МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю.І. Першина, Н.В. Черемська, Т.Т. Черногор

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
з курсу вищої математики

для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3від12.10.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

УДК 517.3(075)
П 44

Рецензенти:

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Українська інженерно-педагогічна академія (Україна)

В.А. Ванін, д-р тех. наук, професор, НТУ «ХПІ»

Першина Ю.І.
П 44 Похідна та її застосування : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Ю.І. Першина, Н.В. Черемська, Т.Т. Черногор – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 110 с.

ISBN

Навчально-методичний посібник присвячений одній із найважливіших тем математичного аналізу – диференційному численню функцій однієї змінної. В посібнику докладно висвітлюється необхідний теоретичний матеріал та розв’язано типові завдання. Посібник містить завдання для самостійної роботи та 25 варіантів розрахунково-графічних завдань для індивідуальної роботи студентів.

Призначено для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Іл. 23. Бібліогр.: 10 назв.

УДК 517.3(075)

ISBN

ВСТУП

Диференційне числення функції однієї змінної широко використовується в різноманітних галузях сучасної науки і техніки, тому цей розділ математичного аналізу в курсі вищої математики має важливе значення в математичній освіті інженерів усіх спеціальностей.

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики «Похідна та її застосування» має за мету допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, а також набути практичних навичок у диференціюванні функцій однієї змінної та застосуванні похідної при дослідженні функції та побудові її графіка. У даному посібнику приділено достатню увагу детальному роз'ясненню методів розв'язання типових завдань за темою «Похідна та її застосування». Контекст учбового матеріалу відповідає програмі навчання студентів технічних спеціальностей.

Навчально-методичний посібник складається з двох частин, до складу яких входять необхідний теоретичний матеріал, детальний розбір типових задач, приклади для аудиторної та самостійної роботи, до яких додаються відповіді, а також містить 25 варіантів розрахунково-графічних завдань для індивідуальної роботи студентів. .

Головне призначення посібника – допомогти студентам в вивченні даних розділів курсу вищої математики в умовах скороченої кількості аудиторних занять. Посібник може стати в нагоді також студентам заочного відділення та студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом та для молодих викладачів без достатнього досвіду роботи.

Автори

1. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1. Означення похідної, її геометричне та механічне тлумачення

Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 та деякому її околі. Припустимо, що аргумент x_0 отримав деякий приріст $\Delta x (\Delta x \le 0)$ або $\Delta x (\Delta x \ge 0)$, і при цьому $x_0 + \Delta x$ точка цього ж околу. Тоді функція отримає приріст Δy такий, що $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Розглянемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ та обчислимо границю цього відношення за умови, що $\Delta x \to 0$.

Якщо така границя існує, то вона носить назву похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 та позначається $y'(x_0)$.

Таким чином,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Підсумовуючи, маємо: похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення (якщо вона існує) приросту функції $f(x)$ в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Для того щоб у точці x_0 існувала похідна функції $f(x)$, необхідно та достатньо, щоб у цій точці існували права та ліва похідна цієї функції і щоб права похідна дорівнювала лівій похідній.

Якщо функція в точці x_0 має скінченну похідну, то вона називається диференційованою в цій точці.

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ носить назву диференціювання.

Функція, диференційована в кожній точці інтервалу (a,b), називається диференційованою на інтервалі (a,b).

Для безпосереднього знаходження похідної від функції застосовують алгоритм:

1) надають аргументу x довільний приріст Δx та знаходять нарощене значення функції $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$;
2) знаходять приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
3) складають відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) знаходять остаточно $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Слід зауважити, що часто у виразі «похідна від функції $f(x)$» слово «від» опускають і говорять: «похідна функції $f(x)$».

Розглянемо кілька прикладів.

<u>Приклад 1.1.</u> Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y = 4x^3 - 5x$.

<u>Розв’язання.</u>

Для заданої функції маємо:

1) $y+\Delta y = 4(x+\Delta x)^3 - 5(x+\Delta x) =$

$= 4(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 5(x+\Delta x) =$

$= 4x^3 + 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 5x - 5\Delta x$

2) $\Delta y = 4x^3 + 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 5x - 5\Delta x -$

$-4x^3 + 5x = 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 5\Delta x$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 5\Delta x}{\Delta x} =$

$= 12x^2 + 12x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 5$

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (12x^2 + 12x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 5) = 12x^2 - 5.$

Отже, $y'(x)=12x^2-5.$

<u>Приклад 1.2.</u> Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y=3^{x^2}$.

<u>Розв'язання.</u>

Маємо:

$$1)\, y+\Delta y=3^{(x+\Delta x)^2}=3^{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2}$$

$$2)\, \Delta y=3^{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2}-3^{x^2}=3^{x^2}(3^{2x\Delta x+(\Delta x)^2}-1)$$

$$3)\, \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3^{x^2}(3^{2x\Delta x+(\Delta x)^2}-1)}{\Delta x}$$

$$4)\, \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{x^2}(3^{2x\Delta x+(\Delta x)^2}-1)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{x^2}(2x\Delta x+(\Delta x)^2)\times\ln 3}{\Delta x}=\left\|\begin{array}{c}\text{Скористаємось}\\ \text{наслідками другої}\\ \text{визначної границі}\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{x^2}\Delta x(2x+\Delta x)\times\ln 3}{\Delta x}=3^{x^2}2x\times\ln 3$$

Отже, $y'=3^{x^2}2x\ln 3.$

<u>Приклад 1.3.</u> Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y=\ln(7x-2)$.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось наведеним вище алгоритмом:

$$1)\, y+\Delta y=\ln(7(x+\Delta x)-2)=\ln(7x+7\Delta x-2)$$

$$2)\, \Delta y=\ln(7x+7\Delta x-2)-\ln(7x-2)=\ln\frac{7x+7\Delta x-2}{7x-2}=$$

$$=\ln\left(\frac{7x-2}{7x+2}+\frac{7\Delta x}{7x+2}\right)=\ln\left(1+\frac{7\Delta x}{7x-2}\right)$$

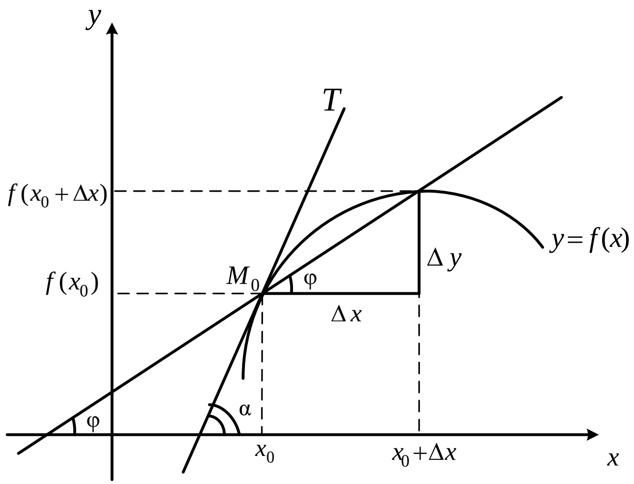
$$3)\, \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{7\Delta x}{7x-2}\right)}{\Delta x}$$

$$4)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{7\Delta x}{7x-2}\right)}{\Delta x}=\left\|\begin{array}{c}\text{Використовуючи}\\ \text{наслідки другої}\\ \text{визначної границі}\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\Delta x}{(7x-2)\Delta x}=\frac{7}{7x-2}.$$

Таким чином, $y'(x)=\dfrac{7}{7x-2}$.

Геометричне тлумачення похідної



Із рисунку видно, що $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f\,x_0}{\Delta x}=f'(x_0).$

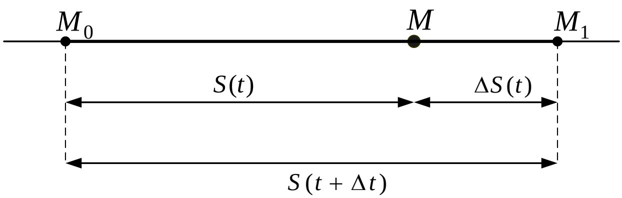
Тобто похідна функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $(x_0;f(x_0))$ з додатним напрямком осі *OX*. Це твердження і виражає геометричний зміст похідної. Дійсно, оскільки $\operatorname{tg}\varphi$ є неперервною функцією кута φ, то $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$ при $\varphi \to \alpha$.

А, отже, кутовий коефіцієнт k дотичної M_0T до кривої $y = f(x)$ в точці M_0 можна записати:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Механічне тлумачення похідної

Припустимо, що точка M рухається по прямій за законом $S = S(t)$, де $S-$ довжина шляху, взята від деякої початкової точки M_0, t − час, за який пройдено шлях S. Нехай M − положення точки в момент t, M_1- в момент $t+\Delta t$, $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ − довжина шляху, пройденого за час Δt.



Відношення $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ в механіці називають середньою швидкістю руху на ділянці MM_1, а границю цього відношення при $\Delta t \to 0$ називають швидкістю руху в точці M, або миттєвою швидкістю в момент t. Якщо миттєву швидкість в момент t позначити через $V(t)$, то

$$V(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Отже, механічний зміст похідної – це миттєва швидкість в момент t.

1.2. Основні правила диференціювання функцій

За умови, що $U = U(x)$ та $V = V(x)$ – диференційовані функції, а $C = const$, то

1. $(C)' = 0,$
2. $(CU)' = C \cdot U',$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V',$
4. $(U \cdot V)' = U'V + UV',$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}.$

А якщо $y = y(U)$, де $U = U(x)$, то є справедливою формула:

6. $y'_x = y'_U \cdot U'_x.$

Таблиця похідних

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R, x > 0$;	10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lvert x \rvert < 1$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, x \in R$;	11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lvert x \rvert < 1$;
3. $(e^x)' = e^x, \ x \in R$;	12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in R$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \ 0 < a \neq 1, x > 0$;	13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in R$;
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \ x > 0$;	14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \ x \in R$;
6. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R$;	15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \ x \in R$;
7. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R$;	16. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \ x \in R$;
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;	17. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \ x \neq 0$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \ x \neq \pi n, n \in Z$;	

Наведені вище правила та формули слід запам’ятати і використовувати для знаходження похідних функцій.

При диференціюванні функцій слід зважити на наступні зауваження:

Зауваження 1. Починати диференціювати треба із застосування правил і лише після цього використовувати формули диференціювання основних елементарних функцій.

Зауваження 2. Слід мати на увазі, що взагалі не обов'язково диференціювати задану функцію відразу. Можна попередньо зробити тотожні перетворення, якщо це доцільно, тобто веде до спрощення диференціювання, а вже потім диференціювати.

Зауваження 3. Не рекомендується захоплюватись спрощенням виразів внаслідок диференціювання, бо основна мета полягає в опануванні технікою диференціювання, а не в перевірці уміння робити тотожні перетворення.

При знаходженні похідних слід пам'ятати:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0,$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a > 0,$$

а також знати правила дій із степенями та коренями:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n}, \quad (a, b > 0),$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}, \quad (a, b > 0).$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n},$$

Тут m та n – будь-які раціональні числа.

Застосовуючи правила та формули диференціювання, знайти похідні функцій.

Приклад 1.4. $y = 4x^3 + 7x - 10$

Розв'язання. Застосовуючи послідовно відповідні правила 1,2,3 та формулу 1, отримаємо:

$$y' = (4x^3)' + (7x)' - (10)' = 4 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 1 - 0 = 12x^2 + 7 \; .$$

Приклад 1.5. $y = 9x^5 - 13x^2 + \sqrt[4]{5}$

Розв’язання. Як і в попередньому прикладі маємо:

$$y' = (9x^5)' - (13x^2)' + (\sqrt[4]{5})' = 9\left(x^5\right)' - 13(x^2)' + (\sqrt[4]{5})' = 45x^4 - 26x\,.$$

Приклад 1.6. $y = 7\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{3}{x^2}$

Розв’язання. Має сенс спочатку переписати умову $y = 7\cdot x^{5/3} - 3x^{-2}$. Використовуючи послідовно правила 1, 2, 3 та формулу 1:

$$y' = 7\cdot\frac{5}{3}x^{5/3-1} - 3\left(-2\right)x^{-2-1} = \frac{35}{3}x^{2/3} + 6x^{-3}\,.$$

При знаходженні похідних в аналогічних прикладах проміжні дії можна виконувати усно, записуючи лише остаточний результат диференціювання.

Приклад 1.7. Знайти y', якщо $y = \left(x^3 - 4x + 5\right)\left(9 - x^2\right)$

Розв’язання. На основі правил 1, 2, 3, 4 та формули 1, одержимо

$$y' = \left(x^3 - 4x + 5\right)'\cdot\left(9 - x^2\right) + \left(x^3 - 4x + 5\right)\cdot\left(9 - x^2\right)' =$$
$$= \left(3x^2 - 4\right)\left(9 - x^2\right) + \left(x^3 - 4x + 5\right)\left(-2x\right).$$

Приклад 1.8. $y = \dfrac{4x^5 - 8}{7x^2 + x - 1}$. Знайти y'.

Розв’язання. Послідовно використовуючи правила 1, 2, 5 та формулу 1, отримаємо:

$$y' = \frac{\left(4x^5 - 8\right)'\cdot\left(7x^2 + x - 1\right) - \left(4x^5 - 8\right)\cdot\left(7x^2 + x - 1\right)'}{\left(7x^2 + x - 1\right)^2} =$$
$$= \frac{20x^4\left(7x^2 + x - 1\right) - \left(4x^5 - 8\right)\left(14x + 1\right)}{\left(7x^2 + x - 1\right)^2}.$$

Приклад 1.9. Знайти похідну функції. $y = \dfrac{5}{x^4 + 2}$

Розв’язання. За правилом 4 та формулою 1 маємо:

$$y=-\frac{5\cdot\left(x^4+2\right)'}{\left(x^4+2\right)^2}=-\frac{5\cdot 4x^3}{\left(x^4+2\right)^2}=-\frac{20x^3}{\left(x^4+2\right)^2}.$$

<u>Приклад 1.10.</u> $y=\frac{1-x^8}{\sqrt{\pi}}$, знайти y'.

<u>Розв'язання.</u> На основі правила 2 маємо:

$$y'=\left(\frac{1-x^8}{\sqrt{\pi}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-x^8\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(0-8x^7\right)=\frac{-8x^7}{\sqrt{\pi}}.$$

<u>Приклад 1.11.</u> $S(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^3}{5}$. Обчислити $S'(2)$.

<u>Розв'язання.</u> Спочатку знайдемо $S'(t)$, використовуючи правила 2, 4 та формулу 1:

$$S'(t)=\left(\frac{3}{5-t}\right)'+\left(\frac{t^3}{5}\right)'=3\cdot\left(\frac{1}{5-t}\right)'+\frac{1}{5}\left(t^3\right)'=$$

$$=3\left(-\frac{(5-t)'}{(5-t)^2}\right)+\frac{1}{5}\cdot 3t^2=\frac{3}{(5-t)^2}+\frac{3t^2}{5}.$$

Підставляючи значення аргументу t у вираз для похідної отримаємо:

$$S'(2)=\frac{3}{(5-2)^2}+\frac{3\cdot 2^2}{5}=\frac{3}{9}+\frac{12}{5}=\frac{1}{3}+\frac{12}{5}=\frac{5+36}{15}=\frac{41}{15}.$$

1.3. Диференціювання складної функції.

Нагадаємо, якщо $y=y(U)$ і $U=U(x)$ – диференційовані функції, то складна функція $y=y(U(x))$ є також диференційованою, причому $y'_x=y'_U\cdot U'_x$ або $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dU}\cdot\frac{dU}{dx}$.

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого скінченного числа диференційованих функцій: похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, які її складають.

Про диференціювати дані функції.

<u>Приклад 1.12</u>. $y=\left(x^3+5\right)^7$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо складну степеневу функцію з проміжним аргументом $U=x^3+5$. Тому функцію можна подати у вигляді $y=U^7$, де $U=x^3+5$. За формулою (6):

$$y'_x=y'_U\cdot U'_x=\left(U^7\right)'_U\cdot\left(x^3+5\right)'_x=7U^6\cdot 3x^2=7\left(x^3+5\right)^6\cdot 3x^2.$$

<u>Приклад 1.13</u>. $y=\cos 5x$.

<u>Розв'язання.</u> Аргументом косинуса даної функції є *5x*. Отже, маємо складну функцію, яку можна подати у вигляді $y=\cos U$, де $U=5x$.

Тоді за формулою (6):

$$y'_x=\left(\cos U\right)'_U\cdot\left(5x\right)'_x=-\sin U\cdot 5=-5\sin 5x.$$

<u>Приклад 1.14</u>. $y=\ln^4 x$.

<u>Розв'язання.</u> Це складна степенева функція з проміжним аргументом $U=\ln x$. Функція може бути подана у вигляді $y=U^4$, де $U=\ln x$.

Знаходячи похідні y'_U та U'_x, та підставляючи їх до формули (6) маємо:

$$y'_x=4U^3\cdot\frac{1}{x}=4\left(\ln x\right)^3\cdot\frac{1}{x}.$$

<u>Приклад 1.15</u>. $y=9^{\sin x}$.

<u>Розв'язання.</u> Дану функцію можна подати у вигляді $y=9^U$, де $U=\sin x$, а , отже маємо:

$$y'_x=9^U\cdot\ln 9\cdot\cos x=9^{\sin x}\cdot\ln 9\cdot\cos x.$$

<u>Приклад 1.16</u>. $y=\arcsin x^3$.

Розв’язання. У даному випадку доцільно розглядати функцію у вигляді $y=\arcsin U$, де $U=x^3$. Тоді:

$$y'_x=\left(\arcsin U\right)'_U\cdot\left(x^3\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Приклад 1.17. $y=e^{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.

Розв’язання. Подаючи функцію у вигляді $y=e^{\sqrt{U}}, U=\sqrt{V}, V=\operatorname{tg}x$, і користуючись правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$y'_x=y'_U\cdot U'_V\cdot V'_x=\left(e^U\right)'_U\cdot\left(\sqrt{V}\right)'_V\cdot\left(\operatorname{tg}x\right)'_x=e^U\cdot\frac{1}{2\sqrt{V}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=e^{\sqrt{\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Слід зауважити, що при диференціюванні складної функції немає потреби робити такі докладні записи. Результати слід записувати відразу.

Приклад 1.18. $y=\left(1+\sin^3 x\right)^8$.

Розв’язання. Маємо:

$$y'_x=8\left(1+\sin^3 x\right)^7\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Приклад 1.19. $y=\ln^7\left(\operatorname{ctg}x\right)=\left(\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)\right)^7$.

Розв’язання. $y'=7\left(\ln\operatorname{ctg}x\right)^6\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Приклад 1 20. $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{4x+5}{6}}=\left(\ln\sin\frac{4x+5}{6}\right)^{1/3}$.

Розв’язання.

$$y'=\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{4x+5}{6}\right)^{-2/3}\cdot\frac{1}{\sin\frac{4x+5}{6}}\cdot\cos\frac{4x+5}{6}\cdot\frac{4}{6}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{4x+5}{6}\right)^{-2/3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{4x+5}{6}\cdot\frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 1.21</u>. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

<u>Розв'язання.</u>

$$y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \frac{(x)' \ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

<u>Приклад 1.22</u>. $y = a \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)$.

