

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННИХ

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Комплексним числом z називається вираз вигляду $z = x + jy$ (алгебраїчна форма комплексного числа), де x і y – будь-які дійсні числа, а j – уявна одиниця, яка задовольняє умові $j^2 = -1$. Існують підручники в яких уявна одиниця позначається i . Числа x і y називаються відповідно дійсною і уявною частинами комплексного числа z . Позначення: $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина z , $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина z .

Якщо $y = 0$, отримуємо дійсне число $z = x$, а при $x = 0$ – уявне число.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + jy_1$ і $z_2 = x_2 + jy_2$ вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Два комплексних числа $x + jy$ і $z_2 = x_2 + jy_2$, що відрізняються тільки знаком при уявній частині, називаються спряженими і позначаються наступним чином:

$$z = x + jy, \quad \bar{z} = x - jy.$$

Наприклад, комплексні числа $z = 7 + 3j$ і $\bar{z} = 7 - 3j$ є спряженими.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + jy_1$ і $z_2 = x_2 + jy_2$ називається комплексне число z , що визначається формулою:

$$z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2).$$

Для того щоб додати два комплексних числа, слід окремо додати їх дійсні та уявні частини.

$$\text{Наприклад, } (3 + 4j) + (8 - 5j) = (3 + 8) + j(4 - 5) = 11 - j.$$

Різницею $z_1 - z_2$ чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2).$$

$$\text{Наприклад, } (7 - 2j) - (12 + 5j) = (7 - 12) + j(-2 - 5) = -5 - 7j.$$

Добутком $z_1 \cdot z_2$ чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Наприклад,

$$(2 - 4j) \cdot (3 + 8j) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + j(2 \cdot 8 - 4 \cdot 3) = 38 + 4j.$$

Цей результат можна отримати, помноживши двочлен на двочлен з огляду на, те, що $j^2 = -1$. Дійсно,

$$(2 - 4j) \cdot (3 + 8j) = 6 + 16j - 12j - 32j^2 = 6 + 32 + 4j = 38 + 4j.$$

Якщо $z_1 = x_1 + jy_1$ і $z_2 = x_2 + jy_2$ то часткою $\frac{z_1}{z_2}$ від ділення

комплексного числа z_1 на комплексне число $z_2 \neq 0$ називається комплексне число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Приклад 1. Знайти частку комплексних чисел $z_1 = 3 - 4j$ і $z_2 = 2 + 5j$.

Розв'язання. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 4j}{2 + 5j}$ Чисельник і знаменник цього дробу

помножимо на число, яке спряжене знаменнику:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 4j)(2 - 5j)}{(2 + 5j)(2 - 5j)} = \frac{6 + 20j^2 - 8j - 15j}{4 + 25} = \frac{6 - 20 - 23j}{29} = -\frac{14}{29} - \frac{23}{29}j.$$

Відповідь: $-\frac{14}{29} - \frac{23}{29}j$.

Геометричне зображення, модуль і аргумент комплексного числа

Комплексне число $z = x + jy$ зображується на площині xOy точкою M з координатами (x, y) або вектором, початок якого міститься в точці $O(0, 0)$, а кінець – в точці $M(x, y)$ (рис. 1). Неважко помітити, що дійсні числа зображуються точками осі абсцис, а уявні числа – точками осі ординат. Тому вісь абсцис називається дійсною віссю, а вісь ординат – уявною віссю.

Довжина ρ вектору \overline{OM} називається *модулем комплексного числа* і позначається $|z|$. Таким чином,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

Кут φ , утворений вектором \overline{OM} з додатним напрямком дійсної осі Ox , називають *аргументом комплексного числа* z і позначають $\varphi = \text{Arg } z$.

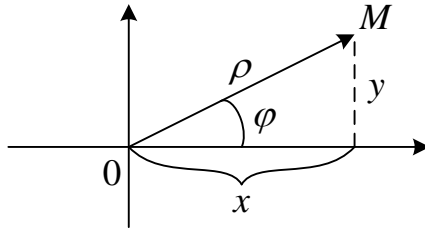


Рис. 1

Для кожної точки M аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π , тобто

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де $\arg z$ є головне значення $\text{Arg } z$. При цьому $\arg z$ додатний, якщо він узятий від осі Ox проти годинникової стрілки і від'ємний в іншому випадку. Отже,

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

При визначенні головного значення аргументу комплексного числа потрібно визначити, в якій чверті комплексної площини знаходиться точка z .

З рисунку 1 видно, що $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$. Отримуємо:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } z \text{ належить I, IV чвертям,} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } z \text{ належить II чверті,} \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } z \text{ належить III чверті.} \end{cases} \quad (2)$$

Приклад 2. Знайти модуль и аргумент комплексних чисел:

$$z_1 = -4 + 4\sqrt{3}j, \quad z_2 = -1 - j, \quad z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{6}j, \quad z_4 = 1 + 5j.$$

Розв'язання. $z_1 = -4 + 4\sqrt{3}j, \quad x_1 = -4, \quad y_1 = 4\sqrt{3}, \quad |z_1| = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = 8.$

Точка z_1 знаходиться в другій чверті, отже

$$\arg z_1 = \pi - \arctg \frac{4\sqrt{3}}{4} = \pi - \arctg \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

$$z_2 = -1 - j, \quad x_1 = -1, \quad y_1 = -1, \quad |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Точка z_2 знаходиться в третій чверті, тому

$$\arg z_2 = -\pi + \arctg 1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi.$$

$$z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{6}j, x_3 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{6}, |z_3| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Через те, що z_3 знаходиться в четвертій чверті, то

$$\arg z_3 = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

$$z_4 = 1 + 5j, x_4 = 1, y_4 = 5, |z_4| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$$

Точка z_4 знаходиться в першій чверті, отже:

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} \frac{5}{1} = \operatorname{arctg} 5.$$

Відповідь: $|z_1| = 8, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$

$$|z_2| = \sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z_2 = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$|z_3| = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$|z_4| = \sqrt{26}, \quad \operatorname{Arg} z_4 = \operatorname{arctg} 5 + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Приклад 3. Знайти модуль и аргумент комплексних чисел:

$$z_1 = 5, z_2 = 3j, z_3 = -7, z_4 = -4j.$$

Розв'язання. Зобразимо числа z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексній площині

(рис. 2.)

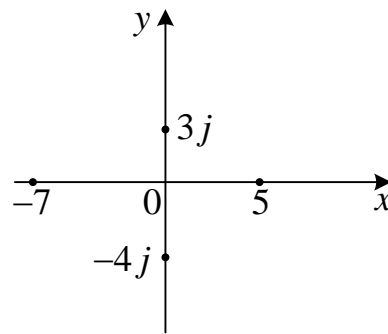


Рис. 2

$$z_1 = 5, \quad |z_1| = 5, \quad \arg z_1 = 0; \quad z_2 = 3j, \quad |z_2| = 3, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$z_3 = -7, \quad |z_3| = 7, \quad \arg z_3 = \pi; \quad z_4 = -4j, \quad |z_4| = 4, \quad \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $|z_1| = 5, \quad \operatorname{Arg} z_1 = 2k\pi, \quad |z_2| = 3, \quad \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$

$$|z_3| = 7, \operatorname{Arg} z_3 = \pi + 2k\pi, \quad |z_4| = 4, \operatorname{Arg} z_4 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тригонометрична форма комплексного числа.

Якщо в алгебраїчній формі комплексного числа $z = x + jy$ виразити x і y за формулами $x = |z| \cdot \cos \varphi$, $y = |z| \cdot \sin \varphi$ (рис. 1), то можна записати комплексне число z в тригонометричній формі:

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (3)$$

Приклад 4. Зобразити комплексне число $z = 3 - j\sqrt{3}$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. За формулами (1) і (2) знайдемо модуль і аргумент z .

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$x = 3 > 0$, $y = -\sqrt{3} < 0$, точка z міститься в IV чверті комплексної площини і

$$\arg z = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Відповідь: } z = 2\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Приклад 5. Зобразити комплексне число $z = -6 - 8j$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. За формулою (1) знаходимо $|z|$:

$$|z| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

Через те, що $x = -6 < 0$, $y = -8 < 0$, то число z зображується точкою III чверті комплексної площини (рис. 3).

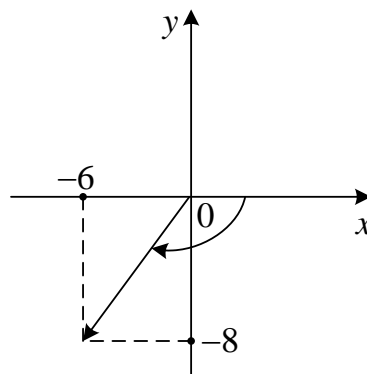


Рис. 3

За формулою (2) знайдемо аргумент z :

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{8}{6} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } z = 10 \left(\cos \left(-\pi + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + j \sin \left(-\pi + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) \right).$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі здійснюються за такими правилами:

нехай $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$, тоді

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (4)$$

Таким чином, при множенні комплексних чисел, представлених в тригонометричній формі, їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (5)$$

Таким чином, модуль дійсної частини дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника

Приклад 6. Знайти добуток і частку двох комплексних чисел

$$z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z_2 = 8 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

Розв'язання. Скориставшись формулою (4), знаходимо:

$$z_1 \cdot z_2 = 32 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right) = 32 \left(\cos \frac{\pi}{12} - j \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Частку від ділення z_1 на z_2 визначаємо за формулою (5):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + j \sin \frac{7}{12} \pi \right).$$

$$\text{Відповідь: } z_1 \cdot z_2 = 32 \left(\cos \frac{\pi}{12} - j \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + j \sin \frac{7}{12} \pi \right).$$

Піднесення комплексного числа $z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ в натуральну степінь n здійснюється за формулою:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad (6)$$

тобто $|z^n| = |z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

Звідси виходить *формула Муавра*:

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi. \quad (7)$$

Приклад 7. Знайти $(-1 + j)^{20}$.

Розв'язання.

Знайдемо модуль і аргумент комплексного числа $z = -1 + j$.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \pi - \arctg 1 = \frac{3}{4}\pi.$$

За формулою (6) маємо:

$$\begin{aligned} (-1 + j)^{20} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + j \sin \frac{3}{4}\pi \right) \right)^{20} = (\sqrt{2})^{20} \left(\cos \frac{3\pi \cdot 20}{4} + j \sin \frac{3\pi \cdot 20}{4} \right) = \\ &= 2^{10} (\cos 15\pi + j \sin 15\pi) = 2^{10} (-1 + j \cdot 0) = -2^{10} = -1024. \end{aligned}$$

Відповідь: -1024 .

Корінь n -го степеню (n -ціле додатне число) з комплексного числа z має n різних значень, які знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (8)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, $\varphi = \arg z$.

Приклад 8. Знайти $\sqrt[5]{-\sqrt{2} - \sqrt{6}j}$.

Розв'язання. Знайдемо модуль і аргумент комплексного числа

$$z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}j: |z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8},$$

$$\arg z = -\pi + \arctg \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = -\pi + \arctg \sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2}{3}\pi.$$

Підставляючи значення модуля і аргументу комплексного числа в формулу (8), отримуємо:

$$\sqrt[5]{-\sqrt{2} - \sqrt{6}j} = \sqrt[5]{\sqrt{8}} \left(\cos \frac{-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{5} \right),$$

де $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Підставляючи послідовно вказані значення k , отримуємо:

$$z_1 = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{2}{15}\pi - j \sin \frac{2}{15}\pi \right), \quad z_2 = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{4}{15}\pi + j \sin \frac{4}{15}\pi \right),$$

$$z_3 = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{-\frac{2}{3}\pi + 4\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{2}{3}\pi + 4\pi}{5} \right) = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z_4 = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{-\frac{2}{3}\pi + 6\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{2}{3}\pi + 6\pi}{5} \right) = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{16\pi}{15} + j \sin \frac{16\pi}{15} \right),$$

$$z_5 = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{-\frac{2}{3}\pi + 8\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{2}{3}\pi + 8\pi}{5} \right) = \sqrt[10]{8} \left(\cos \frac{22\pi}{15} + j \sin \frac{22\pi}{15} \right).$$

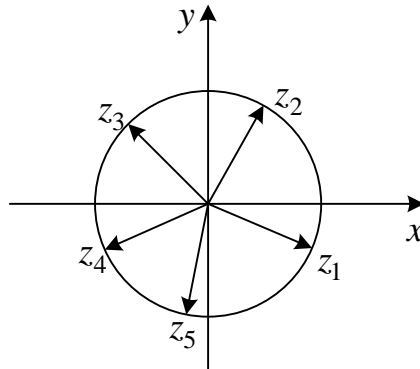


Рис. 4

Корінь $\sqrt[5]{-\sqrt{2} - \sqrt{6}j}$ має п'ять різних значень. Усі вони мають один і той же модуль $\sqrt[10]{8}$, а аргументи двох значень, що відповідають числам $k = 0$ і 1 , 1 і 2 , 2 і 3 , 3 і 4 відрізняються один від одного на $\frac{2}{5}\pi$, тому точки, які зображують комплексні числа z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 є вершинами правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[10]{8}$ з центром у початку координат (рис. 4).

Показникова форма комплексного числа.

Використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$,

отримуємо показникову форму комплексного числа $z = |z|e^{i\varphi}$.

Дії над комплексними числами в показниковій формі здійснюються за такими правилами

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО.

Основні поняття теорії функцій комплексного змінного

Означення. Множина точок z , які задовольняють нерівності $|z - z_0| < \varepsilon$ називаються ε – околom точки z_0 .

Означення. Точка z_0 називається внутрішньою, якщо вона належить множині D разом з певним околom.

Означення. Точка z_0 називається граничною, якщо в будь-якому її околi є точки, які належать множині D , і не належать множині D .

Означення. Множина D на площині називається областю, якщо задовольняє наступним умовам:

- 1) усі точки множини D внутрішні;
- 2) будь-які дві точки z_1 і z_2 , які належать множині D можна з'єднати неперервною лінією, що цілком належить множині D .

Означення. Множина, яка складається з області D та її межі, називається замкненою областю.

Означення. Область D називається однозв'язною, якщо вона задовольняє наступній умові: яку б замкнену неперервну лінію ми б не провели в цій області, її внутрішня частина також належить даній області. В протилежному випадку область називається багатозв'язною.

Означення. Область, межа якої складається з n замкнених ліній називається n – зв'язною.

В частковому випадку межа може бути лінією (розрізом) або точкою (проколотою)

Приклад 9. Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють наступним умовам:

$$a) |z - (1 + j)| \leq \sqrt{2}, \quad б) |z - 3| > |z - j|,$$

$$в) \begin{cases} z \cdot \bar{z} \leq 9, \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. При розв'язанні завдання, якщо є необхідність, треба скористатись відомими рівняннями прямих та кривих другого порядку.

a) Підставляючи в задану нерівність $z = x + jy$, отримуємо $|x + jy - (1 + j)| \leq \sqrt{2}$. Проведемо перетворення лівої частини нерівності

(згрупуємо дійсну та уявну частини) та скористаємось формулою для обчислення модуля комплексного числа: $|x-1+j(y-1)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. Отже, нерівність набуває вигляду: $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leq \sqrt{2}$. Звідки $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$. Остання нерівність визначає круг з радіусом $R = \sqrt{2}$ і центром в точці $(1,1)$. Слід звернути увагу на те, що коло зображується суцільною лінією, через те, що нерівність нестрога (рис.5).

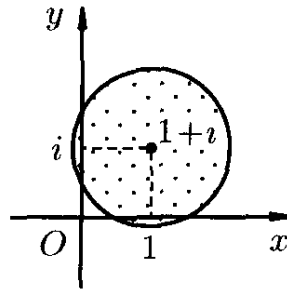


Рис. 5

б) Підставляючи в задану нерівність $z = x + jy$, отримуємо $|x + jy - 3| > |x + jy - j|$. Проведемо перетворення частин нерівності (згрупуємо дійсну та уявну частини) та скористаємось формулою для обчислення модуля комплексного числа: $|(x-3) + jy| > |x + j(y-1)|$, $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} > \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Перетворимо останню нерівність $(x-3)^2 + y^2 > x^2 + (y-1)^2$, $x^2 - 6x + 9 + y^2 > x^2 + y^2 - 2y + 1$, $-6x + 2y + 8 > 0$, тобто $y > 3x - 4$.

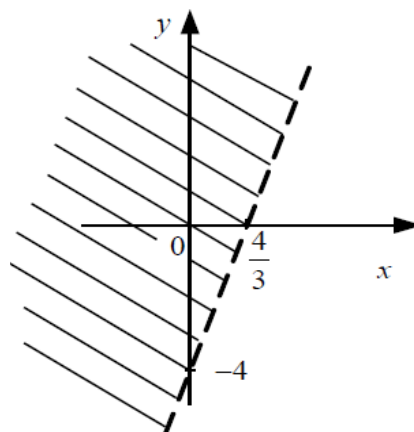


Рис. 6

Ця нерівність визначає множину точок комплексної площини, що лежить вище прямої $y=3x-4$. Слід звернути увагу на те, що пряма зображується пунктирною лінією, через те, що нерівність строга (рис. 6).

в) Підставляючи в задану рівність $z=x+jy$, $\bar{z}=x-jy$. Обчислюємо $z\bar{z}=(x+jy)(x-jy)=x^2+y^2$, отримуємо $x^2+y^2\leq 3^2$. Ця умова визначає круг з центром в точці $z_0=0, (x_0=0, y_0=0)$ і радіусом $R=3$. Нерівність $|\arg z|\leq \frac{\pi}{4}$ або $-\frac{\pi}{4}\leq \arg z\leq \frac{\pi}{4}$ визначає частину комплексної площини між $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ і $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Сукупність цих умов визначає множину точок комплексної площини, що відображена на рис. 7. Це точки круга $x^2+y^2\leq 3^2$ для яких $-\frac{\pi}{4}\leq \arg z\leq \frac{\pi}{4}$.

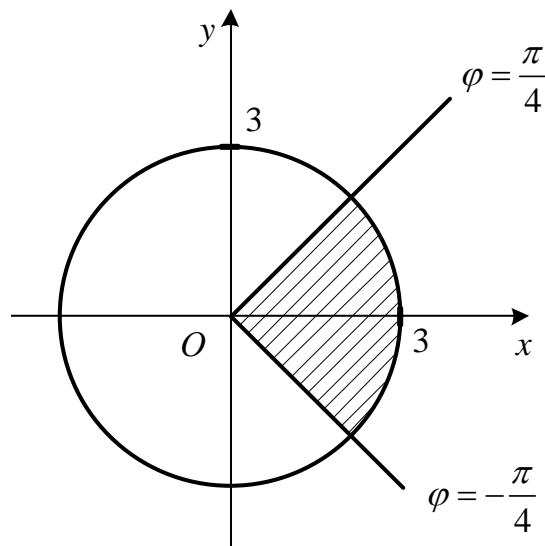


Рис. 7

Функції комплексного змінного

Нехай задано дві множини D і E елементами яких є комплексні числа. Числа $z=x+jy$ множини D зображуються точками комплексної площини, а числа $w=u+jv$ множини E точками комплексної площини w .

Означення. Якщо будь-якому числу (точці) $z\in D$ за певним правилом ставиться у відповідність певне число (точка) $w\in E$, то кажуть, що на множині D визначена функція комплексного змінного $w=f(z)$, яка відображує множину D у множину E .

Означення. Якщо кожному $z \in D$ відповідає декілька значень w , то функція $w = f(z)$ називається багатозначною.

Множина D називається областю визначення функції $w = f(z)$, множина усіх значень E , називається областю значень цієї функції.

Функцію $w = f(z)$ можна записати у вигляді $u + jv = f(x + jy)$, тобто $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$, де $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Функцію $u(x, y)$ називають дійсною частиною функції $w = f(z)$, а $v(x, y)$ – уявною частиною функції $w = f(z)$.

Границя і неперервність функції комплексного змінного

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в певній точці z_0 , за винятком, може бути самої точки z_0 . Як δ – окіл точки z_0 комплексної площини розуміють внутрішність круга з центром в точці z_0 та радіусом δ .

Означення. Число w_0 називається границею функції $w = f(z)$ в точці z_0 якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $z \neq z_0$, що задовольняють нерівності $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Позначають $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

З означення витікає, якщо існує границя w_0 , то існують і границі

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Справедливо і оберне твердження.

Теореми про арифметичні властивості границь однієї або декількох змінних дійсних змінних залишаються справедливими і для функцій комплексного змінного.

Означення. Нехай функція $w = f(z)$ визначена в точці $z = z_0$ і в її певному околі. Функція $w = f(z)$ називається неперервною в точці z_0 , якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Основні елементарні функції комплексного змінного

1. Функції $w = z^n$ і $w = \sqrt[n]{z}$, де n – ціле додатне число були визначені вище при підведенні комплексного числа до степеню та при добуванні кореня з комплексного числа.

2. Показникова функція $w = e^z$ визначається формулою:

$$e^z = e^x (\cos y + j \sin y). \quad (9)$$

При $y = 0$ отримуємо $z = x \Rightarrow e^z = e^x$. Очевидно, що

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Враховуючи, що $|e^z| = e^x$, а $e^x \neq 0$ отримуємо $e^z \neq 0$. Виходячи з означення (9) легко переконатися, що $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty} e^z = 0$, $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} e^z = \infty$.

Показникова функція $w = e^z$ є періодичною з періодом $T = 2\pi j$. Дійсно, $e^{z+2\pi j} = e^z (\cos 2\pi + j \sin 2\pi) = e^z$.

Приклад 10. Обчислити а) $e^{\pi j}$, б) $e^{\frac{\pi}{2} j}$:

$$\text{Розв'язання. а) } e^{\pi j} = (\cos \pi + j \sin \pi) = -1, \quad \text{б) } e^{\frac{\pi}{2} j} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = j.$$

3. Логарифмічна функція визначається як обернена до показникової. Якщо $e^w = z$, $z \neq 0 \Rightarrow w = \operatorname{Ln} z$. Очевидно, $e^w \neq 0$ для будь-яких z , отже логарифмічна функція визначена на всій комплексній площині, крім $z = 0$.

Розглянемо $e^w = e^{u+jv} = e^u (\cos v + j \sin v) \Rightarrow |e^w| = e^u$, отже

$$\operatorname{Arg} e^w = \operatorname{Arg} z = v + 2\pi k, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Отримуємо $e^w = z \Rightarrow e^u = |z| \Rightarrow u = \ln |z|$, $v = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + j(\arg z + 2\pi k) \quad (10)$$

Формула (10) показує, що логарифмічна функція комплексного змінного має нескінченну множину значень, тобто $w = \operatorname{Ln} z$ – багатозначна функція. Однозначну гілку цієї функції, можна виділити, підставляючи $k = 0$ в формулу (10). Отримали однозначну функцію, яку називають головним значенням логарифма $\operatorname{Ln} z$ та позначають символом $\ln z$.

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi \quad (11)$$

Приклад 11. Обчислити а) $\operatorname{Ln}(-1)$, б) $\operatorname{Ln} j$.

Розв'язання.

$$\text{а) } \operatorname{Ln}(-1) \Rightarrow z = -1 \Rightarrow |z| = 1, \arg z = \pi,$$

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi j \Rightarrow \operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi j + 2\pi jk = \pi j(1 + 2k);$$

$$б) \operatorname{Ln} j \Rightarrow z = j \Rightarrow |z| = 1, \operatorname{arg} z = \frac{\pi}{2},$$

$$\ln j = \ln 1 + \frac{\pi}{2} j \Rightarrow \operatorname{Ln} j = \ln 1 + \frac{\pi}{2} j + 2\pi jk = \pi j \left(\frac{1}{2} + 2k \right).$$

З формули (11) витікає, для логарифмічної функції комплексного змінного є справедливими властивості, аналогічні властивостям для логарифмічної функції дійсного змінного:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z)^n = n \operatorname{Ln} z, \quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Приклад 12. Обчислити а) j^j , б) 2^{1+j} .

Розв'язання. Для обчислення скористаємось формулою:

$$e^{\operatorname{Ln} a} = a \Rightarrow a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

$$а) j^j = e^{j \operatorname{Ln} j} = e^{j \pi j \left(\frac{1}{2} + 2k \right)} = e^{-\pi \left(\frac{1}{2} + 2k \right)},$$

$$б) 2^{1+j} = e^{(1+j) \operatorname{Ln} 2}.$$

Розглянемо $\operatorname{Ln} 2$: $z = 2 \Rightarrow |z| = 2, \operatorname{arg} z = 0$.

Отримуємо $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2\pi jk$.

Остаточно маємо:

$$2^{1+j} = e^{\ln 2 + 2\pi jk} \cdot e^{j \ln 2 - 2\pi k} = e^{\ln 2 - 2\pi k + j(\ln 2 + 2\pi k)} = e^{\ln 2 - 2\pi k} (\cos \ln 2 + j \sin \ln 2).$$

4. Тригонометричні функції комплексного аргументу $z = x + jy$ визначається рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометричні функції комплексного аргументу зберігають багато властивостей тригонометричних функцій дійсного аргументу. Зокрема:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Відзначимо, що тригонометричні функції $\sin z, \cos z$ в комплексній площині необмежені $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} \sin z = \infty, \quad \lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} \cos z = \infty$.

5. Гіперболічні функції визначаються рівностями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко помітити зв'язок між гіперболічними та тригонометричними функціями. Замінюючи z на jz , отримуємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} jz &= j \sin z, & \sin jz &= j \operatorname{sh} z, \\ \operatorname{ch} jz &= \cos z, & \cos jz &= \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{th} jz &= j \operatorname{tg} z, & \operatorname{tg} jz &= j \operatorname{th} z, \\ \operatorname{cth} jz &= -j \operatorname{ctg} z, & \operatorname{ctg} jz &= -j \operatorname{cth} z. \end{aligned}$$

Наведемо ще кілька формул:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1, & \operatorname{sh} 2z &= 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{ch} 2z &= \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, & \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z &= e^z \\ \operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2, \\ \operatorname{ch}(-z) &= \operatorname{ch} z, & \operatorname{sh}(-z) &= -\operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

6. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції.

Число w називається арксинусом числа z , якщо $\sin w = z$ та позначається $w = \operatorname{Arcsin} z$. Використовуючи означення синуса маємо:

$$z = \sin w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} \quad \text{або} \quad e^{2jw} - 2jze^{jw} - 1 = 0. \quad \text{Звідки} \quad e^{jw} = jz + \sqrt{(jz)^2 + 1}, \quad \text{тобто}$$

$$e^{jw} = jz + \sqrt{1 - z^2} \quad (\text{перед коренем можна не писати знак } \pm \text{ через те, що } \sqrt{1 - z^2} \text{ має два значення}). \quad \text{Тоді} \quad jw = \operatorname{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}) \quad \text{або} \quad w = \frac{1}{j} \operatorname{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Таким чином,

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -j \operatorname{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Функція $w = \operatorname{Arcsin} z$ багатозначна (нескінченнозначна). Аналогічно визначаються інші обернені тригонометричні функції. Можна показати, що

$$\operatorname{Arccos} z = -j \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{j - z}{j + z} \quad (z \neq \pm j),$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z = \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - j}{z + j} \quad (z \neq \pm j).$$

Функції, обернені гіперболічним, позначаються відповідно $w = \text{Arsh } z$ (ареасинус), $w = \text{Arch } z$ (ареакосинус), $w = \text{Arth } z$ (ареатангенс), $w = \text{Arcth } z$ (ареакотангенс)

$$\text{Arcsh } z = \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\text{Arcch } z = \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\text{Arth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

$$\text{Arcth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Усі ці функції нескінченнозначні.

Диференціювання функцій комплексного змінного

Означення похідної та диференціалу функцій комплексного змінного збігаються з відповідними означеннями функцій дійсного змінного. Тому майже усі основні теореми і формули диференційного числення функцій дійсного змінного розповсюджуються і на функції комплексного змінного.

Нехай $w = f(z)$ однозначна функція, яка визначена в певній області D комплексної площини. Нехай точки z і $z + \Delta z$ належать області D , тоді приріст функції $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, де $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$ приріст аргументу.

Означення. Похідною функції $w = f(z)$ в точці z називається границя (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, за умови, що $\Delta z \rightarrow 0$ довільним чином:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Означення. Функція, яка має похідну в точці z , називається диференційовною в цій точці.

Умови диференційовності функції комплексного змінного

Теорема. (умови Коши-Рімана)

Якщо функція $w = u(x, y) + jv(x, y)$ визначена в певному околі точки $z = x + jy$, до того ж в цій точці дійсні функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні, то для диференційовності функції $w = f(z)$ в точці z , необхідно та достатньо, щоб в цій точці виконувались рівності:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Означення. Якщо функція диференціюєма не тільки в точці z , а і в певному околі цієї точки, то функція називається аналітичною в даній точці.

Означення. Функція, яка аналітична в усіх точках певної області, називається аналітичною в цій області.

Означення. Точка z_0 називається особливою точкою функції $w = f(z)$, якщо в ній порушується аналітичність.

Для будь-якої аналітичної в області D функції $w = f(z)$ маємо:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Приклад 13. Перевірити, чи є функція аналітичною

a) $w = z^2$, б) $w = \bar{z}$, в) $w = z \operatorname{Re} z$.

Розв'язання.

a) $w = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 + 2xyj - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyj$,

отже $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Перевіримо умови Коши-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y. \quad \text{Умови Коши-Рімана виконуються,}$$

отже функція $w = z^2$ аналітична на всій комплексній площині.

б) $w = \bar{z} = x - jy$, отже $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Перевіримо умови

Коши-Рімана: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Умови Коши-Рімана не

виконуються, отже функція $w = \bar{z}$ не є аналітичною.

в) $w = z \operatorname{Re} z = (x + jy)x = x^2 + jxy$, отже $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = xy$.

Перевіримо умови Коши-Рімана: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y$. Умови

Коши-Рімана виконуються тільки в точці $(0, 0)$, отже функція $w = z \operatorname{Re} z$ є аналітичною тільки в точці $(0, 0)$.

Приклад 14. Відновити аналітичну функцію $w = u(x, y) + jv(x, y)$:

а) якщо відома її уявна частина $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$,

б) якщо відома її дійсна частина $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x$.

Розв'язання.

а) За умовою функція аналітична, отже виконуються умови Коши-Рімана.

$$\text{Перша умова: } \frac{\partial v}{\partial y} = -4y = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow du = -4y dx \Rightarrow u = -4 \int y dx = -4yx + \varphi(y).$$

Знайдемо $\varphi(y)$, користуючись другою умовою Коши-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (-4yx + \varphi(y))'_y = -4x + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(4x + 1),$$

$$-4x + \varphi'(y) = -(4x + 1) \Rightarrow \varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -\int dy = -y + C.$$

$$\text{Отримуємо } u(x, y) = -4yx - y + C.$$

$$\text{Відповідь. } w = (-4yx - y + C) + j(2x^2 - 2y^2 + x).$$

б) За умовою функція аналітична, отже виконуються умови Коши-Рімана.

Перша умова:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow dv = (2x + 3) dy \Rightarrow v = \int (2x + 3) dy = 2xy + 3y + \varphi(x).$$

Знайдемо $\varphi(x)$, користуючись другою умовою Коши-Рімана:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -(2xy + 3y + \varphi(x))'_x = -2y - \varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$-2y - \varphi'(x) = -2y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \text{const} = C.$$

$$\text{Отримуємо } v(x, y) = 2xy + 3y + C.$$

$$\text{Відповідь. } w = (x^2 - y^2 + 3x) + j(2xy + 3y + C).$$

Інтегрування функції комплексного змінного

Нехай $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ неперервна функція комплексного змінного, яка визначена в області D , а L — гладка крива, яка лежить в області D с початком в точці A і кінцем в точці B задана рівнянням $z = z(t) = x(t) + jy(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$).

Розіб'ємо дугу AB довільним чином на n елементарних дуг (рис. 8). Введемо позначення $\Delta z_1 = z_1 - z_0, \Delta z_2 = z_2 - z_1, \dots, \Delta z_n = z_n - z_{n-1}$. Число Δz_k

зображується вектором, який спрямований від точки z_{k-1} до точки z_k , а $|\Delta z_k|$ – довжина цього вектору, тобто довжина хорди, яка стягує елементарну дугу. Всередині кожної елементарної дуги виберемо довільним чином точку і позначимо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Точка ξ_k міститься на елементарній дузі з кінцями в точках z_{k-1} і z_k .

Складемо інтегральну суму:

$$f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Означення. Границя інтегральної суми при прямуванні до нуля найбільшої з елементарних дуг (якщо вона існує) називається інтегралом від функції $w = f(z)$ по кривій L і позначається:

$$\lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k = \int_{AB} f(z)dz.$$

Властивості цього інтеграла аналогічні властивостям криволінійного інтегралу 2-го роду.

Теорема. Нехай $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ однозначна функція комплексного змінного, яка неперервна та визначена в області D , тоді

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u(x, y) + jv(x, y))(dx + jdy).$$

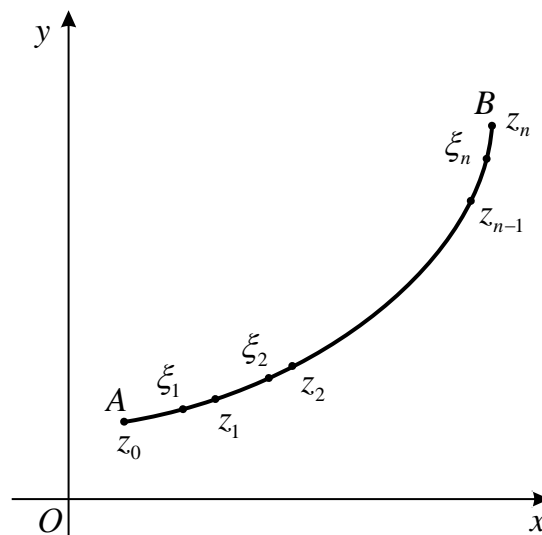


Рис. 8

При цьому підінтегральний вираз перетворюється до вигляду:

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + j \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy \quad (12)$$

Формула (12) показує, що обчислення інтеграла від функції комплексної змінної зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів, для чого підінтегральну функцію треба представити у вигляді $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ та помножити її на $dz = dx + jdy$.

Нехай крива L задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, до того ж початкова і кінцева точки дуги L відповідають значенням параметра $t = t_0, t = t_1$, тоді

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)] \cdot z'(t) dt,$$

де $z(t) = x(t) + jy(t)$.

Приклад 15. Обчислити $\int_L \operatorname{Re} z dz$, якщо шляхом інтегрування служить прямолінійний відрізок, що з'єднує точку 0 з точкою $3 + j$.

Розв'язання. Комплексні числа $z_1 = 0$ та $z_2 = 3 + j$ на комплексній площині зображуються точками $M_1(0;0)$ та $M_2(3;1)$ відповідно. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, отримуємо рівняння відрізка, що з'єднує ці точки $y = \frac{1}{3}x$.

Отже,

$$\begin{aligned} \int_L \operatorname{Re} z dz &= \int_L x(dx + jdy) = \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x \\ dy = \frac{1}{3}dx \end{array} \right| = \int_0^3 x \left(1 + \frac{j}{3} \right) dx = \\ &= \left(1 + \frac{j}{3} \right) \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{3+j}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(3+j). \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{3}{2}(3+j)$.

Приклад 16. Обчислити $\int_L e^{\bar{z}} dz$ вздовж ламаної $0, j, 1 + j$.

Розв'язання.

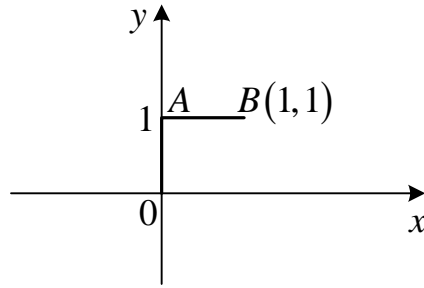


Рис. 9

$$\int_L e^{\bar{z}} dz = \int_{OA} e^{x-jy} (dx + j dy) + \int_{AB} e^{x-jy} (dx + j dy).$$

$$\text{Контур } OA: \quad x=0, dx=0. \quad \int_{OA} e^{x-jy} (dx + j dy) = \int_0^1 e^{-jy} \cdot j dy = -e^{-jy} \Big|_0^1 = 1 - e^{-j}.$$

$$\text{Контур } AB: \quad y=1, dy=0. \quad \int_{AB} e^{x-jy} (dx + j dy) = \int_0^1 e^{x-j} dx = e^{x-j} \Big|_0^1 = e^{1-j} - e^{-j}.$$

$$\int_L e^{\bar{z}} dz = 1 - e^{-j} + e^1 \cdot e^{-j} - e^{-j} = 1 + (e-2)(\cos 1 - j \sin 1).$$

Відповідь: $1 + (e-2) \cdot \cos 1 - j(e-2) \cdot \sin 1$.

Приклад 17. Обчислити $\int_L \text{Im} z dz$, де L – верхня половина еліпсу,

проти годинникової стрілки, $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$.

Розв'язання. Рівняння лінії інтегрування в комплексній формі $z = a \cdot \cos t + jb \cdot \sin t$, де змінна t змінюється від 0 до π .

Знайдемо $dz = (-a \cdot \sin t + jb \cdot \cos t) dt$. Звідки

$$\begin{aligned} \int_L \text{Im} z dz &= \int_L y dz = \int_0^\pi b \cdot \sin t (-a \cdot \sin t + jb \cdot \cos t) dt = \\ &= -\int_0^\pi ab \cdot \sin^2 t dt + jb^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt = -ab \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + jb^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt = \\ &= \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi + jb^2 \frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^\pi = -\frac{ab\pi}{2}. \end{aligned}$$

Враховано, що $\sin 2t \Big|_0^\pi = 0$, $\cos 2t \Big|_0^\pi = 0$.

Відповідь: $-\frac{ab\pi}{2}$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , яка містить L , тоді інтеграл за контуром L не залежить від форми кривої (шляху інтегрування), а залежить тільки від початкової та кінцевої точок інтегрування.

В цьому випадку можна скористатися формулою Ньютона - Лейбніца:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

де $F(z)$ – довільна первісна функції $f(z)$.

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}+j} \sin z dz$.

Розв'язання. Через те, що підінтегральна функція $\sin z$ аналітична всюди, інтеграл обчислимо за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}+j} \sin z dz = -\cos z \Big|_0^{\frac{\pi}{2}+j} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + j\right) + 1 = 1 + \sin j = 1 + j \operatorname{sh} 1.$$

Відповідь: $1 + j \operatorname{sh} 1$.

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int_0^{\ln 2} z \cdot e^z dz$.

Розв'язання. Через те, що підінтегральна функція $z \cdot e^z$ аналітична всюди, інтеграл обчислимо за формулою Ньютона-Лейбніца методом інтегрування частинами:

$$\int_0^{\ln 2} z \cdot e^z dz = \left| \begin{array}{l} u = z, \quad du = dz \\ dv = e^z dz, \quad v = e^z. \end{array} \right| = z e^z \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^z dz = \left(z \cdot e^z - e^z \right) \Big|_0^{\ln 2} = 2 \ln 2 - 1.$$

Відповідь: $2 \ln 2 - 1$.

Інтегрування функцій комплексного змінного за замкненим контуром

Теорема Коши для однозв'язної області.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , тоді інтеграл від $f(z)$ за будь-яким кусково-гладким замкненим контуром L , який належить D , дорівнює 0, тобто

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Приклад 20. Обчислити $\int_L \frac{dz}{z-5}$, де L – еліпс $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{z-5}$ має розрив в точці $z = 5$, але точка $z = 5$ міститься зовні даного еліпсу. Отже, функція $\frac{1}{z-5}$ є аналітичною

в області, обмеженою цим еліпсом, тому $\oint_L \frac{dz}{z-5} = 0$.

Відповідь: 0.

Якщо шлях інтегрування є колом з центром в точці z_0 , то зручно записати рівняння такого кола в наступному вигляді:

$$z - z_0 = R e^{j\varphi},$$

де R – радіус кола, $\varphi = \arg(z - z_0)$.

Приклад 21. Обчислити $\int_L |z| dz$, де L – дуга кола $|z| = 3$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right)$

Розв'язання. Напишемо рівняння кола у вигляді $z = R e^{j\varphi} = 3 e^{j\varphi}$, тоді $dz = 3 j e^{j\varphi} d\varphi$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_L |z| dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot 3 j e^{j\varphi} d\varphi = 9 e^{j\varphi} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 9 \left(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= 9 \cdot 2j \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2j} = 18j \sin \frac{\pi}{2} = 18j. \end{aligned}$$

Відповідь: $18j$.

Інтегральна формула Коши

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній замкнутій області \bar{D} , яка обмежена кусочно - гладким контуром L . Для будь-якої внутрішньої точки $z_0 \in D$ справедлива інтегральна формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad (13)$$

де, контур L обходиться так, що область D залишається ліворуч.

Аналогічна формула справедлива для багатозв'язної області.

Інтегральна формула Коші дозволяє обчислювати деякі інтеграли за такою формулою:

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi j \cdot f(z_0). \quad (14)$$

Приклад 22. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{e^z dz}{z(z-2j)}$, де $L: |z-3j|=2$.

Розв'язання. Контур L – коло з центром в точці $z_0 = 3j$ і радіусу $R=2$ (рис. 10). Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = 2j$.

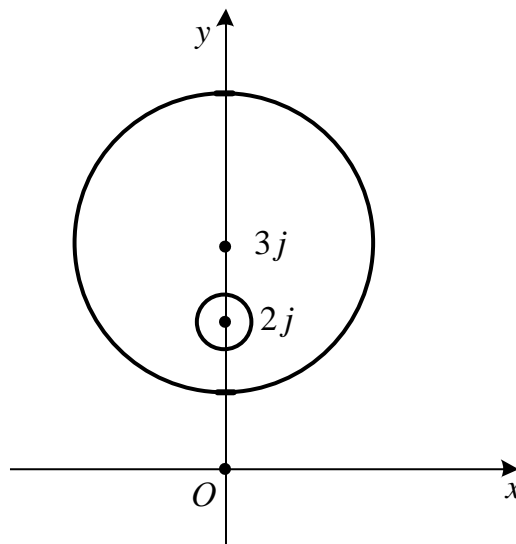


Рис. 10

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z(z-2j)} = \oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{z-2j} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z}{z} dz.$$

Точка $z_1 = 0$ не входить до області, яка обмежена колом $|z-3j|=2$.

Тому за теоремою Коши $\oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{z-2j} dz = 0$.

Всередині області, яка обмежена колом $|z-3j|=2$ міститься точка $z_2 = 2j$.

Функція $f(z) = \frac{e^z}{z}$ є аналітичною в заданій області. Перепишемо вихідний інтеграл у вигляді:

Застосовуючи інтегральну формулу Коши ($z_2 = 2j$), отримуємо:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z-2j)} = 2\pi j \cdot \frac{e^z}{z} \Big|_{z=2j} = 2\pi j \frac{e^{2j}}{2j} = \pi e^{2j} = \pi(\cos 2 + j \sin 2).$$

Приклад 23. Обчислити $\oint_L \frac{\sin z}{z^2+4} dz$, де $L: |z|=3$.

Розв'язання. Контур L – коло з центром в точці $z_0 = 0$ і радіусом $R = 3$. Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точках $z_1 = 2j$ і $z_2 = -2j$.

Обидві точки містяться всередині області, яка обмежена колом $|z|=3$. Побудуємо кола γ_1 і γ_2 з центрами в точках $z_1 = 2j$ і $z_2 = -2j$. достатньо малих радіусів так, щоб кола не перетинались і цілком лежали в крузі $|z| \leq 3$ (рис. 11).

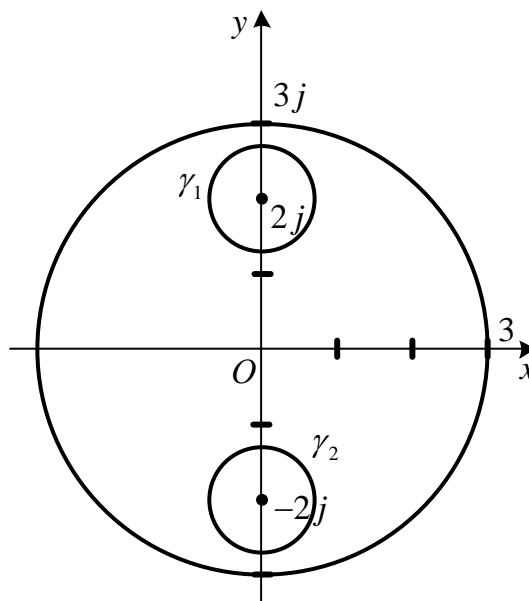


Рис.11

В трьохзв'язній області, яка обмежена колами $|z|=3$, γ_1 і γ_2 , підінтегральна функція скрізь аналітична.

За теоремою Коши для багатозв'язної області маємо:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz.$$

До кожного інтеграла в правій частині застосуємо інтегральну формулу Коші. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{(z - 2j)(z + 2j)} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sin z}{(z - 2j)(z + 2j)} dz = \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{(z + 2j)} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sin z}{(z - 2j)} dz = \\ &= 2\pi j \frac{\sin z}{z + 2j} \Big|_{z=2j} + 2\pi j \frac{\sin z}{z - 2j} \Big|_{z=-2j} = 2\pi j \frac{\sin 2j}{4j} + 2\pi j \frac{\sin(-2j)}{-4j} = \\ &= \pi \cdot \sin 2j = \pi j \operatorname{sh} 2. \end{aligned}$$

Однозначна функція $f(z)$, яка аналітична в однозв'язній замкнутій області \bar{D} , має похідну будь-якого порядку, до того ж

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \text{ де } z_0 \in D, z \in L. \quad (15)$$

Формулою (15) можна користуватися для обчислення деяких інтегралів.

Приклад 24. Обчислити інтеграл $\int_{|z-j|=1} \frac{\cos z}{(z-j)^3} dz$.

Розв'язання. Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точці $z = j$, яка міститься всередині області обмеженої контуром $|z - j| = 1$.

Застосовуючи формулу (15) до функції $f(z) = \cos z$, отримуємо:

$$\int_{|z-j|=1} \frac{\cos z}{(z-j)^3} dz = \frac{2\pi j}{2!} \cdot \left. \frac{d^2(\cos z)}{dz^2} \right|_{z=j} = \pi j(-\cos j) = -\pi j \operatorname{ch} 1.$$

Приклад 25. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{e^{z\pi}}{(z^2+1)^2} dz$, де L – еліпс

$$4x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Розв'язання. Побудуємо еліпс. Для цього приведемо рівняння $4x^2 + y^2 - 2y = 0$ до канонічного виду:

$$4x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1, \quad 4x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1. \quad (\text{рис. 12})$$

Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точках $z_1 = j$ і $z_2 = -j$ ($z^2 + 1 = 0$, $z^2 = -1$, $z = \pm\sqrt{-1}$). Всередині області, яка обмежена заданим контуром, міститься точка $z = j$.

Виділимо під знаком інтеграла функцію $f(z)$, яка є аналітичною в області, обмеженою еліпсом. Для цього перепишемо підінтегральну функцію у вигляді:

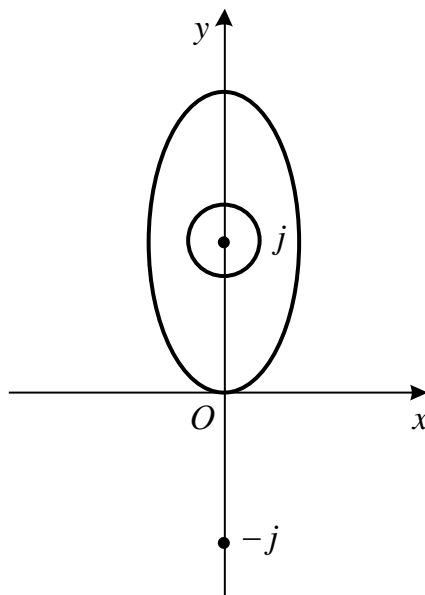


Рис. 12

$$\oint_L \frac{e^{z\pi}}{(z^2 + 1)^2} dz = \oint_L \frac{e^{\pi z}}{(z + j)^2 (z - j)^2} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^{\pi z}}{(z - j)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{\pi z}}{(z + j)^2} dz$$

Оскільки всередині області, яка обмежена заданим контуром, не міститься

точка $z_2 = -j$, то за інтегральною формулою Коши $\oint_{\gamma_2} \frac{e^{\pi z}}{(z + j)^2} dz = 0$.

