напрямом вектора* $\operatorname{grad} U(M)$, *то кут* φ *дорівнює нулю,* $\cos\varphi = 1$, *а похідна скалярного поля в цьому напряму, обчислена в точці* M, *приймає найбільше значення, яке дорівнює* $\left|\operatorname{grad} U(M)\right|$. *Тому,*

$$\max \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left|\operatorname{grad} U(M_0)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial z}\right)^2}\,.$$

Властивість 4. *Якщо напрям вектора* $\vec{l}$ *перпендикулярний напряму вектора* $\operatorname{grad} U(M)$, *то* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$ *і тоді* $\dfrac{\partial U(M)}{\partial l} = 0.$

Похідна скалярного поля, що обчислена в точці M *у всіх інших напрямах, приймає ненульові значення, які не перевищують за абсолютною величиною* $\left|\operatorname{grad} U(M)\right|$.

Властивість 5. *Вектор* $\operatorname{grad} U(M)$ *вказує напрям найбільш швидкого зростання скалярного поля* $U(M)$.

Властивості градієнта скалярного поля

Ось деякі властивості градієнта скалярного поля.

Нехай $U(x, y, z), V(x, y, z)$ *диференційовані функції, тоді:*

1) $\operatorname{grad}(U+V)=\operatorname{grad}U+\operatorname{grad}V$;

2) $\operatorname{grad}(CU)=C\operatorname{grad}U$;

3) $\operatorname{grad}(UV)=V\operatorname{grad}U+U\operatorname{grad}V$;

4) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{U}{V}\right)=\dfrac{V\operatorname{grad}U-U\operatorname{grad}V}{V^2}$, $(V\neq 0)$;

5) $\operatorname{grad}f(U)=f'(U)\operatorname{grad}U$.

Приклад 4.9. Знайти одиничний вектор $\vec{l}^{\,0}$ напряму найшвидшого зростання скалярного поля $U(x,y,z)=xy+xz+yz$ в точці $M_0(4;2;-3)$.

Розв'язання. Як зазначено у ***властивості 5***, напрямом найшвидшого зростання скалярного поля $U(M)$ є напрям вектору $\operatorname{grad}U(M)$:

$$\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$$

Тоді $\operatorname{grad}U(M_0)=-\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, звідси знаходимо одиничний вектор напряму найбільш швидкого зростання скалярного поля:

$$\vec{l}^{\,0}=\frac{\operatorname{grad}U(M_0)}{|\operatorname{grad}U(M_0)|}=\frac{1}{\sqrt{38}}\left(-\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}\right)=-\frac{1}{\sqrt{38}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{38}}\vec{j}+\frac{6}{\sqrt{38}}\vec{k}.$$

І, крім того, згідно з ***властивістю 3***,

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial l}\right|_{M_0}=|\operatorname{grad}U(M_0)|=\sqrt{38}.$$

Відповідь: $\vec{l}^{\,0}=-\dfrac{1}{\sqrt{38}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{38}}\vec{j}+\dfrac{6}{\sqrt{38}}\vec{k}.$

Приклад 4.10. Знайти градієнт і величину градієнта скалярного поля $U(x,y,z)=xz^2(y-5x)^3$ у точці $M_0(0;-1;2)$.

Розв'язання. Градієнт заданого скалярного поля будемо шукати за формулою (4.3).

Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(xz^2(y-5x)^3\right)'_x=\left(xz^2\right)'_x\cdot(y-5x)^3+xz^2\cdot\left((y-5x)^3\right)'_x=$$

$$=z^2\cdot(y-5x)^3+xz^2\cdot 3(y-5x)^2\cdot(-5)=z^2\cdot(y-5x)^2\cdot(y-5x-15x)=$$

$$=z^2\cdot(y-5x)^2\cdot(y-20x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(xz^2(y-5x)^3\right)'_y=xz^2\cdot 3(y-5x)^2=3xz^2\cdot(y-5x)^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left(xz^2(y-5x)^3\right)'_z=x\cdot 2z\cdot(y-5x)^3=2xz\cdot(y-5x)^3.$$