<u>Розв'язання.</u>

$$y' = a \cdot \left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)\right)' = a \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{k} + b\right)} \cdot \left(\frac{x}{k} + b\right)' = \frac{a}{k \cdot \cos^2\left(\frac{x}{k} + b\right)}.$$

<u>Приклад 1.23</u>. $y = \log_5\left(x^3 - \sin x\right)$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо складну логарифмічну функцію з проміжним аргументом $x^3 - \sin x$. Продиференціювавши її, одержимо:

$$y' = \frac{1}{\left(x^3 - \sin x\right)\ln 5} \cdot \left(3x^2 - \cos x\right).$$

<u>Приклад 1.24</u>. $y = \ln \frac{1 - e^x}{e^x}$.

<u>Розв'язання.</u> При розв'язанні цього приклада доцільно спочатку виконати логарифмування, тобто записати її у вигляді $y = \ln\left(1 - e^x\right) - \ln e^x = \ln\left(1 - e^x\right) - x$, а вже потім знайти її похідну. Таким чином:

$$y' = \frac{-e^x}{1 - e^x} - 1 = \frac{-e^x - 1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Отже, коли під знаком логарифмічної функції стоїть вираз, що піддається логарифмуванню (добуток, частка, степінь, корінь), то спочатку слід виконати логарифмування, бо в такому випадку знаходження похідної значно спрощується.

<u>Приклад 1.25</u>. $y = \ln\sqrt{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}$.

Розв'язання. В даному випадку диференціювання значно спрощується, якщо застосувати властивості логарифмів:

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}=\frac{1}{2}\ln\left(1+2x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-2x\right), \text{ а отже,}$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-2\right)}{1-2x}=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-2x}=\frac{1-2x+1+2x}{1-4x^2}=\frac{2}{1-4x^2}.$$

Знаходження похідної в розглянутому прикладі безпосередньо за формулами диференціювання, привело б до значно складніших перетворень.

Питання для самоперевірки

1. Що називається приростом аргументу та приростом функції?
2. Дайте означення похідної функції.
3. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування похідної функції в точці x_0.
4. У чому полягає геометричне тлумачення похідної?
5. У чому полягає механічне тлумачення похідної?
6. Основні правила диференціювання функцій.
7. Таблиця похідних основних елементарних функцій.
8. Яку функцію називають складною?
9. Правило диференціювання складної функції.

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні даних функцій:

1. $y=4\sin\left(2x-1\right)$; **2.** $y=\cos^3 4x$; **3.** $y=\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$; **4.** $y=\sqrt{\ln x}$;

5. $y=\ln\left(x^3-5x\right)$; **6.** $y=10^{2x-3}$; **7.** $y=\sin e^{x^2+3x-2}$; **8.** $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$;

9. $y=\ln\left(x\cdot\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$; **10.** $y=e^{\arcsin 2x}$; **11.** $y=\ln\frac{ae^x}{bx^2+c}$.

Відповіді

1. $8\cos(2x-1)$; **2.** $-12\cos^2 4x\cdot\sin 4x$; **3.** $-\dfrac{2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}{1+x^2}$; **4.** $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$;

5. $\dfrac{3x^2-5}{x^3-5x}$; **6.** $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$; **7.** $\cos e^{x^2+3x-2}\cdot e^{x^2+3x-2}(2x+3)$;

8. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$; **9.** $\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg}x+\dfrac{-2x}{2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\dfrac{x}{1-x^2}$;

10. $\dfrac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$; **11.** $\dfrac{bx^2-2bx+c}{bx^2+c}$.

2. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Диференціювання функцій, що попередньо допускають операцію логарифмування (добуток, частка, піднесення до степеню і добування кореня), значно спрощується, якщо ці функції спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідні.

Вираз $\dfrac{y'}{y}=(\ln y)'$, який є похідною за змінною x від натурального логарифму функції $y=f(x)$, називається логарифмічною похідною, а процес її знаходження носить назву логарифмічного диференціювання.

Слід пам’ятати, що формула має сенс лише за умови, що $y>0$.

Також необхідно підкреслити, що логарифмічне диференціювання застосовується для знаходження похідної степенево-показникової (показниково-степеневої) функції, тобто функції вигляду $y=\left(U(x)\right)^{V(x)}$.

Доречно нагадати властивості логарифмів:

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\quad \ln\left(a^n\right)=n\cdot\ln a,$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b,\quad \ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a.$$

<u>**Приклад 2.1**</u>. $y=\dfrac{(2x+3)^4\cdot\sqrt[7]{5-4x}}{\sqrt[3]{(x-1)^8}}$.

<u>Розв'язання.</u> Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y=4\ln(2x+3)+\frac{1}{7}\ln(5-4x)-\frac{8}{3}\ln(x-1)\ .$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{y'}{y}=\frac{4\cdot 2}{2x+3}+\frac{1}{7}\cdot\frac{-4}{5-4x}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\ .$$

Із одержаного рівняння знаходимо y' та замінюємо y на його вираз через x:

$$y'=\frac{(2x+3)^4\cdot\sqrt[7]{5-4x}}{\sqrt[3]{(x-1)^8}}\cdot\left(\frac{8}{2x+3}-\frac{4}{7(5-4x)}-\frac{8}{3(x-1)}\right).$$

<u>**Приклад 2.2**</u>. $y=\sqrt{x\cdot\sin 4x\cdot\sqrt{1+e^{3x}}}$.

<u>Розв'язання.</u> Діючи, як і в попередньому прикладі, одержимо:

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln\sin 4x+\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{3x}\right)\right),$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{4\cos 4x}{\sin 4x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right),$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x\cdot\sin 4x\cdot\sqrt{1+e^{3x}}}\cdot\left(\frac{1}{4}+4\mathrm{ctg}4x+\frac{3e^{3x}}{2\left(1+e^{3x}\right)}\right).$$

<u>**Приклад 2.3**</u>. $y=\left(x^3-4\right)^{\sin x}$.

Розв’язання. Задана функція є степенево-показниковою, бо і основа x^3-4, і показник степеню $\sin x$ — функції від *x*. Як і в попередньому прикладі маємо: $\ln y=\sin x\cdot\ln\left(x^3-4\right)$.

Таким чином, $\dfrac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln\left(x^3-4\right)+\sin x\cdot\dfrac{3x^2}{x^3-4}$.

А, отже, $y'=\left(x^3-4\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\left(x^3-4\right)+\dfrac{3x^2\cdot\sin x}{x^3-4}\right)$.

Приклад 2.4. $y=\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$.

Розв’язання. Маємо $\ln y=\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}\cdot\ln\mathrm{tg}2x$.

Тоді: $\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\ln\mathrm{tg}2x+\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2}{\mathrm{tg}2x\cdot\cos^2 2x}$.

Остаточно отримаємо: $y'=\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}\cdot\left(-\dfrac{\ln\mathrm{tg}2x}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}+\dfrac{4\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}}{\sin 4x}\right)$.

Приклад 2.5. $y=x^{x^x}$.

Розв’язання. Маємо: $\ln y=\ln x^{x^x}$,

$$\ln y=x^x\cdot\ln x.$$

Тоді $\dfrac{y'}{y}=\left(x^x\right)'\cdot\ln x+x^x\cdot\dfrac{1}{x}$, $\quad y'=x^{x^x}\left(\left(x^x\right)'\cdot\ln x+x^{x-1}\right)$..

Позначимо через $y_1=x^x$, та знайдемо її похідну:

$$\ln y_1=x\cdot\ln x,$$

$$\frac{y_1'}{y_1}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x},$$

$$y_1'=x^x\left(\ln x+1\right).$$

Остаточно одержимо:

$$y' = x^{x^x}\left(x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1}\right) = x^{x^x}\left(x^x\ln^2 x + x^x\ln x + x^{x-1}\right) =$$
$$= x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається логарифмічною похідною?
2. Правило логарифмічного диференціювання.
3. Формула для знаходження похідної степенево-показникової функції.

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні від даних функцій:

1. $y = x^{\sin x}$; **2.** $y = \dfrac{(x+1)^3\cdot\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; **3.** $y = \dfrac{x\cdot e^x\cdot \mathrm{arctg}x}{\ln^5 x}$;

4. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$; **5.** $y = \sqrt[x]{x}$.

Відповіді

1. $y' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$;

2. $y' = \dfrac{(x+1)^3\cdot\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\cdot\left(\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{4(x-2)}-\dfrac{2}{5(x-3)}\right)$;

3. $y' = \dfrac{x\cdot e^x\cdot \mathrm{arctg}x}{\ln^5 x}\left(\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{1}{(1+x^2)\mathrm{arctg}x}-\dfrac{5}{x\cdot\ln x}\right)$;

4. $y' = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3(x-5)}-\dfrac{2x}{15(x^2+4)}\right)$; **5.** $y' = x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x)$.

3. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Функція, що задана рівнянням виду $y = f(x)$, є такою, що задана в явному вигляді, або явною. Неявна функція у від аргументу *x* задається рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язаним відносно залежної змінної *y*.

Для того, щоб знайти похідну y' від неявної функції слід продиференціювати по *x* обидві частини рівності $F(x, y) = 0$, розглядаючи *y*, як функцію від *x*, а вже потім розв'язати відносно y' одержане рівняння.

<u>Приклад 3.1.</u> Знайти y', якщо $y^3 - 3y + 2ax = 0$.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо похідну від обох частин рівняння з урахуванням того, що *y* є функція від *x*: $3y^2 \cdot y' - 3y' + 2a = 0$.

Звідки $y'\left(3y^2 - 3\right) = -2a,$

$$y' = \frac{-2a}{3\left(y^2 - 1\right)} = \frac{2a}{3\left(1 - y^2\right)}.$$

<u>Приклад 3.2.</u> Знайти y', якщо $e^y + xy = e$.

<u>Розв'язання.</u> Діючи, як в попередньому прикладі, маємо:

$$e^y \cdot y' + y + xy' = 0,$$

$$y'\left(e^y + x\right) = -y,$$

$$y' = \frac{-y}{e^y + x}.$$

<u>Приклад 3.3.</u> $x^2 y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$.

<u>Розв'язання.</u> Продиференціюємо обидві частини рівняння:

$$2xy + x^2 y' + \frac{1}{1 + \left(y/x\right)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 0.$$

Зробимо відповідні алгебраїчні перетворення:

$$2xy + x^2 y' + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 0,$$

$$2xy + x^2 y' + \frac{y' \cdot x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$y'\left(x^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} - 2xy.$$

Тоді:

$$y' = \frac{\frac{y}{x^2 + y^2} - 2xy}{x^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{y - 2xy\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}}{\frac{x^2\left(x^2 + y^2\right) + x}{x^2 + y^2}} = \frac{y - 2x^3 y - 2xy^3}{x^4 + x^2 y^2 + x}.$$

Питання для самоперевірки

1. Яку функцію називають заданою неявно?
2. У чому полягає правило диференціювання функції, заданої неявно?

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні від даних функцій:

1. $y = 1 + x \cdot e^y$; **2.** $\cos\left(xy\right) = x$; **3.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

4. $y^2 \cdot \cos x = a^2 \sin 3x$; **5.** $x^y = y^x$.

Відповіді

1. $y' = \dfrac{e^y}{2 - y}$; **2.** $y' = \dfrac{1 + y\sin\left(xy\right)}{x\sin\left(xy\right)}$; **3.** $y' = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$;

4. $y' = \dfrac{3a^2 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cdot \cos x}$; **5.** $y' = \dfrac{y^2 - xy \cdot \ln y}{x^2 - xy \cdot \ln x}$.

4. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРИЧНО

Відомо, що функція y аргументу x задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \text{ де } t \in [T_1, T_2], \end{cases}$$

якщо кожному значенню t відповідають значення x та y (при цьому вважається, що функції $x(t)$ та $y(t)$ однозначні).

Якщо розглядати x та y як координати точки на координатній площині XOY, то кожному значенню t буде відповідати певна точка площини.

При зміні параметру t від T_1 до T_2 множина цих точок описує певну криву.

Зазначимо, якщо $x(t)$ та $y(t)$ диференційовані на $[T_1, T_2]$ та $x'_t \neq 0 \ \forall\, t \in [T_1, T_2]$, то має місце формула:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад 4.1. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = 5 - t^3, \\ y = t - t^2. \end{cases}$.

Розв’язання. Знаходимо $x'_t = -3t^2$ і $y'_t = 1 - 2t$ та підставляючи отримані вирази для x'_t та y'_t до формули, маємо:

$$y'_x = \frac{1 - 2t}{-3t^2} = \frac{2t - 1}{3t^2}.$$

Приклад 4.2. $\begin{cases} y = t - \operatorname{arctg} t, \\ x = \ln\left(1 + t^2\right). \end{cases}$

Розв’язання. Діючи аналогічно, маємо:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{\dfrac{t^2+1-1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^2}{2t}=\frac{t}{2}.$$

Приклад 4.3. $\begin{cases} y=a(1-\cos t), \\ x=a(t-\sin t). \end{cases}$

Розв'язання. Функції x та y мають такі похідні по t:

$x'_t=a(1-\cos t),\quad y'_t=a\sin t.$

Отже,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Питання для самоперевірки

1. Яка функція називається заданою параметрично?
2. Запишіть формулу для знаходження похідної від функції, заданої параметрично.

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні від даних функцій:

1. $\begin{cases} x=a\cdot\cos^3 t, \\ y=b\cdot\sin^3 t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\dfrac{t}{t+1}. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{3at^2}{t^2+1}. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x=\ln(t^2+1), \\ y=t-\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cdot\cos t. \end{cases}$

Відповіді

1. $y'=-\frac{b}{a}\cdot\operatorname{tg} t$; **2.** $y'=-1$; **3.** $y'=\frac{2t}{1-t^2}$; **4.** $y'=\frac{t}{2}$;

5. $y'=\dfrac{\cos t-t\sin t}{1-\sin t-t\cos t}.$

5. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ ДО КРИВОЇ

Нагадаємо, що геометричний зміст похідної є тангенс кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ до додатного напряму осі *OX*. Кутовий коефіцієнт *K* дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці M_0 обчислюється за формулою:

$$K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0).$$

З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ з кутовим коефіцієнтом *K* має вигляд:

$$y - y_0 = K(x - x_0).$$

Оскільки $K = f'(x_0)$, то рівняння дотичної буде

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ та проходить через точку M_0 називається нормаллю до цієї кривої в точці M_0. Оскільки кутові коефіцієнти двох взаємно перпендикулярних прямих на площині пов’язані співвідношенням $K_1 \cdot K_2 = -1$, то рівняння нормалі до кривої набуває вигляду

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

Дане рівняння має сенс тільки за умови, що $f'(x_0) \neq 0$. Якщо ж $f'(x_0) = 0$, то рівняння нормалі буде $x = x_0$.

Кут θ між двома кривими $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ у їх спільній точці $M_0(x_0; y_0)$ визначається, як кут між двома дотичними до цих кривих у точці M_0. Таким чином, виходячи зі знань курсу аналітичної геометрії маємо:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|K_1 - K_2|}{1 + K_1 \cdot K_2},$$

або

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\varphi'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot \varphi'(x_0)},$$

де $K_1 = \varphi'(x_0)$, та $K_2 = f'(x_0)$

Приклад 5.1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до параболи $y(x) = x^2 - 2x + 5$ в точці, абсциса якої $x_0 = 2$.

Розв'язання. За умовою $x_0 = 2$, підставляючи це значення в задане рівняння параболи, знайдемо y_0: $y_0 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5$.

Таким чином маємо точку дотику $M_0(2;5)$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт параболи в точці $x_0 = 2$:

$$y' = 2x - 2, \; K = y'(2) = 2.$$

$$y - 5 = 2(x - 2) \quad \text{або} \quad 2x - y + 1 = 0;$$

Рівняння нормалі:

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{або} \quad x + 2y - 12 = 0.$$

Приклад 5.2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ в точці $M_0(1;3)$.

Розв'язання. Підставляючи значення координатної точки у рівняння, переконаємось, що точка належить заданій кривій:

$$1 - 6 + 27 - 6 - 16 = 0.$$

Продиференціюємо задане рівняння за змінною x:

$$2x - 2y - 2xy' + 6y \cdot y' - 2y' = 0, \text{ звідки } y' = \frac{x - y}{x + 1 - 3y}.$$

Похідна в точці $M_0(1;3)$: $y'(M_0) = \dfrac{-2}{1 - 9 + 1} = \dfrac{2}{7}.$

Маємо рівняння дотичної:

$$y-3=\frac{2}{7}(x-1) \quad \text{або} \quad 2x-7y+19=0\,,$$

та рівняння нормалі: $y-3=-\frac{7}{2}(x-1)$ або $7x+2y-13=0.$

Приклад 5.3. Складти рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=t^2+3t-8, \\ y=2t^2-2t-5 \end{cases}$ у точці $M_0(2;-1)$.

Розв'язання. Перш за все треба визначити значення параметра t, яке відповідає заданим значенням x та y. Це значення повинно одночасно задовольняти двом рівнянням $\begin{cases} t^2+3t-8=2, \\ 2t^2-2t-5=-1. \end{cases}$.

Корені першого рівняння $t_1=2,\ t_2=-5$ корені другого рівняння $t_1=2,\ t_2=-1.$ Таким чином, даній точці $M_0(2;-1)$ відповідає значення $t=2$. Визначимо похідну у заданій точці M_0:

$$y'\big|_{x=2}=\left.\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\right|_{t=2}=\left.\frac{4t-2}{2t+3}\right|_{t=2}=\frac{6}{7}.$$

Тобто кутовий коефіцієнт дотичної в точці M_0 дорівнює $\frac{6}{7}$. Отже, рівняння дотичної буде

$$y+1=\frac{6}{7}(x-2) \quad \text{або} \quad 7y-6x+19=0,$$

рівняння нормалі: $y+1=-\frac{7}{6}(x-2)$ або $6y+7x-8=0.$

Приклад 5.4. Знайти кути між кривими $y=2x^2$ та $y=x^3+2x^2-1$ в точці їх перетину.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину цих кривих. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y=2x^2, \\ y=x^3+2x^2-1 \end{cases}$ і отримаємо $x=1$ та

$y=2$. Таким чином, точка перетину кривих $M_0(1;2)$. Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривих за умови, що $x_0=1$:

$$y'(x)=4x,\quad y'(1)=4,\quad \text{тобто}\quad K_1=4;$$
$$y'(x)=3x^2+4x,\quad y'(1)=7,\quad \text{тобто}\quad K_2=7.$$

Отже, маємо $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{7-4}{1+4\cdot 7}=\dfrac{3}{29}$. Звідки $\theta=\mathrm{arctg}\dfrac{3}{29}$.

<u>Приклад 5.5.</u> На кривій $y=x^3-3x+5$ знайти точки, в яких дотична:

a) паралельна прямій $y=-2x$;

b) перпендикулярна до прямої $y=-\dfrac{x}{9}$;

c) утворює з додатнім напрямом осі OX кут $45°$.

<u>Розв'язання.</u> Для знаходження потрібних точок необхідно прийняти до уваги той факт, що в точці дотику кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної $y'=3x^2-3$, обчисленої у цій точці.

а) З умови паралельності (дві прямі задані на площині паралельні, якщо їх кутові коефіцієнти рівні) маємо: $3x^2-3=-2$ (-2 є кутовий коефіцієнт прямої $y=-2x$), звідки $3x^2=1$, тобто $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Знайдемо відповідні значення координати *y* точок:

$$y_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+5=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+5=5-\frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=5-\frac{8\sqrt{3}}{9},$$
$$y_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+5=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}+5=\frac{8\sqrt{3}}{9}+5.$$

Таким чином, шукані точки:

$$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad 5+\frac{8\sqrt{3}}{9}\right),\quad M_2\left(+\frac{1}{\sqrt{3}};\quad 5-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right).$$

б) З умови перпендикулярності прямих на площині $K_1\cdot K_2=-1$, маємо: $y'(x_0)=3{x_0}^2-3=9$ (кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює $K_1 = -\frac{1}{9}$, а отже, кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої $K_2 = 9$), звідки $3x^2 = 12, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$

Тобто шукані точки будуть: $M_1(-2;3), \quad M_2(2;7).$

а) за умовою дотична утворює з додатнім напрямком осі OX кут $45°$. Пряма, що відповідає даній умові, має вигляд $y = x$ і, відповідно, її кутовий коефіцієнт дорівнює 1. Маємо: $3x^2 - 3 = 1, \quad 3x^2 = 4, \quad x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Легко помітити, що

$$y_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + 5 = 5 - \frac{10}{3\sqrt{3}},\ y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 5 = 5 + \frac{10}{3\sqrt{3}}.$$

Відповідно, шукані точки будуть:

$$M_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\ \ 5 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\right), \quad M_2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ \ 5 + \frac{10}{3\sqrt{3}}\right).$$

<u>Приклад 5.6.</u> Довести, що дотичні, проведені до гіперболи $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках її перетину з осями координат паралельні між собою.

<u>Розв'язання.</u> Якщо дотичні паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні. А кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної функції в цій точці.

Знайдемо точки перетину заданої гіперболи з осями координат. Нехай $x = 0,$ тоді $y = 2;$ $y = 0,$ тоді $x = 4.$

Таким чином, маємо дві точки $M_1(0;2), \quad M_2(4;0).$

Знайдемо похідну гіперболи та обчислимо її значення в точках M_1, M_2:

$$y' = \frac{2}{(x-2)^2};\ \text{тоді}\ y'(M_1) = \frac{1}{2}, \quad y'(M_2) = \frac{1}{2}.$$

Отже, дотичні до гіперболи в точках її перетину з осями координат паралельні.

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає геометричне тлумачення похідної?
2. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої.
3. Що називають кутом між двома кривими?

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ у точці з абсцисою $x = 2a$.
2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $\begin{cases} x = 2\ln \mathrm{ctg} t + 1, \\ y = \mathrm{tg} t + \mathrm{ctg} t \end{cases}$ в точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{4}$.
3. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної та нормалі до лінії $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ у точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{6}$.
4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $2x^2 + y^2 - xy - 8 = 0$ у точці $M(2;0)$.

Відповіді

1. $x + 2y - 4a = 0, \quad y - 2x + 3a = 0;$ **2.** $y = 2, \quad x = 1;$

3. $K_1 = -2, \quad K_2 = \dfrac{1}{2};$ **4.** $y - 4x + 8 = 0, \quad 4y + x - 2 = 0.$

6. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

6.1. Означення диференціала

Виходячи із означення похідної $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ та границі змінної випливає, що при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ або $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $\alpha \to 0$.

Головна лінійна відносно приросту незалежної змінної Δx частина приросту диференційованої функції називається її диференціалом та позначається символом dy або $df\left(x\right)$.

Тобто за означенням $df\left(x\right) = f'\left(x\right) \cdot \Delta x$ або $dy = y' \cdot \Delta x$.

Оскільки $dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, то $dy = y' \cdot dx = f'\left(x\right)dx$, звідки $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df\left(x\right)}{dx}$.

Таким чином похідна функції в точці *x* дорівнює відношенню диференціала цієї функції в цій точці до диференціала аргументу. Знаходження ж диференціала функції зводиться до знаходження її похідної. Операція знаходження диференціала функції, як і операція знаходження похідної, називається диференціюванням цієї функції.

6.2. Геометричне тлумачення диференціала

Геометричний зміст диференціала функції полягає в тому, що диференціал функції в точці *x* дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f\left(x\right)$ в точці *x*, за умови, що незалежна змінна дістає приріст Δx.

6.3. Інваріантність форми диференціала

Якщо *x* – незалежна змінна, а $f\left(x\right)$ – диференційована функція від *x*, то $d\left(f\left(x\right)\right) = f'\left(x\right) \cdot dx$.

Припустимо, що $U=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – диференційована функція від *x*. Тоді складна функція $y=f\left(\varphi(x)\right)$ матиме похідну, яка дорівнює $f'_U(U)\varphi'_x(x)=y'_U\cdot U'_x$.

Диференціал цієї складної функції залишимо у вигляді $dy=y'_x\cdot dx=f'_U(U)\cdot\varphi'_x(x)dx=f'(U)\cdot U'_x dx=f'(U)dU$.

Таким чином, диференціал функції обчислюється за формулою: $df(U)=f'(U)\cdot dU$ незалежно від того, буде U незалежною змінною чи деякою диференційованою функцією від *x*, тобто форма диференціала залишається незмінною (інваріантною). Зауважимо, що коли x – незалежна змінна, то $dx=\Delta x$. Якщо ж x – функція від t, то $dx=x'(t)dt$ і, отже,взагалі кажучи, $dx\neq dt$.

6.4. Основні правила та формули диференціювання

Якщо $U=U(x)$, та $V=V(x)$ – диференційовані в точці *x*, а $c=\text{const}$, то основні правила диференціювання (випливають із основних правил знаходження похідних) мають вигляд:

$$d(c)=0;$$
$$d(U\pm V)=dU\pm dV;$$
$$d(U\cdot V)=UdV+VdU;$$
$$d(cU)=cdU;$$
$$d\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{VdU-UdV}{V^2},\quad V\neq 0.$$

Оскільки диференціал та похідна пов’язані між собою ($dy=y'\cdot dx=f'(x)dx$), то з таблиці похідних основних елементарних функцій отримуємо таблицю диференціалів цих функцій. Наприклад, $d(\sin x)=\cos dx,\ d(\ln x)=\frac{dx}{x},\ d(\text{arctg}x)=\frac{dx}{1+x^2},\quad d\left(e^x\right)=e^x dx$ тощо.

6.5. Наближені обчислення за допомогою диференціалів

Очевидно, що при досить малих значеннях Δx $\Delta y \approx dy$ або

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\cdot\Delta x.$$

Оскільки в цій формулі точка x – фіксована, а Δx набуває будь-яких досить малих значень, то її можна переписати у вигляді:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

де $\Delta x = x - x_0$.

Цією формулою зручно користуватися у випадку, коли відомо значення функції $f(x)$ в точці x_0 і необхідно знайти її значення в точці $x_0+\Delta x$, де Δx – досить мале.

<u>Приклад 6.1.</u> Знайти диференціал даної функції: $y=\mathrm{ctg}^3 x$.

<u>Розв'язання.</u> $dy=\left(\mathrm{ctg}^3 x\right)'\cdot dx = 3\mathrm{ctg}^2 x\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx = -\dfrac{3\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}dx.$

<u>Приклад 6.2.</u> Знайти диференціал даної функції: $y=5^{\frac{\ln x}{x}}$.

<u>Розв'язання.</u>

$$dy=\left(5^{\frac{\ln x}{x}}\right)\cdot dx = 5^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}dx = 5^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}dx.$$

Розв'язок прикладних і математичних задач, як правило, пов'язане з наближеними значеннями величин, наближеними обчисленнями.

Математична модель задачі — це вже наближене подання реального об'єкта. Вихідні дані, одержувані з експерименту, можна в основному визначити лише приблизно. Обчислювальні методи в основному також є наближеними. Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, одержують наближеним. Тому треба вміти оцінювати похибки наближеного обчислення.

Визначення. Абсолютною похибкою наближеного числа називають різницю $|a_0-a|$, де a – наближене значення точного числа a_0.

Тобто абсолютною похибкою наближення $\Delta y \approx dy$ буде вираз $|\Delta y - dy|$.

Абсолютна похибка числа a, прийнятого за наближене значення числа a_0, не завжди є зручною характеристикою степеня точності а як наближення до a_0. Похибка в один метр є дуже грубою помилкою при вимірі довжини приміщення, але її можна розглядати як малу помилку при вимірі відстані між двома вилученими крапками земної поверхні. Отже, крім величини абсолютної похибки, необхідно ще знати її відношення до вимірюваного (або що обчислює) величині.

Визначення. Відносною похибкою наближеного числа називають вираз $\left|\dfrac{a-a_0}{a_0}\right|$.

Тобто відносною похибкою наближення $\Delta y \approx dy$ буде вираз $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$..

Приклад 6.3. Обчислити Δy та dy функції $y = x^3 + 2x$ в точці $x = 2$, при $\Delta x = 0{,}1$ та при $\Delta x = 0{,}01$. Знайти абсолютну та відносну похибку, які ми допускаємо при заміні приросту функції її диференціалом.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3 - 2x) =$$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x =$$

$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x = (3x^2 + 2) \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$

$$dy = y' \cdot \Delta x = (3x^2 + 2) \cdot \Delta x.$$

При $x = 2$ та $\Delta x = 0{,}1$ маємо:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 2 \cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 + 2 \cdot 0{,}1 = 1{,}461;$$

$$dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0{,}1 = 1{,}4.$$

Абсолютна похибка $\left|\Delta y - dy\right| = 0,061;$ а відносна похибка при цьому $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0,061}{1,461} = 0,041$, тобто відносна похибка складає при цьому біля 4% від значення приросту функції при заміні приросту функції її диференціалом.

За умови, що $x = 2$ та $\Delta x = 0,01$ маємо:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot \left(0,01\right)^2 + \left(0,01\right)^3 + 2 \cdot 0,01 = 0,1461;$$

$$dy = \left(3 \cdot 2^2 + 2\right) \cdot 0,01 = 0,14.$$

При цьому абсолютна похибка $\left|\Delta y - dy\right| = 0,000601;$ а відносна похибка $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0,000601}{0,140601} = 0,0042$.

Отже відносна похибка складає біля 0,4% від значення приросту функції при заміні приросту функції її диференціалом.

<u>Приклад 6.4.</u> Обчислити наближено приріст функції $y = x^2 + 2x + 3$, коли x змінюється від 2 до 1,98.

<u>Розв’язання.</u> Відомо, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу, тобто $\Delta y \approx dy$. Диференціал даної функції має вигляд $dy = \left(2x + 2\right)dx$.

Підставимо в цю формулу значення $x = 2$ та $dx = \Delta x = 1,98 - 2 = -0,02$, і знайдемо остаточне значення диференціала: $dy = \left(2 \cdot 2 + 2\right) \cdot \left(-0,02\right) = -0,12$.

Таким чином, шуканий приріст функції наближено дорівнює $-0,12$.

<u>Приклад 6.5.</u> Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити $\operatorname{arctg} 0,97$.

Розв’язання. Нехай $\operatorname{arctg}0{,}97$ є частинне значення функції $y=\operatorname{arctg}x$ при $x=0,97$. Позначимо $x_0=1$ тоді $\Delta x=x-x_0=0,97-1=-0,03$; $f(x_0)=f(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

Диференціюючи функцію $y=\operatorname{arctg}x$, знайдемо $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ та $y'(x_0)=y'(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Користуючись відповідною формулою, маємо $\operatorname{arctg}0,97\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(-0,03)=0,785-0,015=0,77$.

Приклад 6.6. Обчислити наближено $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

Розв’язання. Нехай, $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$ є частинне значення функції $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$ при $x=2,037$.

Позначимо $x_0=2$ та обчислимо $f(x_0)=f(2)=\sqrt{\frac{4-3}{4+5}}=\frac{1}{3}$; $\Delta x=x-x_0=2,037-2=0,037.$

Знайдемо похідну функції $f(x)$ та обчислимо її значення при $x_0=2$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}}\cdot\frac{2x\left(x^2+5\right)-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{8x}{\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}\cdot\left(x^2+5\right)^2};$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{16}{27}.$$

Тоді остаточно

$$\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}} \approx \frac{1}{3}+\frac{16}{27}\cdot 0,037 \approx 0,333+0,022=0,355.$$

<u>Приклад 6.7.</u> Обчислити наближено $\cos 60°6'$.

<u>Розв'язання.</u> Розмірковуючи аналогічно попереднім прикладам, запишемо $f(x)=\cos x$, переведемо градусну міру в радіанну: $x_0=60°=\frac{\pi}{3}$;

$$\Delta x = 60°6' - 60° = 6' = \frac{\pi \cdot \frac{6}{60}}{180} = \frac{\pi}{1800};$$

$$f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$f'(x)=-\sin x; \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким чином,

$$\cos 60°6' = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{1800} = \left\| \begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,8660; \\ \pi = 3,1416 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}-\frac{2,7318}{1800} \approx$$

$$\approx 0,5-0,0015=0,4985.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називають диференціалом функції?

2 Запишіть формулу для знаходження диференціала функції.

3 В чому полягає геометричне тлумачення диференціала?

4 Що означає поняття інваріантності форми диференціала?

5 Сформулюйте основні правила знаходження диференціалів.

6 Запишіть формулу, яку використовують для наближених обчислень за допомогою диференціала.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити Δy та dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ та $\Delta x = 0,01$.
2. Знайти та порівняти приріст та диференціал функції $y = x^4 + 4x$ при $x = 4$ та $\Delta x = 0,1$.

Обчислити наближено:

3. $\sqrt[3]{26}$.
4. $\ln 1,05$.
5. $\operatorname{arctg} 1,02$.
6. $\arcsin 0,4983$.
7. $e^{0,2}$.

Відповіді

1. $\Delta y = 0,0401;\quad dy = 0,04;$ **2.** $\Delta y = 0,864;\quad dy = 0,8;$ **3.** 2,96; **4.** 0,05; **5.** 0,795; **6.** 0,52164; **7.** 1,2.

7. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Відомо, що для диференційованої на інтервалі $(a;b)$ функції $y = f(x)$

$$(y')' = y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$ – похідна другого порядку,

$$(y'')' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$ – похідна третього порядку,

$$(y''')' = y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}$$ – похідна четвертого порядку.

Тобто похідна від похідної $(n-1)$ порядку функції $y=f(x)$ називається похідною *n*-ого порядку або *n*-ою похідною цієї функції і позначається $y^{(n)} = f^{(n)}(x)=\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином за означенням $y^{(n)} = f^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Аналогічно:

$d(dy)=d^2y=y''dx^2$ – диференціал другого порядку,

$d\left(d^2y\right)=d^3y=y'''dx^3$ – диференціал третього порядку.

Отже, диференціал *n*-ого порядку має вигляд $d^n f(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)$ або $d^n y=d\left(d^{n-1}y\right)$.

Диференціал *n*-ого порядку функції $y=f(x)$ існує тільки і тільки тоді, коли існує похідна *n*-ого порядку, тобто коли функція $y=f(x)$ *n* разів диференційована.

Зв'язок диференціалу *n*-ого порядку функції $y=f(x)$ з похідною того ж порядку цієї функції виражається формулою $d^n f(x)= f^{(n)}(x)\cdot dx^n$ або $d^n y=y^{(n)}\cdot dx^n$.

Знаходження похідної або диференціала від диференціала носить назву повторного диференціювання функції.

Приклад 7.1. Знайти y''' та d^3y, якщо $y=\left(x^2+1\right)^3$.

Розв’язання. Функція задана явно, а тому послідовно диференціюючи її одержимо:

$$y'=3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x=6x\left(x^2+1\right)^2;$$

$$y''=(y')'=6\cdot\left(x^2+1\right)^2+6x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x=\left(x^2+1\right)\left(6x^2+6+24x^2\right)=$$
$$=\left(x^2+1\right)\left(30x^2+6\right)=6\left(x^2+1\right)\left(5x^2+1\right)=6\left(5x^4+6x^2+1\right);$$

$$y'''=(y'')'=6\left(20x^3+12x\right).$$

Тоді $d^3y = 24\left(5x^3 + 3x\right)dx^3 = 24x\left(5x^2 + 3\right)dx^3$.

<u>Приклад 7.2.</u> Знайти y'' та d^2y, якщо $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$.

<u>Розв'язання.</u> Діючи аналогічно попередньому випадку, маємо:

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{4 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{4 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{4 + x^2} + x}{\sqrt{4 + x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} = \left(x^2 + 4\right)^{-1/2};$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4\right)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(4 + x^2\right)^3}},$$

$$d^2y = -\frac{xdx^2}{\sqrt{\left(4 + x^2\right)^3}}.$$

<u>Приклад 7.3.</u> Знайти y'', якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>Розв'язання.</u> В даному випадку функція задана неявно; а тому диференціюємо її маючи на увазі, що y залежить від змінної x: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$.

Проведемо перетворення і знайдемо вираз для y':

$$\frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2},\ y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Тоді продиференціюємо отриманий вираз за змінною x ще раз:

$$y'' = \left(y'\right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x \cdot y'}{y^2}.$$

Підставимо замість y' раніше отриманий вираз та остаточно отримаємо:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x \cdot \left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \right)}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{y^2 \cdot a^2 y} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot y^3} = -\frac{b^4}{a^2 \cdot y^3}.$$

Якщо функція задана параметрично, тобто $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ а функції $x(t)$ та $y(t)$ двічі диференційовані на $[T_1, T_2]$, причому $x'(t) \neq 0$, тоді має місце формула $y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$.

Інколи доцільно скористатися формулою $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Загальних рекомендацій щодо вибору формули не існує. Вміння правильно визначити, яку саме формулу обрати, досягається практикою.

<u>Приклад 7.4.</u> $\begin{cases} y = t^2 + t + 1, \\ x = t^3 + 2. \end{cases}$ Знайти y''_{xx}.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо послідовно:

$y'_t = 2t + 1,\quad x'_t = 3t^2,\quad y''_{tt} = 2,\quad x''_{tt} = 6t$ і тоді за формулою $y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$ отримаємо

$$y''_{xx} = \frac{2 \cdot 3t^2 - (2t+1)6t}{\left(3t^2\right)^3} = \frac{6t^2 - 12t^2 - 6t}{27t^6} = \frac{-6t^2 - 6t}{27t^6} = \frac{-2(t+1)}{9t^5}.$$

<u>Приклад 7.5.</u> $\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$ Знайти y''_{xx}.

Розв’язання. Маємо: $\begin{aligned} x'_t &= -3\cos^2 t\sin t, \\ y'_t &= 3\sin^2 t\cos t. \end{aligned}$

Можна записати $y'_x = \dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t} = -\dfrac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$

Неважко помітити, якою формулою необхідно скористатись

$$\left(y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \right),$$

і тоді остаточно отримаємо $y''_{xx} = \dfrac{\left(-\operatorname{tg} t\right)'_t}{-3\cos^2 t\sin t} = \dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}.$

<u>Приклад 7.6.</u> Знайти y''_x, якщо $\begin{cases} x = at\cdot\cos t, \\ y = at\cdot\sin t. \end{cases}$

Розв’язання. Параметром даної функції є змінна t, тому

$x'_t = a\cos t - at\sin t,$

$y'_t = a\sin t + at\cos t.$

Тоді $y'_x = \dfrac{a\sin t + at\cos t}{a\cos t - at\sin t} = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}.$

Знаходимо:

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{\left(\cos t + \cos t - t\sin t\right)\cdot\left(\cos t - t\sin t\right) - \left(\sin t + t\cos t\right)\cdot\left(-\sin t - \sin t - t\cos t\right)}{\left(\cos t - t\sin t\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2\cos t - t\sin t\right)\left(\cos t - t\sin t\right) + \left(\sin t + t\cos t\right)\left(2\sin t + t\cos t\right)}{\left(\cos t - t\sin t\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cos^2 t - 2t\sin t\cos t - t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + 2\sin^2 t + t\sin t\cos t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t}{\left(\cos t - t\sin t\right)^2} =$$

$$= \frac{2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}{\left(\cos t - t\sin t\right)^2} = \frac{2 + t^2}{\left(\cos t - t\sin t\right)^2}.$$

Остаточно за формулою $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$, маємо

$$y''_{xx} = \frac{2+t^2}{a\left(\cos t - t\sin t\right)^3}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають другою похідною або похідною другого порядку?
2. Що називають n-ою похідною або похідною n-ого порядку?
3. Що називають диференціалом другого, третього, n-ого порядку?
4. Сформулюйте правило повторного диференціювання для функції, заданої неявно.
5. Запишіть формулу, для знаходження похідної другого порядку для функції, заданої параметрично.

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні старших порядків від заданих функцій.

1. $y = x^6 - 4x^3 + 4;$

$f^{(V)}(1) - ?$

2. $y = x^3 \cdot \ln x$

$y^{(V)} - ?$

3. $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x$

$y'' - ?$

4. Довести, що функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ задовольняє рівнянню $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

5. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

$y''_{xx} - ?$

6. Довести, що функція, яка задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = e^t \cdot \sin t, \\ y = e^t \cdot \cos t \end{cases}$, задовольняє рівнянню $y'' \cdot (x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

7. $x^2 + y^2 = R^2$

$y'''_{xxx} - ?$

8. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$

$y'' - ?$

Відповіді

1. 360; **2.** $\frac{6}{x}$; **3.** $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$; **5.** $\frac{t^2+2}{a(\cos t - t \cdot \sin t)^3}$; **7.** $-\frac{3R^2 x}{y^5}$;

8. $\frac{-2a^3 xy}{\left(y^2 - ax\right)^3}$.

8. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Крім елементарних способів знаходження границі функції, ефективним способом є правило Лопіталя, яке дає змогу безпосередньо розкривати невизначеності виду:

а) $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ та $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$;

б) невизначеності $\|\infty - \infty\|$ та $\|0 \cdot \infty\|$ за допомогою алгебраїчних перетворень зводити до випадку *а*);

в) невизначеності $\|1^\infty\|$, $\|0^0\|$ та $\|\infty^0\|$ методом логарифмування зводимо до випадку $\|0 \cdot \infty\|$.

За правилом Лопіталя, якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ диференційовані в околі точки x_0 і $\varphi(x) \neq 0$, а

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, тобто частка являє собою у точці $x=x_0$ невизначеність вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ за умови, що існує (скінченна чи нескінченна границя відношення похідних.

Слід зазначити, що це правило застосовується і у випадку, коли $x\to\infty$.

А, отже, підсумовуючи, можна записати

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left|\frac{0}{0}\text{ або }\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Корисно запам'ятати: якщо відношення похідних $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ також являє собою невизначеність $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, то правило Лопіталя застосовують повторно, доки не усунуть невизначеність.

Слід взяти до уваги, що при розв'язанні прикладів правило Лопіталя можна комбінувати з використанням наслідків з видатних границь, якщо це доцільно.

Приклад 8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо $\left\|\frac{0}{0}\right\|$. Згідно з правилом Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}e^{x^2}=-2.$$

Приклад 8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, до розкриття якої можна застосувати безпосередньо правило Лопіталя:

При розв'язанні цього приклада була використана перша видатна границя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\cdot\sin x}{\cos x\cdot\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}=1.$$

Приклад 8.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$.

Розв'язання. Нагадаємо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$.

Тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty.$$

Приклад 8.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\|\frac{0}{0}\right\|$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{6x-6\sin x}{20x^3}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos x}{60x^2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x}{120x}=\frac{1}{20}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{20}.$$

В даному випадку правило Лопіталя застосували чотири рази, а потім скористались першою визначною границею.

Розглянемо приклади, в яких є невизначеності $\|\infty-\infty\|$ та $\|0\cdot\infty\|$.

<u>**Приклад 8.5.**</u> $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x$.

<u>Розв'язання.</u> Після підстановки граничного значення $x=\frac{\pi}{2}$ маємо невизначеність $\|0\cdot\infty\|$. Зробимо тотожні перетворення:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tg\,x=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctg\,x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x=-1.$$

<u>**Приклад 8.6.**</u> $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{a}{x}$.

<u>Розв'язання.</u> Усвідомивши, що має місце невизначеність вигляду $\|\infty\cdot 0\|$, перетворимо функцію до дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності, а потім застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{a}{x}=\|\infty\cdot 0\|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\cdot a\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=a\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a.$$

<u>**Приклад 8.7.**</u> $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$.

Розв'язання. Переконавшись, що має місце невизначеність вигляду $\|\infty-\infty\|$, а, отже правило Лопіталя не можна відразу використовувати, виконаємо спочатку алгебраїчні перетворення:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0.$$

Приклад 8.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Розв'язання. Розмірковуючи аналогічно попередньому випадку, маємо:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Розглянемо приклади, які мають невизначеності $\|1^{\infty}\|$, $\|0^{0}\|$, $\|\infty^{0}\|$.

Приклад 8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Враховуючи граничне значення x маємо невизначеність $\|1^{\infty}\|$. Позначимо шукану границю через A та прологарифмуємо обидві частини одержаної нерівності: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=A,$

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\ln\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x + x\right) = \left\|\infty\cdot 0\right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2.$$

Таким чином, $\ln A = 2$. Отже, шукана границя $A = e^2$, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

<u>Приклад 8.10.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

<u>Розв’язання.</u> Маємо невизначеність $\left\|1^\infty\right\|$. Аналогічно попередньому прикладу, маємо:

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\ln\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\cdot\ln\cos x = \left\|\infty\cdot 0\right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cdot\ln\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} = \left|\lim_{x\to 0}\cos^2 x = 1\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\ln A = -\dfrac{1}{2}$, тобто $A = e^{-1/2}$, а, отже $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{-1/2}$.

<u>Приклад 8.11.</u> $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$.

<u>Розв’язання.</u> Маємо невизначеність $\left\|0^0\right\|$, так як $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ та $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x = 0$.

Тоді

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\ln x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\cdot\ln x = \left\|0\cdot\infty\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| =$$

$$= \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to +0}\frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to +0}\left(-\sin x\right) = 0.$$

Таким чином, $\ln A = 0, \quad A = e^0 = 1$ та $\lim\limits_{x\to 0} x^{\mathrm{tg}x} = 1$.

<u>Приклад 8.12.</u> $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x - 1\right)}}$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо справу з невизначеністю вигляду $\left\|0^0\right\|$. Позначимо шукану границю через A та знайдемо її логарифм:

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln\left(e^x - 1\right)} \cdot \ln x = \left\|0\cdot\infty\right\| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln\left(e^x - 1\right)} =$$

$$= \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x - 1}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x\cdot e^x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = 1.$$

Звідси $A = e$.

<u>Приклад 8.13.</u> $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg}x\right)^{2x-\pi}$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо невизначеність вигляду $\left\|\infty^0\right\|$. Діючи, як і в попередньому прикладі, одержимо:

$$\ln A = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg}x\right)^{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left(\mathrm{tg}x\right)^{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x-\pi\right)\cdot \ln\mathrm{tg}x = \left\|0\cdot\infty\right\| =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\mathrm{tg}x}{\frac{1}{2x-\pi}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1\cdot 2}{\left(2x-\pi\right)^2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(2x-\pi\right)^2}{\sin 2x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(2x-\pi\right)\cdot 2}{2\cos 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Тобто $\ln A = 0, \quad A = e^0 = 1$.

Шукана границя $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg}x\right)^{2x-\pi} = e^0 = 1.$

<u>Приклад 8.14.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Розв'язання. Невизначеність має вигляд $\left\|\infty^0\right\|$. Обчислимо:

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x =$$

$$= \left\|0\cdot\infty\right\| = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\right) = 0.$$

Отже, $\ln A = 0$. Звідки $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1.$

Правило Лопіталя є простим та ефективним методом розкриття невизначеностей $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ та $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$. Слід зазначити, що існують приклади в яких правило Лопіталя застосовувати не можна, тому що не існує границя відношення похідних чисельника та знаменника. Однак, обчислити ці границі можливо, використовуючи інші методи.

Приклад 8.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$.

Розвязання. У цьому прикладі $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, але правило Лопіталя застосовувати не можна, тому що $\nexists\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$. Скористаємось іншими методами.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = 1.$$

При розв'язанні цього приклада використовується властивість нескінченно малих величин, а саме: добуток нескінченно малої та обмеженої величин є нескінченно малою величиною.

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos x \to 0, \quad \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x \to 0.$$

<u>Приклад 8.16.</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

<u>Розвязання.</u> У цьому прикладі $\left\| \dfrac{0}{0} \right\|$, але правило Лопіталя застосовувати не можна, тому що

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Скористаємось іншими методами.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Аналогічно попередньому прикладу використовується властивість нескінченно малих величин: $x \to 0$, $\sin \frac{1}{x}$ – обмежена величина.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте правило Лопіталя.
2. Пригадайте, як розкриваються невизначеності виду: $\left\| \dfrac{0}{0} \right\|$ та $\left\| \dfrac{\infty}{\infty} \right\|$; $\| \infty - \infty \|$ та $\| 0 \cdot \infty \|$; $\| 1^{\infty} \|$, $\| 0^0 \|$, $\| \infty^0 \|$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\ln x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; 6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln\left(1-x\right)}$;

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$.

Відповіді

1. 0,5; **2.** **-**1; **3.** 0; **4.** 1; **5.** e^{-1}; **6.** ∞; **7.** 1.

9. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Незважаючи не те, що ця тема не стосується похідної, слід нагадати про асимптоти функції, адже вони використовуються при дослідженні та побудові графіка функції.

Пряма l називається асимптотою кривої $y=f\left(x\right)$, якщо відстань від точки $M\left(x;f\left(x\right)\right)$, яка лежить на кривій, до прямої l прямує до нуля при $x\to\pm\infty$.

Розрізняють два види асимптот:

- вертикальні;
- похилі.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\infty$, то пряма $x=x_0$ називається вертикальною асимптотою.

Рівняння такої асимптоти $x=x_0$. Вертикальні асимптоти проходять через ті точки, в яких функція не визначена.

Асимптоти, рівняння яких записується у вигляді $y=Kx+b$, де $K=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y-Kx\right)$, називаються похилими асимптотами. У випадку, якщо хоча б одна з границь не існує, то крива похилих асимптот немає.

Зауважимо, що асимптота кривої $y = f(x)$ може перетинатися з цією кривою як у скінченній, так і в нескінченній множині точок.

Слід зазначити, що при $K = 0$ одержуємо горизонтальну асимптоту, рівняння якої $y = b$.

Вміння знаходить асимптоти полегшує побудову графіка функції.

<u>Приклад 9.1.</u> Знайти асимптоти кривої $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x - 3}$.

<u>Розв'язання.</u> Задана функція не існує при $x = 3$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 3+0} y = \lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x - 3} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 3-0} y = \lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x - 3} = -\infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою.

Для того, щоб знайти похилу асимптоту, обчислимо

$K = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x(x - 3)} = \left\| \dfrac{\infty}{\infty} \right\| = 1$ (через те, що коефіцієнти при x^2 в чисельнику та знаменнику рівні) та

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - K) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x - 3} - x \right) = \|\infty - \infty\| =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 4 - x(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x + 4}{x - 3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = 5.$$

Одержані значення $K = 1$ та $b = 5$ підставляємо у рівняння $y = Kx + b$ та отримуємо $y = x + 5 -$ рівняння похилої асимптоти заданої кривої.

<u>Приклад 9.2.</u> Знайти асимптоти кривої $y = x \cdot e^{\frac{2}{x}} + 1$.

<u>Розв'язання.</u> Область визначення даної функції $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто $x = 0 -$ точка розриву. А, отже, знайдемо:

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0}\left(x\cdot e^{\frac{2}{x}}+1\right)=\lim_{x\to+0}\left(x\left(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}\right)\right)=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x^2}\left(2e^{\frac{2}{x}}+1\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\left(2e^{\frac{2}{x}}+1\right)=\infty;$$

$$\lim_{x\to-0} y=\lim_{x\to-0}\left(x\cdot e^{\frac{2}{x}}+1\right)=0\cdot e^{-\infty}+1=0+1=1.$$

Таким чином, $x=0$ є вертикальна асимптота лише при $x\to+0$.

Для знаходження похилої асимптоти обчислимо:

$$K=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{2}{x}}+1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}\right)=1+0=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-Kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot e^{\frac{2}{x}}+1-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\left(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}-1\right)\right)=\|\infty\cdot 0\|=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2e^{\frac{2}{x}}+1\right)=2e^0+1=3.$$

Отже, $y=x+3$ − рівняння похилої асимптоти.

<u>**Приклад 9.3.**</u> $y=2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

<u>Розв'язання.</u> Область визначення даної функції вся числова вісь, тобто $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$. Тобто, вертикальних асимптот дана функція не має.

Для знаходження похилої асимптоти обчислимо

$$K=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x}\right)=2$$ (при обчисленні враховано, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=+\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}$).

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-Kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $y=2x\pm\frac{\pi}{2}$ − рівняння похилих асимптот.

Питання для самоперевірки

1. Що називають асимптотою кривої?
2. Які асимптоти може мати крива?
3. Яку пряму називають вертикальною асимптотою?
4. Який вигляд має рівняння похилої асимптоти?
5. Запишіть формулу для знаходження параметрів похилої асимптоти.
6. При якому значенні K рівняння похилої асимптоти перетворюється на рівняння горизонтальної асимптоти?

Завдання для самостійної роботи

1. $y=\frac{x}{x^2-4x+3}$; 2. $y=\frac{3x^2}{x^2+5}$; 3. $y=\frac{\ln^2 x}{x}-3x$;

4. $y=\ln\left(x-1\right)$; 5. $y=x^2\cdot e^{-x}$; 6. $y=\frac{x^2+5x+3}{x-2}$;

7. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$.

Відповіді

1. $x=1$; $x=3$; $y=0$; **2.** $y=3$; **3.** $x=0$; $y=-3x$; **4.** $x=1$; **5.** $y=0$; **6.** $x=2$; $y=x+7$; **7.** $y=0$.

10. ІНТРВАЛИ МОНОТОННОСТІ І ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ. НАЙМЕНШЕ ТА НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ.

10.1. Інтервали монотонності функції

Функція $y=f(x)$ називається зростаючою (спадаючою) на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких значень аргументу x_1, x_2 таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність

$f(x_1) < f(x_2)$, за умови, що $x \neq x_0$.

$\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Щоб знайти інтервали зростання та спадання функції, треба дослідити знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$, за умови, що $x_1 < x_2$.

Якщо ця різниця на певному інтервалі додатна, то функція $y=f(x)$ на такому інтервалі зростає $(\uparrow)$, якщо ж різниця $f(x_2)-f(x_1)$ від'ємна, то функція спадає $(\downarrow)$.

Інтервали зростання та спадання функції називаються інтервалами монотонності. Оскільки встановити знак різниці не завжди легко, при дослідженні функції на монотонність найчастіше використовують похідну функції. Найчастіше область визначення функції можна поділити на проміжки, в кожному з яких функція диференційована. Для таких функцій визначення проміжків монотонності зводиться до дослідження знаків їхніх похідних.

Скористаємось тим фактом, що функція $y=f(x)$, диференційована на $(a;b)$ буде зростаючою $(\uparrow)$ на вказаному інтервалі, якщо $y'(x)>0 \quad \cup \quad \forall x\in(a;b)$ та спадаючою $(\downarrow)$ на тому ж інтервалі, якщо $y'(x)<0$.

Зауважимо, що похідна зростаючої (спадної) функції може обертатись в нуль в деяких точках. Так, наприклад, функція $y=x^3$ зростає в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, однак її похідна $y'=3x^2$ дорівнює нулю в точці $x=0$.

10.2. Екстремуми функції

Як відомо, функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум (мінімум), якщо існує такий окіл цієї точки $(x_0-\delta;\, x_0+\delta)$, що для всіх значень *x*, таких, що $x\in(x_0-\delta;\, x_0+\delta)$ має місце нерівність

$$\begin{array}{l} f(x)<f(x_0), \\ \left(f(x)>f(x_0)\right). \end{array} \text{ за умови, що } x\neq x_0 .$$

Максимум та мінімум функції в точці називають екстремумом даної функції в цій точці.

Якщо функція в точці має екстремум (максимум або мінімум), то в цій точці похідна функції дорівнює нулю або не існує (необхідна умова існування екстремуму).

Критичною точкою першого роду, або просто критичною, називається точка, в якій виконується одна із умов:

1) $f'(x)=0$,

2) $f'(x)=\infty$,

3) функція $f(x)$ в точці x_0 визначена, але $f'(x_0)$ не існує.

Слід зазначити, що не кожна критична точка функції є точкою екстремуму цієї функції.

При дослідженні функції на екстремум важливо пам’ятати: якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 похідна функції змінює знак з «$+$» на «$-$», то в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум, а якщо з «$-$» на «$+$», то мінімум; якщо ж похідна знак не змінює, то екстремуму немає (достатня умова існування екстремуму).

Враховуючи зазначене, при знаходженні інтервалів монотонності та екстремумів функції доцільно керуватися наступним алгоритмом:

1) знаходимо область визначення функції $y=f(x)$;
2) знаходимо похідну функції $f'(x)$;
3) знаходимо корені рівняння $f'(x)=0$ та точки, де $f'(x)$ не існує (критичні точки першого роду);
4) область визначення наносимо на числову вісь та розставляємо одержані точки на ній в порядку зростання;
5) визначаємо знак $f'(x)$ в кожному із одержаних інтервалів (для спрощення обчислень, якщо це можливо, слід похідну розкласти на множники) і тим самим знаходимо знак інтервалів зростання та спадання функції;
6) визначаємо, які з критичних точок є екстремумами;
7) обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми.

10.3. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована в усіх точках цього відрізка функція $f(x)$ досягає свого найбільшого та найменшого значення або в критичних точках, або на кінцях відрізка.

Тому при визначенні найбільшого та найменшого значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має сенс користуватися наступним алгоритмом:

1) знаходимо критичні точки першого роду (не вдаючись в дослідження, чи буде в них екстремум і якого виду);

2) обчислюємо значення функції в усіх критичних точках, які належать інтервалу $(a;b)$ та на кінцях заданого відрізка;
3) із отриманих значень вибираємо найбільше та найменше. Ці значення і будуть шуканими.

<u>Приклад 10.1.</u> Знайти інтервали монотонності функції $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

<u>Розв'язання.</u> Дана функція визначена на всій числовій осі, тобто $x \in (-\infty;+\infty)$, її похідна $y'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}$.

Знайдемо критичні точки:

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = 0, \quad x^2e^{-x}(3-x) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = 0.$$

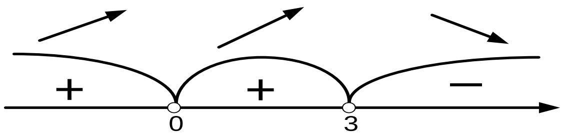
Точки $x = 0$ та $x = 3$ ділять область визначення функції (всю числову вісь) на три інтервали: $(-\infty;0)$; $(0;3)$; $(3;+\infty)$.

Оскільки похідна $y'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$ є неперервною в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то вона зберігає знак в інтервалах $(-\infty;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$.

При визначенні знаку похідної слід врахувати, що $e^{-x} > 0$ для будь-яких x. Далі слід обрати довільне значення x з кожного інтервалу, та визначитись із знаком похідної на цьому інтервалі:

$$y'(-2) = (-2)^2 \cdot e^2(3+2) > 0,$$
$$y'(1) = 1^2 \cdot e^{-1}(3-1) > 0,$$
$$y'(4) = 4^2 \cdot e^{-4}(3-4) < 0.$$

Таким чином, можна схематично зобразити результати досліджень:



Отже, при $x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$ функція зростає; при $x \in (3;+\infty)$ функція спадає.

<u>Приклад 10.2.</u> Знайти інтервали монотонності функції $y = 2x^2 - \ln x$.

<u>Розв'язання.</u> Дана функція визначена для $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$. Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю та не існує:

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2};$$

$$y'(x)\ \textit{не існує} \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

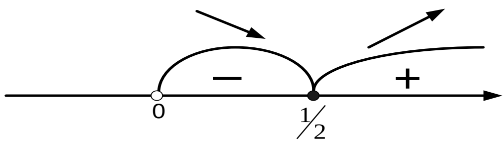
Так як задана функція визначна тільки для $x > 0$, то знак її похідної необхідно визначити лише в інтервалах $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ та $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Розглянемо

$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{16} - 1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4}} < 0,$$

$$y'(2) = \frac{4 \cdot 4 - 1}{2} > 0.$$

Маємо



Отже, при $x \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ функція спадає; при $x \in \left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$ функція зростає.

<u>Приклад 10.3.</u> Показати, що функція $y = 5\operatorname{arctg} 2x + x$ всюди зростає.

Розв’язання. Задана функція визначена для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$, тобто $x \in R$.

Її похідна $y'(x) = \dfrac{5\cdot 2}{1+4x^2} + 1 = \dfrac{4x^2+11}{4x^2+1} > 0$ для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$, отже, функція зростає всюди.

Приклад 10.4. Знайти екстремуми функції $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$

Розв’язання. Задана функція визначена та диференційована в усіх точках інтервалу $(-\infty;+\infty)$.

Її похідна

$$y'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x+1)(x-3).$$

Знайдемо критичні точки:

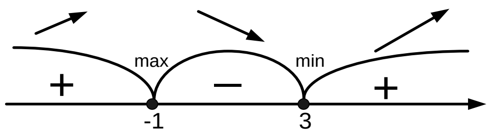
$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6(x+1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Таким чином, область визначення функції ділиться на три інтервали: $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$, $(3;+\infty)$.

Визначимо знак похідної на кожному інтервалі:

$$y'(-2) = 6(-2+1)(-2-3) > 0,$$
$$y'(0) = 6\cdot 1\cdot(-3) < 0,$$
$$y'(4) = 6(4+1)(4-3) > 0.$$

В результаті маємо



Обчислимо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми:

$$y_{\max}(-1) = -2 - 6 + 18 + 7 = 17,$$
$$y_{\min}(3) = 54 - 54 - 54 + 7 = -47.$$

Приклад 10.5. Знайти екстремуми функції $y = 3\cdot\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

Розв’язання. Дана функція визначена для $x \in (-\infty;+\infty)$.

Її похідна

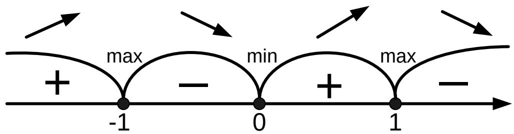
$$y'(x) = 3\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3} - 2x = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right).$$

Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^{4/3}}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \pm 1, \quad x_3 \neq 0.$$

На визначених інтервалах з’ясуємо знак похідної. Маємо



Таким чином, задана функція має

$$y_{\min}(0) = 0,$$

$$y_{\max}(-1) = y_{\max}(1) = 2$$

(це пояснюється тим, що функція парна).

Приклад 10.6. Знайти екстремуми функції $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

Розв’язання. Так як $1 + x^2 > 0$ для будь-яких x, то область визначення цієї функції є вся числова вісь.

Її похідна

$$y' = 1 - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 2x}{1 + x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0.$$

Отже, функція зростає на всій області визначення, екстремумів немає.

Приклад 10.7. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на відрізку $[-1,3]$.

Розв’язання. Знаходимо похідну та критичні точки першого роду:

$$y' = 4x^3 - 16x$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 16x = 0, \quad 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2.$$

Відзначимо, що не всі знайдені точки належать відрізку $[-1,3]$. Обчислимо значення функції в тих критичних точках, які належать заданому відрізку, а саме $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$, та в точках, які є кінцями заданого відрізка $x = -1$ та $x = 3$:

$$y'(-1) = 1 - 8 + 3 = -4,$$

$$y'(0) = 3,$$

$$y'(2) = 16 - 32 + 3 = -13,$$

$$y'(3) = 81 - 72 + 3 = 12.$$

Із отриманих значень функції в точках вибираємо найбільше та найменше:

$$y_{\text{найм}}(2) = -13,$$

$$y_{\text{найб}}(3) = 12.$$

<u>Приклад 10.8.</u> Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt{25 - x^2}$ на відрізку $[-4,3]$.

<u>Розв’язання.</u> Діючи, як і в попередньому прикладі, маємо:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}};$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$y' = \infty \text{ при } x = \pm 5 \notin [-4,3].$$

Отже,

$$y'(-4) = 3,$$

$$y'(0) = 5,$$

$$y'(3) = 4.$$

Маємо $y_{\text{найм}}(-4) = 3, \quad y_{\text{найб}}(0) = 5.$

Питання для самоперевірки

1. Яка функція називається зростаючою (спадною)?
2. Сформулюйте умову зростання (спадання) функції.
3. Що називається максимумом (мінімумом) функції?
4. Що називається екстремумом функції?
5. В чому полягає необхідна умова існування екстремуму?
6. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.
7. Як називаються точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує?
8. Пригадайте алгоритм, за яким знаходяться інтервали монотонності та екстремум функції.
9. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x}{\ln x}$.
2. Показати, що функція $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ зростає на всій числовій осі, окрім точки $x = 0$.
3. Знайти інтервали зростання та спадання функції $y = x + \cos x$. Вказівка. Скористатись тим, що $|\sin x| \le 1$.
4. Знайти екстремуми функції $y = e^{2x^3-3x^2}$.
5. Знайти екстремуми функції $y = x - \ln(1-x)$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[-1,2]$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ на відрізку $[0,4]$.
8. Знайти інтервали монотонності функції $y = \sqrt{2x-x^2}$.

Відповіді

1. В інтервалі $(0;1)$ і $(1;e)$ функція спадає, а в інтервалі $(e;+\infty)$ зростає; **3.** Функція монотонно зростає;

4. $y_{\max}(0)=1,\quad y_{\min}(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$; **5.** $y_{\min}(0)=0$; **6.** 2 і -10; **7.** $\dfrac{3}{5};-1$;

8. В інтервалі $(0;1)$ функція зростає, а в інтервалі $(1;2)$ – спадає.

11.ОПУКЛІСТЬ ТА ВГНУТІСТЬ КРИВОЇ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ.

Графік функції називається опуклим $(\cap)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо він повністю розміщений нижче дотичної, яка проведена до кривої в будь-якій точці цього інтервалу.

Графік функції називається угнутим $(\cup)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо він повністю розміщений вище дотичної, яка проведена до кривої в будь-якій точці цього інтервалу.

Слід пам'ятати достатню умову опуклості та угнутості: двічі диференційована на $(a;b)$ функція $y=f(x)$ буде: опукла на $(a;b)$ (позначаємо $\cap$), якщо для $\forall\, x\in(a,b)$ $y''<0$; угнута на $(a;b)$ (позначаємо $\cup$), якщо для $\forall\, x\in(a;b)$ $y''>0$.

Означення точка $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$, в якій змінюється характер вгнутості (опуклості), називається точкою перегину.

Відомо, що в точці перегину графіка функції $M\left(x_0;y\left(x_0\right)\right)$ друга похідна $y''\left(x_0\right)=0$ або $y''\left(x_0\right)$ – не існує (необхідна умова існування точки перегину).

Точки, в яких $f''(x)=0$, а $f''(x)$ – не існує, носять назву критичних точок другого роду.

Необхідно підкреслити, що у випадку, коли друга похідна при переході через критичну точку x_0 змінює знак, то точка $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ є точкою перегину кривої (достатня умова існування точки перегину).

Підсумовуючи, отримаємо правило для визначення інтервалів опуклості та угнутості, та точок перетину графіка функції, яке має сенс застосовувати на практиці:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо $f'(x)$ та $f''(x)$;
3) знаходимо корені рівняння $f''(x)=0$ та точки, де $f''(x)$ – не існує (критичні точки другого роду);
4) визначаємо знак другої похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі, на які знайдені критичні точки розбивають область визначення даної функції, а, отже, знаходимо інтервали опуклості та вгнутості кривої;
5) визначаємо, які з критичних точок є абсцисами точок перегину та обчислюємо значення $f(x)$ в них, тобто остаточно знаходимо координати точок перегину графіка цієї функції.

<u>Приклад 11.1.</u> Знайти інтервали опуклості та угнутості, та точки перегину графіка функції $y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x$.

<u>Розв’язання.</u> Дана функція визначена на всій числовій осі. Диференціюючи її двічі одержимо:

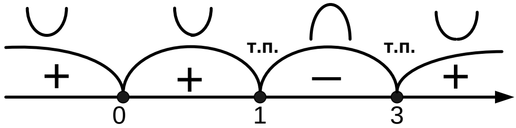
$$y' = 6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 3,$$

$$y'' = 30x^4 - 120x^3 + 90x^2 = 30x^2\left(x^2 - 4x + 3\right).$$

Знайдемо критичні точки другого роду функції:

$$y'' = 0, \quad x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3.$$

Область визначення розіб’ємо на інтервали критичними точками та визначимо знак y'' на кожному інтервалі.



В точках $x=1$ та $x=3$ друга похідна змінює знак, а, отже, це і будуть точки перегину.

<u>Приклад 11.2.</u> $y=\sqrt[3]{x^5}$.

<u>Розв'язання.</u> Область визначення цієї функції – вся числова вісь.

Знайдемо похідні:

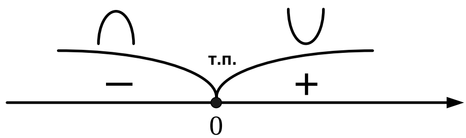
$$y'=\left(\sqrt[3]{x^5}\right)'=\left(x^{5/3}\right)'=\frac{5}{3}x^{2/3},$$

$$y''=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{10}{9\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

В даному випадку y'' ні при яких значеннях x в нуль не перетворюється; а при $x=0$ y'' не існує.

Це і буде критична точка другого роду.

Маємо



тобто при $x\in(-\infty,0)$ функція опукла, а при $x(0,+\infty)$ функція угнута. То ж $x=0$ і є точкою перегину.

<u>Приклад 11.3.</u> Довести, що графік функції $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$ всюди угнутий.

<u>Розв'язання.</u> Задана функція визначена на всій числовій осі. Знайдемо першу та другу похідні:

$$y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2},$$

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1\left(1+x^2\right) - x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2+1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Очевидно, що при будь-яких значеннях x $y'' > 0$, а це означає, що графік даної функції всюди угнутий.

<u>**Приклад 11.4.**</u> $y = x^2 + 2\sin x$.

<u>Розв'язання.</u> Область визначення даної функції $x \in (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо y' та y'':

$$y' = 2x + 2\cos x,$$
$$y'' = 2 - 2\sin x = 2(1 - \sin x).$$

Очевидно, що точки $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ є критичними точками другого роду, однак жодна з цих точок не є точкою перегину, бо ж на кожному із суміжних інтервалів

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k \text{ тощо.}$$

$\sin x < 1$, а тому $y'' > 0$.

Дуга похідна не змінює знак при переході через критичні точки. Таким чином, на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ крива вгнута.

Завдання для самостійної роботи

1. Яка крива називається опуклою (угнутою)?
2. В чому полягає достатня умова існування інтервалів опуклості (угнутості) кривої?
3. Що називають точкою перегину функції?
4. Сформулюйте необхідну умову існування точки перегину кривої.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтервали опуклості та угнутості кривої $y = x \cdot e^x$.

2. Знайти точки перегину кривої $y = (x-1) \cdot \sqrt[7]{(x-1)^6}$.

3. Показати, що графік функції $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$ всюди опуклий.

4. Знайти інтервали опуклості та угнутості, та точки перегину графіка функції $y = (x+1)^4 + e^x$.

5. Знайти інтервали опуклості та угнутості, та точки перегину графіка функції $y = \ln(x+1)^2$.

6. Знайти інтервали опуклості та угнутості, та точки перегину графіка функції $y = x^4(12\ln x - 7)$.

Відповіді

1. В інтервалі $(-\infty;-2)$ крива опукла, а в інтервалі $(-2;+\infty)$ − угнута; **2.** $M(1;0)$; **4.** Точок перегину немає, графік функції угнутий; **5.** В інтервалі $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ графік функції опуклий, а в інтервалі $(-1;1)$ − угнутий. Крива має дві точки перегину $(-1;\ln 2)$ та $(1;\ln 2)$; **6.** В інтервалі $(0;1)$ крива опукла, а в інтервалі $(1;+\infty)$ − угнута. Точка перегину $M(1;-7)$.

12. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКА.

При побудові графіка функції доцільно дотримуватись наступної схеми:

1. Знайти область визначення функції; встановити точки розриву та інтервали неперервності функції.

2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

3. Знайти асимптоти графіка функції; дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.

4. Знайти точки перетину функції з осями координат.

5. Знайти інтервали монотонності, точки екстремуму.

6. Знайти інтервали опуклості і угнутості, та точки перегину.

7. За результатами дослідження побудувати графік.

Варто зазначити кілька уточнень відносно цієї схеми.

1. Якщо функція виявиться парною, то дослідження досить провести лише для невід'ємних значень аргументу, а потім скористатися властивістю симетрії.

2. Якщо функція виявиться непарною, то дослідження також досить провести лише для невід'ємних значень аргументу, а потім отриману частину графіка повернути навколо початку системи координат на 180°.

3. Якщо в результаті дослідження виявиться, що функція періодична, то наступне дослідження цієї функції досить провести на відрізку довжиною в період. З'ясувавши всі особливості функції на цьому відрізку, встановимо її поведінку в усій області існування.

4. Має сенс наносити на рисунок характерні точки, асимптоти, тощо, паралельно з дослідженням. Це скоротить роботу з накресленням графіка.

5. Для того, щоб якомога точніше накреслити графік функції в тих інтервалах області її існування, де немає особливостей цієї функції та які є великими за розмірами, треба взяти декілька довільних точок та обчислити значення функції в цих точках.

6. Зрозуміло, що при дослідженні функції не обов'язково строго притримуватися наведеної вище схеми, іноді зручніше змінити її порядок.

<u>**Приклад 12.1.**</u> Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ та за результатами дослідження побудувати її графік.

Розв'язання. Виходячи із запропонованої схеми маємо:

1. $x \neq -1$; $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $x = -1$ точка розриву функції; $(-\infty; -1)$ та $(-1; +\infty)$ – інтервали неперервності функції.

2. $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = \dfrac{-x^3}{2(-x+1)^2} \Rightarrow$ задана функція є загального вигляду (не є ні парною, ні непарною). Також наша функція не є періодичною.

3. Дослідимо поведінку функції поблизу точки розриву $x = -1$

$$\lim_{x \to -1+0} y = \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Таким чином, при $x = -1$ функція має нескінченний розрив, а, отже, $x = -1$ – вертикальна асимптота. Похилу асимптоту шукаємо у вигляді $y = Kx + b$:

$$K = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 \cdot x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - Kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \|\infty - \infty\| =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = -1;$$

тобто $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ – похила асимптота.

4. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат:
при $x = 0$, $y = 0$; при $y = 0$, $x = 0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ – початок координат.

5. Знайдемо інтервали монотонності, критичні точки першого роду функції та точки екстремуму функції:

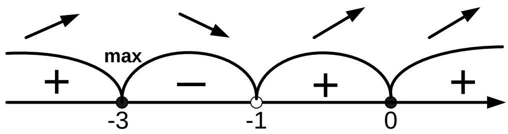
$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2\left(x+1\right)^2 - x^3\cdot 2\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2\left(x+1\right)-2x^3}{\left(x+1\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^3+3x^2-2x^3}{\left(x+1\right)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3+3x^2}{\left(x+1\right)^3};$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^3+3x^2 = 0, \quad x^2\left(x+3\right) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$$

$$y' = \infty \Rightarrow x = -1.$$

Маємо



$$y_{\max}\left(-3\right) = \frac{\left(-3\right)^3}{2\left(-3+1\right)} = \frac{-27}{8} \approx -3,38.$$

6. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість, точки перегину.

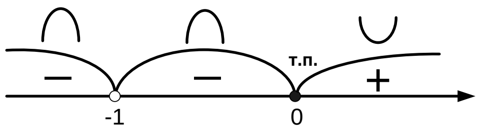
$$y'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2+6x\right)\left(x+1\right)^3 - \left(x^3+3x^2\right)3\left(x+1\right)^2}{\left(x+1\right)^6} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x+1\right)^2\cdot\left(\left(3x^2+6x\right)\left(x+1\right)-\left(x^3+3x^2\right)3\right)}{\left(x+1\right)^6} =$$

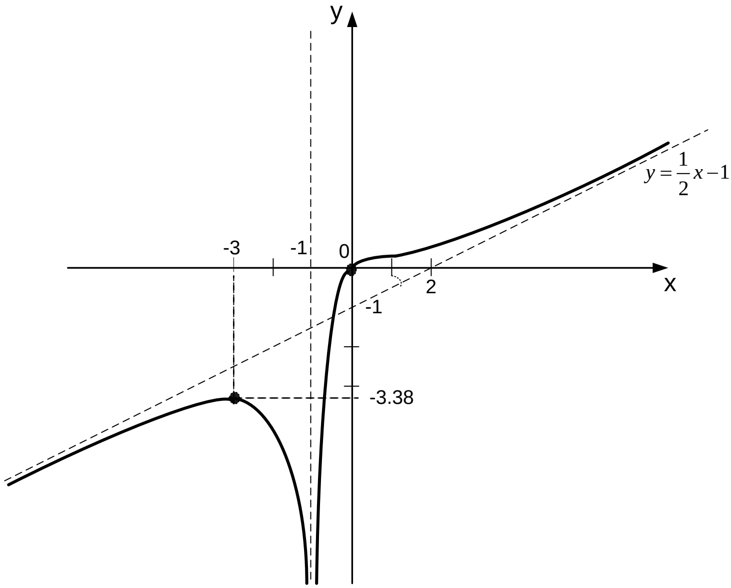
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^3+6x^2+3x^2+6x-3x^3-9x^2}{\left(x+1\right)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6x}{\left(x+1\right)^4} = \frac{3x}{\left(x+1\right)^4}.$$

Очевидно, що $y''=0$, якщо $x=0$, та y'' не існує, якщо $x=-1$

Маємо



При $x=0$ маємо точку перегину. Графік функції наведено на рисунку



<u>Приклад 12.2.</u> $y = x - \sqrt[3]{x^2}$

<u>Розв'язання.</u>

1. Область визначення функції – вся числова вісь, а, отже, вертикальних асимптот немає.

2. $y(-x) = -x - \sqrt[3]{(-x)^2} = -x - \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow$

функція не є ні парною, ні непарною; також функція не є періодичною.

3. Похилу асимптоту шукаємо у вигляді $y = Kx + b$:

$K = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 1$ (за правилом старших степенів),

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - Kx) = \lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt[3]{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\sqrt[3]{x^2}\right) = -\infty.$$

Отже, можна зробити висновок, що похилих асимптот теж немає.

4. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат:

При $x=0$, $y=0$; при $y=0$, $x-\sqrt[3]{x^2}=0,\quad \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0;$

$x_1=0,\quad x_2=1.$

Таким чином, маємо дві точки графіка $O(0;0)$ та $A(1;0)$.

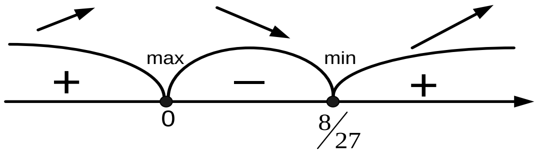
5. Визначимо критичні точки першого роду та інтервали зростання та спадання функції.

$$y'=1-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}};$$

$$y'=0\quad\Rightarrow 1-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=0\quad\Rightarrow x=\frac{8}{27};$$

точка $x=0$ також буде критичною, тому що в ній похідна не існує.

Визначимо проміжки зростання та спадання функції та, відповідно, точки максимуму та мінімуму:



Отже, при $x\in(-\infty;0)$ функція $\uparrow$,

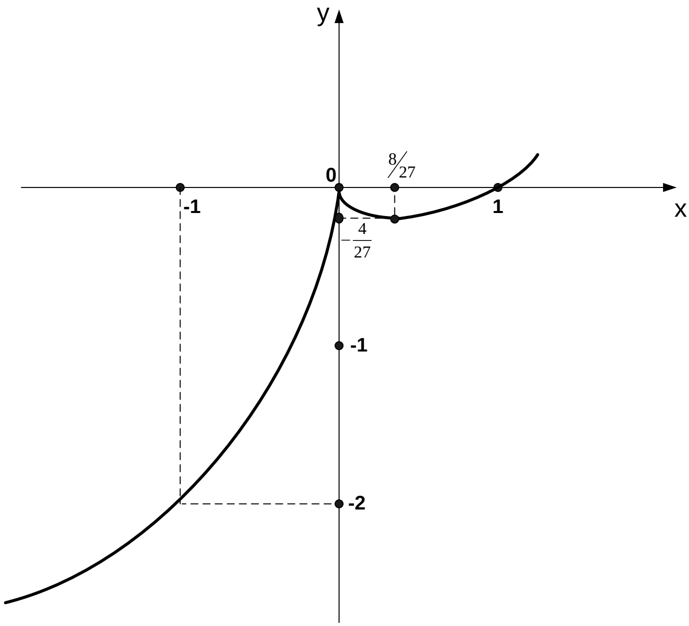
$x\in\left(0;\dfrac{8}{27}\right)$ функція $\downarrow$,

$x\in\left(\dfrac{8}{27};+\infty\right)$ функція $\uparrow$;

$y_{\min}\left(\dfrac{8}{27}\right)=-\dfrac{4}{27},\quad y_{\max}(0)=0.$

6. Визначимо другу похідну $y''=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{x^{4/3}}$. Вона додатна на всій числовій прямій, окрім точки $x=0$, де вона не існує. А тому функція вгнута на інтервалах $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$.

Графік функції наведено на рисунку



<u>Приклад 12.3.</u> $y = x^2 \cdot \ln x.$

<u>Розв'язання.</u>

1. Область визначення функції: $x > 0$ а, отже, $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

2. Виходячи з області визначення функції про парність не може бути й мови. Також функція не є періодичною.

3. Дослідимо поведінку функції при $x \to +0$ (ліва межа області визначення):

$$\lim_{x \to +0} x^2 \cdot \ln x = \|0 \cdot \infty\| = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to +0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Похилі асимптоти знаходимо за формулою $y = Kx + b$, де

$$K=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\ln x=\infty.$$

Звідси випливає, що похилих асимптот немає.

4. Визначимо точки перетину з осями координат:

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad x^2\ln x=0 \;\left(x\neq 0\right)\Rightarrow \ln x=0 \quad\Rightarrow\quad x=1.$$

Маємо точку $(1;0)$.

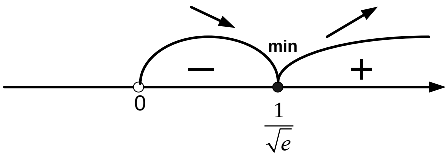
5. Визначимо критичні точки першого роду та інтервали зростання та спадання функції:

$$y'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x\left(2\ln x+1\right),$$

$$y'=0 \quad\Rightarrow\quad 2\ln x+1=0,\quad \ln x=-\frac{1}{2},\quad x=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

y' − існує в усіх точках області визначені.

Таким чином, маємо

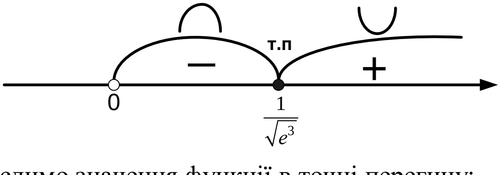


$$y_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{1}{2e}.$$

6. Знайдемо y'' та визначимо інтервали угнутості та опуклості, а також точки перегину:

$$y''=2\ln x+3,$$

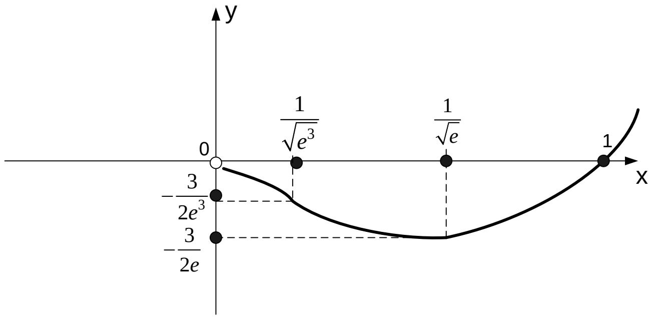
$$y''=0,\quad 2\ln x+3=0,\quad \ln x=-3/2,\quad x=e^{-3/2}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$



Обчислимо значення функції в точці перегину:

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)=\left(e^{-3/2}\right)^2\cdot\ln\left(e^{-3/2}\right)=-\frac{3}{2e^3}.$$

Враховуючи визначене, отримаємо графік функції на рисунку



<u>Приклад 12.4.</u> $y=\dfrac{x^2}{4-x^2}$.

<u>Розв'язання.</u> Використовуючи запропоновану схему дослідження графіка функції, маємо:

1. $4-x^2\neq 0,\quad x\neq\pm 2.$

$$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+2)\cup(+2;+\infty).$$

$x=\pm 2$ – точки розриву функції,

а $(-\infty;-2)\cup(-2;+2)\cup(+2;+\infty)$ – інтервали неперервності функції.

2. $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{4-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{4-x^2}\Rightarrow$ функція парна.

Її графік розташований симетрично відносно початку координат. А, отже, має сенс подальше дослідження та побудову графіка проводити лише для $x\geq 0$, а потім дзеркально відобразити його.

3. Дослідимо поведінку функції поблизу точки розриву $x=2$:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{4}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{4-x^2}=\frac{4}{+0}=+\infty.$$

Таким чином, пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою функції. Похилі асимптоти шукаємо за формулою

$$y=Kx+b,\ \text{де}\ K=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\left(4-x^2\right)x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-Kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=-1.$$

Отже, пряма $y=-1$ є горизонтальною асимптотою (частинний випадок похилої та асимптоти; за умови, що $K=0$)

4. Точки перетину з осями координат:

$$x=0,\quad y=0,$$

$$y=0\ \Rightarrow\ x=0.$$

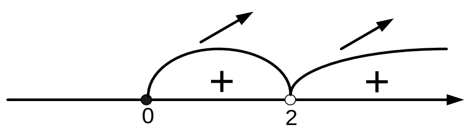
Маємо точку $O\left(0;0\right)$, інших точок перетину з осями координат немає.

5. Визначимо критичні точки першого роду та інтервали зростання та спадання функції:

$$y'=\frac{2x\left(4-x^2\right)-x^2\left(-2x\right)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{8x-2x^3+2x^3}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{8x}{\left(4-x^2\right)^2},$$

$y'=0$ при $x=0$, y' не існує при $x=\pm 2$.

Отже, маємо:



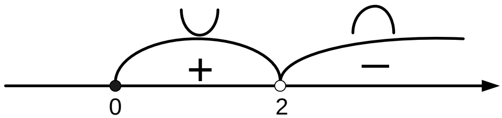
При $x=2$ функція не існує.

6. Знайдемо y'' та визначимо проміжки вгнутості та опуклості функції:

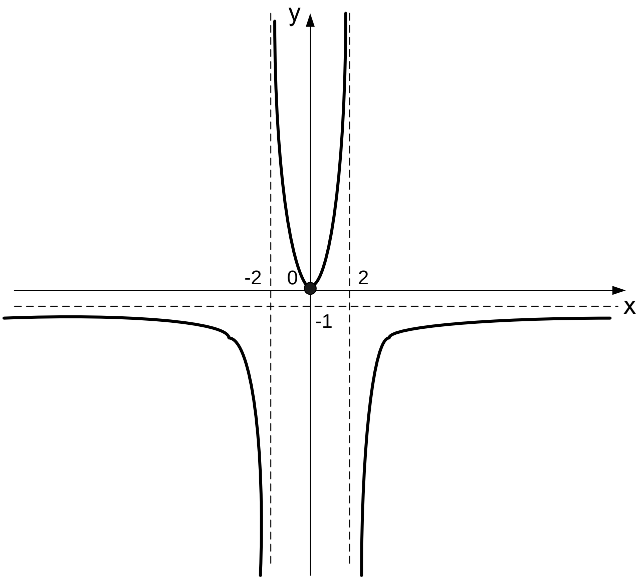
$$y'' = \frac{8\left(4-x^2\right)^2 - 8x\cdot 2\left(4-x^2\right)(-2x)}{\left(4-x^2\right)^4} = \frac{8\left(4-x^2\right)\left(4-x^2+4x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^4} = \frac{8\left(4+3x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^3}.$$

Критичні точки другого роду будуть: $y''=0, \quad 4+3x^2>0$, при всіх значеннях x з області визначення; y'' не існує при $x=\pm 2$.

Отже,



Точка $x=2$ не буде точкою перегину, бо в ній функція не існує. Графік функції наведено на рисунку.



<u>Приклад 12.5</u>. $y = x - 2\operatorname{arctg} x.$

<u>Розв’язання.</u>

1. Задана функція є алгебраїчною сумою двох функцій (визначення кожної є вся числова вісь), а, отже, і область визначення всієї функції: $x \in (-\infty; +\infty)$ **.**

2. Перевіримо функцію на парність**.**

$y(-x) = -x - 2\operatorname{arctg}(-x) = -x + 2\operatorname{arctg} x = -(x - 2\operatorname{arctg} x).$

Оскільки маємо справу з непарною функцією, має сенс досліджувати та будувати функцію для $x \in [0, +\infty)$, а потім розвернути його на $180°$ навколо початку координат.

3. Задана функція неперервна, а тому вертикальних асимптот немає. Знайдемо похилі асимптоти, використовуючи формулу $y = Kx + b$. Обчислимо

$$K = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - Kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x - x) =$$

$$= -2 \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \mp 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \mp \pi.$$

Отже, $y = x \mp \pi$ похилі асимптоти.

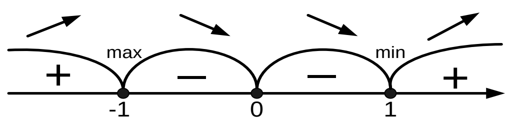
4. Помітимо, що

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0,$$
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2\operatorname{arctg} x = 0.$$

Зауважимо, що останнє рівняння точно розв'язати не вдається.

5. Знайдемо інтервали монотонності та точки екстремуму:

$y' = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $\quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 -$ критичні точки першого роду, y' існує для $\forall\, x \in (-\infty; +\infty)$.



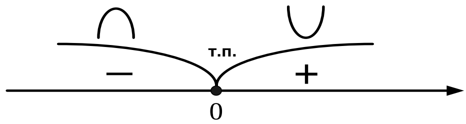
$$y_{\min}(1) = 1 - 2\operatorname{arctg} 1 = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

6. Розглянемо

$$y'' = \frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2},$$

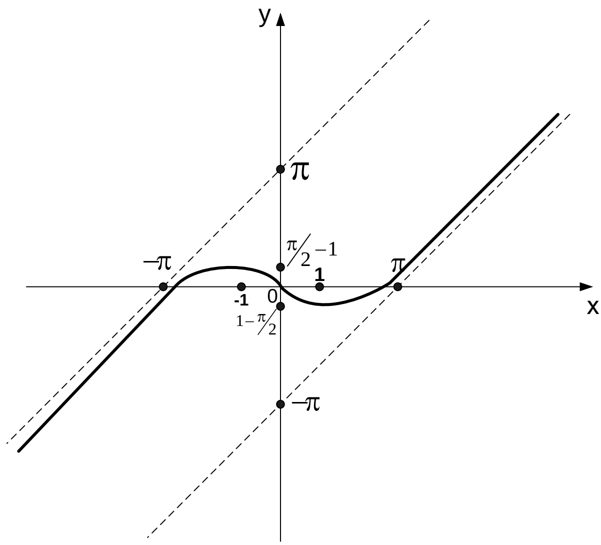
та знайдемо критичні точки другого роду: $y''=0 \quad \Rightarrow \quad x=0.$

Маємо



Отже, при $x\in\left[0,+\infty\right)$ функція угнута.

Графік наведено на рисунку.



<u>Приклад 12.6.</u> $y=\ln\cos x.$

<u>Розв'язання.</u>

1. Враховуючи той факт, що логарифмічна функція визначена тільки для невід'ємних аргументів, маємо

$$\cos x > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi K \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi K, \quad \text{де} \quad K \in Z,$$

Тобто,

$$K = 0: \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},$$

$$K = 1: \quad \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2},$$

$$K = 2: \quad \frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2},$$

$$K = -1: \quad -\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}.$$

2. Дана функція парна: $y(-x) = \ln\cos(-x) = \ln\cos x$ та періодична з періодом $T = 2\pi$.

Таким чином, має сенс досліджувати та будувати функцію для $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, а потім, враховуючи періодичність та парність, добудувати її на всю область визначення.

3. Дослідимо поведінку функції при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$.

$$\lim_{y \to \frac{\pi}{2} - 0} \ln\cos x = \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \ln(+0) = -\infty.$$

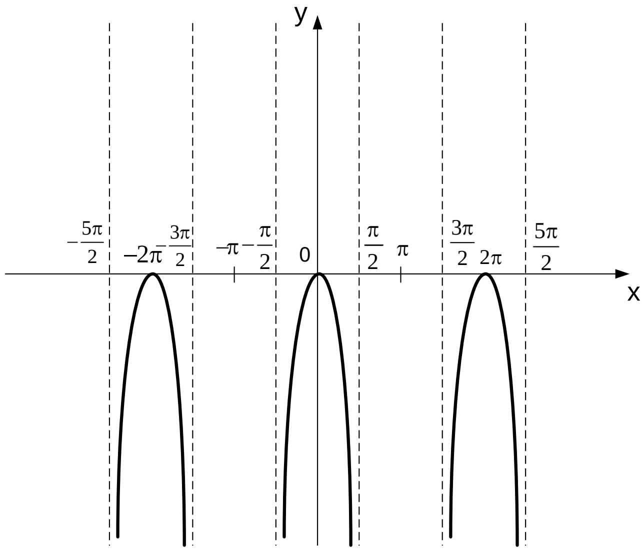
4. Знайдемо точки перетину з осями координат:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\cos 0 = 0, \quad \ln 1 = 0,$ маємо $O(0;0)$.

5. Визначимо інтервали зростання та спадання функції: $y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.

При $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $y' < 0$, тобто функція спадає.

На інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $y''=-\frac{1}{\cos^2 x}<0$, а отже, функція для $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ опукла. Графік цієї функції на рисунку



РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1

Знайти похідну від заданих функцій (в деяких випадках, якщо це доцільно, попередньо зробити тотожні перетворення функції, а потім продиференціювати її).

Варіант 1

1. $y = 5^{\ln x} + 7\ln\left(x^3+1\right);$
2. $y = e^{2x}\left(4+x^5\right);$
3. $y = \dfrac{1-x^4}{1+x^4};$
4. $y = \left(1+\cos^5 8x\right)^9;$
5. $y = \sin\dfrac{x}{5}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4};$
6. $y = 9e^{-x^7};$
7. $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + 17;$
8. $y = \cos 2^x;$
9. $y = \sqrt{\lg\dfrac{e}{x}};$
10. $y = \ln\left(\sin^4 3x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}\right).$

Варіант 2

1. $y = \dfrac{7t^2}{t+4};$
2. $y = 9\cos^2 x + 7;$
3. $y = \ln\left(e^{-2x} + x\cdot e^{-5x}\right);$
4. $y = \lg\left(x^3 + 7^{\ln x}\right);$
5. $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2};$
6. $y = \dfrac{1}{\sin^3 4x};$
7. $y = \operatorname{tg}^4\left(2x+3\right);$
8. $y = 4^{\operatorname{tg}6x};$
9. $y = x^2\cdot\sqrt{x^2-3};$
10. $y = \arcsin\left(x^2+4\right).$

Варіант 3

1. $y = \sqrt[5]{1+3\operatorname{tg} x};$
2. $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\sqrt{4x};$
3. $y = 2^{\sin^4 x};$
4. $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{3x^2+1};$
5. $y = \ln^4\cos x;$
6. $y = \cos^5\left(\dfrac{x^3}{6}-1\right);$
7. $y = \ln\left(x^4\cdot\sin 3x\right);$
8. $y = 7 + 3e^{5x};$
9. $y = \dfrac{x^4}{2+9x};$
10. $y = \sqrt[13]{\left(x^4-6\right)^5}.$

Варіант 4

1. $y = e^{2x} \cdot \ln \sin x;$
2. $y = \sqrt{4 + 5\text{tg}^3 x};$
3. $y = 5\text{ctg}\left(2 - 7x\right);$
4. $y = \cos\left(x^5 - 5^x\right);$
5. $y = 3^{\text{tg}^4 x};$
6. $y = e^{\sqrt{\ln x}};$
7. $y = \log_4\left(x^5 - 3x\right);$
8. $y = 9\arcsin 2x;$
9. $y = \dfrac{x^3}{4x + 1};$
10. $y = \arccos\sqrt{4 + 8x}.$

Варіант 5

1. $y = \dfrac{t^4}{\left(2 + 3t\right)^2};$
2. $y = 7^{4x+3};$
3. $y = 5\sin\left(4x - 1\right);$
4. $y = e^{\arcsin 3x};$
5. $y = \left(2 + \cos^3 x\right)^5;$
6. $y = \ln\left(x^4 - 2x\right);$
7. $y = \sqrt{\text{ctg}\,\dfrac{x+5}{4}};$
8. $y = \sin^3 x \cdot \cos^4 x;$
9. $y = x^4 \cdot \log_5 x;$
10. $y = 5\left(\text{arctg}\, x + \ln\left(4 - x^3\right)\right).$

Варіант 6

1. $y = 3\cos^4 \dfrac{x}{5};$
2. $y = 7^{4x-2};$
3. $y = \text{ctg}\sqrt[3]{x};$
4. $y = \arcsin\sqrt{\sin x};$
5. $y = \sqrt[5]{7 + \cos x^3};$
6. $y = 4\left(5x^4 - 9\right)^7;$
7. $y = \sin 4x \cdot \cos\dfrac{x}{6};$
8. $y = \left(x^5 + 3\right) \cdot e^{-4x};$
9. $y = \ln\dfrac{x^3}{1 - x^2};$
10. $y = \text{arctg}^4\left(2 - 9x\right).$

Варіант 7

1. $y=\sin^5 2x-\cos^2 3x;$
2. $y=\operatorname{ctg}\left(4x+e^{\frac{x}{5}}\right);$
3. $y=\dfrac{7+4x}{7-4x};$
4. $y=5\log_3\left(x^4+2\right);$
5. $y=\ln\sqrt{10x-x^4};$
6. $y=6^{\arccos 4x};$
7. $y=e^{2x}\left(x^4+4x^5\right);$
8. $y=\cos\left(5^x+5^{-x}\right);$
9. $y=\left(9^{3x}-4\right)^{13};$
10. $y=\operatorname{tg}\left(4x+9\right)^5.$

Варіант 8

1. $y=x^5\cdot\ln x;$
2. $y=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x};$
3. $y=7^{\sin\frac{x}{5}};$
4. $y=\left(x^3-3x+8\right)\cdot e^{-5x};$
5. $y=\log_5\left(2-8x\right);$
6. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right);$
7. $y=\left(3x^4-5\right)^7;$
8. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}^3 x};$
9. $y=\sqrt{x^9-8x^7+3};$
10. $y=\operatorname{ctg}\left(7x+9\right)^3.$

Варіант 9

1. $y=5x^4-x^7;$
2. $y=x\sin x+\cos x;$
3. $y=\dfrac{x^5}{\ln x};$
4. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{5x+3};$
5. $y=\left(\cos x^4\right)^2;$
6. $y=7^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}};$
7. $y=\arcsin\left(4+3x\right)+\sqrt{5x+x^6};$
8. $y=\ln\ln\left(5-7x^2\right);$
9. $y=\sqrt{x}\cdot\left(1+5x^3\right)^8;$
10. $y=x\cdot\sin 3^x.$

Варіант 10

1. $y=\ln\sqrt{9x^3+2}$;
2. $y=\dfrac{3x}{1-x^2}$;
3. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}7x$;
4. $y=9^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$;
5. $y=e^{\sin^4\frac{x}{5}}$;
6. $y=e^{2x}\cdot\sin 6x$;
7. $y=\left(8x^9-4x\right)^5$;
8. $y=4\operatorname{tg} e^{\sqrt{3x}}$;
9. $y=3\cdot\log_4\left(7-5x\right)$;
10. $y=9\arcsin\dfrac{3x-4}{5}$.

Варіант 11

1. $y=\sqrt[3]{2+x^5}\cdot\operatorname{arctg} x$;
2. $y=\sin\left(3\ln^5 x\right)$;
3. $y=\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x$;
4. $y=9^{\ln(4-5x)}$;
5. $y=\cos x-x\cdot\sin x$;
6. $y=\dfrac{5x}{1-x^4}$;
7. $y=\left(\sqrt[5]{9x^3}+1\right)^2$;
8. $y=e^{1+7\sqrt{x}}$;
9. $y=x^2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$;
10. $y=2\log_4\cos x$.

Варіант 12

1. $y=e^{2x}\left(\sin 5x+\cos 3x\right)$;
2. $y=10^{8x-3}$;
3. $y=\dfrac{4x}{1+x^5}$;
4. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$;
5. $y=\sqrt{\dfrac{x}{3}+\operatorname{ctg}\dfrac{3x}{5}}$;
6. $y=4\sin^3 x-\cos^2 x$;
7. $y=\ln\left(2+e^{10x}\right)$;
8. $y=\sqrt[7]{\left(4+3x^3\right)^5}$;
9. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln\left(2x+7\right)}$;
10. $y=3\arccos e^{2x}$.

Варіант 13

1. $y = e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{4x}}$;
2. $y = \left(x^4 + 1\right) \cdot 3^x$;
3. $y = \dfrac{4x^3 - 5}{x^4}$;
4. $y = 5\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}$;
5. $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$;
6. $y = \arccos\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$;
7. $y = \operatorname{ctg}\left(8x^3 - \dfrac{5}{x}\right)$;
8. $y = \lg\left(4 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$;
9. $y = \operatorname{arctg}^4\left(5^x - 1\right)$;
10. $y = \ln\left(2e^{\sin x} - 1\right)$.

Варіант 14

1. $y = \ln \operatorname{tg}\sqrt{x^3 + 1}$;
2. $y = \arccos 9x^2 + 3$;
3. $y = \ln\cos 5x + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;
4. $y = \sqrt[5]{\operatorname{ctg}\dfrac{x}{7} + 3}$;
5. $y = \left(e^{\operatorname{ctg} 2x} - \sin 3x\right)^4$;
6. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$;
7. $y = \sqrt[3]{\left(2x\cos x + 1\right)^5}$;
8. $y = \left(4 + e^{5x}\right)^7$;
9. $y = \ln\left(1 + 4^{-2x}\right)$;
10. $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

Варіант 15

1. $y = 3^{\sin 2x} - \sqrt[5]{x^4}$;
2. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4 - 5x}$;
3. $y = \ln\cos^4 x$;
4. $y = \left(5 + 8x^3\right)\operatorname{tg} 7x$;
5. $y = \left(\dfrac{1}{\sin x} + 5\right)^{\sqrt{2}}$;
6. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[5]{\left(1 + x\right)^4}$;
7. $y = \dfrac{5 + x^3}{4 - x^2}$;
8. $y = \cos^3 x + \dfrac{x}{\sin x}$;
9. $y = \left(x^5 - x^3 + 7\right) \cdot e^{-4x}$;
10. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Варіант 16

1. $y = x^4 \cdot 7^{\cos 2x}$;
2. $y = e^{\frac{x}{3}} \cdot \operatorname{arctg}^4 x$;
3. $y = \operatorname{tg} \ln^4 x + 5\sqrt{\sin \frac{x}{4}}$;
4. $y = \sin\left(t - \operatorname{ctg}\sqrt{t}\right)$;
5. $y = \sqrt[4]{\left(1 + x e^{\sqrt{x}}\right)^9}$;
6. $y = x \cdot \log_5\left(x^3 - 2\right)$;
7. $y = \frac{e^{5x}}{x^2 + 1}$;
8. $y = \frac{4x + 1}{\left(x^3 + 2\right)^3}$;
9. $y = \arcsin^4\left(\sin 9x\right)$;
10. $y = \log^5{}_4\left(3^x + 1\right)$.

Варіант 17

1. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 4x}$;
2. $y = \left(\ln 5 + 2\right)^{\operatorname{tg} x}$;
3. $y = x^3 + \sin\sqrt{\frac{x}{\cos x}}$;
4. $y = x \cdot e^{-5x}$;
5. $y = 7 \arcsin^3 \frac{x}{4}$;
6. $y = \log_9\left(3^x - x^3\right)$;
7. $y = e^{-x^2} + 5^{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \cdot \left(x^4 + 2\right)$;
8. $y = \sqrt[3]{1 + \sin\left(x + \cos \frac{x}{3}\right)}$;
9. $y = \frac{3\operatorname{ctg} x}{\sin 5x} + \left(x^3 + e^{\frac{x}{4}}\right)^9$;
10. $y = \left(\operatorname{ctg} 5x - x^9\right)^2$.

Варіант 18

1. $y = x^3 \cdot \ln\left(x^2 + 5\right)$;
2. $y = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$;
3. $y = 7^{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{5}\right)}$;
4. $y = \frac{x^3}{x + 5}$;
5. $y = 9 \cdot \ln^4 2x$;
6. $y = 2\cos \frac{x^3}{3}$;
7. $y = \frac{1}{2} e^{5x^2 - 7}$;
8. $y = \left(6\cos 2x + 9\right)^{14}$;
9. $y = \sqrt{x^2\left(4 - x\right)}$;
10. $y = \sqrt[8]{e^{\sin x - 5} + 4}$.

Варіант 19

1. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right);$
2. $y=x\cdot\arcsin\frac{x}{3};$
3. $y=5^{\operatorname{tg}x^3};$
4. $y=\frac{1+4\sin x}{\cos 2x};$
5. $y=4x+\operatorname{arctg}^3 x;$
6. $y=\sqrt{2\operatorname{tg}(9x-7)};$
7. $y=5e^{4-3x^2};$
8. $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}-4x\right);$
9. $y=\sin^3\left(4t-t^4\right);$
10. $y=\arccos\ln x.$

Варіант 20

1. $y=x\sqrt{5-x^2};$
2. $y=4^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}};$
3. $y=\frac{4x^3}{1-x^5};$
4. $y=2\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+\ln 3;$
5. $y=\ln\operatorname{tg}\sqrt{2x-1};$
6. $y=3\arccos e^{4x};$
7. $y=\left(5^{\cos 4x}-2\right)^8;$
8. $y=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{8};$
9. $y=\cos\sqrt{9x^2-2};$
10. $y=e^{x^2+\sqrt{x}}.$

Варіант 21

1. $y=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right);$
2. $y=x\cdot e^{\frac{3}{x}};$
3. $y=e^{2x}\cdot\left(\cos 5^x+5\right);$
4. $y=\ln^4(7-2x);$
5. $y=\left(2^{\sqrt{3}}-\operatorname{ctg}3x\right)^5;$
6. $y=\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x};$
7. $y=\frac{\sin^3 x}{\cos 5x};$
8. $y=\operatorname{arctg}^5\sqrt{\sin x};$
9. $y=x^4\cdot\sqrt{5+\ln x};$
10. $y=9\operatorname{ctg}\frac{3x-4}{8}+e^{2-x^4}.$

Варіант 22

1. $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{4x^2-5}{4x^2+5}}$;
2. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)$;
3. $y=\arcsin\sqrt{1-7x^3}$;
4. $y=\dfrac{2x^3}{x^5+4}$;
5. $y=x^2\cdot e^{-8x}$;
6. $y=e^{x^3}+\sin\sqrt{17x-1}$;
7. $y=\left(3^{\cos x}-4\right)^4$;
8. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $y=\ln\cos 5x-\dfrac{1}{4}\sin^4 x$;
10. $y=\log_5{}^2\left(3x^2+2\right)$.

Варіант 23

1. $y=\left(4^{\sin 4x}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}\right)^9$;
2. $y=\log_3{}^4\left(x^3-5x\right)$;
3. $y=e^{\sqrt{\ln\operatorname{tg}4x}}$;
4. $y=\ln\left(e^{-x}+x\cdot e^x\right)$;
5. $y=\dfrac{4-x^4}{x-9}$;
6. $y=e^{9x}\cdot\left(2\cos 7x-3\sin 7x\right)$;
7. $y=\sin\operatorname{tg}4x-\cos 3^{\ln x}$;
8. $y=\dfrac{1}{2}\arcsin^7\left(\dfrac{4}{x}\right)$;
9. $y=x\left(4-\sin\dfrac{3x+1}{5}\right)$;
10. $y=x^3\cdot\left(e^{\pi}-\operatorname{tg}2x\right)$.

Варіант 24

1. $y=\left(x^9+x\right)^5$;
2. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{3x}+\sin^4 2x$;
3. $y=7\sin 5^{\ln(x+4)}$;
4. $y=\left(\ln 3\right)^{\cos\frac{x}{2}}$;
5. $y=x^2\cdot\sin 4x$;
6. $y=\dfrac{x^9}{\ln\left(x^3-2\right)}$;
7. $y=\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}}$;
8. $y=5^{\sqrt{\cos(3-5x)}}$;
9. $y=\sqrt{\cos 3x}\cdot e^{\sqrt[5]{x}}$;
10. $y=8^{\frac{\ln x}{x}}-\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Варіант 25

1. $y=\cos^2(6x+7)$;
2. $y=x\cdot e^{1-\cos x}$;
3. $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^8 2x}$;
4. $y=\lg(x-\sin x)$;
5. $y=\dfrac{x^2}{4-x^3}$;
6. $y=\sin^2 x\cdot\cos 4x$;
7. $y=\dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$;
8. $y=\arcsin\dfrac{3}{x}$;
9. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^4}$;
10. $y=\sqrt[4]{x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Завдання 2

Знайти похідні першого порядку від функції.

Варіант 1

1. $y=(2+\ln 5)^{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$;
2. $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}}-\log_2(5^x-1)$;
3. $y=x\cdot e^{6x}+\left(x+e^{7x}\right)^3$;
4. $y=\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$;
5. $(x+y)^2+\cos\dfrac{x+y}{x}=5$;
6. $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=3t^3\cdot\ln t. \end{cases}$

Варіант 2

1. $y=\sin\left(x+\sqrt[3]{\cos 2x}\right)$;
2. $y=3\log_5\left(7^{\ln x}+5\right)+\dfrac{3x}{\ln x}$;
3. $y=x^2\cdot\operatorname{arctg} x^2-2^x$;
4. $y=(3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$;
5. $\operatorname{tg}(xy)=3\cos\left(x\sqrt{y}\right)$;
6. $\begin{cases} x=\sqrt{1+3t}; \\ y=3t^3\cdot\cos\sqrt{t}. \end{cases}$

Варіант 3

1. $y = 5x^{\operatorname{ctg}^2(3x+2)}$;

2. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \cdot e^{3x}$;

3. $y = \sqrt{3}\operatorname{arctg}^2 x + \dfrac{1}{x} + \operatorname{tg}\sqrt{x}$;

4. $y = (\ln x)^{\operatorname{arctg}\frac{3}{x}}$;

5. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{2}} = 5$;

6. $\begin{cases} x = t^3 - 3t; \\ y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Варіант 4

1. $y = \left(\dfrac{4}{3x^2} - \dfrac{9}{x}\right)\sqrt{4x + x^2}$;

2. $y = x^2 \cdot e^{-x^2} - 5^{1-\ln^2 3x}$;

3. $y = 3\operatorname{arctg}\ln^3 \dfrac{1}{x}$;

4. $y = (\ln\cos 7x)^{\sin\frac{x}{2}}$;

5. $y - \cos^3 y = \sin^3 x$;

6. $\begin{cases} x = \arccos\left(t^3 + 1\right); \\ y = \arcsin 5t. \end{cases}$

Варіант 5

1. $y = 2^{\arcsin 2x} + \left(1 - \arccos\dfrac{x}{3}\right)^5$;

2. $y = e^x \cdot \cos 3x + \sqrt[7]{2x + \sqrt[5]{x^3}}$;

3. $y = \dfrac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

4. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$;

5. $\ln y + \dfrac{x^2}{y} = 3$;

6. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t; \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

Варіант 6

1. $y = \sin^4(3x-1) \cdot e^{-x^3}$;

2. $y = \sqrt[4]{\left(1 + \cos^5 7x\right)^3}$;

3. $y = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{5} + 3^{\operatorname{tg}^5 x}$;

4. $y = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^{\ln\left(x^2+1\right)}$;

5. $\left(y^3 - x^3\right)^2 - x^2 \cdot y + y - x = 0$;

6. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t; \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$

Варіант 7

1. $y=\ln\left(\sin^4 3x\right)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$;

2. $y=\sqrt[5]{\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 2x}}$;

3. $y=e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\cdot\arcsin\ln x$;

4. $y=\left(\dfrac{x^3}{1+x^2}\right)^x$;

5. $\left(x^2+1\right)^2+\left(y^2+1\right)^2-xy=5$;

6. $\begin{cases} x=\dfrac{4-t}{1+t}; \\ y=\dfrac{t^3}{2-t^3}. \end{cases}$

Варіант 8

1. $y=\sqrt[4]{\dfrac{5x-1}{2-3x}}$;

2. $y=\operatorname{ctg}^3 x\cdot\operatorname{tg}4x$;

3. $y=\ln\dfrac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$;

4. $y=\left(\ln x^2\right)^{\cos x}$;

5. $x^2+y^2+\arcsin y+y\operatorname{arctg}2x=0$;

6. $\begin{cases} x=3t+\sin 3t^2; \\ y=\sin^2 3t. \end{cases}$

Варіант 9

1. $y=5^{x^3\cdot\sin x}+\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\sqrt{3}}$;

2. $y=\sqrt[4]{5x+x\sqrt[7]{x^3}}$;

3. $y=\ln\arcsin\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

4. $y=\left(x^3+1\right)^{\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}$;

5. $y\sin x-\cos\left(x-y\right)=0$;

6. $\begin{cases} x=\dfrac{t^3+1}{t^2-1}; \\ y=\dfrac{t}{t^2-1}. \end{cases}$

Варіант 10

1. $y=\dfrac{e^{-5\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}$;

2. $y=\ln\operatorname{tg}2x+x^3\cdot\arccos 5x$;

3. $y=\sqrt[5]{\left(1+x^3\right)^4}$;

4. $y=\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}^3 x}$;

5. $\operatorname{arctg}y=x+y^2$;

6. $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t; \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t. \end{cases}$

Варіант 11

1. $y=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{4+7x^4}$;

2. $y=\left(1+\operatorname{tg}^4 2x\right)\cdot e^{\frac{2x}{5}}$;

3. $y=\ln^4\sin\dfrac{2}{x^3+1}$;

4. $y=\left(\cos\left(3x+1\right)\right)^x$;

5. $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$;

6. $\begin{cases} x=\ln\left(t^2+1\right); \\ y=t-\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Варіант 12

1. $y=\sqrt[4]{x+\left(\cos\ln x\right)^5}$;

2. $y=\dfrac{e^{3x}}{2x+9}-x\cdot\ln\left(4+x^3\right)$;

3. $y=4\arccos^3\left(\sqrt{x}-3\right)^7$;

4. $y=\left(\operatorname{ctg}\left(x+1\right)\right)^{3x^2+9}$;

5. $x-y^3=2\sin^3 x$;

6. $\begin{cases} x=5\sin^2 t+1; \\ y=2\operatorname{ctg} t-3. \end{cases}$

Варіант 13

1. $y=x^5\cdot\left(\operatorname{arctg} x\right)^4$;

2. $y=9\log_3\left(e^{\frac{x}{7}}+2\right)+4^{\ln x}$;

3. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{1+7x}-3\sqrt{\sin 5x}$;

4. $y=\left(\operatorname{tg} 7x-x^9\right)^{\ln x}$;

5. $y^3+xy=1$;

6. $\begin{cases} x=\sin t+\cos t; \\ y=\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Варіант 14

1. $y=e^{\frac{x}{5}}\cdot\operatorname{arcctg}^3 x$;

2. $y=\operatorname{tg}\sin 2x+10\sqrt{\cos\dfrac{2x-3}{7}}$;

3. $y=\dfrac{5^{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{9x^4-1}}+\left(x^4-e^{2x}\right)^{13}$;

4. $y=\left(3^x+\ln x\right)^{\sqrt{x}}$;

5. $\operatorname{arctg} y=x\cdot\sin y$;

6. $\begin{cases} x=2t\sin t; \\ y=3\cos^2 t. \end{cases}$

Варіант 15

1. $y=\dfrac{\sqrt{2-\cos^4 x}}{1+\sin 3x}$;

2. $y=e^{\operatorname{tg}\frac{5x}{3}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

3. $y=\dfrac{4x^3+2}{4x^5}+\ln\sqrt{2+x^3}$;

4. $y=\left(\ln\operatorname{tg}x\right)^{\cos 5x}$;

5. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$;

6. $\begin{cases} x=\ln\left(t^3+3\right); \\ y=\dfrac{t}{t^3+3}. \end{cases}$

Варіант 16

1. $y=x^7\cdot\operatorname{tg}^4 2x-\arccos\dfrac{4x-1}{3}$;

2. $y=\ln\dfrac{\operatorname{ctg}^5\dfrac{x}{5}}{1-\sin^3 x}$;

3. $y=10^{1-\sin^4 3x}$;

4. $y=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3x+1}\right)^{1-x}$;

5. $e^x\cdot\sin y-e^{-y}\cdot\cos x=0$;

6. $\begin{cases} x=t^3+3t+1; \\ y=t^3-3t+1. \end{cases}$

Варіант 17

1. $y=\ln\left(x^4+\sqrt[5]{x^2-1}\right)$;

2. $y=\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^3}}+\ln\operatorname{tg}^5\dfrac{7}{x}$;

3. $y=\left(1+\cos^2 4x\right)\cdot e^{\sin\sqrt{x}}$;

4. $y=\left(x^3-1\right)^{\cos\sqrt{x}}$;

5. $x^2\cdot\ln\left(1+y^2\right)+y\cdot\ln\left(1+x^2\right)=0$;

6. $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{t^3+1}; \\ y=\dfrac{3t^2}{t^3+1}. \end{cases}$

Варіант 18

1. $y=\ln^3\left(4-2x\right)$;

2. $y=\sqrt{x\cdot e^{3x}-4x^5}$;

3. $y=4^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}+\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x^3+2}}$;

4. $y=\left(x^3+2\right)^{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$;

5. $e^{-\frac{y}{x}}+\ln y=2$;

6. $\begin{cases} x=\ln\left(t^4-2\right); \\ y=\dfrac{t^2}{t^4-2}. \end{cases}$

Варіант 19

1. $y=\ln\dfrac{4+\sqrt{9+x^3}}{x^2}$;

2. $y=x^7\cdot e^{-4x^2}+e^{\sin^3\frac{1}{x}}$;

3. $y=\dfrac{7x^4+3}{\sqrt{\sin\dfrac{2x-1}{5}}}$;

4. $y=\left(\cos^2 x\right)^{4-x^3}$;

5. $\left(y^2+x\right)^3+\left(x^2-3y\right)^3=0$;

6. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\cos 2t; \\ y=\sin^2 2t. \end{cases}$

Варіант 20

1. $y=\operatorname{tg}^3 2x+e^{-x^2}$;

2. $y=\arcsin\left(5-x^7\right)$;

3. $y=x^4\ln\left(x^3-2\right)-\dfrac{1}{\sin^3\dfrac{x}{5}}$;

4. $y=\left(x^7-2\right)^{\cos 3x}$;

5. $x^3y+\sin y+\left(x-y\right)^2=0$;

6. $\begin{cases} x=t\cdot e^t; \\ y=t\cdot e^{-t}. \end{cases}$

Варіант 21

1. $y=7\cdot\cos^3\dfrac{x}{4}\cdot\operatorname{tg}2x$;

2. $y=\ln\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 4x}}$;

3. $y=5^{\arccos\sqrt{x}}+3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}$;

4. $y=\left(x^2+e^x\right)^{\operatorname{tg}x}$;

5. $xe^y+y^2=10$;

6. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}-t; \\ y=\sqrt{t^3+1}. \end{cases}$

Варіант 22

1. $y=\sqrt[6]{\left(7+\sqrt{x\cdot\cos x}\right)^5}$;

2. $y=9\sin^2\dfrac{x^4}{\ln x}-\operatorname{tg}e^{4-x^3}$;

3. $y=5\operatorname{arcctg}\left(x^9\cdot\ln x\right)$;

4. $y=\left(4+\sqrt[3]{x}\right)^{\cos x}$;

5. $y^3+\sqrt[3]{x}=\arcsin y$;

6. $\begin{cases} x=t+\sin t; \\ y=\sqrt{\operatorname{ctg}t}. \end{cases}$

Варіант 23

1. $y=\frac{2}{5}\arccos\left(\sin^2 4x\right);$

2. $y=3^{\operatorname{ctg}\frac{4}{x}}\cdot\ln x;$

3. $y=\frac{e^{2x}}{e^{4x}-5};$

4. $y=\left(\ln x\right)^{\sqrt{x}};$

5. $\sin\left(x+y\right)=y^2+1;$

6. $\begin{cases} x=t\sin t; \\ y=\frac{t}{\cos t}. \end{cases}$

Варіант 24

1. $y=7\cos 2^{\ln x}-9;$

2. $y=\left(3x^5-4\right)\cdot e^{7x}+\frac{\ln x}{x};$

3. $y=\left(\ln 5\right)^{\cos x}-\operatorname{tg}^4\frac{2}{x};$

4. $y=\left(4+\ln x\right)^{\sin x^5};$

5. $4x-y^4=\cos\left(xy^2\right);$

6. $\begin{cases} x=3t^2+1; \\ y=\operatorname{arctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

Варіант 25

1. $y=\frac{\ln^3 x}{x}+x^4\cdot 3^{\cos\frac{x}{5}};$

2. $y=\left(\arcsin\ln x\right)^{\sqrt{3}};$

3. $y=7\arccos^5 2x+\sqrt[7]{\ln\operatorname{tg}\frac{3}{x}};$

4. $y=\left(2x+\sin 4x\right)^{\frac{1}{x}};$

5. $\arccos y+xy^3=1;$

6. $\begin{cases} x=\ln^3 t; \\ y=t^2+\operatorname{ctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

Завдання 3

Знайти похідні другого порядку від даних функцій.

Варіант 1

1. $y=e^{-x}\cdot\cos 3x;$

2. $\ln y+\frac{y}{x}=0;$

3. $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}; \\ y=\frac{t-1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

Варіант 2

1. $y=\operatorname{arctg}\ln x;$

2. $x^2-2xy^2+1=0;$

3. $\begin{cases} x=t\ln t; \\ y=\frac{\ln t}{t}. \end{cases}$

Варіант 3

1. $y=\ln\left(2x^2+7\right);$

2. $y^3+x^3-3xy=0;$

3. $\begin{cases} x=e^{-t^2}; \\ y=\operatorname{arctg}\left(2x+1\right). \end{cases}$

Варіант 4

1. $y=\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$;

2. $y^2-2xy+5=0$;

3. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2}; \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

Варіант 5

1. $y=\left(5x^2-1\right)\sin 2x$;

2. $x+y=e^{x-y}$;

3. $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Варіант 6

1. $y=\arcsin^2 x$;

2. $e^x-e^y=y-x$;

3. $\begin{cases} x=t\left(1-\sin t\right); \\ y=t\cos t. \end{cases}$

Варіант 10

1. $y=\frac{\ln x}{x}$;

2. $\left(x+y\right)^2+\left(x-3y\right)^3=0$;

3. $\begin{cases} x=2\cos^3 t; \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$

Варіант 11

1. $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$;

2. $y\cdot\sin\left(x+y\right)-x=0$;

3. $\begin{cases} x=2t^3+t; \\ y=\ln t. \end{cases}$

Варіант 12

1. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

2. $\ln\left(x+y\right)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

3. $\begin{cases} x=3\cos t; \\ y=4\sin^2 t. \end{cases}$

Варіант 13

1. $y=x\cdot e^{-x}$;

2. $\ln\frac{x}{y}-x+2y=0$;

3. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t; \\ y=2\sin t-\sin 2t. \end{cases}$

Варіант 14

1. $y=x^3\cdot e^{-x^2}$;

2. $\operatorname{arctg}\left(x+y\right)-x-2y=0$;

3. $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

Варіант 15

1. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$;

2. $\operatorname{tg}\left(x+2y\right)-3x+y=0$;

3. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}; \\ y=\dfrac{t}{\left(t+1\right)^2}. \end{cases}$

Варіант 16

1. $y=x^2\cdot\ln x$;

2. $y=x+\operatorname{arctg} y$;

3. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t; \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

Варіант 17

1. $y=x\cdot e^{-1/x}$;

2. $\sin\left(2x+y\right)+2x-3y=0$;

3. $\begin{cases} x=2\ln\operatorname{ctg} t; \\ y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Варіант 18

1. $y=x\cdot\sin^2 x$;

2. $e^{xy}-\left(x+3y\right)=0$;

3. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t; \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

Варіант 19

1. $y = e^{-x} \cdot \sin x;$

2. $\operatorname{tg}(x+y) - xy = 0;$

3. $\begin{cases} x = t^2 + 2; \\ y = \dfrac{t^3}{3-t}. \end{cases}$

Варіант 20

1. $y = \arcsin^2 x;$

2. $e^x - e^y = y - x;$

3. $\begin{cases} x = t(1-\sin t); \\ y = t\cos t. \end{cases}$

Варіант 21

1. $y = \dfrac{x^2}{1-x};$

2. $x\ln y - y\ln x = 1;$

3. $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t; \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$

Варіант 22

1. $y = x^2 \cdot e^{2x};$

2. $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1;$

3. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

Варіант 23

1. $y = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x + 3);$

2. $x - y^2 = \cos(xy);$

3. $\begin{cases} x = 3t^2; \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

Варіант 24

1. $y = \dfrac{1}{1+x^3};$

2. $y + \sqrt{x} = \arcsin y;$

3. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 4\ln t. \end{cases}$

Варіант 25

1. $y = x^3 \cdot e^{3x};$

2. $x^3 - y^3 - 3xy = 0;$

3. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

Завдання 4

Обчислити границі даних функцій за правилом Лопіталя.

Варіант 1

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x};$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{7}{x^7-1} \right);$

3. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{5}{1+2\ln x}}.$

Варіант 2

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot \cos x}{\cos x - 1};$

2. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{\ln \dfrac{x}{2}} \right);$

3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin 2x}}.$

Варіант 3

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x-\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\operatorname{ctg}3x\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Варіант 4

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin x\cdot\cos x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-e^{2x}\right)\operatorname{ctg}x\right]$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x\right)^{\sin\frac{x-1}{2}}$.

Варіант 5

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}$.

Варіант 6

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\ln^2 x}$.

Варіант 7

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{\sin\left(x-2\right)}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$.

Варіант 8

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$.

Варіант 9

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(\sin x\right)-\sin^2 x}{x^6}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(1-x\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Варіант 10

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln\left(1+x\right)}$;

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

Варіант 11

$1. \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x - e^{-x}};$

$2. \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\right);$

$3. \lim\limits_{x\to 1+0} \left(x-1\right)^{\frac{1}{x^2-x}}.$

Варіант 12

$1. \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2+x}+x};$

$2. \lim\limits_{x\to \infty} \left(x\cdot\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)\right);$

$3. \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

Варіант 13

$1. \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+2\ln x}{x};$

$2. \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \left(\sin\left(2x-1\right)\operatorname{tg}\pi x\right);$

$3. \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\pi}{2}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$

Варіант 14

$1. \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\cdot\sin x - x\left(x+1\right)}{x^3};$

$2. \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right);$

$3. \lim\limits_{x\to 1} \left(2-x\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$

Варіант 15

$1. \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x};$

$2. \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x\cdot\ln\left(x+e^x\right);$

$3. \lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$

Варіант 16

$1. \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\left(1-\cos x^2\right)}{x^2\cdot\sin x^2};$

$2. \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{4x}{x-2}-\dfrac{1}{4-x^2}\right);$

$3. \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$

Варіант 17

$1. \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln 4x}{\ln\sin 5x};$

$2. \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\pi-2\operatorname{arctg} x\right)\cdot\ln x;$

$3. \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{1+5\ln x}}.$

Варіант 18

$1. \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x-\ln\left(1+2x\right)}{x^2};$

$2. \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\cdot\operatorname{tg} x}\right);$

$3. \lim\limits_{x\to 2} \left(3-x\right)^{\frac{5}{x^2-4}}.$

Варіант 19

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$;

2. $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x+e)\right]^{\frac{1}{x}}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-\cos x)\operatorname{ctg}x\right)$.

Варіант 20

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{1-x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Варіант 21

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{x^2-3x+2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

Варіант 22

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$;

2. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^{3x}-1\right)}}$.

Варіант 23

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\cdot\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$.

Варіант 24

1. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Варіант 25

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{\sin(x-2)}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{3x}}$.

Завдання 5

Провести повне дослідження функції та за результатами дослідження побудувати графік цієї функції.

Варіант 1

а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$;

б) $y=x^2\cdot e^{-x}$.

Варіант 2

а) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

б) $y=x\cdot e^{-x^2}$.

Варіант 3

а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$;

б) $y=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

Варіант 4

а) $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$;

б) $y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$.

Варіант 5

а) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

б) $y=x+e^{-x}$.

Варіант 6

а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

б) $y=\ln\cos x$.

Варіант 7

а) $y=\dfrac{8}{x^2\left(x-4\right)}$;

б) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Варіант 8

а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

б) $y=\left(x^2+4\right)\cdot e^{-x^2}$.

Варіант 9

а) $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$;

б) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Варіант 10

а) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Варіант 11

а) $y=\dfrac{x}{\left(x-1\right)^2}$;

б) $y=x^3e^{-x}$.

Варіант 12

а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

б) $y=x-\ln\left(x+1\right)$.

Варіант 13

а) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$;

б) $y=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$.

Варіант 14

а) $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$;

б) $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$.

Варіант 15

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$;

б) $y=x+\ln\left(x^2-4\right)$.

Варіант 16

а) $y=x+\dfrac{x}{3x-1}$;

б) $y=\left(x^2+1\right)e^x$.

Варіант 17

а) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$;

б) $y=x-2\ln x$.

Варіант 18

а) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$;

б) $y=x^2\ln x$.

Варіант 19

а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

б) $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

Варіант 20

а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

б) $y=\ln\left(2x^2+3\right)$.

Варіант 21

а) $y=(x-2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$;

б) $y=x+2\operatorname{arctg}x$.

Варіант 22

а) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$;

б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

Варіант 23

а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$;

б) $y=x\cdot\ln^2 x$.

Варіант 24

а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$;

б) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Варіант 25

а) $y=3\cdot\sqrt[3]{x^2}+2x$;

б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2 т. Т.1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Л. В. Курпа [та ін.] ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 528 с.

2. Одинцова О.В. Стислий курс вищої математики: Т. 2: Математичний аналіз. Теорія границь. Диференціальне числення функції / Одинцова О.В., Тимченко Г.М. – Видавництво «Кондор», 2022. – 232 с.

3. Вища математика. Стислий конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 1-го курсу хімічного факультету. Частина 2. Вибрані розділи математичного аналізу / Розробник: Н.Е. Кондрук – Ужгород: УжНУ, 2015. – 48 с.

4. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: Навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с., рис. 96, табл. 2. ISBN

5. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2 ч. – Ч.1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака [та ін.]; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків: Підручник НТУ «ХПІ», 2014. – 224 с

6. Геворкян Ю. Л., Чікіна Н. О., Антонова І. В. Вища математика: Теорія і практика [Електронний ресурс] : електронний медійний інтерактивний навч. посібник : у 2 ч. Ч. 1 : Теорія границь. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Харків: Друкарня Мадрид, 2016. 1 ел. опт. диск (DVD-ROM).

7. Чікіна Н. О. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики у 2-х частинах. Ч. 1. Х.: Підручник НТУ «ХПІ», 2012.

8. Методичні вказівки до проведення тестового контролю знань з вищої математики за темою "Диференціальне числення функції однієї змінної" : для викл. та студентів усіх спец. ф-тів: МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, КІТ, ТОР, ТНР / уклад. А. М. Гайдаш ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : НТУ "ХПІ", 2018. – 80 с.

9. Прищенко О.П., Чорна О.С. Похідна та її застосування: методичні вказівки до проведення практичних занять для студентів усіх спеціальностей / уклад.О. П. Пріщенко, О. С. Чорна. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 36 с

10. Музиченко С. В., Філон Л. Г. Практикум з математичного аналізу. Ч. 1. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної : навч. посібник [електронне видання]. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ПЕРШИНА Юлія Ігорівна
ЧЕРЕМСЬКА Надія Валентинівна
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск проф. Геворкян Ю.Л.
Роботу до видання рекомендувала проф. Чікіна Н.О.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 140

Підп. до друку2023 р.
Гарнітура Times New Roman.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстраціюДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання