НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Поняття первісної

Основною задачею інтегрального числення є знаходження функції за її похідною.

Означення. Первісною функції $f(x)$ в інтервалі (a,b) називається така функція $F(x)$, для якої

$$F'(x) = f(x)$$

в кожній точці цього інтервалу.

Теорема 1. Будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, до того ж, будь-які дві з них відрізняються одна від одної тільки постійним доданком.

Знаходження первісних називається невизначеним інтегруванням, а вираз, який охоплює множину усіх первісних даної функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* та позначується $\int f(x)dx$. Функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ *підінтегральним виразом*, а змінна x – *змінною інтегрування*. Таким чином, $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ будь-яка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Графік первісної $F(x)$ називається інтегральною кривою функції $y = f(x)$. Геометричний зміст невизначеного інтегралу є множина інтегральних кривих, які отримані при паралельному переносі однієї з них вздовж осі ординат (рисунок 1).

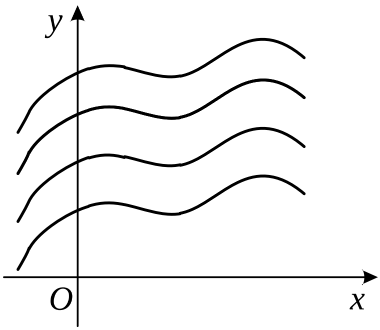

Рисунок 1

За означенням невизначеного інтеграла маємо

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \text{ або } d\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

Аналогічно

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \text{, або } \int df(x) = f(x) + C.$$

Перш ніж почати викладання методів інтегрування, наведемо таблицю інтегралів від деяких функцій. Ця таблиця витікає безпосередньо з таблиці похідних. Справедливість цих рівностей легко перевірити за допомогою диференціювання. Формули 14 – 19 надалі ми отримаємо за допомогою тих чи інших методів інтегрування.

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C,$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$

5. $\int e^x dx = e^x + C,$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a, a > 0,$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C,$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C,$

14. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C,$

15. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C,$

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C,$

18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C_1, |x| < a, a > 0,$

19. $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + C_1.$

Властивості невизначеного інтеграла

Теорема 2 (властивість адитивності).

Невизначений інтеграл від суми скінченого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від функцій-доданків:

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \ldots + \int f_n(x) dx$$

,

де $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x) -$ функції незалежної змінної *x*.

Теорема 3. (властивість однорідності).

Постійний множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтеграла:

$$\int C\cdot f\left(x\right)dx = C\int f\left(x\right)dx \text{, де } C = const .$$

Приклад 1. $\int(7x^4-8x^2+12)dx = \frac{7x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+12x+C$.

Теорема 4. (про інваріантність формул інтегрування).

Нехай $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C$ та $u=\varphi\left(x\right)-$ будь-яка диференційовна функція аргументу *x*. Тоді $\int f\left(u\right)du = F\left(u\right)+C$.

Через цю теорему основна таблиця інтегралів є справедливою незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи будь-якою функцією від неї. Таким чином, основна таблиця інтегралів значно розширюється.

При розв'язанні прикладів часто доводиться використовувати теорему 4.для перетворень, які називають «підведенням під знак диференціала». В багатьох випадках це дозволяє спростити підінтегральний вираз.

Приклад 2. $\int e^{6x-7}d\left(6x-7\right) = e^{6x-7}+C$.

Приклад 3. $\int \operatorname{arctg}^3 x\, d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4}+C.$

Приклад 4. $\int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d\left(\cos x\right) = -\frac{\cos^4 x}{4}+C$.

Приклад 5.

$$\int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\,\frac{dx}{1+x^2} = \int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\,d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x\sqrt{\operatorname{arctg} x}+C.$$

Окремий випадок підведення під знак диференціала зручно сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 5. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Приклад 6. $\int \sin\left(7x-3\right)dx = -\frac{1}{7}\cos\left(7x-3\right)+C$.

Приклад 7. $\int \frac{dx}{8-5x} = -\frac{1}{5}\ln|8-5x| + C$.

Основні методи інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Теорема 6. (заміна змінної у невизначеному інтегралі).

Нехай функція $f(x)$ має первісну, а $\varphi(t)$ монотонна функція, яка має неперервну похідну, тоді

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Метод заміни змінної (підстановки) у невизначеному інтегралі полягає у введенні нової змінної інтегрування. При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який є табличним або таким, що не викликає труднощів (у випадку вдалої заміни змінної). Загальних рекомендацій щодо вибору підстановки не існує. Вміння правильно визначити, що саме обрати як нову змінну інтегрування досягається практикою.

Приклад 8.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \left\| \begin{matrix} t = x^2+1, \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C .$$

Приклад 9.

$$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\left(x^2\right)^2+1} = \left\| \begin{matrix} t = x^2, \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Зауваження. Якщо інтеграл можна записати таким чином, що в чисельнику підінтегральної функції – похідна знаменника, то інтеграл дорівнює натуральному логарифму абсолютної величини знаменника.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Приклад 10. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C$.

Приклад 11. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{\frac{1}{x^2+1}dx}{\operatorname{arctg} x} = \ln\left|\operatorname{arctg} x\right| + C$.

Приклад 12.

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = -\int \frac{\left(-\cos x\right)dx}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

<u>Інтегрування частинами</u>

Теорема 7. (інтегрування частинами).

Нехай функції $u\left(x\right)$ та $v\left(x\right)$ мають неперервні похідні, тоді має місце формула

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ця формула має назву «формула інтегрування частинами».

Ця формула надає можливість замість $\int udv$ розглядати $\int vdu$, який при раціональному розподілу множників *u* та *dv* може виявитися істотно простішим. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx,$ $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx,$ де $P_n\left(x\right)-$ многочлен степеню *n*, а $\alpha-$ певне число. У цьому випадку беруть $u = P_n\left(x\right)$. Слід зазначити, що у випадку $n>1$ інтегрувати за частинами доведеться *n* разів.

2. Інтеграли вигляду $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} x\,dx,$ $\int P_n(x)\ln x\,dx,$ де $P_n\left(x\right)-$ многочлен степеню *n*. У цьому випадку беруть $dv = P_n\left(x\right)dx$, а *u* позначають решту множників.

3. Інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$.($\alpha,\beta-$ певні числа). Такі інтеграли називають зворотними. У цьому випадку як u беруть будь-яку з двох функцій.

Цими трьома типами інтегралів не обмежуються всі інтеграли, які можна інтегрувати в цій спосіб.

Приклад 13.

$$\int(3+7x)\cos 3x dx=\left\|\begin{matrix} u=3+7x, & dv=\cos 3x dx, \\ du=7dx, & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{3}(3+7x)\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 7dx=\frac{1}{3}(3+7x)\sin 3x+\frac{7}{9}\cos 3x+C.$$

Приклад 14.

$$\int x^{10}\ln x dx=\left\|\begin{matrix} u=\ln x, & dv=x^{10}dx, \\ du=\frac{dx}{x}, & v=\frac{x^{11}}{11} \end{matrix}\right\|=\frac{x^{11}}{11}\cdot\ln x-\frac{1}{11}\int\frac{x^{11}dx}{x}=$$

$$=\frac{x^{11}}{11}\cdot\ln x-\frac{1}{11}\int x^{10}dx= =\frac{x^{11}}{11}\cdot\ln x-\frac{x^{11}}{121}+C.$$

Приклад 15.

$$\int e^{5x}\sin 8x dx=\left\|\begin{matrix} u=e^{5x}, & dv=\sin 8x dx, \\ du=5e^{5x}dx, & v=-\frac{1}{8}\cos 8x \end{matrix}\right\|=-\frac{1}{8}e^{5x}\cos 8x+$$

$$+\frac{5}{8}\int\cos 8x\cdot e^{5x}dx==\left\|\begin{matrix} u=e^{5x}, & dv=\cos 8x dx, \\ du=5e^{5x}dx, & v=\frac{1}{8}\sin 8x \end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{8}e^{5x}\cos 8x+\frac{5}{64}e^{5x}\sin 8x-\frac{25}{64}\int e^{5x}\sin 8x+C.$$

Таким чином, можна записати:

$$\int e^{5x}\sin 8x dx=-\frac{1}{8}e^{5x}\cos 8x+\frac{5}{64}e^{5x}\sin 8x-\frac{25}{64}\int e^{5x}\sin 8x+C.$$

Позначимо : $\int e^{5x}\sin 8x dx=I$, тоді

$$I+\frac{25}{64}I=-\frac{1}{8}e^{5x}\cos 8x+\frac{5}{64}e^{5x}\sin 8x+C.$$

$$\frac{89}{64}I=\frac{e^{5x}}{8}\left(-\cos 8x+\frac{5}{8}\sin 8x\right)+C\Rightarrow I=\frac{8e^{5x}}{89}\left(-\cos 8x+\frac{5}{8}\sin 8x\right)+C_1.$$

<u>Інтегрування деяких функцій, які містять квадратний тричлен</u>

Розглянемо інтеграли вигляду:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\ \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\,,$$

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx\,,\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

При інтегруванні функцій, що містять квадратний тричлен спочатку коефіцієнт a $(a\neq 0)$ слід винести за дужки:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+px+q\right).$$

Далі слід виділити повний квадрат з квадратного тричлена: $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$, та зробити підстановку $t=x+\frac{p}{2}$.

У такому разі інтеграл стає табличним, або таким, спосіб інтегрування якого є відомим.

Приклад 16.

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\left\|\begin{matrix}x^2+6x+13=(x+3)^2-9+13=\\ =(x+3)^2+4\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x+3=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right\|=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C\ .$$

Приклад 17.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-5} = \left\| \begin{aligned} & x^2+4x-5=(x+2)^2-4-5= \\ & =(x+2)^2-9 \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{aligned} x+2&=t, \\ dx&=dt \end{aligned} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C\,.$$

Приклад 18.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \left\| \begin{aligned} & 3-2x-x^2 = -\left(x^2+2x-3\right) = -\left((x+1)^2-1-3\right) = \\ & \quad = -\left((x+1)^2-4\right) = 4-(x+1)^2 \end{aligned} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{aligned} x+1&=t, \\ dx&=dt \end{aligned} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C = \arcsin\frac{x+1}{2} + C\,.$$

Приклад 19.

$$\int \sqrt{x^2+4x+8}\,dx = \left\| \begin{aligned} & x^2+4x+8=(x+2)^2-4+8= \\ & =(x+2)^2+4 \end{aligned} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{aligned} x+2&=t, \\ dx&=dt \end{aligned} \right\| = \int \sqrt{t^2+4}\,dt = \frac{4}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + \frac{t}{2}\sqrt{t^2+4} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+8}\right| + \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+8} + C\,.$$

Приклад 20.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-14x+13}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{aligned} & x^2-14x+13=(x-7)^2-49+13= \\ & =(x-7)^2-36 \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{gathered} x-7=t, dx=dt, x=t+7, \\ 3x-1=3(t+7)-1=3t+20 \end{gathered} \right\| =$$

$$=\int\frac{3t+20}{t^2-36}dt=\int\left(\frac{3t}{t^2-36}+\frac{20}{t^2-36}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|t^2-36\right|+20\cdot\frac{1}{2\cdot 6}\ln\left|\frac{t-6}{t+6}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-14x+13\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\frac{x-13}{x-1}\right|+C.$$

Приклад 21.

$$\int\frac{3-4x}{\sqrt{12-4x-x^2}}dx=\left\|\begin{array}{c}12-4x-x^2=-\left(x^2+4x-12\right)=\\=-\left(\left(x+2\right)^2-4-12\right)=16-\left(x+2\right)^2\end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}x+2=t,\\dx=dt, x=t-2\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{l}3-4x=3-4\left(t-2\right)=\\=3-4t+8=11-4t\end{array}\right\|=\int\frac{11-4t}{\sqrt{16-t^2}}dt=$$

$$=11\int\frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}-4\int\frac{tdt}{\sqrt{16-t^2}}=11\arcsin\frac{t}{4}-4\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{-2tdt}{\sqrt{16-t^2}}=$$

$$=11\arcsin\frac{x+2}{4}+2\sqrt{12-4x-x^2}+C.$$

Інтерування раціональних функцій

Означення 1. Функція $R\left(x\right)=\frac{Q_m\left(x\right)}{P_n\left(x\right)}$, де $Q_m\left(x\right)$ та $P_n\left(x\right)$ – многочлени відносно x степеню m та n відповідно, називається раціональним дробом.

Означення 2. Раціональний дріб називається правильним, якщо $m<n$, і неправильним, якщо $m\geq n$.

Будь-який неправильний нескоротний дріб можна записати як суму многочлена та правильного раціонального дробу, поділивши чисельник на знаменник.

Означення 3. Число x_1 є коренем многочлена $P_n(x)$, якщо при $x = x_1$ многочлен обертається на нуль, тобто $P_n(x_1) = 0$.

Многочлен $P_n(x)$ може бути розкладеним на множники $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, де $x_1, x_2 \ldots x_n$ – корені многочлена. Корінь многочлена x_i називається простим, якщо множник $(x - x_i)$ входить до розкладеного многочлена на множники один раз. Якщо множник $(x - x_i)$ входить до розкладеного многочлена на множники λ разів, то кажуть, що корінь x_i кратності λ.

Найпростіші дробі:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n},\ (n \ge 2,\ n \in \mathrm{N}),\ p^2 - 4q < 0.$$

Інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування найпростіших дробів.

Дроби $\frac{A}{x+a}, \frac{A}{(x+a)^n}$ можна проінтегрувати безпосередньо, користуючись таблицею інтегрування основних функцій:

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\ln|x+a| + C,\ \int \frac{A}{(x+a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C.$$

У випадку $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ та $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ слід виділити повний квадрат у знаменнику (див. лекцію 2), та скористатися рекурентною формулою для другого інтеграла:

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{t}{2a^2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}.$$

Теорема 8. Будь-який правильний нескоротний дріб можна зобразити у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, якщо знаменник правильного дробу має вигляд $(x-a)^n\left(x^2+px+q\right)^m$, то правильний дріб зображується у вигляді суми найпростіших дробів за формулою

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots+$$

$$+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$ де $A_1, A_2, \ldots, A_n, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_m, N_m$ – невизначені (невідомі) коефіцієнти, деякі з них можуть дорівнювати нулю.

Алгоритм інтегрування раціональних дробів:

1) якщо дріб неправильний, то слід подати його як суму многочлена та правильного раціонального дробу;

2) знаменник правильного дробу розкласти на множники;

3) записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів (вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника);

4) проінтегрувати цілу частину многочлена та найпростіші дроби.

Приклад 22. Розкласти дріб на суму найпростіших дробів: $\dfrac{2x^2+2x-3}{x(x-1)(x+3)}$.

Розв'язання. $\dfrac{2x^2+2x-3}{x(x-1)(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+3}$.

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники початкового і останнього дробів.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+3)}.$$

$$2x^2+2x-3=A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1).$$

Для визначення коефіцієнтів використовують спосіб окремих значень, який полягає в тому, що аргументу задають значення коренів знаменника або інші зручні значення.

$x=1: \quad 1=4B \Rightarrow B=\frac{1}{4},$

$x=-3: 9=12C \Rightarrow C=\frac{3}{4},$

$x=0: -3=-3A \Rightarrow A=1.$

Отже, $\frac{2x^2+2x-3}{x(x-1)(x+3)}=\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{x+3}.$

Розглянемо випадок кратних коренів.

Приклад 23. Розкласти дріб на суму найпростіших дробів: $\frac{2x^2+3}{x^3\left(x^2+1\right)}.$

Розв'язання. В даному разі корінь знаменника $x=0$ кратності 3, тому множнику x^3 відповідають три найпростіших дроби вигляду:

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}$, а множнику $\left(x^2+1\right)$ – найпростіший дріб вигляду

$\frac{Dx+E}{x^2+1}$. Отже, отримуємо: $\frac{2x^2+3}{x^3\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо чисельники початкового і останнього дробів:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=\frac{Ax^2\left(x^2+1\right)+Bx\left(x^2+1\right)+C\left(x^2+1\right)+x^3\left(Dx+E\right)}{x^3\left(x^2+1\right)}$$

,

$$2x^2+3=Ax^2\left(x^2+1\right)+Bx\left(x^2+1\right)+C\left(x^2+1\right)+x^3\left(Dx+E\right).$$

Для обчислення коефіцієнтів *A*, *B*, *C*, *D*, *E* скористаємося способом порівняння коефіцієнтів, який базується на тому, що два многочлени рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & \left\{\begin{array}{l} 0 = D + A, \\ 0 = E + B, \\ 2 = A + C, \\ \quad 0 = B, \\ \quad 3 = C. \end{array}\right. \\ x^3 & \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

З цієї системи отримуємо:

$B = 0 \Rightarrow E = 0, \mathrm{C} = 3 \Rightarrow A + 3 = 2 \Rightarrow A = -1, D + A = 0 \Rightarrow D = 1.$

Остаточно отримуємо: $\dfrac{2x^2+3}{x^3\left(x^2+1\right)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{x}{x^2+1}.$

Приклад 24. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. У даному випадку підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник, виділивши при цьому цілу та дробову частини:

$$\begin{array}{r|l} \_\, x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2} x^5-4x^3 \quad & x^2+x+4 \\ \cline{1-1} \_\, x^4+4x^3-8 & \\ x^4-4x^2 \quad & \\ \cline{1-1} \_\, 4x^3+4x^2-8 & \\ 4x^3-16x \quad & \\ \cline{1-1} 4x^2+16x-8. & \end{array}$$

Таким чином,

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+4\cdot\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}.$$

Розглянемо тепер правильний дріб і розкладемо його знаменник на прості множники, а потім запишемо цей дріб у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами та знайдемо ці коефіцієнти:

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{x^2+4x-2}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Далі усі найпростіші дроби зводять до спільного знаменника та прирівнюють один до одного чисельники обох частин рівності:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Для визначення коефіцієнтів використаємо спосіб окремих значень:

$$x=2:\ 10=8B,\ B=\frac{5}{4},$$

$$x=-2:\ -6=8C,\ C=-\frac{3}{4},$$

$$x=0:\ -2=-4A,\ A=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\dfrac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{x+2}.$

Остаточно отримаємо:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

Наприкінці слід зауважити, що існують приклади раціональних дробів, які легше проінтегрувати в іншій спосіб, а саме: додати та відняти один і той самий вираз до чисельника.

Приклад 24. $\int \frac{dx}{x^4\left(x^2+1\right)}$.

Розв'язання.

Напишемо по-іншому підінтегральний вираз:

$$\int \frac{dx}{x^4\left(x^2+1\right)} = \int \frac{1}{x^4\left(x^2+1\right)}dx.$$

Додаємо та віднімаємо до чисельника x^2. Рівність не порушилась, але в нас з'явилась можливість перетворити підінтегральний вираз в такий, що можна інтегрувати.

Отриманий дріб розкладемо на суму двох дробів, в кожному з яких можна скоротити множник.

$$\int \frac{1}{x^4\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^4\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{\cancel{x^2+1}}{x^4\left(\cancel{x^2+1}\right)}dx - \int \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^4}\left(x^2+1\right)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}.$$

Перший інтеграл є табличним, а в другому знову додаємо та віднімаємо до чисельника x^2:

$$\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)} = \int \frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{\cancel{x^2+1}}{x^2\left(\cancel{x^2+1}\right)}dx -$$

$$-\int \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Остаточно отримуємо:

$$\int \frac{1}{x^4\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

До поняття визначеного інтегралу приводять різноманітні задачі: обчислення площі плоскої фігури, роботи змінної сили, шляху за заданою змінною швидкістю та інші.

Розглянемо одну з цих задач, а саме, обчислення площі криволінійної трапеції.

Означення 1. Криволінійна трапеція – фігура, яка обмежена віссю Ox, графіком неперервної функції $y = f(x)$ та прямими $x = a,\ x = b$ (рисунок 1).

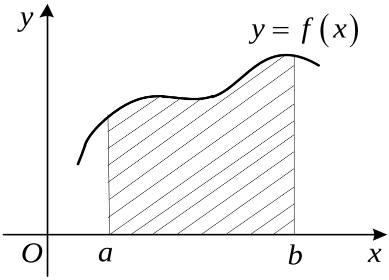

Рисунок 1

Нехай в замкненому інтервалі $[a,b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Інтервал $[a,b]$ розіб'ємо довільним чином на n часткових інтервалів за допомогою точок:

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n = b \quad (a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b).$$

В кожному інтервалі (x_{i-1}, x_i) довільним чином виберемо точку $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ та обчислимо значення функції $f(\xi_i)$. Помножимо $f(\xi_i)$ на довжину відповідного часткового інтервалу $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Добуток $S_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ дорівнює площі прямокутника з основою

Δx_i та висотою $f\left(\xi_i\right)$. Сума всіх добутків $I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$. ($I_n$ – інтегральна сума) дорівнює площі ступінчастої фігури та приблизно дорівнює площі криволінійної трапеції.

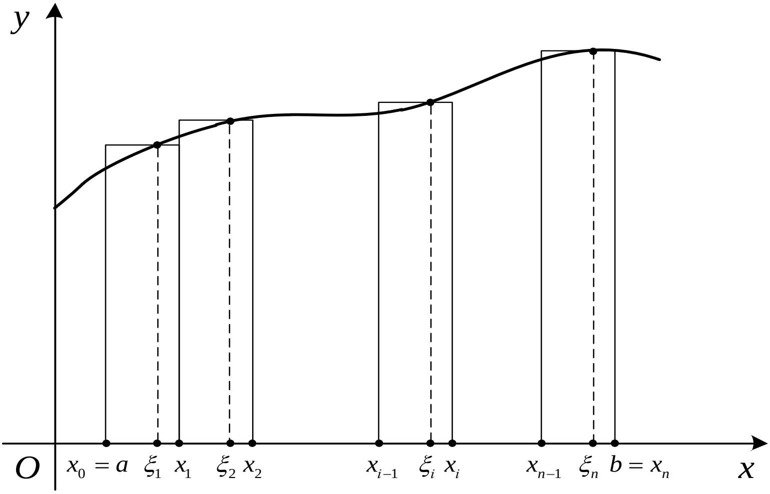

Рисунок 2

Якщо кількість інтервалів необмежено зростає, тобто $n \to \infty$, водночас довжина найбільшого часткового інтервалу прямує до нуля $\max_i \Delta x_i \to 0$. Разом зі зменшуванням Δx_i точність наближення площі ступінчастої фігури до криволінійної трапеції, а разом з цим і точність отриманої формули зростають. Отже, точним значенням площі криволінійної трапеції приймається границя

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \ ,$$

до якої прямує площа ступінчастої фігури.

Ця границя, якщо вона існує, називається визначеним інтегралом функції $y = f\left(x\right)$ на інтервалі $\left[a,b\right]$ та позначається

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max_i \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Інтегральні суми, які побудовані для одного і того самого числа розбиття n можуть бути різними. Адже ми не тільки довільним чином розбиваємо інтервал $[a,b]$ на часткові інтервали, але й обираємо довільну точку в кожному інтервалі. Тому інтегральна сума не є функцією від n, через те, що одному і тому самому значенню n може відповідати незчисленна кількість інтегральних сум. Що ж ми розуміємо як границю інтегральних сум?

Означення 2. Число I називається границею інтегральної суми $I=\lim_{\max_i \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, якщо $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0:$ прибудь-якому розбитті інтервалу $[a,b]$ на часткові інтервали, довжини яких менше, ніж δ , тобто при $\max\Delta x_i\to 0$ та при будь-якому виборі проміжних точок $\xi_i\in(x_{i-1},x_i),$ є вірною нерівність:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon.$$

Означення 3. Визначеним інтегралом називається скінченна границя інтегральної суми при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтервалу

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max_i \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $a-$ нижня межа інтегрування, $b-$ верхня межа інтегрування.

У випадку існування наведеної вище границі, функція $y=f(x)$ називається інтегрованою на $[a,b]$.

Символ $\int$ є витягнутою буквою S (summa). Зовнішня спільність запису визначеного та невизначеного інтегралів підкреслює тісний зв’язок між ними, хоча визначений інтеграл є числом, а невизначений $-$ сукупність первісних функцій.

Очевидно, що $\int\limits_a^b dx = b - a$, через те, що $f(x) = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 \ldots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

Безпосередньо із означення визначеного інтеграла випливає, що

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Теорема 1. (існування визначеного інтеграла).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона є інтегрованою на $[a,b]$.

Надалі всюди припускається, що функції, що розглядаються є неперервними.

Властивості визначеного інтегралу

Теорема 2. (про інтеграл суми).

Якщо $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ інтегровані на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right) dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Іншими словами, інтеграл від суми скінченого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від функцій-доданків.

Теорема 3. (про винесення постійного множника).

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$, а $C = const$, то

$$\int\limits_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Іншими словами, постійний множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтегралу.

Теорема 4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

Теорема 5. (властивість адитивності).

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$ та $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема 6. (про знак інтегралу).

Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знак, то інтеграл є числом того ж знаку, що і функція.

Теорема 7.

Якщо $\forall x \in [a,b], a<b: \quad \psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$, тоді

$$\int_a^b \psi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Теорема 8. (щодо оцінки визначеного інтегралу).

Якщо M та m відповідно найбільше та найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b], a<b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Теорема 9. (про середнє значення).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, тоді існує хоча б одна точка $\xi \in (a,b)$ така, що: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$.

<u>Формула Ньютона-Лейбніца</u>

Будемо вважати верхню межу інтеграла змінною, а нижню постійною. Надаючи верхній границі різні значення, отримаємо відповідні значення інтеграла, отже, при розглянутій умові, інтеграл є функцією своєї верхньої межі:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

Теорема 10. (про похідну інтеграла за його верхньою межею).

Похідна від інтеграла за його верхньою межею дорівнює підінтегральній функції в точці верхньої межі:

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x).$$

Теорема 11. (формула Ньютона – Лейбніца).

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона – Лейбніца дає нам основний спосіб обчислення визначених інтегралів за допомогою первісних, тобто за допомогою невизначеного інтегрування, минаючи складну процедуру складання інтегральних сум та обчислення їх границь.

Приклад 1.

$$\int_1^5 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\ln|15-2| - \frac{1}{3}\ln|3-2| = \frac{1}{3}\ln 13.$$

Теорема 12. (заміна змінних у визначеному інтегралі).

Нехай $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b]$, $x = \varphi(t)$ монотонна та має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$, до того ж $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$, тоді $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Приклад 2.

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+4x}}dx = \left\| \begin{matrix} t = \sqrt{1+4x}, x = \frac{1}{4}(t^2-1), & x_н = 0, 1 = t^2, t = 1, \\ t > 0, \quad dx = \frac{1}{2}tdt, & x_в = 2, 9 = t^2, t = 3 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\frac{1}{4}(t^2-1)\cdot tdt}{t} = \frac{1}{8}\int_1^3 (t^2-1)\,dt =$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{8}\left(\frac{27}{3}-3-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{26}{3}-2\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{20}{3}=\frac{5}{6}.$$

Теорема 13. (інтегрування частинами у визначеному інтегралі).

Якщо функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ мають неперервні похідні на інтервалі $[a,b]$, то має місце формула:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du\ .$$

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла.

Приклад 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\sin 2x\,dx=\left\|\begin{matrix} u=x, & dv=\sin 2x\,dx, \\ du=dx, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right\|=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=$$

$$=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 0=\frac{1}{4}.$$

Теорема 14. (інтегрування парних та непарних функцій на симетричному інтервалі).

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на інтервалі $[-a,a]$, тоді

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ якщо } f(x) \text{ парна функція,} \\ 0, \quad \text{якщо } f(x) \text{ непарна функція.}\end{cases}$$

Приклад 4. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^6\cdot\sin^3 x\,dx$.

Розв'язання. Межі інтегрування симетричні. Перевіримо функцію на парність:

$$f(-x)=(-x)^6\cdot\sin^3(-x)=x^6\cdot(-\sin x)^3=-x^6\cdot\sin^3 x=-f(x).$$

Отже, функція непарна і $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^6\cdot\sin^3 x\,dx=0$.

Відповідь: 0.

Приклад 5. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(x^2\cdot\sin 5x+\cos\frac{x}{3}+\mathrm{tg}^3 x\right)dx$.

Розв'язання. Межі інтегрування симетричні. Зазначимо, що інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів. Дослідимо кожен доданок підінтегральної функції на парність.

$$f(-x)=(-x)^2\cdot\sin 5(-x)=x^2(-\sin 5x)=-f(x).$$

Отже, функція непарна і $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\cdot\sin 5x\,dx=0$.

$$f(-x)=\cos\frac{-x}{3}=\cos\frac{x}{3}=f(x).$$

Отже, функція парна і

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\frac{x}{3}\,dx=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos\frac{x}{3}\,dx=6\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=6\sin\frac{\pi}{9}.$$

$$f(-x)=\mathrm{tg}^3(-x)=-\mathrm{tg}^3 x=-f(x).$$

Отже, функція непарна і $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{tg}^3 x\,dx=0$.

Відповідь: $6\sin\frac{\pi}{9}$.

<u>Застосування визначеного інтеграла.</u>

Існує велика кількість прикладних задач, для розв’язання яких використовують визначені інтеграли. В чому полягає ідея застосування визначених інтегралів до розв’язання прикладних задач?

Властивості (геометричні або фізичні) об’єкту, що досліджуються в загальному випадку змінюються при переході від точки до точки. Застосування інтегрального підходу до дослідження кількісних характеристик таких об’єктів полягає у наступному:

– роздрібнення об’єкта на довільні складові частини;

– визначення наближеного значення шуканої характеристики кожної частини в припущенні, що її властивості визначаються властивостями в певній вибірковій точці;

– визначення наближеного значення шуканої характеристики усього об’єкта через складання інтегральної суми, тобто підсумовування значень характеристики окремих частин об’єкта;

– через граничний перехід в інтегральній сумі за умовою, що найбільший з лінійних розмірів складових частин прямує до нуля, а кількість складових частин необмежено зростає, отримати точну кількісну характеристику об’єкта;

– заміна границі інтегральної суми інтегралом та визначення шуканої числової характеристики об’єкта через обчислення інтеграла.

Обчислення площі плоских фігур в декартовій системі координат

Як було зазначено вище, площа криволінійної трапеції обчислюється за допомогою визначеного інтегралу. Розглянемо різні випадки.

1. Якщо неперервна крива в декартовій системі координат задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, двома вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ та відрізком осі $Ox\left(a \leq x \leq b\right)$ (рисунок 3) обчислюється за формулою: $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

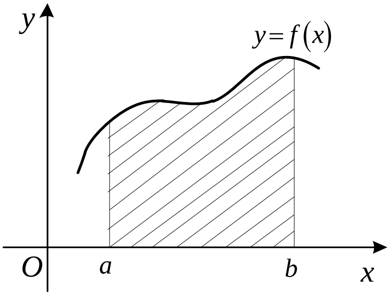

Рисунок 3

2. Якщо необхідно обчислити площу фігури, що обмежена лініями

$y = f(x)$, $(f(x) \le 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, (рисунок 4) то

користуємось формулою: $S = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$

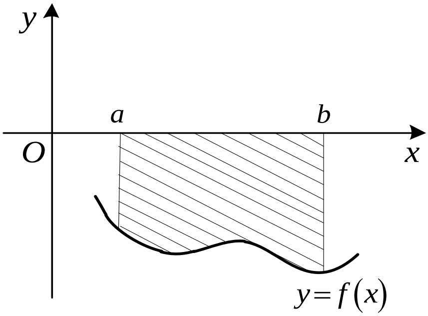

Рисунок 4

3. У тому випадку, якщо $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ неперервні функції, визначені на інтервалі $[a,b]$ і $f(x) \ge \varphi(x)$ (рисунок 5), то площа даної фігури обчислюється за формулою: $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx.$

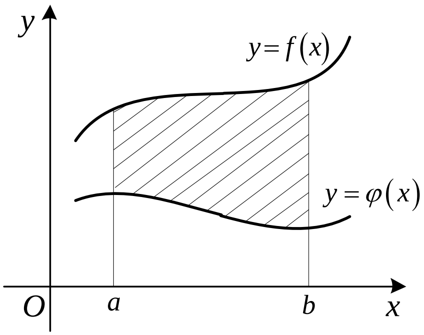

Рисунок 5

4. У випадку, якщо $x=\psi(y)$ та $x=\varphi(y)$ неперервні функції, визначені на інтервалі $y\in[c,d]$ і $\psi(y)\le\varphi(y)$ (рисунок 6), то площа даної фігури обчислюється за формулою: $S=\int\limits_c^d\left(\varphi(y)-\psi(y)\right)dy$.

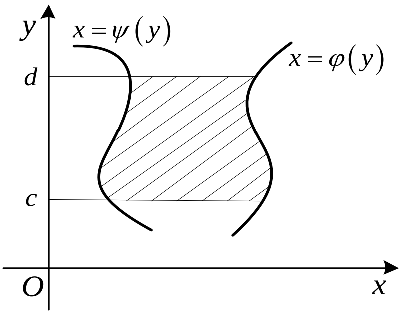

Рисунок 6

Якщо плоска фігура має «складну» форму (рисунок 7), то прямими, які є паралельними осі Oy її слід розбити на частини так, щоб можна було застосувати відомі формули.

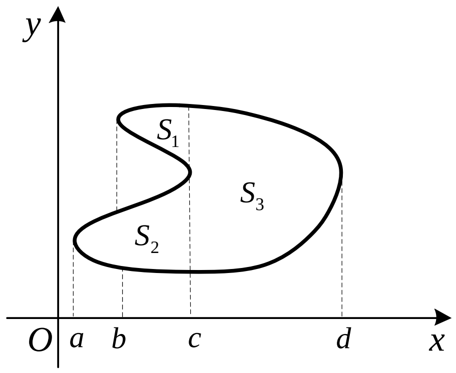

Рисунок 7

Слід зазначити, що при розв'язанні прикладів перш за все необхідно зробити рисунок фігури і визначитися з формулою, за допомогою якої зручно обчислити площу цієї фігури.

Приклад 6. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x+1$, $y = \cos x$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 8).

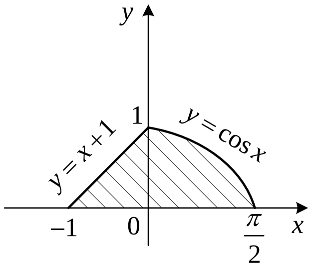

Рисунок 8

Очевидно, що функція $y = f\left(x\right) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0, \\ \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

неперервна для $x \in \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$. Площа цієї криволінійної трапеції складається з двох площ, які поєднуються в одну.

$$S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

Приклад 7. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y^2 = x+3,\ y^2 = 5-x.$

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 9).

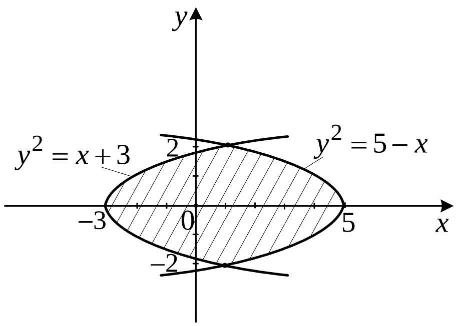

Рисунок 9

Обчислимо координати точок перетину кривих. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y^2 = x+3, \\ y^2 = 5-x. \end{cases} \qquad x+3 = 5-x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 2.$$

Ці числа є межами інтегрування. Таким чином,

$$S=\int_{-2}^{2}\left(5-y^2-\left(y^2-3\right)\right)dy=2\int_{0}^{2}\left(8-2y^2\right)dy=4\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=4\left(8-\frac{8}{3}\right)=4\cdot\frac{16}{3}=\frac{64}{3}.$$

Відповідь: $\frac{64}{3}$.

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Поняття функції багатьох змінних аналогічно поняттю функції однієї змінної. Аналогічним чином вводяться поняття межі і неперервності функції багатьох змінних. Для наочності зупинимося докладніше на функціях двох змінних.

<u>Загальні відомості про функції двох змінних</u>

Розглянемо довільну множину точок D, що лежать в координатній площині xOy.

Означення 1. Якщо кожній точці $M(x, y) \in D$ ставиться у відповідність одне дійсне значення z, то говорять, що на множині D задана функція $z = f(x, y)$ або $z = f(M)$. Множина D називається областю визначення цієї функції.

Змінні x, y, називаються аргументами або незалежними змінними.

Означення 2. Множина точок $P(x, y, z)$, де $M\ (x, y) \in D$, а $z = f(x, y)$, називається поверхнею. Тому рівняння $z = f(x, y)$ − рівняння поверхні, що проектується на площину xOy в область D.

Означення 3. Сукупність точок $M(x, y)$ площини xOy, які задовольняють нерівності $d(M, M_0) < \varepsilon$, називається ε- околом точки $M_0(x_0, y_0)$, де $d(M, M_0)$ − відстань між точками M і M_0.

Відстань $d(M, M_0)$ обчислюється за формулою:

$$d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\ .$$

Звідки отримуємо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\ .$$

Отже, ε- окіл точки M_0 є внутрішність круга радіусу ε з центром в цій точці.

Кажуть, що точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо $d(M, M_0) \to 0$. При цьому, очевидно, $x \to x_0, y \to y_0$ одночасно. Справедливо і обернене твердження.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ і точку $M_0(x_0, y_0)$, в будь-якому околі якої містяться точки з області визначення D цієї функції.

Означення 4. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при прямуванні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таке, що для усіх точок $M(x, y) \in D$, які задовольняють умові $d(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Позначується: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Означення 5. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена в певному околі цієї точці і

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Приклад 1. Знайти області визначення функції:

а) $z = xy + 2y^2$; *б)* $z = \ln\left(x^2 - y\right)$; *в)* $z = \dfrac{1}{xy} + \sqrt{y - x}$; *г)* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln y$.

Розв'язання.

а) Оскільки для будь-яких значень x і y функція z визначена, то її областю визначення є вся координатна площина xOy.

б) За визначенням логарифма, маємо $x^2 - y > 0$ або $x^2 > y$. Множина точок, координати яких задовольняють цієї нерівності, розташовані під параболою $y = x^2$ (рис. 1). Причому точки самої параболи не входять до області визначення, через те. що нерівність строга. Ці точки зображені пунктирною лінією, а область визначення – штрихуванням.

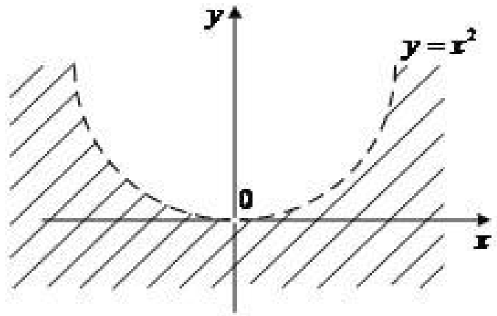

Рисунок1

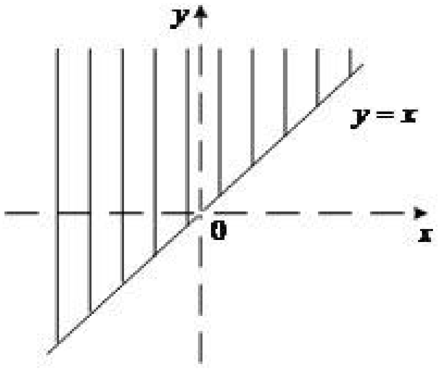

Рисунок 2

в) Через те, що знаменник дробу не може обертатися на нуль, то першому доданку задовольняють усі значення x і y, крім $x=0$ і $y=0$, тобто всі точки площини, крім осей координат. Оскільки підкореневий вираз повинен бути невід'ємним, отримуємо $y-x\geq 0$, тобто $y \geq x$. Цієї нерівності задовольняють координати усіх точок площини, розташованих над прямий $y = x$, включаючи цю пряму (рис. 2).

г) Аналогічно попереднім прикладам маємо $4 - x^2 - y^2 \geq 0$: для підкореневого виразу першого доданка і $y > 0$ для другого. Нерівності $x^2 + y^2 \leq 4$ задовольняють координати усіх точок кола з центром у початку координат і радіусу $r = 2$, включаючи точки кола. Далі слід знайти перетин множин розв'язків нерівностей. З огляду на другу нерівність, отримуємо остаточно верхню половину цього круга, виключаючи його діаметр (рис. 3).

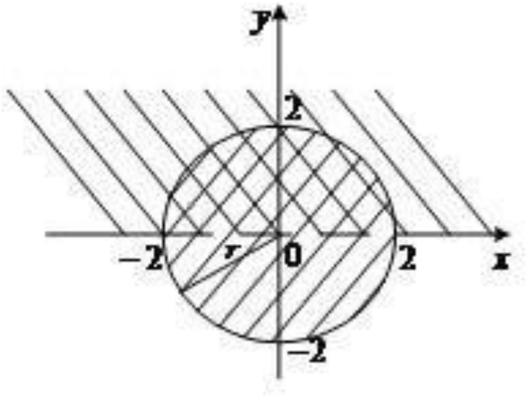

Рисунок 3

<u>Частинні похідні і диференціал першого порядку</u>

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Задамо приріст однієї зі змінних, зафіксувавши іншу. Тоді функція z отримає частинні прирости.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Якщо дати x і y одночасно прирости Δx і Δy, то отримуємо повний приріст функції $z = f(x, y)$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Означення 6. Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ і позначується одним з символів:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_{x,},\ f'_x(x, y).$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Позначується вона також символами z'_y або $f'_y(x, y)$.

Означення 7. Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст має наступний вигляд:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, величини A і B не залежать від Δx і Δy, а $o(\rho)$ − нескінченно мала більш високого порядку, ніж ρ.

Вираз $A\Delta x + B\Delta y$, лінійний відносно $\Delta x, \Delta y$, називається повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ і позначується символом dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1. (достатня умова існування частинних похідних).

Якщо функція $z = f(x, y)$ є диференцюємою в точці $M(x, y)$, то в цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, до того ж

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B .$$

Використовуючи цю теорему, можна записати:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy ,$$

вважаючи, як і у випадку функції однієї змінної, диференціалами незалежних змінних dx, dy довільні прирости $\Delta x, \Delta y$.

Теорема 2. (достатня умова диференцюємості функції).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в певному околі точки $M(x, y)$, які неперервні в цій точці, то вона є диференцюємою в цій точці.

Приклад 2. Обчислити частинні похідні z'_x і z'_y функцій:

а) $z = 6y - y^2 - x + y\sqrt{x}$; *б)* $z = \ln\left(y + x^2\right) - \sqrt{xy}$; *в)* $z = e^{\frac{x}{y}} + (y + 5x)^3$.

Розв'язання.

а) За означенням частинних похідних при диференціюванні за змінною x, змінна y вважається постійною.

$$z'_x = \left(6y - y^2 - x + y\sqrt{x}\right)'_x = \left(6y - y^2\right)'_x - x' + \left(y\sqrt{x}\right)'_x =$$

$$= -1 + y\left(\sqrt{x}\right)'_x = -1 + \frac{y}{2\sqrt{x}} .$$

Аналогічно робимо зі змінною x при диференціюванні за y:

$$z'_y = \left(6y - y^2 - x + y\sqrt{x}\right)'_y = 6 - 2y + \sqrt{x} .$$

б) $z'_x = \left(\ln\left(y+x^2\right)-\sqrt{xy}\right)'_x = \left(\ln\left(y+x^2\right)\right)'_x - \sqrt{y}\left(\sqrt{x}\right)'_x =$

$$\frac{1}{y+x^2}\cdot\left(y+x^2\right)'_x - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{y+x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$z'_y = \left(\ln\left(y+x^2\right)-\sqrt{xy}\right)'_y = \left(\ln\left(y+x^2\right)\right)'_y - \sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)'_y =$$

$$\frac{1}{y+x^2} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

в) $z'_x = \left(e^{\frac{x}{y}} + \left(y+5x\right)^3\right)'_x = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x + \left(\left(y+5x\right)^3\right)'_x =$

$$e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x + 3\left(y+5x\right)^2\cdot\left(y+5x\right)'_x =$$

$$= e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} + 3\left(y+5x\right)^2\cdot 5 = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} + 15\left(y+5x\right)^2.$$

$$z'_y = \left(e^{\frac{x}{y}} + \left(y+5x\right)^3\right)'_y = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y + \left(\left(y+5x\right)^3\right)'_y =$$

$$e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y + 3\left(y+5x\right)^2\cdot\left(y+5x\right)'_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + 3\left(y+5x\right)^2.$$

Приклад 3. Знайти диференціал першого порядку функції $z = x^2\sin\left(1-xy\right)$.

Розв'язання. Диференціал 1-го порядку (або повний диференціал) функції $z = f\left(x, y\right)$ обчислюється за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2\sin\left(1-xy\right)\right)'_x=\left(x^2\right)'_x\sin\left(1-xy\right)+x^2\left(\sin\left(1-xy\right)\right)'_x=$$

$$=2x\sin\left(1-xy\right)+x^2\cos\left(1-xy\right)\cdot\left(1-xy\right)'_x=$$

$$2x\sin\left(1-xy\right)-x^2y\cos\left(1-xy\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2\sin\left(1-xy\right)\right)'_y=x^2\left(\sin\left(1-xy\right)\right)'_y=x^2\cos\left(1-xy\right)\cdot\left(1-xy\right)'_y=$$

$$=-x^3\cos\left(1-xy\right).$$

Таким чином, повний диференціал має вигляд:

$$dz=(2x\sin\left(1-xy\right)-x^2y\cos\left(1-xy\right))dx-x^3\cos\left(1-xy\right)dy\ .$$

Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Частинні похідні більш високих порядків визначаються як похідні від похідних більш низьких порядків.

Якщо у функції $z=f\left(x,y\right)$ існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вони також можуть мати частинні похідні, які називаються частинними похідними другого порядку функції $z=f\left(x,y\right)$. Позначення:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yx};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}.$$

Теорема 2. (про рівність змішаних похідних).

Якщо в точці $P\left(x,y\right)$ змішані похідні z''_{xy} і z''_{yx} неперервні, то вони дорівнюють одна одній.

Аналогічна теорема справедлива для змішаних похідних будь-якого порядку.

Теорема 3.

Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, тоді:

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2 .$$

Приклад 4.

а) Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin\left(e^x + y\right) - \cos\left(e^y + x\right)$;

б) перевірити рівність $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 1 = 0$ при $z = ye^{x^2 - y^2}$;

в) знайти диференціал 2-го порядку функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Розв'язання:

а) Для обчислення $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ обчислимо спочатку z'_y :

$$z'_y = \left(\sin\left(e^x + y\right) - \cos\left(e^y + x\right)\right)'_y = \cos\left(e^x + y\right) \cdot \left(e^x + y\right)'_y +$$

$$+ \sin\left(e^y + x\right) \cdot \left(e^y + x\right)'_y = \cos\left(e^x + y\right) + e^y \sin\left(e^y + x\right).$$

Потім знайдемо $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_y\right)'_x = \left(\cos\left(e^x + y\right) + e^y \sin\left(e^y + x\right)\right)'_x =$$

$$= -\sin\left(e^x + y\right) \cdot \left(e^x + y\right)'_x + e^y \cos\left(e^x + y\right) \cdot \left(e^y + x\right)'_x =$$

$$= -e^x \sin\left(e^x + y\right) + e^y \cos\left(e^y + x\right).$$

Аналогічно знаходимо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(z'_x\right)'_y = \left(\cos\left(e^x + y\right) \cdot \left(e^x + y\right)'_x + \sin\left(e^y + x\right) \cdot \left(e^y + x\right)'_x\right)'_y =$$

$$= \left(e^x \cos\left(e^x + y\right) + \sin\left(e^y + x\right)\right)'_y =$$

$$= -e^x \sin\left(e^x + y\right) \cdot \left(e^x + y\right)'_y + \cos\left(e^y + x\right) \cdot \left(e^y + x\right)'_y =$$

$$= -e^x \sin\left(e^x + y\right) + e^y \cos\left(e^y + x\right).$$

Порівнюючи отримані частинні похідні другого порядку, переконуємося в справедливості заданої рівності.

б) Для обчислення похідних, спочатку знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{x^2 - y^2}\left(x^2 - y^2\right)'_x = 2xye^{x^2 - y^2}.$$

Далі, згідно з формулами знаходження похідних та неперервності відповідних частинних похідних, маємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = \left(2xye^{x^2 - y^2}\right)'_x = \left(2xy\right)'_x e^{x^2 - y^2} + 2xy\left(e^{x^2 - y^2}\right)'_x =$$

$$= 2ye^{x^2 - y^2} + 2xye^{x^2 - y^2}\left(x^2 - y^2\right)'_x = 2ye^{x^2 - y^2} + 4x^2ye^{x^2 - y^2} = 2ye^{x^2 - y^2}\left(1 + 2x^2\right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y = \left(2xye^{x^2 - y^2}\right)'_y = \left(2xy\right)'_y e^{x^2 - y^2} + 2xy\left(e^{x^2 - y^2}\right)'_y =$$

$$= 2xe^{x^2 - y^2} + 2xye^{x^2 - y^2}\left(x^2 - y^2\right)'_y = 2xe^{x^2 - y^2} - 4xy^2e^{x^2 - y^2} = 2xe^{x^2 - y^2}\left(1 - 2y^2\right).$$

Підставимо отримані похідні в ліву частину рівності, яку ми перевіряємо та проведемо перетворення отриманого виразу:

$$2 \cdot 2ye^{x^2 - y^2}\left(1 + 2x^2\right) + 2xe^{x^2 - y^2}\left(1 - 2y^2\right) + 1 = 2e^{x^2 - y^2}\left(2y + 4yx^2 + x - 2y^2x\right) + 1.$$

Очевидно, указана рівність не виконується.

в) Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad z''_{xx} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad z''_{yy} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = -\frac{2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Підставимо ці похідні до формули $d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$:

$$d^2z = \frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx^2 - \frac{8xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy + \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy^2.$$

Усе вищесказане у цьому розділі аналогічним чином розповсюджується і на функції більшої кількості змінних.

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Основні поняття теорії диференційних рівнянь

Означення. Диференційним рівнянням (ДР) називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну. Порядок диференційного рівняння визначає найвищий порядок похідної. Загальний вигляд диференційного рівняння:

$$\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, $y', \ldots, y^{(n)}$ – її похідні.

Диференційне рівняння можна записати у вигляді:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$$

Означення. Загальним розв'язком диференційного рівняння називається будь-яка функція, яка задовольняє цьому рівнянню (тобто функція при підстановці якої в задане рівняння одержуємо тотожність).

Означення. Кожний розв'язок, отриманий із загального розв'язку при певному значенні сталої C називається частинним розв'язком.

Для знаходження частинного розв'язку ДР n-го порядку необхідно задати умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$, які називаються *початковими умовами*.

Означення. Задача знаходження частинного розв'язку при заданих початкових умовах називається *задачею Коші*.

Сформулюємо теорему існування та єдиності розв'язку для ДР першого порядку, яку можна узагальнити для ДР n-го порядку.

Теорема 1 (існування та єдиності розв'язку ДР).

Якщо в рівнянні $y' = f\left(x, y\right)$ функція $f\left(x, y\right)$ її частинна похідна $f'_y\left(x, y\right)$ неперервні в певній області D, яка містить точку

(x_0, y_0), то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, яке задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Розглянемо деякі види диференційних рівнянь першого порядку.

Диференційні рівняння першого порядку

Диференційні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду $M(y)dy = N(x)dx,$ де $M(y), N(x)$ – неперервні функції, називається *диференційним рівнянням з відокремленими змінними.* Для знаходження розв'язання такого рівняння необхідно проінтегрувати його обидві частини:

$$\int M(y)dy = \int N(x)dx + C, \text{ де } C = const.$$

Після інтегрування одержимо так званий *загальний розв'язок диференційного рівняння*.

Приклад 1. Розв'язати диференційне рівняння:

$$e^{\sin y} \cdot \cos y dy = \frac{dx}{x}$$

Розв'язання. Маємо $\int e^{\sin y} \cdot \cos y dy = \int \frac{dx}{x}$, де $e^{\sin y} = \ln|x \cdot C|$ – це і є загальний розв'язок диференційного рівняння.

Відповідь: $e^{\sin y} = \ln|x \cdot C|$.

Рівняння вигляду:

$$M(x)N(y)dy + P(y)Q(x)dx = 0,$$

де $M(x), N(y), P(y), Q(x)$ – неперервні функції, називається *диференційним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Поділивши обидві частини такого рівняння на вираз $M(x) \cdot P(y)$, одержимо диференційне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{N(y)}{P(y)}dy = -\frac{Q(x)}{M(x)}dx.$$

При цьому також необхідно врахувати, що можуть бути втрачені розв'язання рівняння, а тому слід розглянути рівняння $P(y) = 0$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння:

$$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0.$$

Розв’язання. Виконаємо відповідні дії:

$$x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0,$$

$$\frac{ydy}{y^2+1}=-\frac{xdx}{1-x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|=\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+\frac{1}{2}\ln C\Rightarrow\ln(y^2+1)=\ln\left|(1-x^2)\cdot C\right|\Rightarrow$$

$\Rightarrow y^2+1=C(1-x^2)$ – загальний розв’язок рівняння.

Відповідь: $y^2+1=C(1-x^2)$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

Розв’язання. Запишемо $y'=\dfrac{dy}{dx}$, тоді рівняння набуде вигляду:

$$\frac{ydy}{dx}=\frac{1-2x}{y}$$

або $y^2dy=(1-2x)dx$.

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, маємо:

$$\frac{y^3}{3}=x-x^2+C$$

або $y^3=3x-3x^2+C_1$.

Таким чином, $y=\sqrt[3]{3x-3x^2+C_1}$ – загальний розв’язок диференційного рівняння.

Відповідь: $y=\sqrt[3]{3x-3x^2+C_1}$.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші: $y' \cdot \sin x = y \ln y$ за умови $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e.$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln\left|\ln y\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln\left|C\right|,$$

$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|C \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| \Rightarrow \ln y = C \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок диференційного рівняння.

Враховуючи, що $y = e$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$, маємо $e = e^{C\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, тоді $e = e^{C} \Rightarrow C = 1$.

Таким чином, $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ – частинний розв'язок диференційного рівняння, що відповідає заданим початковим умовам.

Відповідь: $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Лінійні диференційні рівняння

Рівняння виду $y' + P(x) \cdot y = Q(x),$ де $P(x)$ та $Q(x)$ – неперервні функції, називається *лінійним диференційним рівнянням.* Загальний розв'язок такого рівняння знаходиться у вигляді добутку двох функцій $y = U(x) \cdot V(x).$ Враховуючи, що $y' = U'V + UV',$ задане рівняння набуває вигляду:

$$U'V + UV' + P(x) \cdot UV = Q(x)$$

$$\text{або } U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x).$$

Так як одна з функції U або V може бути обрана довільно, виберемо V таким чином, щоб $V' + P(x) \cdot V = 0,$ тоді $U' \cdot V = Q(x).$ Невідомі функції $U(x)$ і $V(x)$ знайдемо з системи диференційних рівнянь, кожне з яких є диференційним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} V' + P(x)\cdot V = 0, \\ U'\cdot V = Q(x) \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння лінійне, а тому, згідно з наведеним вище, маємо:

$$y = U\cdot V,\ \ y' = U'V + UV',$$

тоді наше рівняння набуде вигляду:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' + 2xV = 0, \\ U'\cdot V = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з наведених рівняння системи. При цьому сталу інтегрування при знаходженні $V(x)$ покладаємо рівною нулю, так як нас цікавить будь-який розв'язок, що відрізняється від нуля.

$$V' + 2xV = 0,\ \frac{dV}{dx} = -2xV,$$

$$\int \frac{dV}{V} = -2\int xdx,\ \ln|V| = -x^2,$$

$$V = e^{-x^2}.$$

Тоді друге рівняння системи набуде вигляду:

$$U'\cdot V = x\cdot e^{-x^2},\ \frac{dU}{dx}e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2},\ \int dU = \int xdx,$$

$$U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Відповідно, $y = U\cdot V = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

Відповідь: $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

Приклад 6. Розв’язати диференційне рівняння:

$$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2.$$

Розв’язання. В даному випадку необхідно розділити обидві частини рівняння на вираз $(1+x^2)$ і тоді ми одержимо рівняння $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$, яке повністю відповідає загальному вигляду лінійного диференційного рівняння першого порядку.

Відповідно до вищезгаданого маємо:

$$y=U\cdot V,\ \ y'=U'V+UV',$$

$$U'V+UV'-\frac{2xUV}{1+x^2}=1+x^2$$

або $U'V+U\left(V'-\frac{2xV}{1+x^2}\right)=1+x^2$.

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V'-\frac{2xV}{1+x^2}=0, \\ U'V=1+x^2. \end{cases}$$

Маємо:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{2xV}{1+x^2},$$

$$\int\frac{dV}{V}=\int\frac{2xdx}{1+x^2},$$

$$\ln|V|=\ln\left|1+x^2\right|, V=1+x^2.$$

Тоді:

$$\frac{dU}{dx}(1+x^2)=1+x^2, \int dU=\int dx, U=x+C.$$

Таким чином, $y=U\cdot V=(x+C)(1+x^2)$.

Відповідь: $y=(x+C)(1+x^2)$.

Приклад 7. Розв’язати диференційне рівняння, яке задовольняє початковим умовам:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}, \ \ y(a) = b.$$

Розв'язання. Дане рівняння – лінійне, а тому загальний розв'язок будемо шукати у вигляді: $y = U \cdot V$, тоді $y' = U'V + UV'$.

Таким чином рівняння набуде вигляду:

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{e^x}{x} \text{ або } U'V + U\left(V' + \frac{V}{x}\right) = \frac{e^x}{x}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' + \dfrac{V}{x} = 0, \\ U'V = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з рівняння окремо. А саме:

$$V' + \frac{V}{x} = 0, \ \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x}, \ \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dx}{x}, \ \ln|V| = -\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

тоді $V = \dfrac{1}{x}$.

Друге рівняння системи набуде вигляду $\dfrac{dU}{dx} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x}{x}$ або $dU = e^x dx$, звідки $U = \int e^x dx = e^x + C$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння буде:

$$y = U \cdot V = \frac{e^x + C}{x}.$$

Оскільки в умові рівняння задані початкові умови, то необхідно знайти частинний розв'язок диференційного рівняння. З умови відомо, що $y = b$ при $x = a$.

Використовуючи ці дані, маємо:

$$b = \frac{e^a + C}{a}, \ e^a + C = ab, \ C = -e^a + ab.$$

Відповідно: $y=\frac{e^x-e^a+ab}{x}$ – частинний розв’язок рівняння.

Відповідь: $y=\frac{e^x-e^a+ab}{x}$.

Приклад 8. Розв’язати рівняння $(y^2-6x)y'+2y=0.$

Розв’язання. Це рівняння не є лінійним відносно y та y', але його можна переписати у вигляді:

$$2y\cdot x'_y-6x=-y^2,\ \text{так як}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\ \text{тобто}\ y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

Таким чином, маємо: $x'_y-\frac{6x}{2y}=-\frac{y^2}{2y}$ або $x'_y-\frac{3x}{y}=-\frac{y}{2}.$

Позначимо $x=U\cdot V$, де $U=U(y)$ і $V=V(y)$ та $x'=U'V+UV'$.

Маємо:

$$U'V+UV'-\frac{3UV}{y}=-\frac{y}{2},$$

$$U'V+U\left(V'-\frac{3V}{y}\right)=-\frac{y}{2}.$$

Система рівняння у даному випадку буде:

$$\begin{cases}V'-\frac{3V}{y}=0,\\ U'V=-\frac{y}{2}.\end{cases}$$

Відповідно:

$$\frac{dV}{dy}=\frac{3V}{y},\ \frac{dV}{V}=\frac{3dy}{y},\ \ln|V|=3\ln|y|=\ln|y|^3\Rightarrow V=y^3.$$

Далі $U'V=-\frac{y}{2},\ \frac{dU}{dy}\cdot y^3=-\frac{y}{2},\ dU=-\frac{y}{2}\cdot\frac{dy}{y^3}$

або $dU=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{y^2},\quad U=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y}\right)+C=\frac{1}{2y}+C.$

Таким чином, $x=U\cdot V=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)$ – загальний розв'язок диференційного рівняння.

Відповідь: $x=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)$.

Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь.

Рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \qquad (1)$$

де $a_k(x)\quad k=\overline{1,n},\quad f(x)$ – відомі неперервні функції змінної x, називаються *лінійним неоднорідним* рівнянням $n-$го порядку. Якщо права частина рівняння (1) $f(x)\equiv 0$, то диференційне рівняння називається *однорідним*. Надалі припускатимемо, що $a_k(x)\quad k=\overline{1,n},\quad f(x)$ неперервні на (a,b), тобто виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язку.

Загальна теорія лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР).

Розглянемо лінійне однорідне диференційне рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

Позначимо ліву частину диференційного рівняння (2) $L[y]$. Тоді рівняння (2) набуває вигляду $L[y]=0$. Оператор $L[y]$ називається диференціальним та має властивості:

1. $L[\lambda y]=\lambda L[y]$ (однорідність),
2. $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$ (адитивність).

Теорема 2. Нехай $y_1(x)$ є розв'язком лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$, тоді $\lambda y_1(x)$, де $\lambda=const$, також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 3. Нехай $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$, тоді $y_1(x)+y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 4. Нехай комплексна функція $y(x)=U(x)+iV(x)$ є розв'язком лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$, тоді $U(x)$ та $V(x)$ також є розв'язками цього рівняння.

Лінійний диференціальний оператор, його властивості.
Лінійна залежність функцій. Визначник Вронського

Означення. Сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ на інтервалі (a,b) називається *лінійно незалежною* на цьому інтервалі, якщо з умови $\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\ldots+\lambda_n y_n(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ витікає, що $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. В протилежному випадку сукупність функцій називається *лінійно залежною.*

Розглянемо сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які мають неперервні похідні до $(n-1)-$го порядку включно на інтервалі (a,b). Визначник

$$\mathrm{W}\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ & & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

називається визначником Вронського.

Теорема 5. Нехай функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійно залежні на інтервалі (a,b), тоді визначник Вронського тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі.

Означення. Будь-яка сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$ називається фундаментальною системою розв'язків (ФСР).

Теорема 6. Нехай функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ФСР лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$ на інтервалі (a,b), тоді визначник Вронського $\mathrm{W}[x]\neq 0$ в жодній точці (a,b).

Теорема 7. У будь-якого лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$ існує ФСР.

Теорема 8. Нехай сукупність функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ утворює ФСР лінійного однорідного диференційного рівняння $L[y]=0$ на інтервалі (a,b), тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x).$$

<u>Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР).</u>

Розглянемо диференційне рівняння

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (3)$$

де a_k $\left(k=\overline{0,n}\right)$ дійсні числа. Розв'язок диференційного рівняння (3) шукатимемо у вигляді $y=e^{kx}$, де k невідомо. Підставляючи $y=e^{kx}$ в рівняння (3), отримуємо:

$$a_0k^ne^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+a_2k^{n-2}e^{kx}+\ldots+a_{n-1}ke^{kx}+a_ne^{kx}=0$$

або

$$e^{kx}\left(a_0k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n\right)=0.$$

Очевидно, що $e^{kx}\neq 0\left(\forall x\in R\right)$, отже

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \qquad (4)$$

Таким чином, для того, щоб функція $y=e^{kx}$ була розв'язком диференційного рівняння (3), необхідно, щоб k було розв'язком рівняння (4). Рівняння (4) називається *характеристичним* рівнянням.

Корені характеристичного рівняння називаються *характеристичними числами*.

Розглянемо усі можливі випадки характеристичних чисел.

1. Усі характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ дійсні та різні. Кожному з коренів характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок (31) вигляду

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}. \tag{3}$$

Покажемо, що (4) утворює ФСР.

Складемо визначник Вронського

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \cdots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \ldots & k_n e^{k_n x} \\ & \ldots & & \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ & \ldots & & \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x} \cdot \Delta$$

де $\Delta -$ визначник Вандермонда:

$$\Delta = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\ldots(k_1 - k_n)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)\ldots(k_2 - k_n)\ldots(k_{n-1} - k_n) \neq 0$$

Через те, що $k_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ різні. Отже, загальний розв'язок ЛОДР:

$$y_{зо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

2. Серед коренів характеристичного рівняння є прості комплексні корені. Через те, що коефіцієнти характеристичного рівняння дійсні, то комплексні корені входять попарно спряженими, тобто $\alpha \pm i\beta$. Комплексно спряженим кореням відповідають два розв'язки диференціального рівняння (3):

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Розв'язок

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x = U\left(x\right) + iV\left(x\right).$$

За теоремою 4 функції $U\left(x\right)$ та $V\left(x\right)$ є розв'язками диференціального рівняння (3). Отже, кореню $\alpha + i\beta$ відповідає два дійсних розв'язки диференціального рівняння (1) $e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Легко помітити, що кореню $\alpha - i\beta$ відповідають також розв'язки. Таким чином, парі комплексно спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ відповідають два дійсних розв'язки. Складемо визначник Вронського та обчислимо його

$$\mathrm{W}\left[U,V\right] = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

.

Отже, розв'язки $e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x$ лінійно незалежні.

3. Серед коренів характеристичного рівняння є кратні дійсні корені. Кореню k характеристичного рівняння кратності m відповідає m лінійно незалежних розв'язки наступного вигляду:

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx}, \ldots,\ x^{m-1}e^{kx}.$$

Випадок кратних коренів називається *внутрішнім резонансом* однорідного диференціального рівняння, число m визначає *порядок* цього резонансу.

<u>Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами</u>

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами a_1, a_2, a_3 має вигляд $a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$.

Відомо, якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – частинний розв'язок такого рівняння, вони утворюють *фундаментальну систему розв'язань*. Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо як $y_{з.о.} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Для знаходження частинних розв'язань $y_1(x)$

та $y_2(x)$ необхідно спочатку розв'язати відповідне характеристичне рівняння $a_1k^2 + a_2k + a_3 = 0$. При розв'язанні квадратного рівняння можливі три випадки:

№ з/п	Корені рівняння	Частинні розв'язки	Загальний розв'язок
1.	Дійсні різні $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2.	Дійсні рівні $k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x \cdot e^{k_1 x}$	$y_{з.о.} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
3.	Комплексно-спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння $3k^2 + 5k - 2 = 0$, його корені $k_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{-5 \pm 7}{6}$, $k_1 = -2$, $k_2 = \dfrac{1}{3}$ дійсні та різні. Відповідно, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{\frac{1}{3}x}$ – частинні розв'язки, а $y_{з.о.} = C_1e^{-2x} + C_2e^{\frac{1}{3}x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Відповідь: $y_{з.о.} = C_1e^{-2x} + C_2e^{\frac{1}{3}x}$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння буде $k^2 + 6k + 9 = 0$, а тому $k_{1,2} = -3$ (дійсні та рівні корені), відповідно $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = xe^{-3x}$.

Отже, $y_{з.о.} = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Відповідь: $y_{з.о.} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

Приклад 11. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 13y = 0 .$$

Розв'язання. В цьому випадку характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 13 = 0$, а його корені $k_{1.2} = 3 \pm 2i$. Відповідно до наведеної вище таблиці $\alpha = 3,\ \beta = 2$ та $y_1 = e^{3x}\cos 2x$, $y_2 = e^{3x}\sin 2x$.

Таким чином, $y_{з.о.} = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Відповідь: $y_{з.о.} = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Приклад 12. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \text{ за умови } y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$$

Розв'язання. Розглянемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k + 29 = 0.$$

Його корені $k_{1,2} = -2 \pm 5i$. Тоді ($\alpha = -2,\ \beta = 5$) $y_1 = e^{-2x}\cos 5x$ та $y_2 = e^{-2x}\sin 5x$, а $y_{з.о.} = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Скористаємось початковою умовою $y(0) = 3$, а саме замість x та y підставимо їх значення в загальний розв'язок однорідного рівняння. Маємо $3 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \Rightarrow 3 = C_1$.

Обчислимо:

$$y'_{з.о.} = -2e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + e^{-2x}(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x),$$

а далі у цей вираз підставимо $x = 0$ та $y' = -1$. Тоді:

$$-1 = -2(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + (-5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0),$$

$$\text{тобто } -1 = -2C_1 + 5C_2 .$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 3, \\ -2C_1 + 5C_2 = -1, \end{cases} \text{ звідки } C_2 = 1 .$$

Отже розв'язок рівняння, що відповідає заданим початковим умовам буде:

$$y = e^{-2x}(3\cos 5x + \sin 5x)\,.$$

Відповідь: $y = e^{-2x}(3\cos 5x + \sin 5x)$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо ЛНДР

$$L[y] = \\ = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)\,. \qquad (6)$$

ЛОДР з тими ж коефіцієнтами, але з правою частиною, яка дорівнює нулю:

$$L[y] = 0 \qquad (7)$$

Називається однорідним рівнянням, яке відповідає рівнянню (6). Очевидно, що (6) і (7) не мають спільних розв’язків.

Теорема 9. (про структуру загального розв’язку ЛНДР)
Загальний розв’язок ЛНДР є сумою загального розв’язку відповідного однорідного рівняння та довільного частинного розв’язку неоднорідного рівняння

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}\,.$$

Теорема 10. (принцип суперпозиції)

Частинний розв’язок ДР $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ дорівнює сумі частинних розв’язків ДР $L[y] = f_1(x)$ та $L[y] = f_2(x)$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального виду

Загальний вигляд такого рівняння:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)\ \text{, де }\ f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

а $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ – многочлени відповідно степені m та n.

Відповідно до теореми про структуру загального розв’язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$, де $y_{з.о.}$

одержуємо розглянувши відповідне рівняння $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$, а частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}\left(M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x\right)\cdot x^s .$$

В даному випадку $k = \max\{m, n\}$, $M_k(x), N_k(x)$ – многочлени степеню k з невідомими коефіцієнтами.

Якщо так зване *контрольне число* $\gamma = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $s = 0$, в іншому випадку число s визначає, з якою кількістю коренів характеристичного рівняння співпадає γ.

Приклад 13. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 4y = x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} .$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' + 4y = 0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, корені якого будуть $k_{1,2} = \pm 2i$. Звідки можна записати:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x .$$

Права частина заданого рівняння має спеціальний вигляд, причому контрольне число $\gamma = \alpha + \beta i = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. А тому $y_{\text{ч.н.}} = Ax + B$. Для обчислення коефіцієнтів A та B знайдемо похідні $y'_{\text{ч.н.}} = A$ і $y''_{\text{ч.н.}} = 0$ та підставимо їх значення в умову диференціального рівняння $4(Ax + B) = x$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 4A = 1, \\ x^0 & 4B = 0 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{4},\ B = 0 .$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{4}x$, відповідно $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x$.

Приклад 14. Розв’язати рівняння $y'' - 3y' = 2 - 3x$.

Розв’язання. Загальний розв’язок даного рівняння знаходимо у вигляді: $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$.

Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - 3y' = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 - 3k = 0$, корені якого будуть $k_1 = 0$ та $k_2 = 3$. Отже $y_{\text{з. о.}} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Права частина заданого рівняння є спеціального виду. де $\alpha = 0, \beta = 0, f(x) = 2 - 3x$. Контрольне число $\gamma = 0$ та дорівнює одному кореню характеристичного рівняння. Таким чином, $y_{\text{ч.н.}}$ можна підібрати за правою частиною, тобто:

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx .$$

Коефіцієнти A та B знаходимо вже відомим методом:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B, \; y''_{\text{ч.н.}} = 2A .$$

$$2A - 3(2Ax + B) = 2 - 3x ,$$

$$2A - 6Ax - 3B = 2 - 3x ,$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & -6A = -3 \\ x^0 & 2A - 3B = 2 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{3} .$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x$, а $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x$.

Приклад 15.. Розв’язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3 .$$

Розв’язання. Як відомо, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.н.}}$: $y'' - 6y' + 9y = 0$, $k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = 3 \Rightarrow y_{\text{з. о.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

Визначимо контрольне число:

$$\gamma = \alpha + \beta i,\ \alpha = 0,\ \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0,\ \ \gamma \ne k_{1,\,2}\,.$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx + C$. Знаходимо $y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A$ та підставимо ці вирази у задане диференціальне рівняння:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3\,,$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 9A = 2, \\ x^1 & -12A + 9B = -1, \\ x^0 & 2A - 6B + 9C = 3 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow A = \frac{2}{9},\ B = \frac{5}{27},\ C = \frac{11}{27}.$$

Таким чином:

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}\,,$$

$$\text{а}\ \ y_{\text{з.н.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}\,.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Розв'язання. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$

Виконуючи всі дії, аналогічно попереднім, маємо:

$$2y'' - y' - y = 0,\ \ 2k^2 - k - 1 = 0,\ \ k_1 = 1,\ \ k_2 = -\frac{1}{2}\,.$$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}\,.$$

Так як $\alpha = 2, \beta = 0$, то $\gamma = 2,\ \ \gamma \ne k_{1,\,2}$ тоді:

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)e^{2x}\,,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x}(2Ax + 2B + A)\,,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}(2A) = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B)\,.$$

Маємо:

$$2e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}\,.$$

Скоротимо обидві частини рівняння на e^{2x} :

$$8Ax+8A+8B-2Ax-2B-A-Ax-B=4x\,,$$

$$5Ax+7A+5B=4x\,.$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 5A=4, \\ x^0 & 7A+5B=0 \end{array}\Bigg\}\Rightarrow A=\frac{4}{5},\ B=-\frac{28}{25}\,.$$

$$y_{\text{ч.н.}}=\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}\,,\ \text{а}\ \ y_{\text{з.н.}}=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}\,.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}}=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}\,.$

Приклад 17. Розв’язати рівняння $y''-2y'+y=e^x(5-x)$.

Розв’язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв’язку неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{з.н.}}=y_{\text{з.о.}}+y_{\text{ч.н.}},\ y''-2y'+y=0,\ k^2-2k+1=0,\ k_{1,\,2}=1\,,$$

$$y_{\text{з.о.}}=e^x(C_1+C_2x)\,.$$

Враховуючи праву частину рівняння, маємо:

$$\alpha=1,\ \beta=0\Rightarrow\gamma=1=k_{1.2}\,,$$

$$y_{\text{ч.н.}}=e^x(Ax+B)\cdot x^2=e^x(Ax^3+Bx^2)\,,$$

$$y'_{\text{ч.н.}}=e^x(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2Bx)\,,$$

$$y''_{\text{ч.н.}}=e^x(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2Bx+3Ax^2+2Bx+6Ax+2B)=$$

$$=e^x(Ax^3+Bx^2+6Ax^2+4Bx+6Ax+2B)\,.$$

Підставимо $y_{\text{ч.н.}},\,y'_{\text{ч.н.}},\,y''_{\text{ч.н.}}$ в задане рівняння та скоротимо обидві частини на e^x :

$$6Ax+2B=5-x\,,$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 6A=-1, \\ x^0 & 2B=5 \end{array}\Bigg\}\Rightarrow A=-\frac{1}{6},\ B=\frac{5}{2}\,.$$

$$y_{\text{ч.н.}}=x^2e^x\left(-\frac{x}{6}+\frac{5}{2}\right)=e^x\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{5}{2}x^2\right),$$

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2} x^2 \right).$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2} x^2 \right).$

Приклад 18. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y' + 10y = 5\sin 4x - 3\cos 4x.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

Для того, щоб знайти $y_{\text{з.о.}}$ запишемо однорідне диференціальне рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$, корені якого $k_{1,\,2} = -1 \pm 3i$. Таким чином, $y_{\text{з.о.}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

За правою частиною рівняння $\alpha = 0, \beta = 4$, тобто $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 4i, \gamma \neq k_{1,\,2}$, а отже, $y_{\text{ч.н.}} = A\sin 4x + B\cos 4x$. Знайдемо

$$y'_{\text{ч.н.}} = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x \text{ та } y''_{\text{ч.н.}} = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x.$$

Підставимо їх значення в умову. Тоді маємо:

$$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x + 8A\cos 4x - 8B\sin 4x + 10A\sin 4x + 10B\cos 4x =$$
$$= 5\sin 4x - 3\cos 4x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 4x$ та $\cos 4x$ одержимо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} \sin 4x & -6A - 8B = 5, \\ \cos 4x & 8A - 6B = -3 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = -0{,}54, \;\; B = -0{,}22.$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -0{,}54\sin 4x - 0{,}22\cos 4x$, а відповідно

$$y_{\text{з.н.}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0{,}54\sin 4x - 0{,}22\cos 4x.$$

Відповідь:

$y_{\text{з.н.}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0{,}54\sin 4x - 0{,}22\cos 4x.$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $y''+9y=-\frac{17}{2}\cos 2x$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому випадку $y_{\text{з.н.}}=y_{\text{з.о.}}+y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$$y''+9y=0,\ k^2+9=0\Rightarrow k_{1,2}=\pm 3i\Rightarrow\ y_{\text{з.о.}}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

За правою частиною рівняння маємо $\alpha=0,\ \beta=2,$ тоді $\gamma=\alpha\pm\beta i=\pm 2i,\ \gamma\neq k_{1,2}\Rightarrow y_{\text{ч.н.}}=A\cos 2x+B\sin 2x$ Знайдемо A та B. Для цього запишемо:

$$y'_{\text{ч.н.}}=-A\sin 2x+2B\cos 2x \quad \text{та} \quad y''_{\text{ч.н.}}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Підставимо одержані вирази в задане диференціальне рівняння:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+9A\cos 2x+9B\sin 2x=-\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\text{тоді } 5A\cos 2x+5B\sin 2x=-\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\left.\begin{array}{l|l}\cos 2x & 5A=-\dfrac{17}{2},\\ \sin 2x & 5B=0\end{array}\right\}\Rightarrow B=0,\ A=-\frac{17}{10}=-1,7.$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}}=-1,7\cos 2x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-1,7\cos 2x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-1,7\cos 2x$.

Приклад 20. Розв'язати задачу Коші:

$$y''+4y'-5y=2\sin 3x,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Розв'язання. У даному випадку необхідно спочатку повторити всі дії, які були наведені в попередніх прикладах, а потім скористатися початковими умовами. Отже, $y_{\text{з.н.}}=y_{\text{з.о.}}+y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$$y''+4y'-5y=0,\ k^2+4k-5=0\Rightarrow k_1=1,\ k_2=-5.$$

$$y_{\text{з.о.}}=C_1e^{x}+C_2e^{-5x}.$$

Так як $\alpha=0,\ \beta=3\Rightarrow\gamma=\alpha\pm\beta i=3i,\ \gamma\neq k_{1,2}$, то:

$$y_{\text{ч.н.}}=A\cos 3x+B\sin 3x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x\,,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x\,.$$

Обчислимо A та B:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 12A\sin 3x + 12B\cos 3x - 5A\cos 3x - 5B\sin 3x = 2\sin 3x$$

,

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & \\ \sin 3x & \end{array}\begin{cases} -9A + 12B - 5A = 0, \\ -9B - 12A - 5B = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14A + 12B = 0, \\ -12A - 14B = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7A + 6B = 0, \\ -6A - 7B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{6}{85},\ B = -\frac{7}{85}.$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -\dfrac{6}{85}\cos 3x - \dfrac{7}{85}\sin 3x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x\,.$$

Скористаємось початковою умовою $y(0) = 1$:

$$1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}\,.$$

Запишемо $y'_{\text{з.н.}} = C_1 e^{x} - 5C_2 e^{-5x} + \dfrac{18}{85}\sin 3x - \dfrac{21}{85}\cos 3x$, та скористаємось умовою $y'(0) = 0$:

$$0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}\,.$$

Об’єднаємо одержані рівняння в систему:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 - \dfrac{6}{85}, \\ 0 = C_1 - 5C_2 - \dfrac{21}{85}, \end{cases}$$

та знайдемо $C_1 = \dfrac{238}{255}, C_2 = \dfrac{7}{51}$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковим умовам:

$$y = \frac{238}{255}e^x + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x\,.$$

Відповідь: $y = \dfrac{238}{255}e^x + \dfrac{7}{51}e^{-5x} - \dfrac{6}{85}\cos 3x - \dfrac{7}{85}\sin 3x$.

ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Знайти *а)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-9\ln^2 x}}$, *б)* $\int (4+5x)\cos\frac{x}{3}dx$,

в) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$.

Розв'язання.

$$а)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{25-9\ln^2 x}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{5^2-(3\ln x)^2}} = \left\| \begin{matrix} t = 3\ln x, \\ dt = \frac{3dx}{x} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{5} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3\ln x}{5} + C.$$

$$б)\ \int (4+5x)\cos\frac{x}{3}dx = \left\| \begin{matrix} u = 4+5x, & \cos\frac{x}{3}dx = dv, \\ du = 5dx, & v = 3\sin\frac{x}{3} \end{matrix} \right\| =$$

$$= 3(4+5x)\sin\frac{x}{3} - \int 3\sin\frac{x}{3}\cdot 5dx = 3(4+5x)\sin\frac{x}{3} + 45\cos\frac{x}{3} + C.$$

в) Підінтегральна функція – правильний дріб, знаменник якого перетворюється в 0 при $x=0$ та $x=-1$.

При цьому $x=0$ – корінь простий (кратності 1), а $x=-1$ – корінь кратності 2. Тоді

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один до одного чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$x^2-3x+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx.$$

Для обчислення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$x=0: \quad 2=A,$

$x=-1: \ 6=-C, \ C=-6,$

$x=2: \quad 0=9A+6B+2C.$

З останньої рівності отримуємо:

$$0=18+6B-12; \ 6B+6=0, \ B=-1.$$

Згідно з цими обчисленнями, можна записати:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-6\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=2\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C=\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 1).

Знайдемо точки перетину двох парабол:

$$4-x^2=x^2-2x \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=2.$$

Ці точки перетину і є межами інтегрування.

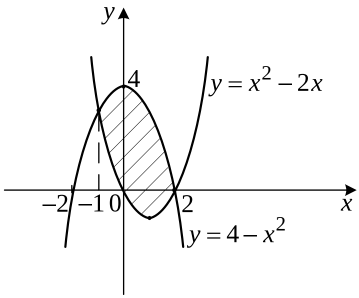

Рисунок 1

Згідно з теоретичним матеріалом площа даної фігури (рис. 2) обчислюється за формулою: $S = \int\limits_a^b \left(f\left(x\right) - \varphi\left(x\right) \right) dx.$

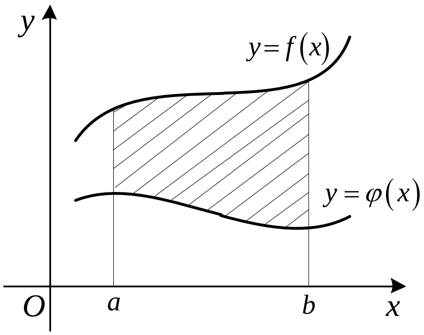

Рисунок 2

В нашому прикладі:

$$S = \int\limits_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - x^2 + 2x\right) dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(4 - 2x^2 + 2x\right) dx = \left(4x - 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 15 - 6 = 9.$$

Відповідь: 9.

Приклад 3. Знайти рівняння $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$ якщо $z = 3x^3 y^2 - 7x^2 y + 11xy + 3x - 15y + 1.$,

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2y^2 - 14xy + 11y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^3y - 7x^2 + 11x - 15,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(9x^2y^2 - 14xy + 11y + 3\right)'_x = 18xy^2 - 14y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(9x^2y^2 - 14xy + 11y + 3\right)'_y = 18x^2y - 14y + 11,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(6x^3y - 7x^2 + 11x - 15\right)'_y = 6x^3.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'x + y = e^x$.

Розв'язання. Розділимо ліву та праву частини рівняння на x :

$$y'x + y = e^x, \ \left| : x \right. \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

Дане рівняння лінійне, а тому, загальний розв'язок такого рівняння знаходиться у вигляді добутку двох функцій:

$$y = U \cdot V, \ \ y' = U'V + UV',$$

тоді наше рівняння набуде вигляду:

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{e^x}{x},$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{V}{x}\right) = \frac{e^x}{x}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' + \dfrac{V}{x} = 0, \\ U'V = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з наведених рівняння системи. При цьому сталу інтегрування при знаходженні $V(x)$ покладаємо рівною нулю, так як нас цікавить будь-який розв'язок, що відрізняється від нуля.

$$V' + \frac{V}{x} = 0, \ \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x},$$

$$\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln|V| = -\ln|x|, \ln|V| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$V = \frac{1}{x}.$$

Тоді друге рівняння системи набуде вигляду:

$$U'V = \frac{e^x}{x}, \quad \frac{dU}{dx}\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad \int dU = \int e^x dx,$$

$$U = e^x + C.$$

Відповідно, $y = U \cdot V = \frac{1}{x}\left(e^x + C\right).$

Відповідь: $y = \frac{1}{x}\left(e^x + C\right)$.

Приклад 5. Розв’язати задачу Коши:

$$y'' + y' - 2y = 5\sin x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Розв’язання. У даному випадку необхідно спочатку повторити всі дії, які були наведені в попередніх прикладах, а потім скористатися початковими умовами. Отже, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$y'' + y' - 2y = 0,\ k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow$

$D = 1 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9, \quad \sqrt{D} = 3, \quad k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2},\ k_1 = -2,\ k_2 = 1.$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Так як $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \gamma = \alpha \pm \beta i = i, \gamma \neq k_{1,2}, \quad s = 0, n = 0$, то:

$$y_{\text{ч.н.}} = A\sin x + B\cos x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = A\cos x - B\sin x,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -A\sin x - B\cos x.$$

Обчислимо *A* та *B*. Для цього Підставимо до заданого за умовою рівняння вирази для $y_{\text{ч.н.}}$, $y'_{\text{ч.н.}}$, $y''_{\text{ч.н.}}$ та прирівняємо коефіцієнти при $\sin x$ та $\cos x$:

$$-2\left(A\sin x + B\cos x\right) + A\cos x - B\sin x - A\sin x - B\cos x = 5\sin x,$$

$$\begin{array}{r|} \sin x \\ \cos x \end{array}\begin{cases} -2A - B - A = 5, \\ -2B + A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A - B = 5, \\ A - 3B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9B - B = 5, \\ A = 3B, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10B = 5, \\ A = 3B, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{2}, \\ A = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -\frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x .$$

Обчислимо C_1 та C_2. Для цього скористаємось початковою умовою $y(0) = 0$. Підставимо в $y_{\text{з.н.}}$ $x_0 = 0,\ y_0 = 0$:

$$C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{1}{2} .$$

Запишемо $y'_{\text{з.н.}} = -2C_1 e^{-2x} + 5C_2 e^{x} - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$, та скористаємось умовою $y'(0) = 1$, тобто підставимо $x_0 = 0,\ y'_0 = 1$:

$$-2C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow -2C_1 + C_2 = -\frac{1}{2} .$$

Об'єднаємо одержані рівняння в систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{2}, \\ -2C_1 + C_2 = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

та за правилом Крамера знайдемо C_1, C_2.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1+2=3,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -2 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2},$$

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{3},\quad C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}.$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковим умовам:

$$y=\frac{1}{3}e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{-5x}-\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\ .$$

Відповідь: $y=\frac{1}{3}e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{-5x}-\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$.