Обчислимо значення похідних у точці $M_0(0;-1;2)$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}=\left(z^2\cdot(y-5x)^2\cdot(y-20x)\right)\Big|_{M_0}=2^2\cdot(-1-5\cdot 0)^2\cdot(-1-20\cdot 0)=-4,$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}=\left(3xz^2\cdot(y-5x)^2\right)\Big|_{M_0}=3\cdot 0\cdot 2^2\cdot(-1-5\cdot 0)^2=0,$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial z}=\left(2xz\cdot(y-5x)^3\right)\Big|_{M_0}=2\cdot 0\cdot 2\cdot(-1-5\cdot 0)^3=0.$$

Тоді градієнт заданого скалярного поля в точці M_0 має вигляд:

$$\operatorname{grad}U(x,y,z)=(-4;0;0),$$

а його величина: $$\left|\operatorname{grad}U(x,y,z)\right|=\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}=4.$$

Приклад 4.11. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x}}{y^2}-\dfrac{3y}{\sqrt{z}}$ у точці $M_0(1;2;4)$ за напрямом його найбільшого зростання.

Розв'язання. Напрямом найбільшого зростання скалярного поля, заданого функцією $U(x,y,z)$, є напрям його градієнту. Значення похідної скалярного поля за напрямом її градієнта дорівнює модулю цього градієнта. Отже, задача зводиться до знаходження величини (модуля) градієнта заданого скалярного поля $U(x,y,z)$ у відповідній точці M_0.

Градієнт скалярного поля $U(x,y,z)$ у точці M_0 знайдемо за формулою (4.3). Частинні похідні функції $U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{3y}{\sqrt{z}}\right)'_x=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2y^2\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{3y}{\sqrt{z}}\right)'_y=\sqrt{x}\cdot\left(-2y^{-3}\right)-\frac{3}{\sqrt{z}}\cdot 1=-\frac{2\sqrt{x}}{y^3}-\frac{3}{\sqrt{z}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{3y}{\sqrt{z}}\right)'_z=-3y\cdot\left(-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{3y}{2\sqrt{z^3}}.$$

Обчислимо значення похідних у точці $M_0(1;2;4)$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x}=\left.\frac{1}{2y^2\sqrt{x}}\right|_{M_0}=\frac{1}{2\cdot 2^2\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y}=\left.-\frac{2\sqrt{x}}{y^3}-\frac{3}{\sqrt{z}}\right|_{M_0}=-\frac{2\sqrt{1}}{2^3}-\frac{3}{\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4},$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial z}=\left.\frac{3y}{2\sqrt{z^3}}\right|_{M_0}=\frac{3\cdot 2}{2\sqrt{4^3}}=\frac{3}{8}.$$

Градієнт заданого скалярного поля: $\operatorname{grad}U(M_0)=\left(\frac{1}{8};-\frac{7}{4};\frac{3}{8}\right)$.

Похідна заданого скалярного поля за напрямом його найбільшого зростання

$$\max\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}=\left|\operatorname{grad}U(M_0)\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{49}{16}+\frac{9}{64}}=\sqrt{\frac{206}{64}}=\frac{\sqrt{206}}{8}.$$

4.4. Метод градієнтного спуску

Якщо задачу пошуку локального мінімуму (максимуму) функції декількох змінних неможливо вирішити в уявному вигляді, то у такому випадку застосовують чисельні методи – *методу спуску* або підйому. Існують *методи оптимального покоординатного спуску* та *метод найшвидшого (градієнтного) спуску*.

Основна ідея методу градієнтного спуску полягає в тому, щоб на кожному кроці чисельного алгоритму йти в напрямку найшвидшого спуску, і цей напрямок задається *антиградієнтом*.

Градієнтний спуск – це ітераційний алгоритм оптимізації першого порядку (Оптимізація (математика) – Вікіпедія (wikipedia.org)), в якому для знаходження локального мінімуму функції здійснюються кроки, пропорційні *протилежному значенню* градієнту функції в поточній точці.

Якщо натомість здійснюються кроки пропорційно *самому* значенню градієнта, то відбувається наближення до локального максимуму цієї функції; і ця процедура тоді відома як *градієнтний підйом*.