Обчислимо $\oint_{\gamma_1} \frac{e^{\pi z}}{(z - j)^2} dz$. Як $f(z)$ візьмемо $\frac{e^{\pi z}}{(z + j)^2}$. Вважаючи в формулі

(15) $n = 1$, отримаємо:

$$\oint_L \frac{e^{\pi z} dz}{(z + j)^2 (z - j)^2} = 2\pi j \cdot f'(j).$$

Знаходимо похідну

$$f'(z) = \left(\frac{e^{\pi z}}{(z + j)^2} \right)' = \frac{e^{\pi z} \cdot \pi \cdot (z + j) - 2 \cdot e^{\pi z}}{(z + j)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси} \quad f'(j) &= \frac{e^{\pi j} \cdot \pi \cdot 2j - 2e^{\pi j}}{-8j} = e^{\pi j} \left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}j \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}j \right) (\cos \pi + j \cdot \sin \pi) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}j. \end{aligned}$$

$$\text{Отже,} \quad \int_L \frac{e^{\pi z} dz}{(z + j)^2 (z - j)^2} = 2\pi j \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}j \right) = \frac{\pi}{2}(\pi j - 1)$$

$$\text{Відповідь:} \quad \frac{\pi}{2}(\pi j - 1).$$

При інтегруванні функцій комплексного змінного за замкненим контуром (багатозв'язній області) корисно користуватися наступним алгоритмом:

- зробити рисунок області інтегрування,
- перевіряємо, чи має підінтегральна функція точки розриву та зобразити їх на рисунку,
- якщо точка розриву не входить до області, яка обмежена контуром, то

користуємось теоремою Коши: $\oint_L f(z) dz = 0$,

– якщо точка розриву z_0 входить до області, яка обмежена контуром, то

користуємось інтегральною формулою Коши: $\oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi j \cdot f(z_0)$,

– якщо точка розриву входить до області, яка обмежена контуром та має кратність $n + 1$, то користуємось формулою:

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

– якщо підінтегральна функція має декілька точок розриву z_1, z_2, \dots, z_k , то будуємо кола $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ з центрами в точках z_1, z_2, \dots, z_k достатньо малих радіусів так, щоб вони не перетинались ні з контуром L , ні між собою. За теоремою Коши для багатозв'язної області

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z) dz}{z - z_1} + \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z) dz}{z - z_2} + \dots + \oint_{\gamma_k} \frac{f_k(z) dz}{z - z_k}.$$

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Перетворення Лапласа. Основні поняття

Нехай $f(t)$ комплекснозначна функція дійсного аргументу t , що задовольняє наступним умовам:

1) функція $f(t)$ неперервна, або кусково-неперервна на інтервалі $[0, \infty)$, тобто на довільному скінченному інтервалі має скінченну кількість точок розриву першого роду;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) існують такі дійсні числа $M > 0$, $s_0 \geq 0$, що $\forall t > 0$ виконується рівність $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$.

Довільна функція, що задовольняє цим умовам, називається функцією-оригіналом або просто оригіналом. Число s_0 називається показником росту оригінала.

Нехай функція $f(t)$ є оригіналом.

Розглянемо інтеграл $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$, де $p = s + j\omega$.

Функція комплексного аргументу $F(p)$ називається зображенням Лапласа (або інтегральним перетворенням Лапласа) для функції-оригінала $f(t)$ та позначається $L\{f\}$. Таким чином,

$$F(p) = L\{f\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

Відповідність між функцією-оригіналом $f(t)$ та зображенням Лапласа $F(p)$ позначається, наприклад, символами:

$$f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \xleftarrow{\bullet} f(t).$$

Приклад 1. Нехай $f(t) = 1$ при $t \geq 0$. Знайти $F(p)$.

Розв'язання. Очевидно, що задана одинична функція є оригіналом, оскільки $M = 1$, $s_0 = 0$. В результаті інтегрування за формулою (1), отримаємо:

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} \right).$$

Оцінімо другий доданок:

$$\left| \frac{1}{p} e^{-pT} \right| = \left| \frac{1}{p} e^{-(s+j\omega)T} \right| = \frac{e^{-sT} \cdot |e^{-j\omega T}|}{\sqrt{s^2 + \omega^2}} = \frac{e^{-sT}}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}.$$

Тут враховано, що $|e^{-j\omega T}| = \sqrt{(\cos \omega T)^2 + (\sin \omega T)^2} = 1$. Таким чином, другий доданок прямує до нуля, коли $T \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p > 0$. Тобто, зображення Лапласа для одиничної функції має вигляд:

$$L\{1\} = \frac{1}{p}.$$

Одиничну функцію позначають $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$

Ця функція має широке застосування в теорії перетворень. Це так звана функція Хевісайда (рис.1). Таким чином

$$\sigma(t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p}.$$

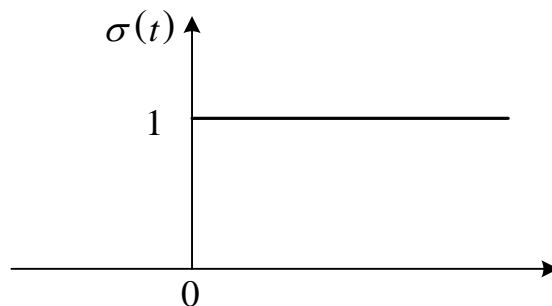


Рис. 1

Приклад. 2. Нехай $f(t) = e^{\alpha t}$, $t \geq 0$, де α – стала величина. Знайти $L\{f\}$.

Розв'язання. Функція $f(t) = e^{\alpha t}$ є оригіналом, причому $M = 1$, $s_0 = \operatorname{Re} a$.

За означенням,

$$L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt$ збігається, якщо $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a = s_0$. Отже

$$e^{\alpha t} \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p-\alpha}.$$

Теорема існування зображення Лапласа. Нехай $f(t)$ – оригінал з показником росту s_0 . Тоді у півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ існує зображення Лапласа $F(p)$, причому $F(p)$ є аналітичною функцією у вказаній півплощині.

Зауваження. Якщо $\operatorname{Re} p = s \rightarrow \infty$, то $F(p) \rightarrow 0$.

Властивості перетворення Лапласа

Властивості перетворення Лапласа полегшують задачу знаходження зображень для великої кількості функцій, а також задачу відшукування оригіналів за їх зображеннями.

Теорема лінійності. Для довільних функцій-оригіналів $f(t)$, $g(t)$ та сталих α, β виконується рівність:

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}. \quad (2)$$

Приклад 3. Нехай $f(t) = \operatorname{ch} \alpha t$. Знайти $L\{\operatorname{ch} \alpha t\}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2) та врахуємо результат прикладу 2.

$$L\{\operatorname{ch} \alpha t\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{\alpha t} + \frac{1}{2}e^{-\alpha t}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}.$$

Таким чином, якщо $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, то $\operatorname{ch} \alpha t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$.

Аналогічно отримаємо: $\operatorname{sh} \alpha t \xrightarrow{\bullet} \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$.

Приклад 4. Нехай $f(t) = t^\alpha$, ($\alpha > 0$). Знайти $L\{t^\alpha\}$.

Розв'язання. За означенням маємо:

$$L\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt = \begin{array}{l} \text{обчислюємо для випадку,} \\ \text{коли } p \text{ – дійсне додатне} \\ \text{число} \\ pt = x, dt = \frac{dx}{p} \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{p}\right)^\alpha \frac{dx}{p} =$$

$$= \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \text{ де } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \text{ – Гама-функція.}$$

Отримана формула справедлива для випадку, коли p комплексне число ($\operatorname{Re} p > 0$). Отже

$$t^\alpha \xrightarrow{\bullet} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

А саме, якщо $\alpha = n$ (n – ціле додатне число), то $\Gamma(n+1) = n!$ і тоді

$$t^n \xrightarrow{\bullet} \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Приклад 5. Знайти $F(p)$ для функцій-оригіналів $\cos \omega t$, $\sin \omega t$.

Розв'язання. Як відомо

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad \sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}),$$

де i – уявна одиниця і $i^2 = -1$.

$$\text{Отже, } L\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

$$\text{Аналогічно: } L\{\sin \omega t\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Таким чином,

$$\cos \omega t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad \sin \omega t \xrightarrow{\bullet} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Існують приклади, в яких перше ніж знаходити зображення доцільно провести перетворення функції-оригіналу. Нагадаємо декілька тригонометричних формул, які можуть стати у пригоді.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Приклад 6. За поданим оригіналом $f(t)$ знайти зображення $F(p)$

а) $f(t) = t^3 + 3t^2 + 7$, б) $f(t) = \sin 3t + 11 \operatorname{ch} 5t$,

в) $f(t) = 6e^{-7t} + \cos 8t$, з) $f(t) = \cos^2 t$, д) $f(t) = \sin^3 t$.

Розв'язання. Зобразимо кожен доданок окремо, а потім використаємо теорему лінійності.

$$а) t^3 \xrightarrow{\bullet} \frac{3!}{p^4}, \quad 3t^2 \xrightarrow{\bullet} 3 \cdot \frac{2!}{p^3}, \quad 7 = 7 \cdot 1 \xrightarrow{\bullet} 7 \cdot \frac{1}{p}.$$

$$\text{Остаточнo отримуємо: } F(p) = \frac{3!}{p^4} + 3 \cdot \frac{2!}{p^3} + 7 \cdot \frac{1}{p}.$$

$$б) \sin 3t \xrightarrow{\bullet} \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \text{ch } 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 - 25}.$$

$$\text{Остаточнo отримуємо: } F(p) = \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{p}{p^2 - 25}.$$

$$в) 3e^{-7t} \xrightarrow{\bullet} 3 \cdot \frac{1}{p + 7}, \quad \cos 8t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + 64}.$$

$$\text{Отже, } F(p) = 3 \cdot \frac{1}{p + 7} + \frac{p}{p^2 + 64}.$$

г) Перше ніж знаходити зображення, перетворимо функцію-оригінал.

Для цього використаємо формулу зниження степеню $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

$$\text{Отже, } F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

д) Перше ніж знаходити зображення, перетворимо функцію-оригінал.

Для цього використаємо формулу зниження степеню $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ та

формулу $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$.

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha &= \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \alpha - \frac{1}{2}(\sin(\alpha - 2\alpha) + \sin(\alpha + 2\alpha)) \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha \xrightarrow{\bullet} \frac{3}{4} \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \frac{3}{p^2+9}.$$

Відповідь: а) $F(p) = \frac{3!}{p^4} + 3 \cdot \frac{2!}{p^3} + 7 \cdot \frac{1}{p},$

б) $F(p) = \frac{3}{p^2+9} + \frac{p}{p^2-25},$

в) $F(p) = 3 \cdot \frac{1}{p+7} + \frac{p}{p^2+64},$

г) $F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4} \right),$

д) $F(p) = \frac{3}{4} \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \frac{3}{p^2+9}.$

Нижче наведена таблиця, де наведено формули відповідності оригіналів зображенням.

ТАБЛИЦЯ "ОРИГІНАЛ-ЗОБРАЖЕННЯ"

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
3	$t^n,$ $n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	7	$\text{sh } \alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	8	$\text{ch } \alpha t = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Теорема подібності. Нехай $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p),$ тоді $\forall \lambda > 0$ справедлива рівність:

$$f(\lambda t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Приклад 7. Оскільки $t^n \xrightarrow{\bullet} \frac{n!}{p^{n+1}}$, то $(\lambda t)^n \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{\lambda} \frac{n!}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{n+1}} = \frac{\lambda^n n!}{p^{n+1}}$.

Теорема зсуву. Нехай $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$, тоді $\forall p_0$

$$F(p - p_0) \xrightarrow{\bullet} e^{p_0 \cdot t} \cdot f(t). \quad (4)$$

Приклад 8. Знайти зображення Лапласа для функції

а) $f(t) = e^{2t} \cdot \cos 5t$, б) $e^{-5t} \cdot t^7$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\cos 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + 25}$, то, застосувавши теорему зсуву,

$$\text{отримаємо: } e^{2t} \cdot \cos 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{p-2}{(p-2)^2 + 25}.$$

б) Користуючись таблицею оригінал-зображення отримуємо $t^7 \xrightarrow{\bullet} \frac{7!}{p^8}$.

Отже, за теоремою зсуву зображення маємо: $e^{-5t} \cdot t^7 \xrightarrow{\bullet} \frac{7!}{(p+5)^8}$.

$$\text{Відповідь: а) } F(p) = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 25}, \text{ б) } F(p) = \frac{7!}{(p+5)^8}.$$

Теорема загиювання. Нехай $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$, тоді $\forall \tau > 0$

$$f(t - \tau) \cdot \sigma(t - \tau) \xrightarrow{\bullet} e^{-\tau p} \cdot F(p). \quad (5)$$

Приклад 9. Оскільки $\sigma(t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p}$, то за формулою (5) маємо:

$$\sigma(t - \tau) \xrightarrow{\bullet} \frac{e^{-\tau p}}{p}.$$

Диференціювання та інтегрування оригіналів та зображень

Теорема диференціювання оригіналу. Нехай функції $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t), f^{(n)}(t)$ неперервні для всіх $t \geq 0$, причому всі вказані

функції є оригіналами з однаковим показником росту s_0 та $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$.

Тоді для всіх $\operatorname{Re} p > s_0$ справедлива формула:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n L\{f\} - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (6)$$

або

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\bullet} p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (7)$$

Зокрема,

$$f'(t) \xrightarrow{\bullet} pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \xrightarrow{\bullet} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \xrightarrow{\bullet} p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

и так далі.

Приклад 10. Знайти зображення функції $f(t) = \sin^2 t$.

Розв'язання. Нехай $f(t) = \sin^2 t \xrightarrow{\bullet} F(p)$. Застосуємо теорему

диференціювання оригіналу, враховуючи, що $f(0) = \sin^2 0 = 0$.

$$f'(t) = 2 \sin t \cdot \cos t = \sin 2t \xrightarrow{\bullet} pF(p) - f(0) = pF(p).$$

Оскільки $\sin 2t \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{p^2 + 4}$, то $F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$.

Інший спосіб базується на безпосередньому застосуванні відомої тригонометричної формули та властивості лінійності зображення Лапласа:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

Відповідь. $F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$.

Теорема інтегрування оригіналу. Нехай $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$, тоді

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{F(p)}{p}, \quad (\operatorname{Re} p > s_0). \quad (8)$$

Приклад 11. Нехай $f(t) = \int_0^t \cos 3\tau d\tau$. Знайти $F(p)$.

Розв'язання. Як вже було показано, $\cos 3t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2+9}$.

Застосувавши теорему інтегрування оригіналу, отримаємо:

$$f(t) = \int_0^t \cos 3\tau d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{(p^2+9)p} = \frac{1}{p^2+9} = F(p).$$

Можна отримати цей розв'язок й іншим способом:

$$\int_0^t \cos 3\tau d\tau = \frac{1}{3} \sin 3\tau \Big|_0^t = \frac{1}{3} \sin 3t = \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{3} \frac{3}{p^2+9} = \frac{1}{p^2+9}.$$

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{3} \frac{3}{p^2+9} = \frac{1}{p^2+9}$.

Теорема диференціювання зображення. Нехай $F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$, тоді

$$F'(p) \xrightarrow{\bullet} -t \cdot f(t). \quad (9)$$

Приклад 12. Знайти зображення Лапласа для функції

a) $t \cdot \sin 2t$, б) $t^2 \cdot \cos 2t$.

Розв'язання.

a) Користуючись таблицею оригінал-зображення отримуємо

$\sin 2t \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{p^2+4}$, а далі використаємо теорему про диференціювання

зображення:

$$t \cdot \sin 2t \xrightarrow{\bullet} -\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' = -\left(-\frac{2 \cdot 2p}{(p^2+4)^2}\right) = \frac{4p}{(p^2+4)^2}.$$

б) Розв'язання цього прикладу аналогічне розв'язанню приклада a). Теорему про диференціювання зображення використаємо двічі.

$$\cos 2t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2+4},$$

$$t \cos 2t \xrightarrow{\bullet} -\left(\frac{p}{p^2+4}\right)' = -\left(\frac{p'(p^2+4) - p(p^2+4)'}{(p^2+4)^2}\right) = -\left(\frac{p^2+4 - p \cdot 2p}{(p^2+4)^2}\right) =$$

$$= -\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2},$$

$$t^2 \cos 2t = t \cdot t \cos 2t \xrightarrow{\bullet} -\left(-\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2} \right)' = \frac{(4-p^2)'(p^2+4)^2 - (4-p^2)((p^2+4)^2)'}{(p^2+4)^4} =$$

$$= \frac{-2p(p^2+4)^2 - (4-p^2)2(p^2+4) \cdot 2p}{(p^2+4)^4} = \frac{2p(p^2+4)(-(p^2+4) - 2(4-p^2))}{(p^2+4)^4} =$$

$$= \frac{2p(p^2-12)}{(p^2+4)^3}.$$

$$\text{Відповідь: а) } F(p) = -\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}, \text{ б) } F(p) = \frac{2p(p^2-12)}{(p^2+4)^3}.$$

Теорема інтегрування зображення. Нехай $f(t)$ і $\frac{f(t)}{t}$ – функції-оригінали, s_1 – показник росту функції $\frac{f(t)}{t}$, тоді

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\bullet} \int_p^{\infty} F(w) dw, \quad (\operatorname{Re} p > s_1). \quad (10)$$

В багатьох прикладах при використанні теореми інтегрування зображення використовують властивості логарифмів. Нагадаємо їх:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^k = k \ln a.$$

$$\text{Приклад 13. а) } f(t) = \frac{2(1 - \cos \omega t)}{t}, \text{ б) } f(t) = \frac{\sin 3t - \sin 5t}{t}.$$

Знайти $F(p)$.

Розв'язання. а) З таблиці зображень Лапласа та властивості лінійності маємо:

$$2(1 - \cos \omega t) \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2 + \omega^2}.$$

За теоремою інтегрування зображення:

$$\begin{aligned} \frac{2(1 - \cos \omega t)}{t} &\xrightarrow{\bullet} \int_p^\infty \left(\frac{2}{w} - \frac{2w}{w^2 + \omega^2} \right) dw = \left[\ln w^2 - \ln(w^2 + \omega^2) \right]_p^\infty = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \ln \frac{w^2}{w^2 + \omega^2} \Big|_p^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln \frac{B^2}{B^2 + \omega^2} - \ln \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = \ln 1 - \ln \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = \ln \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right) \\ \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B^2}{B^2 + \omega^2} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{array} \right\| = \left\| \frac{k=2, a_0=1}{m=2, b_0=1} \right\| = 1. \end{aligned}$$

б) З таблиці зображень Лапласа та властивості лінійності маємо:

$$\sin 3t - \sin 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{3}{p^2 + 9} - \frac{5}{p^2 + 25}.$$

За теоремою інтегрування зображення:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3t - \sin 5t}{t} &\xrightarrow{\bullet} \int_p^\infty \frac{3}{w^2 + 9} dw - \int_p^\infty \frac{5}{w^2 + 25} dw = \left(3 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{w}{3} - 5 \cdot \frac{1}{5} \arctg \frac{w}{5} \right) \Big|_p^\infty = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{w}{3} - \arctg \frac{w}{5} \right) \Big|_p^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{B}{3} - \arctg \frac{B}{5} - \left(\arctg \frac{p}{3} - \arctg \frac{p}{5} \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{3} + \arctg \frac{p}{5} = \arctg \frac{p}{5} - \arctg \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: а) } F(p) = \ln \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right), \text{ б) } F(p) = \arctg \frac{p}{5} - \arctg \frac{p}{3}.$$

Розшукування оригіналу за поданим зображенням

Існує велика кількість задач, де за поданим зображенням потрібно відновити оригінал. На практиці розшукування функції-оригіналу зазвичай проводять за наступним планом: спочатку в таблиці оригінал-зображення намагаються відшукати для заданого зображення $F(p)$ відповідний йому оригінал $f(t)$. Для отримання відповідності використовують додавання та віднімання однієї та тієї ж величини, множення та ділення на одну і ту саму величину, а також теореми лінійності та зсуву. В більш складних випадках функцію $F(p)$ намагаються зобразити у вигляді

суми найпростіших дробів та використовуючи теореми лінійності та зсуву знаходять оригінал.

В більшості прикладів, пов'язаних із знаходженням оригіналів за заданим зображенням Лапласа, задане зображення – правильний раціональний дріб вигляду $Y(p) = \frac{F(p)}{G(p)}$, де $F(p)$, $G(p)$ – поліноми змінної p . Такий дріб можна представити у вигляді суми найпростіших раціональних дробів методом невизначених коефіцієнтів, а потім, застосувавши один з вищенаведених підходів, визначити шукану оригінал-функцію. Розкладання раціональних дробів на суму найпростіших раціональних дробів детально розглянуто в матеріалах для 2 семестру (тема «Невизначений інтеграл»).

Розглянемо цей метод на прикладах.

Якщо в знаменнику квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$, розрізняють два випадки: а) $D < 0$, б) $D \geq 0$.

а) Коефіцієнт a ($a \neq 0$) слід винести за дужки:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x^2 + px + q).$$

Далі слід виділити повний квадрат з квадратного тричлена:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2}{4} + q,$$

б) В цьому випадку квадратний тричлен розкладають на множники. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені відповідного квадратного рівняння.

Приклад 14. За заданим зображенням $F(p)$ знайти оригінал $f(t)$:

$$а) F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 13}, \quad б) F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 10}, \quad в) F(p) = \frac{p}{p^2 - 5p + 6},$$

$$г) F(p) = \frac{p^2 - 8p - 4}{p^2(p^2 + 4)}.$$

Розв'язання.

а) Розглянемо знаменник дроби: $p^2 + 6p + 13 = \|D < 0\| = (p + 3)^2 + 4$.

Отримуємо $F(p) = \frac{1}{(p+3)^2 + 4}$. Цей вираз схожий на формулу

$\sin \omega t \xleftrightarrow{\bullet} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ з таблиці оригінал-зображення ($\omega = 2$), але в нашому

прикладі $p+3$ замість p і в чисельнику бракує множника 2. Помножимо чисельник та знаменник дроби на 2 та використаємо теорему зсуву:

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(p+3)^2 + 4} \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{2} e^{-3t} \cdot \sin 2t.$$

б) Розглянемо знаменник дроби: $p^2 + 6p + 10 = \|D < 0\| = (p+3)^2 + 1$.

Отримуємо $F(p) = \frac{p}{(p+3)^2 + 1}$. Цей вираз схожий на формулу

$\cos \omega t \xleftrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ з таблиці оригінал-зображення ($\omega = 1$), але в нашому

прикладі $p+3$ замість p і в чисельнику бракує доданка 3. В чисельнику додамо та віднімемо число 3 та розділимо дріб почленно. Отримуємо

$$F(p) = \frac{p+3-3}{(p+3)^2 + 1} = \frac{p+3}{(p+3)^2 + 1} - \frac{3}{(p+3)^2 + 1} \quad \text{та використаємо теорему}$$

лінійності та зсуву:

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+3)^2 + 1} - \frac{3}{(p+3)^2 + 1} \xleftrightarrow{\bullet} e^{-3t} \cdot \cos t - 3e^{-3t} \cdot \sin t.$$

б) Розглянемо знаменник дроби:

$$p^2 - 5p + 6 = \|D > 0\| = \left\| \begin{array}{l} \text{за теоремою Вієта:} \\ p_1 = 3, \quad p_2 = 2 \end{array} \right\| = (p-3)(p-2).$$

Отримуємо:

$$F(p) = \frac{p}{(p-3)(p-2)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p-2} = \frac{A(p-2) + B(p-3)}{(p-3)(p-2)},$$

$$p = A(p-2) + B(p-3),$$

$$p = 2: 2 = -B \Rightarrow B = -2,$$

$$p = 3: 3 = A.$$

Невизначені коефіцієнти A та B знайдено методом частинних значень. Використовуючи таблицю оригінал-зображення та теорему лінійності отримуємо:

$$F(p) = \frac{3}{p-3} + \frac{-2}{p-2} \xrightarrow{\bullet} 3e^{3t} - 2e^{2t}.$$

з) Це правильний раціональний дріб і його можна зобразити у вигляді суми трьох найпростіших дробів:

$$\frac{p^2 - 8p - 4}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4} = \frac{Ap(p^2 + 4) + B(p^2 + 4) + (Cp + D)p^2}{p^2(p^2 + 4)}.$$

$$p^2 - 8p - 4 = Ap(p^2 + 4) + B(p^2 + 4) + (Cp + D)p^2.$$

Невизначені коефіцієнти A , B , C , D знайдемо методом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях p .

При p^3 : $0 = A + C$,

При p^2 : $1 = B + D$,

При p : $-8 = 4A \Rightarrow A = -2$,

При p^0 : $-4 = B$.

З першого та другого рівнянь отримуємо $C = 2$, $D = 5$.

Отже, $F(p) = \frac{p^2 - 8p - 4}{p^2(p^2 + 4)} = -\frac{2}{p} - \frac{4}{p^2} + \frac{2p + 5}{p^2 + 4} = -\frac{2}{p} - \frac{4}{p^2} + 2\frac{p}{p^2 + 4} + 5\frac{1}{p^2 + 4}.$

Враховуючи таблицю оригінал-зображення та теорему лінійності отримуємо:

$$-\frac{2}{p} - \frac{4}{p^2} + 2\frac{p}{p^2 + 4} + 5\frac{1}{p^2 + 4} \xrightarrow{\bullet} -2 - 4t + 2\cos 2t + 5\sin 2t.$$

Відповідь: а) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} \cdot \sin 2t$, б) $f(t) = e^{-3t} \cdot \cos t - 3e^{-3t} \cdot \sin t$,

в) $f(t) = 3e^{3t} - 2e^{2t}$, з) $f(t) = -2 - 4t + 2\cos 2t + 5\sin 2t$.

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Векторне поле. Основні поняття.

Означення. Нехай в кожній точці M області D в просторі R^3 задано вектор $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ (рис. 1), де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – неперервні в D функції, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орто-нормований базис декартової прямокутної системи координат. Тоді говорять, що в D задане векторне поле $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$.

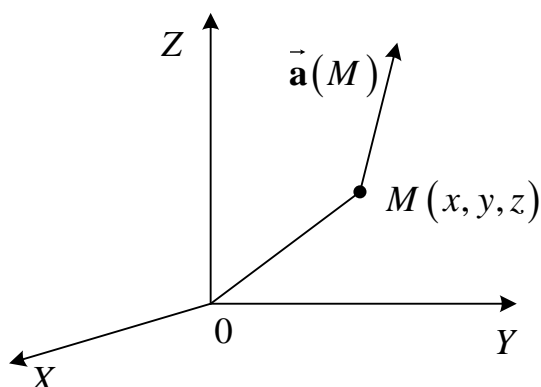


Рис. 1

Приклади: силове (гравітаційне) поле Землі, поле швидкостей рідини або газу в каналах і апаратах, електричне поле напруженості, електромагнітне поле.

Геометричні характеристики векторного поля – векторні лінії.

Означення. Векторні лінії векторного поля $\vec{a}(M)$ – криві, дотичні в кожній точці яких співпадають з $\vec{a}(M)$ (рис. 2).

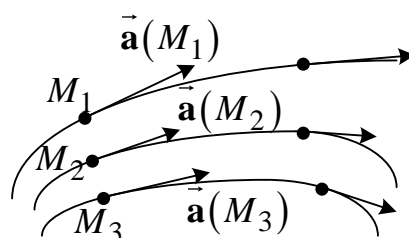


Рис. 2

Через те, що будь яку криву на нескінченно малій ділянці $\vec{ds} = \{dx; dy; dz\}$ (вектор дотичної) можна замінити відрізком дотичної, а напрям цієї дотичної співпадає з напрямом $\vec{a}(M)$, то рівняння $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ визначатимуть векторну лінію.

Через те, що будь яку криву на нескінченно малій ділянці $\vec{ds} = \{dx; dy; dz\}$ (вектор дотичної) можна замінити відрізком дотичної, а напрям цієї дотичної співпадає з напрямом $\vec{a}(M)$, то рівняння $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ визначатимуть векторну лінію.

В залежності від фізичної природи поля векторні лінії мають свої назви. В гідродинамічному полі – це лінії струму рідини, в силовому полі – силові лінії.

Означення. Нехай в векторному полі $\vec{a}(M)$ міститься довільна площадка Σ , обмежена замкненим контуром Γ .

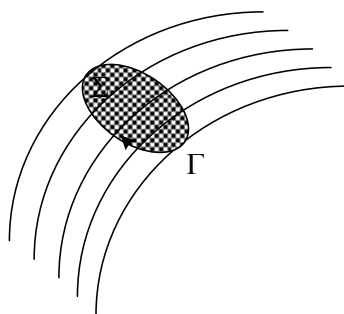


Рис. 3

Через границю цієї площадки проведемо векторні лінії. Фігура, що утворилася при цьому є *векторною трубкою* (рис. 3).

Поняття про поверхневі інтеграли.

Поверхня, її орієнтація. Площа поверхні.

Розглянемо в області V простору R^3 певну поверхню Ω – гладку або кусково-гладку. Нагадаємо, що гладка поверхня – це така поверхня, в кожній точці якої існує дотична площина, що неперервно змінюється вздовж поверхні, а кусково-гладка – така, що складається зі скінченної кількості гладких «кусків» (гладких поверхонь).

На поверхні Ω (замкненій або обмеженій гладким контуром) візьмемо точку M_0 . В цій точці побудуємо нормаль до поверхні Ω , обравши певний напрямок нормалі (один з двох можливих) (рис. 4).

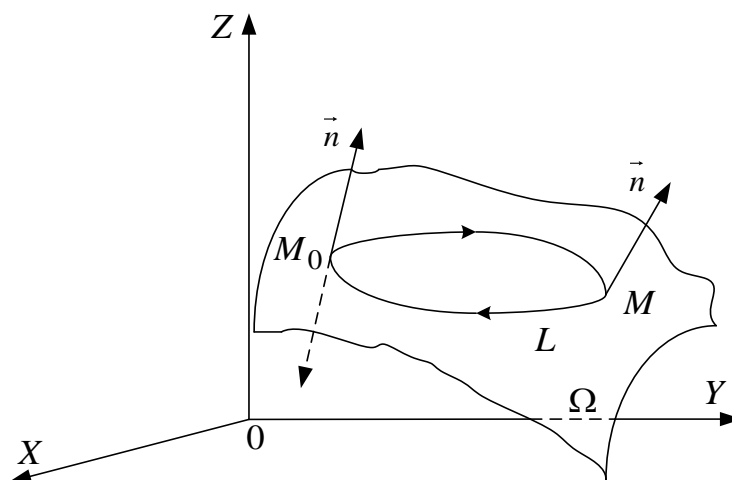


Рис. 4

Проведемо на поверхні довільний контур L , який починається і закінчується в точці M_0 та не перетинає межу поверхні. Розглянемо точку M , що рухається вздовж контуру, і в кожному з її положень проведемо нормаль того напрямку, в який неперервно переходить нормаль із попередньої точки. Якщо після обходу контуру нормаль повернеться в точці M_0 до свого початкового положення при довільному виборі точки M_0 на поверхні, то така поверхня називається *двобічною*. Якщо ж напрямок нормалі після обходу хоча б в одній точці зміниться на протилежний, поверхня – *однобічна*.

Означення. Сукупність усіх точок поверхні з однаковим напрямком нормалі, називається *стороною поверхні*.

Задати орієнтацію поверхні (обрати визначену сторону поверхні) означає обрати в кожній точці поверхні один з двох можливих напрямів нормалі так, щоб він неперервно змінювався від точки до точки.

Розглянемо обмежену гладку (або кусково-гладку) поверхню Ω , яка обмежена контуром L , і розіб'ємо її будь-якими кривими на «елементарні поверхні» (ділянки) $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ (рис. 5). В кожній ділянці Ω_k візьмемо довільну точку M_k і побудуємо проекцію цієї ділянки на дотичну площину до поверхні, що проходить через точку M_k . Проекцією буде плоска фігура з

площею T_k . Позначимо через ρ найбільшу відстань між двома точками будь-якої ділянки поверхні Ω .

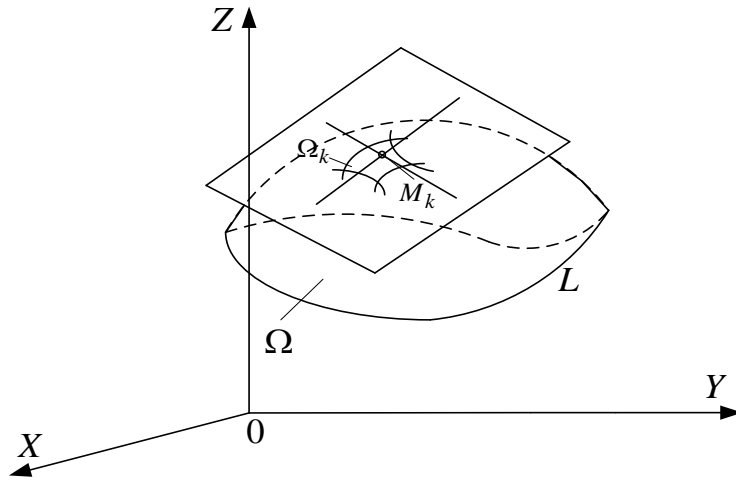


Рис. 5

Означення. Назвемо площею S поверхні Ω границю суми площ T_k при $\rho \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_k T_k. \quad (1)$$

Потік векторного поля.

Нехай Ω – орієнтована гладка поверхня (рис. 6), що знаходиться в області $V \subset R^3$, в якій задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Розіб'ємо поверхню Ω кривими на ділянки $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ з площами $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. В кожній ділянці Ω_i оберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Зафіксуємо за допомогою нормалі $\vec{n}(M)$ одну із двох сторін поверхні. В точці M_i побудуємо одиничний вектор нормалі $\vec{n}^0(M_i)$. Складемо вектор $\vec{\Delta\sigma}_i = \Delta\sigma_i \cdot \vec{n}^0(M_i)$, що міститься на $\vec{n}^0(M_i)$ і має довжину $\Delta\sigma_i$.

Розглянемо скалярний добуток $\vec{a}(M_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i$ та побудуємо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i. \quad (2)$$

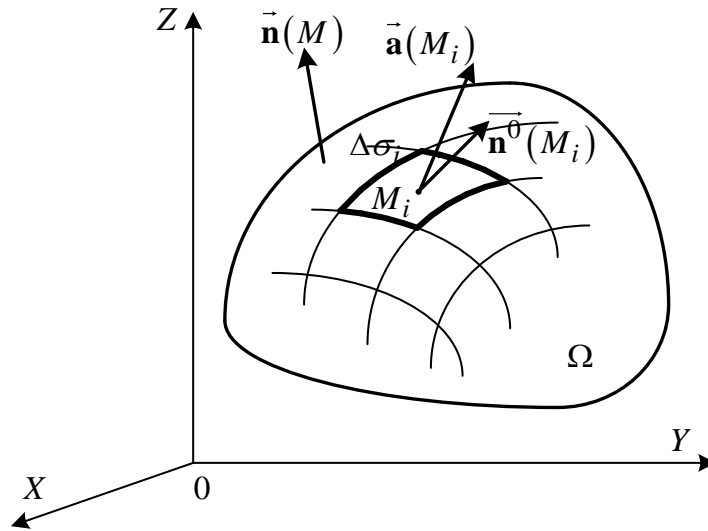


Рис. 6

Означення. Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум (2), яка не залежить ані від способу розбиття поверхні Ω на ділянки, ані від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$, при $n \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$, то вона називається *поверхневим інтегралом першого роду від скалярного добутку $\vec{a}(M_i)$ на одиничний вектор нормалі $\vec{n}^0(M_i)$ по поверхні Ω* і позначається

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i = \iint_{\Omega} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = \iint_{\Omega} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{d\sigma}, \quad (3)$$

Інтеграл (3) – *потік* Π *векторного поля $\vec{a}(M_i)$ через поверхню Ω* – скалярна характеристика векторного поля.

Властивості потоку:

1. Потік змінює знак на протилежний, якщо змінюється орієнтація поверхні Ω :

$$\iint_{\Omega^+} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = - \iint_{\Omega^-} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma. \quad (4)$$

2. *Адитивність відносно поверхні інтегрування.* Якщо поверхню Ω можна розбити на декілька частин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$, то потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню Ω дорівнює сумі потоків через поверхні $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$:

$$\Pi_{\Omega}(\vec{a}(M)) = \sum_{i=1}^k \Pi_i = \sum_{i=1}^k \iint_{\Omega_i} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma. \quad (5)$$

3. *Лінійність.* Нехай $\vec{a}_1(M)$, $\vec{a}_2(M)$ – векторні поля, α , β – сталі, тоді

$$\iint_{\Omega} (\alpha \vec{a}_1(M) + \beta \vec{a}_2(M)) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = \alpha \cdot \iint_{\Omega} \vec{a}_1(M) \cdot \vec{d}\sigma + \beta \cdot \iint_{\Omega} \vec{a}_2(M) \cdot \vec{d}\sigma. \quad (6)$$

Обчислення потоку векторного поля.

Нехай поверхня Ω задана рівнянням $z = f(x, y)$ і її можна спроектувати на координатну площину XOY ; область D – проекція Ω на XOY (рис. 7). Тоді вектор нормалі $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1 \right\}$, а одинична нормаль

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \Rightarrow$$

$$\vec{n}^0 = \pm \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}; \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}; \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \right\}$$

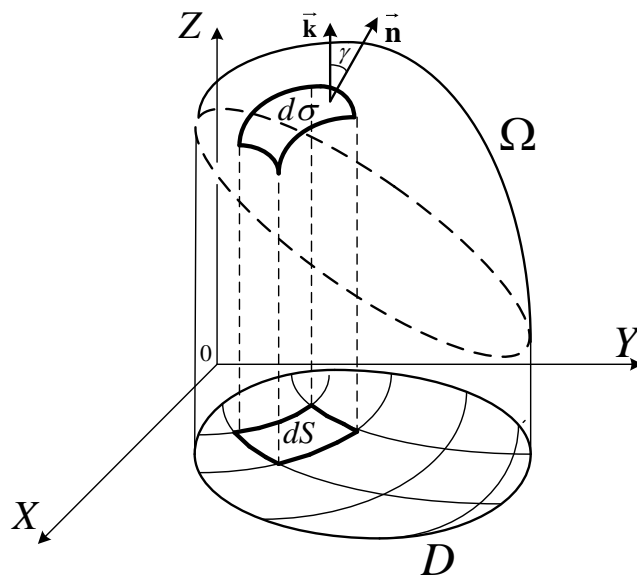


Рис. 7

Встановимо зв'язок між елементом $d\sigma$ на поверхні Ω і елементом dS (проекція $d\sigma$ на XOY) області D : $d\sigma = \frac{dS}{|\cos \gamma|}$, де γ – кут між нормаллю \vec{n} і віссю OZ (її визначає вектор $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$). Маємо

$$|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \cdot dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Потік через поверхню Ω векторного поля $\vec{a}(M)$:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Omega} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = \iint_D \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \pm \iint_D \left(P(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - R(x, y, f(x, y)) \right) \times \\ &\times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Тобто обчислення потоку приведено до обчислення подвійного інтеграла. Знак залежить від напрямку нормалі до поверхні Ω .

Приклад 1. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ через повну поверхню циліндра висоти H , з основою радіуса R .

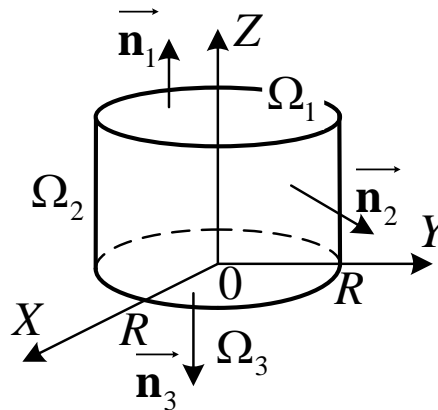


Рис. 8

Розв'язання. Циліндр Ω розмістимо в системі координат таким чином, що його віссю є вісь OZ . Поверхня Ω є об'єднанням трьох поверхонь: Ω_1 – верхня основа циліндра – круг, що міститься в площині $z = H$ і має радіус R , Ω_2 – бічна поверхня циліндра і Ω_3 – нижня основа циліндра – круг, що міститься в площині $z = 0$ і має радіус R (рис. 8). Тобто $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$.

Визначимо нормалі до поверхонь. На поверхні Ω_1 нормаль, очевидно, $\vec{n}_1 = \vec{k} = (0; 0; 1)$, на Ω_3 нормаль має протилежний напрямок, тобто

$\vec{n}_3 = -\vec{k} = (0; 0; -1)$. Вектор нормалі \vec{n}_2 перпендикулярний осі OZ і, враховуючи те, що рівняння бічної поверхні циліндра Ω_2 :

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

координати вектора

$$\vec{n}_2 = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}; 0 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 0 \right).$$

Скалярні добутки

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}_1(M) = z, \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_2(M) = \sqrt{x^2 + y^2}, \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_3(M) = -z.$$

Визначимо потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню Ω_1 :

$$\Pi_1 = \iint_{\Omega_1} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_1(M) d\sigma = \iint_{\Omega_1} z d\sigma. \text{ Обчислимо даний поверхневий інтеграл за}$$

допомогою переходу до подвійного інтеграла по проекції Ω_1 на координатну площину XOY . Цією проекцією є круг $D_1: x^2 + y^2 \leq R^2$. Елемент

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \text{ де } z = H:$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy = dx dy,$$

$$\Pi_1 = \iint_{D_1} H dx dy = H \cdot \pi R^2.$$

Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню Ω_3 :

$$\Pi_3 = \iint_{\Omega_3} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_3(M) d\sigma = - \iint_{\Omega_3} z d\sigma = - \iint_{D_1} 0 d\sigma = 0.$$

І, наприкінці, потік через Ω_2 :

$$\Pi_2 = \iint_{\Omega_2} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_2(M) d\sigma = \iint_{\Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = R \iint_{\Omega_2} d\sigma.$$

Останній поверхневий інтеграл визначає площу поверхні Ω_2 , яка, очевидно, дорівнює $2\pi R \cdot H$. Тоді $\Pi_2 = R \cdot 2\pi R \cdot H = 2\pi R^2 H$.

Остаточно $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 3\pi R^2 H$.

Звернімо увагу, що потік в нашому випадку $\Pi = 3 \cdot V_{\text{циліндра}}$.

Відповідь: $\Pi = 3\pi R^2 H$.

Дивергенція векторного поля.

Означення. Дивергенція (розбіжність) векторного поля $\vec{a}(M)$ – скаляр, що визначається

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (8)$$

Дивергенція – диференціальна та локальна (залежить від точки) кількісна характеристика векторного поля, визначає щільність потоку в точці M .

Потік через замкнену поверхню.

Розглянемо замкнену поверхню Ω , яка обмежує об'єм V в векторному полі $\vec{a}(M)$ швидкостей течії нестисливої рідини (рис. 9). Потік $\Pi = \iint_{\Omega} \vec{a}(M) \cdot \vec{d\sigma}$ – кількість рідини, що протікає через замкнену поверхню Ω .

Векторні лінії входять та виходять з Ω . В точці P_1 кут між $\vec{a}(M)$ і нормаллю \vec{n}_1 – тупий, і це означає, що рідина втікає всередину поверхні: $\Pi_1 < 0$. В точці виходу P_2 кут між $\vec{a}(M)$ і нормаллю \vec{n}_2 – гострий, рідина витікає: $\Pi_2 > 0$. Таким чином, потік через замкнену поверхню чисельно дорівнює різниці потоків рідини, що втікає і витікає за одиницю часу зі швидкістю $\vec{a}(M)$ в область V , яка обмежена поверхнею Ω .

Висновки:

1. Якщо $\Pi > 0$, то більше витікає рідини, ніж втікає. Тобто в області V є джерела поля.
2. Якщо $\Pi < 0$, то більше втікає рідини, ніж витікає. В області V є стоки поля.
3. $\Pi = 0$ – немає ані джерел, ані стоків, або вони компенсують один одного.

Точки поля, в яких $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0 \Rightarrow \Pi > 0$ називають *джерелами поля*, а точки в яких $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0 \Rightarrow \Pi < 0$ – *стоками векторного поля*.

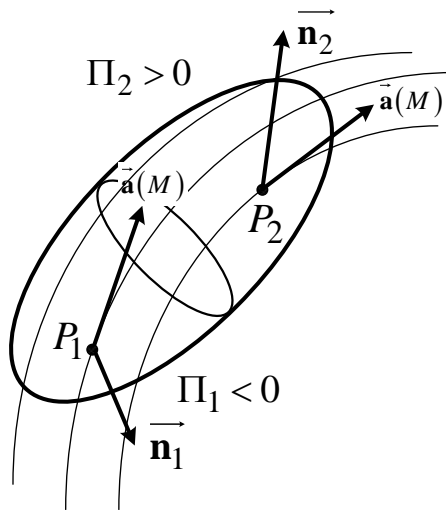


Рис. 9

Векторні лінії векторного поля починаються в точках з додатною дивергенцією, а закінчуються в точках з від'ємною дивергенцією.

Означення. Величина $|\operatorname{div} \vec{a}(M)|$ називається *потужністю джерела або стоку*.

Формула Гауса-Остроградського.

Нехай в просторі R^3 задано область V , обмежену замкненою поверхнею Ω . Припустимо, що Ω можна розбити на три поверхні: Ω_1 – рівняння $z = f_1(x, y)$, Ω_2 – рівняння $z = f_2(x, y)$, Ω_3 – циліндрична поверхня задана рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 10).

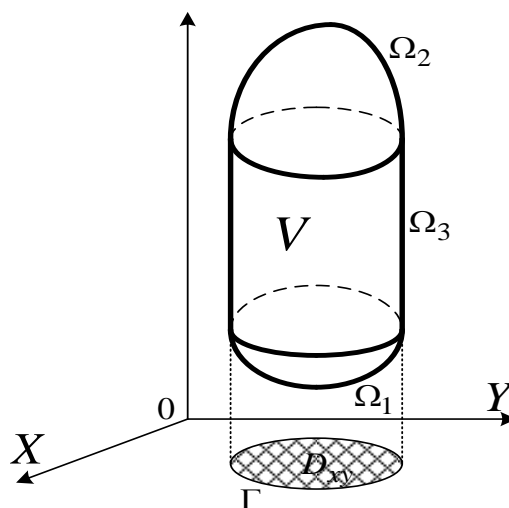


Рис. 10

Нехай в області V задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

причому функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y}$, $\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$ неперервні в V .

Тоді має місце формула Гауса-Остроградського.

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_{\Omega} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Векторна форма формули Гауса-Остроградського.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_{\Omega} \left(\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma. \quad (10)$$

Теорема Гауса-Остроградського.

Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнену поверхню Ω в напрямі зовнішньої нормалі дорівнює трикратному інтегралу від дивергенції даного векторного поля по області V , обмеженої поверхнею Ω :

$$\iint_{\Omega} \left(\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz.$$

Приклад 2. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M) = \{x^2 y; xy^2; xyz\}$ через повну поверхню тіла $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Розв'язання: Скористаємося теоремою Гауса-Остроградського. Обчислимо $\operatorname{div} \vec{a} = 2xy + 2xy + xy = 5xy$. Область V , яку обмежують задані поверхні – частина кулі радіуса R , що міститься в першому октанті (рис. 11). Відповідно потік дорівнює

$$\begin{aligned} \Pi = \iiint_V 5xy dx dy dz = & \left| \begin{array}{l} \text{перехід в сферичні координати} \\ x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{array} \right| = \\ = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin \theta \cdot 5\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta d\rho = \end{aligned}$$

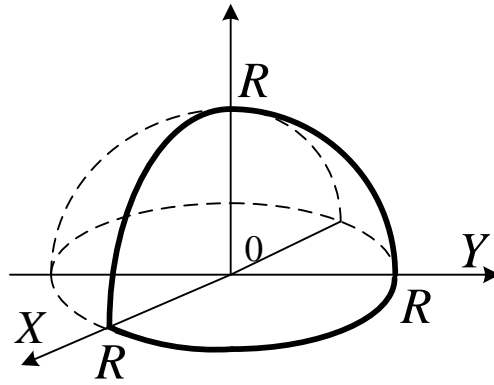


Рис. 11

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \\
 &= -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{R^5}{5} = -\frac{R^5}{3}.
 \end{aligned}$$

Потік має від'ємне значення, це означає, що в V містяться стоки поля.

Відповідь: $\Pi = -\frac{R^5}{3}$.

Циркуляція векторного поля.

Означення. Криволінійний інтеграл вздовж замкненого контуру

$\oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau}_0 ds$ називається *циркуляцією векторного поля*

$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру:

$$\text{Ц}_L(\vec{a}) = \oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau}_0 ds = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (11)$$

Циркуляція характеризує обертальну здібність поля. Якщо векторні лінії поля замкнені, то циркуляція вздовж цих ліній в напрямку поля додатна, при цьому в гідродинамічній інтерпретації частинки рідини течуть по цим замкненим лініям. Нехай лінії течії довільні. Якщо в результаті руху рідини замкнений контур L в об'ємі V буде обертатися, то поле має обертальну здібність; абсолютна величина циркуляції буде визначати кутову швидкість обертання (чим більше $|\text{Ц}|$, тим більше швидкість); знак циркуляції покаже, чи співпадає напрямок обертання з напрямком інтегрування.

Циркуляція $\text{Ц}_L(\vec{a})$ може бути використана для вимірювання потужності потоку рідини, що рухається вздовж кола L з лінійною швидкістю \vec{a} .

Приклад 3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = \{y; x^2; -z\}$ вздовж контуру L , який є перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 4$ і $z = 3$.

Розв'язання. Контур L – коло радіуса $R = 2$, що міститься в площині $z = 3$ (рис. 11). Запишемо параметричне рівняння цього кола:

$$\{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 3, t \in [0; 2\pi].\}$$

Обчислимо циркуляцію за формулою (11):

$$\text{Ц}_L(\vec{a}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L ydx + x^2dy - zdz = \left. \begin{array}{l} dx = (2 \cos t)' dt = -2 \sin t dt \\ dy = (2 \sin t)' dt = 2 \cos t dt \\ dz = (3)' dt = 0 \end{array} \right| =$$

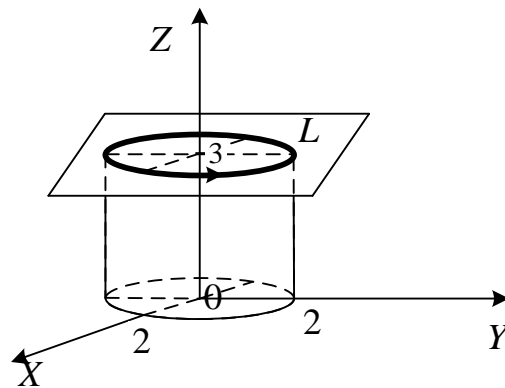


Рис. 12

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left[2 \sin t \cdot (-2 \sin t) + (2 \cos t)^2 \cdot 2 \cos t \right] dt = -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 8 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d \sin t = -4\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\text{Ц}_L(\vec{a}) = -4\pi$.

Ротор векторного поля.

Означення. Ротор (вихор) векторного поля

$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ – вектор $\text{rot } \vec{a}(M)$, проекція якого на довільний вектор \vec{s} визначається як границя частки циркуляції поля $\vec{a}(M)$

вздовж деякого контуру L , який містить точку M і знаходиться в площині, перпендикулярній вектору \vec{s} , до площі області, обмеженої даним контуром, за умови, що контур L стягується в точку M , на площа S прямує до нуля:

$$\text{пр } \vec{s} \text{ rot } \vec{a}(M) = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ L \rightarrow M}} \frac{\text{Ц}_L(\vec{a})}{S}. \quad (12)$$

В просторі через декартові координати ротор визначається формулою

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формула Стокса.

Нехай Ω – певна поверхня, а L – замкнений контур на даній поверхні. Оберемо на Ω напрямком нормалі \vec{n} і, у відповідності з цим напрямком, встановимо додатний напрямком обходу контуру L .

Також припустимо, що в кожній точці Ω задане векторне поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Має місце твердження:

Циркуляція векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж контуру L певної поверхні Ω дорівнює потоку ротора векторного поля через цю поверхню

$$\oint_L \vec{a}(M) \cdot d\vec{s} = \iint_{\Omega} (\text{rot } \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0) d\sigma. \quad (14)$$

Формула (14) має назву *формула Стокса*.

Наслідок. Криволінійний інтеграл вздовж будь-якого кусково-гладкого замкненого контуру дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ротор векторного поля є нульовим.

Приклад 4. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = \{y; x^2; -z\}$ вздовж контуру L , який є перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 4$ і $z = 3$.

Розв'язання. Контур L є перетином кругового циліндра і площини, паралельної XOY (Рис. 13). Очевидно, що L – коло.

Застосуємо формулу Стокса. Для зручності поверхнею Ω , яка є областю інтегрування в поверхневому інтегралі, оберемо площину $z = 3$.

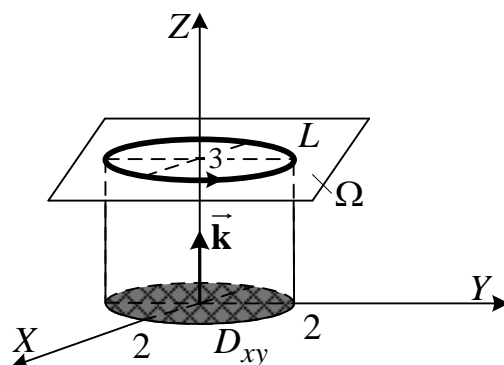


Рис. 13

Одинична нормаль до Ω : $\vec{n}^0 = \vec{k} = \{0; 0; 1\}$. Обчислимо ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (0 - 0) - \vec{j} \cdot (0 - 0) + \vec{k} \cdot (2x - 1) = \{0; 0; 2x - 1\}.$$

Далі $\operatorname{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = 2x - 1$. Побудуємо для обчислення поверхневого інтеграла проєкцію Ω на координатну площину XOY , область D_{xy} – коло $x^2 + y^2 = 4$.

В подвійному інтегралі по області D_{xy} перейдемо до полярних координат.

Таким чином

$$\begin{aligned} \Pi_L(\vec{a}) &= \iint_{\Omega} (2x - 1) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (2x - 1) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos\varphi - 1) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{2\rho^3}{3} \cos\varphi - \frac{\rho^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3} \cos\varphi - 2 \right) d\varphi = \left(\frac{16}{3} \sin\varphi - 2\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -4\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\Pi_L(\vec{a}) = -4\pi$.

Спеціальні векторні поля. Потенціал.

Потенційне векторне поле.

Означення. Векторне поле $\vec{a}(M)$, задане в області $V \subset R^3$, є *потенційним полем*, якщо воно є полем градієнта деякої скалярної функції,

тобто якщо існує така скалярна функція $u(M): \forall M \in V$ виконується $\vec{a}(M) = \text{grad} u(M)$.

Функція $u(M) = u(x, y, z)$ – потенціал (силова функція) векторного поля.

Теорема. Критерій потенційності векторного поля.

Векторне поле $\vec{a}(M)$ в області V потенціальне тоді і лише тоді, коли в усіх точках V виконується: $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$.

Сформулюємо твердження, які є еквівалентними:

1. Векторне поле $\vec{a}(M)$ потенціальне в області V , тобто в даній області існує скалярне поле $u = u(M)$ таке, що $\vec{a}(M) = \text{grad} u(M)$.

2. Векторне поле $\vec{a}(M)$ безвихрове, тобто в V справедливе $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$.

3. Циркуляція потенціального векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж довільного замкненого контуру $L \subset V$ завжди дорівнює нулю:

$$\text{Ц}_L(\vec{a}) = \text{Ц}_L(\text{grad} u) = 0. \quad (15)$$

4. Криволінійний інтеграл $\int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{ds}$ вздовж довільної кривої AB , взятої

в цьому полі, дорівнює

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{ds} = u(B) - u(A). \quad (16)$$

Для силового потенціального поля цей результат означає, що в такому полі робота вздовж будь-якої замкненої траєкторії дорівнює нулю; робота не залежить від форми кривої і дорівнює різниці значень силової функції $u = u(M)$ в кінцевій і початковій точках.

Обчислення потенціалу потенціального векторного поля.

Візьмемо в області V дві точки: фіксовану точку M_0 і поточну M :

$$u(M) = u(M_0) + \int_{M_0M} \vec{a} \cdot \vec{ds} \Leftrightarrow u(x, y, z) = C + \int_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz \quad (17)$$

($C = u(M_0)$ – значення функції в довільній, але фіксованій точці – стала величина). Зазвичай як M_0 обирають $M_0(0,0,0)$, за винятком функцій, для яких ця точка не належить області визначення. Наприклад знаменник обертається на нуль в точці $M_0(0,0,0)$.

Приклад 5. Довести, що векторне поле

$$\vec{a}(M) = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2yx)\vec{k}$$

потенціальне і обчислити його потенціал.

Розв'язання. Координати векторного поля $P(x, y, z) = x^2 - 2yz$, $Q(x, y, z) = y^2 - 2xz$, $R(x, y, z) = z^2 - 2yx$. Обчислимо ротор даного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2yz & y^2 - 2xz & z^2 - 2yx \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 2xz & z^2 - 2yx \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2yz & z^2 - 2yx \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 - 2yz & y^2 - 2xz \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left((z^2 - 2yx)'_y - (y^2 - 2xz)'_z \right) - \vec{j} \left((z^2 - 2yx)'_x - (x^2 - 2yz)'_z \right) + \\ &+ \vec{k} \left((y^2 - 2xz)'_x - (x^2 - 2yz)'_y \right) = \vec{i}(-2x + 2x) - \vec{j}(-2y + 2y) + \vec{k}(-2z + 2z) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Тобто, векторне поле $\vec{a}(M)$ – потенційне.

Розглянемо ламану $M_0M_1M_2M$, де $M_0(0,0,0)$ (рис. 14). Потенціал за формулою (17):

$$u(x, y, z) = C + \int_{M_0M_1M_2M} (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2yx)dz.$$

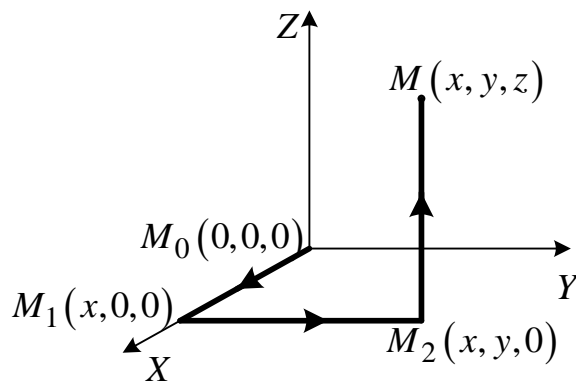


Рис. 14

Розглянемо окремі ланки ламаної:

$$M_0M_1 : 0 \leq x \leq x, y = 0, z = 0;$$

$$M_1M_2 : x = \text{const}, 0 \leq y \leq y, z = 0;$$

$$M_2M : x = \text{const}, y = \text{const}, 0 \leq z \leq z.$$

Продовжимо обчислення потенціалу

$$u(x, y, z) = C + \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - 2yx) dz = C + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz.$$

Можна перевірити результат за допомогою означення $\vec{a}(M) = \text{grad}u(M)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 2yz = P(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2xz = Q(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = z^2 - 2yx = R(x, y, z).$$

Відповідь: векторне поле $\vec{a}(M)$ – потенційне,

$$u(x, y, z) = C + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz.$$

Соленоїдальне векторне поле.

Означення. Векторне поле $\vec{a}(M)$, задане в області $V \subset R^3$, називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*), якщо в усіх точках даної області виконується: $\text{div} \vec{a}(M) = 0$.

В гідродинамічній інтерпретації: соленоїдальне векторне поле – це поле без джерел, в електростатиці – поле без зарядів.

Теорема. Векторне поле $\vec{a}(M)$, задане в області $V \subset R^3$, соленоїдальне тоді і лише тоді, коли векторне поле $\vec{a}(M)$ є ротором деякого вектора $\vec{b}(M)$:

$$\vec{a}(M) = \text{rot} \vec{b}(M).$$

$\vec{b}(M)$ – *векторний потенціал* поля $\vec{a}(M)$.

Властивості соленоїдального поля:

1. Соленоїдальні поля не мають ані джерел, ані стоків.

2. Потік $\vec{a}(M)$ через будь-яку гладку замкнену поверхню Ω , що міститься в полі, дорівнює нулю

$$\Pi = \iint_{\Omega} \left(\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dx dy dz = 0.$$

3. В соленоїдальному полі векторні лінії ані розпочинаються, ані закінчуються; вони або замкнені, або мають кінці на межі поля.

4. Потік векторного поля через поперечний переріз векторної трубки (інтенсивність цієї трубки) в соленоїдальному полі залишається сталим вздовж усієї трубки.

Якщо векторне поле є швидкістю течії рідини, то кількість рідини, що витікає через поперечний переріз векторної трубки, завжди дорівнює кількості рідини, яка втікає.

Гармонійне векторне поле.

Означення. Векторне поле $\vec{a}(M)$, задане в області $V \subset R^3$, гармонійне, якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ і $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$ в усіх точках цього поля.

Або $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, де $\vec{a}(M) = \operatorname{grad} F$; функція F – гармонійна.

Гармонійне векторне поле – потенційне поле, потенціал якого – гармонійна функція.

Довільне векторне поле можна розглядати як результат накладання потенціального і соленоїдального полів.

Приклад 6. Визначити тип векторного поля

$$\vec{a}(M) = \{-2x - 2y + 3z; 2z - 2x + 1; 2z + 2y + 3x + 2\}.$$

Розв'язання. Обчислимо диференціальні характеристики заданого поля. Дивергенція $\operatorname{div} \vec{a}(M) = -2 + 0 + 2 \equiv 0$. Це дозволяє зробити висновок, що поле є соленоїдальним. Перевіримо, чи виконується для поля критерій потенційності. Ротор

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x - 2y + 3z & 2z - 2x + 1 & 2z + 2y + 3x + 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-2x+1 & 2z+2y+3x+2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x-2y+3z & 2z+2y+3x+2 \end{vmatrix} + \\
&+ \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -2x-2y+3z & 2z-2x+1 \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \left((2z+2y+3x+2)'_y - (2z-2x+1)'_z \right) - \vec{j} \left((2z+2y+3x+2)'_x - (-2x-2y+3z)'_z \right) + \\
&+ \vec{k} \left((2z-2x+1)'_x - (-2x-2y+3z)'_y \right) = \vec{i}(2-2) - \vec{j}(3-3) + \vec{k}(-2+2) \equiv \vec{0}.
\end{aligned}$$

Тобто поле $\vec{a}(M)$ є потенційним полем. Таким чином, $\operatorname{div} \vec{a}(M) \equiv 0$, і $\operatorname{rot} \vec{a}(M) \equiv \vec{0}$, тому поле $\vec{a}(M)$ – гармонійне поле.

ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Виконати дії: а) $\sqrt[3]{8}$, б) $(1-j^2)^6 \cdot (\sqrt{3}+j)^5$.

Розв'язання. а) $\sqrt[3]{8}$:

Знайдемо аргумент z . За рисунком 1 $\varphi = \arg z = 0$.

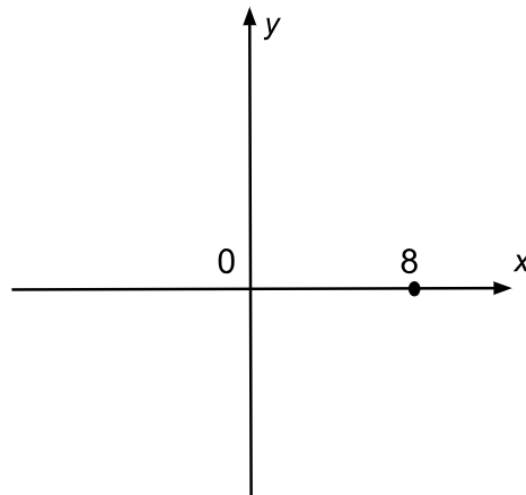


Рисунок 1

Отже число $z=8$ в тригонометричній формі набуває вигляду:
 $z=|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = 8(\cos 0 + j \sin 0)$. Скористаємось формулою для обчислення кореня з комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

В нашому випадку: $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{2\pi k}{3} + j \sin \frac{2\pi k}{3} \right)$, $k=0,1,2$.

$$k=0: z_1 = 2(\cos 0 + j \sin 0) = 2,$$

$$k=1: z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + j\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} k=2: z_3 &= 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{3} \right) + j \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + j \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - j\sqrt{3}. \end{aligned}$$

При обчисленні значень z_1, z_2, z_3 використано відомі значення

тригонометричних функцій та їх періодичність.

$$б) (1 - j^2)^6 \cdot (2 + j)^5.$$

Розглянемо кожен множник окремо:

$$1) (1 - j^2)^6 = (1 - (-1))^6 = 2^6 = 64;$$

2) $(\sqrt{3} + j)^5$: Зобразимо $z = \sqrt{3} + j$ в тригонометричній формі:

$$x = \sqrt{3}, y = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ та за рис.2 } \varphi = \arg z = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

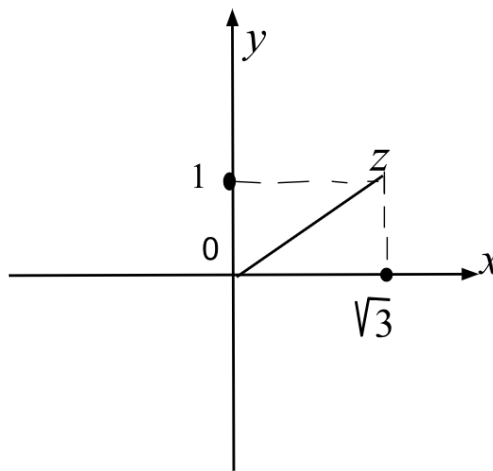


Рисунок 2

Отримуємо: $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right)$. Скористаємось формулою Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi).$$

В нашому прикладі

$$\begin{aligned} z^5 &= (\sqrt{3} + j)^5 = 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2^5 \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= 2^5 \left(-\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2^5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = 2^4 (-\sqrt{3} + j). \end{aligned}$$

Остаточо маємо: $2^6 \cdot 2^4 (-\sqrt{3} + j) = 2^{10} (-\sqrt{3} + j) = 1024 (-\sqrt{3} + j)$.

При обчисленні значень використано відомі значення тригонометричних функцій та формули зведення до гострого кута.

Відповідь: а) $z_1 = 2, z_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{3}$, б) $1024(-\sqrt{3} + j)$.

Приклад 2. Викреслити область, яка задається нерівностями

$$\begin{cases} |z + 3j| < 3, \\ \operatorname{Re} z > -4. \end{cases}$$

Розв'язання.

Оскільки $z = x + jy$, тоді $z + 3j = x + jy + 3j = x + j(y + 3)$. Обчислимо $|z + 3j| = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 3$. Підводячи до квадрата ліву та праву частини, отримуємо рівняння кола $x^2 + (y + 3)^2 = 3^2$ з центром в точці $(0, -3)$ та радіусом $R = 3$. Область $|z + 3j| < 3$ це круг, який обмежений даним колом.

Розглянемо $\operatorname{Re} z = x$. Тобто нерівність $\operatorname{Re} z > -4$ перетворюється на $x > -4$. Це півплощина, яка розташована праворуч від прямої $x = -4$. Звернемо увагу на те, що коло і пряма $x = -4$ на рисунку 3 зображуються пунктиром, бо за умовою обидві нерівності строгі.

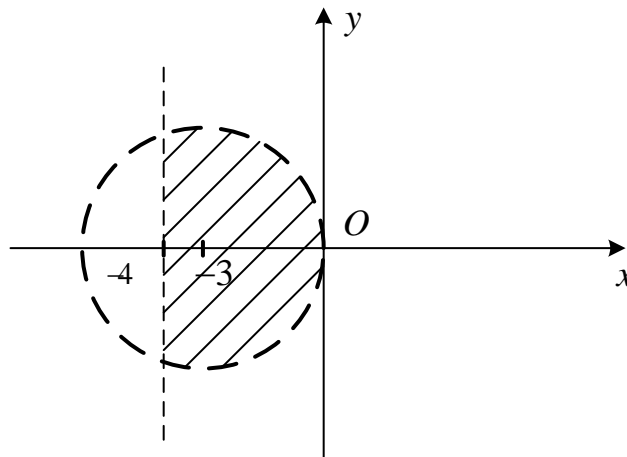


Рисунок 3

Приклад 3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральною формулою Коши: $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)^2} dz$, $L: |z + 2| = 2$.

Розв'язання. Зробимо рисунок області інтегрування:

$$z = x + jy, \quad z + 2 = x + jy + 2 = (x + 2) + jy,$$

$$|z + 2| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Отримуємо коло з центром в точці $(-2; 0)$ і радіусом $R = 2$ (рис. 4).

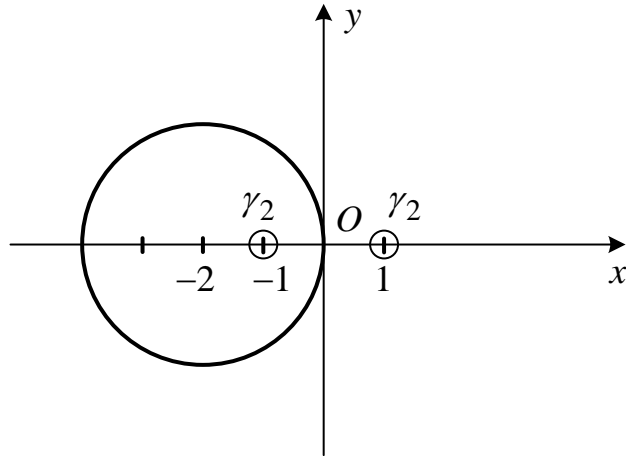


Рисунок 4

Перевіряємо, чи має підінтегральна функція точки розриву:
 $(z-1)(z+1)^2 \neq 0 \Rightarrow z-1 \neq 0, z+1 \neq 0.$

Отримуємо дві точки розриву $z_1 = 1, z_2 = -1$. Точка $z_1 = 1$ не входить до області, яка обмежена контуром L , точка $z_2 = -1$ входить до області L . Будуємо кола γ_1, γ_2 з центрами в точках z_1, z_2 достатньо малих радіусів так, щоб вони не перетинались ні з контуром L , ні між собою. За теоремою Коши для багатозв'язної області маємо:

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz.$$

Розглянемо кожен доданок окремо.

$$\oint_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz = 0 \text{ за теоремою Коши.}$$

При обчисленні другого інтеграла користуємось формулою

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

оскільки точка $z_2 = -1$ входить до області L та має кратність $n+1 = 2$.

$$\oint_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi j \left(\frac{e^{2z}}{(z-1)} \right)' \Big|_{z=-1} = 2\pi j \frac{(e^{2z})'(z-1) - e^{2z}(z-1)'}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi j \frac{2e^{2z}(z-1) - e^{2z} \cdot 1}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = 2\pi j \frac{e^{2z}(2z-2-1)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = 2\pi j \frac{e^{2z}(2z-3)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \\
&= 2\pi j \frac{e^{2(-1)}(-2-3)}{(-1-1)^2} = -\frac{2,5\pi j}{e^2}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{2,5\pi j}{e^2}$.

Приклад 4. За даним оригіналом знайти зображення:

а) $\int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sh} 5\tau d\tau$, б) $\frac{\operatorname{ch} 2t - e^t}{t}$.

Розв'язання.

а) $\int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sh} 5\tau d\tau$. Розв'язуватимемо крок за кроком.

крок 1: $\operatorname{sh} 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{5}{p^2 - 25}$ (користуємось таблицею «оригінал-зображення»);

крок 2: $e^{-t} \operatorname{sh} 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{5}{(p+1)^2 - 25}$ (користуємось теоремою зсуву

$F(p-p_0) \xrightarrow{\bullet} e^{p_0 t} \cdot f(t)$, враховуючи, що $p_0 = -1$);

крок 3: за теоремою інтегрування оригінала $\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{F(p)}{p}$,

($\operatorname{Re} p > s_0$) остаточно отримуємо:

$$\int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sh} 5\tau d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p} \cdot \frac{5}{(p+1)^2 - 25}.$$

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{5}{(p+1)^2 - 25}$.

б) $\frac{\operatorname{ch} 2t - e^t}{t}$. Розв'язуватимемо крок за кроком.

крок 1: $\operatorname{ch} 2t - e^t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 - 4} - \frac{1}{p-1}$ (використовуємо теорему

лінійності та таблицю «оригінал-зображення»);

крок 2 : використовуємо теорему інтегрування зображення:

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\bullet} \int_p^{\infty} F(w) dw, \quad (\operatorname{Re} p > s_1).$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} 2t - e^t}{t} &\xrightarrow{\bullet} \int_p^{\infty} \left(\frac{w}{w^2 - 4} - \frac{1}{w-1} \right) dw = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\int_p^B \frac{w}{w^2 - 4} dw - \int_p^B \frac{1}{w-1} dw \right) = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln |w^2 - 4| \Big|_p^B - \ln |w-1| \Big|_p^B \right) = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\sqrt{w^2 - 4}}{w-1} \right| \Big|_p^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{B-1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - 4}}{p-1} \right| \right). \end{aligned}$$

При обчисленні використано означення невласного інтеграла першого роду.

Розглянемо окремо границю:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{B-1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} k = \frac{2}{2} = 1, a_0 = 1, \\ m = 1, b_0 = 1. \end{array} \right\| = 1.$$

Остаточно отримуємо:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{B-1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - 4}}{p-1} \right| \right) = \ln 1 - \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - 4}}{p-1} \right| = \ln \left| \frac{p-1}{\sqrt{p^2 - 4}} \right|.$$

При обчисленні границі використані властивості логарифмів:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^k = k \ln a.$$

$$\text{Відповідь: } F(p) = \ln \left| \frac{p-1}{\sqrt{p^2 - 4}} \right|.$$

Приклад 5. Визначити вигляд поля. Якщо поле потенційне, знайти його потенціал $\vec{a}(M) = (y^3 + 2xy)\vec{i} + (3y^2x + x^2)\vec{j} + 2z\vec{k}$

Розв'язання. Обчислимо диференціальні характеристики заданого поля $\vec{a}(M) = (y^3 + 2xy)\vec{i} + (3y^2x + x^2)\vec{j} + 2z\vec{k}$.

$$P(x, y, z) = (y^3 + 2xy), \quad Q(x, y, z) = (3y^2x + x^2), \quad R(x, y, z) = 2z.$$

Дивергенція $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y + 6yx + 2 \neq 0$. Це дозволяє

зробити висновок, що поле не є соленоїдальним.

Перевіримо, чи виконується для поля критерій потенційності. Ротор

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 + 2xy & 3y^2x + x^2 & 2z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2x + x^2 & 2z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 + 2xy & 2z \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^3 + 2xy & 3y^2x + x^2 \end{vmatrix} = \vec{i} \left((2z)'_y - (3y^2x + x^2)'_z \right) - \vec{j} \left((2z)'_x - (y^3 + 2xy)'_z \right) + \\ &+ \vec{k} \left((3y^2x + x^2)'_x - (y^3 + 2xy)'_y \right) = \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(3y^2 + 2x - (3y^2 + 2x)) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Тобто поле $\vec{a}(M)$ є потенційним полем. Знайдемо його потенціал. Як $M_0(x_0, y_0, z_0)$ обираємо точку $M_0(0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= C + \int_{M_0M} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ &= \int_0^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_0^y Q(x, y, z_0) dy + \int_0^z P(x, y, z) dz + C = \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y x^2 dy + \int_0^z 2z dz + C = x^2 + 2 \frac{z^2}{2} + C. \end{aligned}$$

$$u(x, y, z) = C + x^2 + z^2.$$

Відповідь: поле потенційне, його потенціал $u(x, y, z) = C + x^2 + z^2$.

Приклад 6. Знайти потік поля $\vec{a}(M)$ крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини P , розміщеної у першому октанті і координатними площинами (нормаль зовнішня), користуючись формулою Гауса-Остроградського: $\vec{a}(M) = \{2x, y - 3, z + 1\}$, $P: 3x + 2y + 6z = 6$.

Розв'язання. Зробимо рисунок поверхні. Для того, щоб зробити рисунок площини P потрібно від загального рівняння площини перейти до рівняння

„у відрізках”. Нагадаємо що рівняння площини „у відрізках” має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (рис. 5).}$$

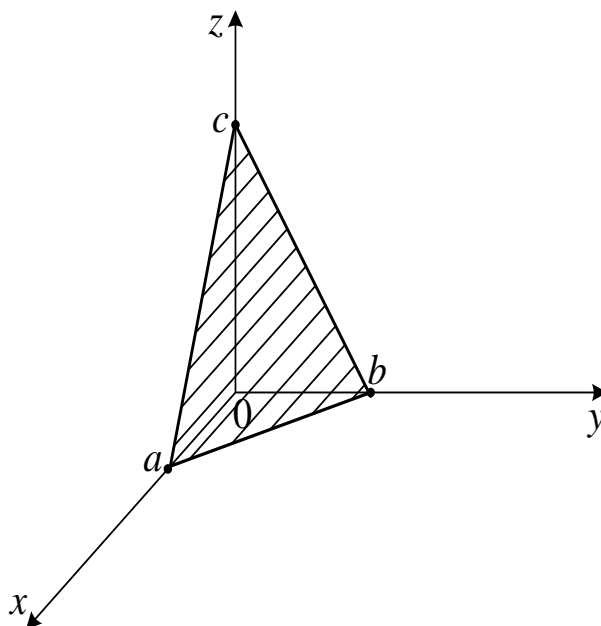


Рисунок 5

В нашому прикладі:

$$3x + 2y + 6z = 6 \quad | :6$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2y}{6} + \frac{6z}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1.$$

Маємо рисунок 6.

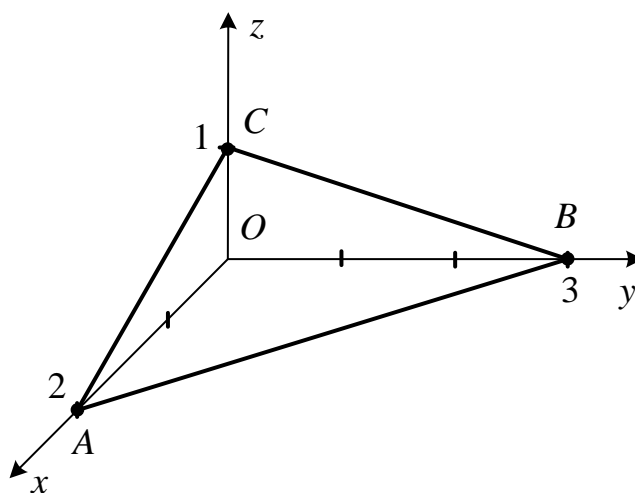


Рисунок 6

За формулою Гауса-Остроградського:

$$\Pi = \iint_{\Omega} \left(\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz.$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M)$:

$$P(x, y, z) = 2x, Q(x, y, z) = y - 3, R(x, y, z) = z + 1,$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 1 + 1 = 4.$$

$$\text{Отже, } \Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz = \iiint_V 4 dx dy dz = 4 \iiint_V dx dy dz.$$

Зауважимо, що $\iiint_V dx dy dz$ це об'єм піраміди $ABCO$.

$$\text{Обчислимо } V_{ABCO} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

Остаточно маємо: $\Pi = 4 \cdot 1 = 4$.

Відповідь: $\Pi = 4$.