Знайти точку мінімуму функції $U = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ можна також шляхом зведення багатовимірної задачі оптимізації до послідовності одновимірних задач на кожному кроці оптимізації. Такий спосіб називається *методом покоординатного спуску*.

Різниця полягає в тому, що у методі градієнтного спуску напрямок оптимізації визначається градієнтом цільової функції, тоді як у методі покоординатного спуску проводиться спуск на кожному кроці вздовж одного з координатних напрямів.

Приклад 4.12. Розглянемо застосування методу градієнтного спуску до пошуку локального екстремуму функції $z = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 3\right) \cdot \cos\left(2x + 1 - e^y\right)$.

Кроки наближення до екстремуму функції будуть виглядати так, як показано на рис. 4.2 (https://uk.wikipedia.org/wiki/Градієнтний_спуск).

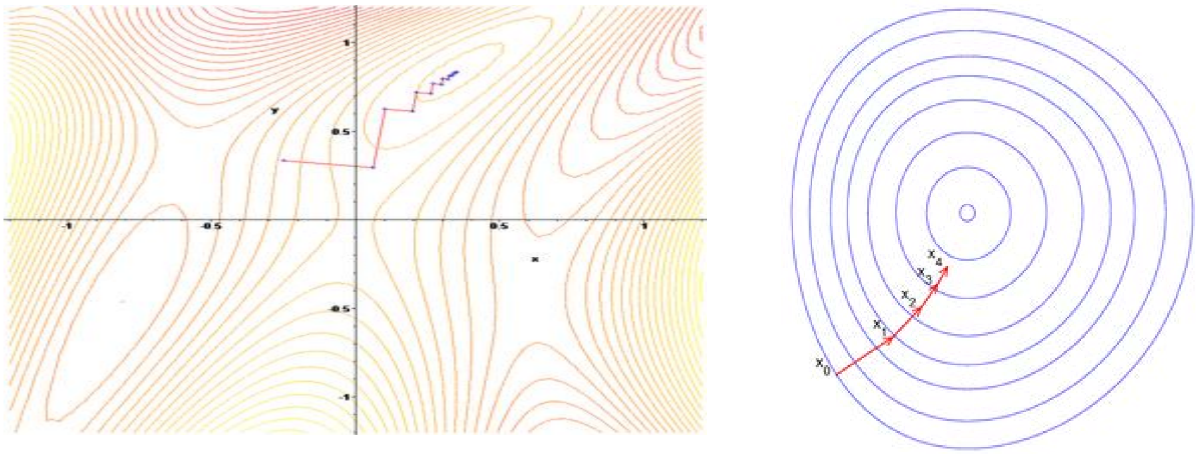

Рисунок 4.2

На рисунку 4.3 зображена задана поверхня.

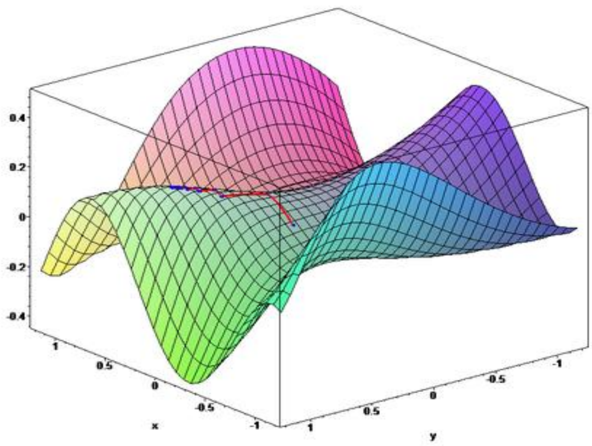

Рисунок 4.3

Завдання для самостійної роботи

Рівень 1

1. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x^2-4y$.

2. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=z-\ln(x+y)$ в точці $M_0(-1;2;1)$ за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{k}$.

4. Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $M_0(5;12)$.

5. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+4yz$ за напрямом градієнта в точці $M_0(0;1;-1)$.

Рівень 2

6. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x^2+4y^2-2x+16y$.

7. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$.

8. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=(x+y+z)^2-4y$ в точці $M_0(2;-1;0)$ за напрямом з цієї точку до початку координат.

9. Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $U(x,y,z)=z(x^2-yz)$ в точці $M_0(-2;1;-1)$.

10. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$ за напрямом градієнта в точці $M_0(0;1;2)$.

Відповіді

1. Сім'я парабол $x^2=4\left(y+C\right)$ з вершинами на осі OY. **2**. Сім'я сфер $x^2+y^2+z^2=C^2$ з центрами у початку координат; $R=C, C>0$. Якщо $C=0$, маємо точку – початок координат. **3**. $-\frac{5}{\sqrt{13}}$. **4**. $\mathrm{grad}U\left(M_0\right)=\left(\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$, $\left|\mathrm{grad}U\left(M_0\right)\right|=1$. **5**. $4\sqrt{2}$. **6**. Сім'я еліпсів з центром в точці $O_1\left(1;-2\right)$ і півосями $a=\sqrt{C+17}, b=\frac{\sqrt{C+17}}{2}$, якщо $C>-17$, і точка $O_1\left(1;-2\right)$, якщо $C=-17$. **7.** Сім'я еліпсоїдів з центром в точці $O_1\left(0;0;0\right)$ і півосями $a=\sqrt{C}, b=\sqrt{\frac{C}{4}}, c=\sqrt{\frac{C}{9}}$, якщо $C>0$, і точка $O_1\left(0;0;0\right)$, якщо $C=0$. **8**. $-\frac{6}{\sqrt{5}}$. **9**. $\mathrm{grad}U\left(M_0\right)=\left(4;-1;6\right)$, $\left|\mathrm{grad}U\left(M_0\right)\right|=\sqrt{53}$. **10**. 6.

Перейти до початку Частини 4

Перейти до Змісту

Список рекомендованої літератури

1. Геворкян Ю.Л. Короткий курс вищої математики. Навч. посібник: в 2 ч. Ч. 1 / Ю.Л. Геворкян, О.Л. Григор'єв, Н.О. Чікіна. – Харків : Від-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 324 с. (рос. мовою).

2. Геворкян Ю.Л. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння / Ю.Л. Геворкян, О.Л. Григор'єв, Н.О. Чікіна. – Харків : ХДПУ, 1998. – 132 с.

3. Геворкян Ю.Л. Вища математика: Теорія і практика. Навч. посібник: в 2 ч. Ч. 2: Функції декількох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди. Кратні інтеграли / Ю.Л. Геворкян, Н.О. Чікіна, І.В. Антонова. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – Електронне видання. Об'єм даних 43 МБ (рос. мовою).

4. Вища математика в прикладах і задачах / За редакцією Ю.Л. Геворкяна. – Харків: НТУ «ХПІ». – Т. 1. –2005. – 448 с. (рос. мовою).

5. Вища математика в прикладах і задачах / Під ред. Л.В. Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – Т. 1. – 532 с.

Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/4617/1/Kurpa_Vyshcha_matem_T.1_Gl.1-4_2009.pdf.

6. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с.

Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/17443/1/Chikina_Zbirnyk_rozrakhunkovo_Ch_1_2012.pdf.

7. Геворкян Ю.Л. Вища математика: Лінійні оператори. Квадратичні форми. Функції матричного аргументу. Теорія множин. Теорія нечітких множин. Теорія та практика : навч. посібник / Ю.Л. Геворкян, Н.О. Чікіна, І.В. Антонова. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. – 142 с. (рос. мовою)

8. Радченко О.М. Математичний аналіз. Частина друга: Ряди та інтеграли з параметром. Функції декількох змінних. – Київ: Видав-во ТВІМС, 2000. – 234 с.

Зміст

Частина 4

Навчальне видання

ЧІКІНА Наталія Олександрівна
АНТОНОВА Ірина Володимирівна

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. СКАЛЯРНІ ПОЛЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск проф. Першина Ю.І.
Роботу до видання рекомендував проф. Геворкян Ю.Л.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 139

Підп. до друку 2023 р.
Гарнітура Times New Roman.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання