Г. Я. Тулученко

РЯДИ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Г. Я. Тулученко

РЯДИ

Навчальний посібник

Рекомендувала Вчена рада
Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»

Львів
Видавництво Львівської політехніки
2024

УДК 517.52(075.8)
Т 82

Рецензенти:

Тацій Р. М., доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет безпеки життєдіяльності;

Нечуйвітер О. П., доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків)

Рекомендувала Вчена рада
Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»
як навчальний посібник для студентів
електротехнічних спеціальностей
(протокол № 9 від 31.10.2023 р.)

Тулученко Г. Я.
Т 82 Ряди : навч. посібник для студентів електротехнічних спеціальностей / Г. Я. Тулученко.. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2024. – 220 с. ..
ISBN 978-966-941-915-6

У навчальному посібнику викладено основні теоретичні відомості з теорії числових та функціональних рядів. Наведено значну кількість прикладів розв’язання типових задач. Для організації самостійної роботи студентів до кожної теми наведено варіанти індивідуальних завдань.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей.

Надруковано в авторській редакції.

Іл. 39. Табл. 2. Бібліогр. 15 назв.

УДК 517.52(075.8)

ISBN 978-966-941-915-6

ВСТУП

Під час вивчення курсу вищої математики студентам надаються систематизовані знання, які є основою для опанування в подальшому методів математичного моделювання. Вагомою складовою навчання є формування в майбутнього фахівця аналітично-дослідницьких компетентностей, які є необхідними для успішної професійної реалізації в умовах сучасного виробництва.

Даний навчальний посібник присвячено організації аудиторної та самостійної роботи студентів у процесі вивчення теми «Ряди». Зміст навчального посібника погоджено з робочими програмами навчальної дисципліни для студентів усіх спеціальностей навчально-наукового інституту енергетики, електроніки та електромеханіки НТУ «ХПІ».

Метою розробки навчального посібника є допомога в ефективній організації різних видів навчальної діяльності студентів, в тому числі дистанційної та самостійної. Для досягнення визначеної мети подання матеріалу в навчальному посібнику здійснено відповідно до таких вимог:

- здобуття систематизованих знань із теорії числових і функціональних рядів;
- оволодіння основними методами та розрахунковими прийомами застосування апарату рядів до розв'язування прикладних задач;
- вироблення навичок самостійного вивчення довідкової та спеціальної літератури.

У процесі вивчення теми «Ряди» студенти набувають таких професійних компетентностей:

- здатність рекомендувати методи теорії числових та функціональних рядів до розв'язування прикладних задач.
- здатність застосовувати числові та функціональні ряди до наближених обчислень.

Навчальний посібник містить:

- теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних розрахункових завдань;
- приклади розв’язання стандартних задач;
- варіанти завдань для самостійного виконання.

Наприкінці розробки наведено список рекомендованої літератури.

Досить детальне розбиття матеріалу на теми дозволяє використовувати навчальний посібник з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

Розділ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття та означення

Означення. ***Числовим рядом*** називається сума виду:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad (1.1)$$

де a_n – дійсні числа.

Нумерація членів ряду може починатися з будь-якого цілого числа. Наприклад, існують ряди з такою нумерацією:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,,$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \,,$$

$$a_{-3} + a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{n=-3}^{\infty} a_n \,.$$

Означення. Сума перших N членів числового ряду називається його ***частинною сумою***:

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \,. \qquad (1.2)$$

Означення. Числовий ряд виду (1.1) є ***збіжним***, якщо є збіжною послідовність його частинних сум (1.2), тобто границя

$$\lim_{N \to \infty} S_N = S \qquad (1.3)$$

має скінченне значення.

Якщо границя (1.3) не існує або дорівнює нескінченності, тоді говорять, що ряд є ***розбіжним***.

Означення. ***Залишком числового ряду*** називають ряд, який отримують з ряду (1.1) відкиданням перших m членів:

$$R_m = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \, . \qquad (1.4)$$

Прикладами числових рядів, які вивчалися в шкільному курсі математики, є ***арифметична та геометрична прогресії***.

Приклад 1.1. Перевірити за означенням, що геометрична прогресія з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = 1/2$ є збіжним рядом.

Розв'язання. Згадаємо зі шкільного курсу математики формулу суми перших N членів геометричної прогресії:

$$S_N = \frac{b_1 \cdot \left(1 - q^N\right)}{1 - q} \, . \qquad (1.5)$$

Підставимо до формули (1.5) задані параметри геометричної прогресії та обчислимо для неї границю виду (1.3):

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot (1 - 0)}{\frac{1}{2}} = 2 \, .$$

Отже, границя послідовності частинних сум заданої геометричної прогресії існує і скінченна, тобто ми за означенням отримали підтвердження, що нескінченно спадна геометрична прогресія є збіжним числовим рядом.

Приклад 1.2. Перевірити за означенням, що арифметична прогресія з першим членом $a_1 = 3$ і різницею $d = 2$ є розбіжним рядом.

Розв'язання. Зі шкільного курсу математики відомо, що сума перших N членів арифметичної прогресії дорівнює:

$$S_N = \left(2a_1 + (N-1)\cdot d\right)\cdot \frac{N}{2}. \qquad (1.6)$$

Підставимо до формули (1.6) задані параметри арифметичної прогресії та обчислимо для неї границю виду (1.3):

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\left(2\cdot 3 + (N-1)\cdot 2\right)\cdot \frac{N}{2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(3 + (N-1)\right)\cdot N = \lim_{N\to\infty}\left(2 + N\right)\cdot N = \infty .$$

Границя послідовності частинних сум заданої арифметичної прогресії дорівнює нескінченності, тому за означенням задана арифметична прогресія є розбіжним числовим рядом.

Не для будь-якого збіжного ряду легко знайти його суму. Зокрема, це вдається зробити для рядів, які володіють властивістю телескопії. Термін введений за аналогією з конструкцією складного телескопу (підзорної труби), кільця якого зникають з поля зору при складанні.

Властивістю телескопії володіють ті ряди, загальні члени яких можна розкласти на суму дробів, які для різних значень n взаємно знищуються.

Приклад 1.3. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 35n + 6}$$

є збіжним і знайти його суму.

Розв'язання. Розкладемо загальний член заданого ряду на суму найпростіших дробів.

Розкладемо знаменник загального члена ряду на множники:

$$25n^2 + 35n + 6 = 0,$$

$$D = 35^2 - 4 \cdot 25 \cdot 6 = 5^2 \cdot 7^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 6 =$$

$$= 25 \cdot (49 - 24) = 25^2,$$

$$n = \frac{-35 \pm 25}{2 \cdot 25} = \frac{-7 \pm 5}{10},$$

$$n_1 = -\frac{6}{5}, \quad n_2 = -\frac{1}{5},$$

$$25n^2 + 35n + 6 = 25\left(n + \frac{6}{5}\right)\left(n + \frac{1}{5}\right) = (5n + 6)(5n + 1).$$

Тепер загальний член ряду розкладемо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{5}{25n^2 + 35n + 6} = \frac{5}{(5n + 6)(5n + 1)} = \frac{A}{5n + 6} + \frac{B}{5n + 1} =$$

$$= \frac{A(5n + 1) + B(5n + 6)}{(5n + 6)(5n + 1)}.$$

Прирівняємо чисельники першого та останнього дробів у виконаному тотожному перетворенні:

$$5 = A(5n + 1) + B(5n + 6).$$

Як було з’ясовано при вивченні теми «Інтегрування дробово-раціональних виразів», якщо в отриманій рівності замість n підставляти «доцільні» числа, тоді вона буде перетворюватися на рівняння з одним невідомим коефіцієнтом. Цими доцільними числами є корені знаменника, які були знайдені вище:

$$n_1 = -\frac{6}{5} \text{ та } n_2 = -\frac{1}{5}.$$

$5 = A(5n+1) + B(5n+6)$

$n_1 = -\frac{6}{5}$	$5 = A\left(5\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)+1\right) + B\left(5\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)+6\right) \Rightarrow$ $5 = A\cdot(-6+1) + B\cdot(-6+6) \Rightarrow$ $5 = A\cdot(-5) + B\cdot 0 \Rightarrow$ $5 = -5A \Rightarrow$ $A = -1.$
$n_2 = -\frac{1}{5}$	$5 = A\left(5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+1\right) + B\left(5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+6\right) \Rightarrow$ $5 = A\cdot(-1+1) + B\cdot(-1+6) \Rightarrow$ $5 = A\cdot 0 + B\cdot 5 \Rightarrow$ $5 = 5B \Rightarrow$ $B = 1.$

Тоді загальний член заданого ряду може бути представлений як сума найпростіших дробів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2+35n+6} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5n+6} + \frac{1}{5n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5n+1} - \frac{1}{5n+6}\right).$$

Напишемо частинну суму заданого ряду з N членів, підставляючи по черзі значення $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ N$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{5n+1} - \frac{1}{5n+6}\right) =$$

$$=\left(\frac{1}{5\cdot 1+1}-\frac{1}{5\cdot 1+6}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 2+1}-\frac{1}{5\cdot 2+6}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 3+1}-\frac{1}{5\cdot 3+6}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{5N+1}-\frac{1}{5N+6}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{16}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{16}}-\cancel{\frac{1}{21}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{5N+1}}-\frac{1}{5N+6}\right).$$

Після цього стає очевидною закономірність: кожний другий доданок попередньої дужки взаємно знищується з першим доданком наступної дужки. Після проведення таких спрощень отримуємо вираз для частинної суми ряду:

$$S_N=\frac{1}{6}-\frac{1}{5N+6}.$$

Знайдемо границю частинної суми S_N, коли $N\to\infty$:

$$S=\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5N+6}\right)=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}.$$

Отже, сумою заданого нескінченного ряду є скінченне число $1/6$. Це означає, що внесок членів ряду з великими номерами є настільки незначним, що ним можна нехтувати при наближених обчисленнях. За означенням досліджуваний ряд є збіжним.

Приклад 1.4. Довести, що ряд

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n-3}{(n+3)(n+1)n}$$

є збіжним і знайти його суму.

Розв’язання. Знаменник загального члена заданого ряду вже розкладений на множники, тому повторення алгоритму розв’язання попереднього прикладу буде більш простим.

Розкладемо загальний член ряду на суму найпростіших дробів:

$$\frac{n-3}{(n+3)(n+1)n} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n} =$$

$$= \frac{A(n+1)n + B(n+3)n + C(n+3)(n+1)}{(n+3)(n+1)n}.$$

Прирівняємо чисельники першого та останнього дробів у виконаному тотожному перетворенні:

$$n-3 = A(n+1)n + B(n+3)n + C(n+3)(n+1).$$

В утворене рівняння також будемо підставляти «доцільні» числа, які є коренями знаменника загального члена ряду:

$n=-3$	$-3-3 = A(-3+1)(-3) + B(-3+3)(-3) +$ $+ C(-3+3)(-3+1) \Rightarrow$ $-6 = A(-2)(-3) + B\cdot 0\cdot(-3) + C\cdot 0\cdot(-2) \Rightarrow$ $-6 = 6A \Rightarrow$ $A = -1.$
$n=-1$	$-1-3 = A(-1+1)(-1) + B(-1+3)(-1) +$ $+ C(-1+3)(-1+1) \Rightarrow$ $-4 = A\cdot 0\cdot(-1) + B\cdot 2\cdot(-1) + C\cdot 2\cdot 0 \Rightarrow$ $-4 = -2B \Rightarrow$ $B = 2.$

$n=0$	$0-3=A(0+1)\cdot 0+B(0+3)\cdot 0+C(0+3)(0+1)\Rightarrow$ $-3=3C \quad \Rightarrow$ $C=-1$.

Тоді загальний член заданого ряду може бути представлений як сума найпростіших дробів:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n-3}{(n+3)(n+1)n}=\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$$

Напишемо частинну суму заданого ряду з N членів, підставляючи по черзі значення $n=4,\ 5,\ 6,\ ...,\ N$. Для з'ясування закономірності взаємного знищення доданків рекомендується записувати в частинній сумі кожний член ряду з нового рядка:

$$S_N=\sum_{n=4}^{N}\left(-\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{7}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{8}+\frac{2}{6}-\frac{1}{5}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{7}-\frac{1}{6}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{10}+\frac{2}{8}-\frac{1}{7}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{11}+\frac{2}{9}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(-\frac{1}{N}+\frac{2}{N-2}-\frac{1}{N-3}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{N+1}+\frac{2}{N-1}-\frac{1}{N-2}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{N+2}+\frac{2}{N}-\frac{1}{N-1}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{N+3}+\frac{2}{N+1}-\frac{1}{N}\right).$$

На рис. 1.1 синім та фіолетовим кольорами виділені доданки, які взаємно знищуються. Сірим кольором виділені доданки, знищення яких «ховається» в багатокрапці, тобто вони взаємно знищуються з тими доданками, які явно не написані.

Таким чином, з перших трьох рядків частинної суми залишаються доданки:

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right),$$

а з останніх трьох рядків залишаються такі доданки:

$$\left(-\frac{1}{N+1}\right)+\left(-\frac{1}{N+2}\right)+\left(-\frac{1}{N+3}+\frac{2}{N+1}\right).$$

Отже, після всіх взаємних знищень доданків маємо вираз для частинної суми ряду:

$$S_N=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{N+1}\right)+\left(-\frac{1}{N+2}\right)+\left(-\frac{1}{N+3}+\frac{2}{N+1}\right).$$

Спростимо отриманий вираз частинної суми:

$$S_N = \frac{7}{60} + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}.$$

$$\begin{aligned}
S_N = \sum_{n=4}^{N}\left(-\frac{1}{n+3} + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right) &= \\
&= \left(\boxed{-\frac{1}{7}} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) + \\
&+ \left(\boxed{-\frac{1}{8}} + \frac{2}{6} - \frac{1}{5}\right) + \\
&+ \left(\boxed{-\frac{1}{9}}\boxed{+\frac{2}{7}} - \frac{1}{6}\right) + \\
&+ \left(\boxed{-\frac{1}{10}}\boxed{+\frac{2}{8}}\boxed{-\frac{1}{7}}\right) + \\
&+ \left(\boxed{-\frac{1}{11}}\boxed{+\frac{2}{9}}\boxed{-\frac{1}{8}}\right) + \ldots + \\
&+ \left(\boxed{-\frac{1}{N}}\boxed{+\frac{2}{N-2}}\boxed{-\frac{1}{N-3}}\right) + \\
&+ \left(-\frac{1}{N+1}\boxed{+\frac{2}{N-1}}\boxed{-\frac{1}{N-2}}\right) + \\
&+ \left(-\frac{1}{N+2}\boxed{+\frac{2}{N}}\boxed{-\frac{1}{N-1}}\right) + \\
&+ \left(-\frac{1}{N+3} + \frac{2}{N+1}\boxed{-\frac{1}{N}}\right)
\end{aligned}$$

Рисунок 1.1 – Закономірність взаємного знищення членів частинної суми заданого ряду

Знайдемо границю частинної суми S_N, коли $N \to \infty$:

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{7}{60} + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) =$$

$$= \frac{7}{60} + 0 - 0 - 0 = \frac{7}{60}.$$

Отже, сумою заданого нескінченного ряду є скінченне число $\frac{7}{60}$, а сам ряд за означенням є збіжним.

Збіжності та розбіжності рядів приділяється велика увага через те, що від цього залежить їх використання в наближених обчисленнях.

За допомогою збіжних рядів шукають, наприклад, наближені значення інтегралів, наближено розв'язують диференціальні рівняння тощо.

У сучасній математиці для наближених обчислень використовують і розбіжні ряди, але застосування таких підходів потребує спеціальної математичної підготовки. В інженерних розрахунках здебільшого використовуються збіжні ряди.

Досліджувати ряд на збіжність за означенням не завжди зручно, тобто обчислення за формулою (1.3) можуть бути складними або громіздкими (на відміну від розглянутих навчальних прикладів), тому до цього часу встановлені ознаки збіжності числових рядів.

1.2. Ознаки збіжності числових рядів

1.2.1. *Необхідна ознака збіжності числового ряду*

Теорема (необхідна ознака збіжності числового ряду). Якщо ряд виду (1.1) збігається, тоді загальний член такого ряду прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.7}$$

За допомогою необхідної ознаки можна встановити тільки розбіжність числового ряду.

Якщо виконується рівність (1.7), тоді ніякого остаточного висновку зробити не можна: існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Приклад 1.5. Перевірити за допомогою необхідної ознаки, що арифметична прогресія з першим членом $a_1 = 3$ і різницею $d = 2$ є розбіжним рядом.

Розв'язання. Згадаємо зі шкільного курсу формулу *n-ого* члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d. \tag{1.8}$$

Підставимо до формули (1.8) задані параметри арифметичної прогресії та обчислимо для неї границю виду (1.7):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\bigl(3 + (n-1)\cdot 2\bigr) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\bigl(3 + 2n - 2\bigr) = \lim_{n\to\infty}\bigl(2n+1\bigr) = \infty \neq 0.$$

Отже, ми в інший спосіб встановили, що задана арифметична прогресія є розбіжним числовим рядом.

Приклад 1.6. Дослідити ряд на збіжність за допомогою необхідної ознаки:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}.$$

Розв'язання. Обчислимо границю з необхідної ознаки за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3^n\ln 3}=0.$$

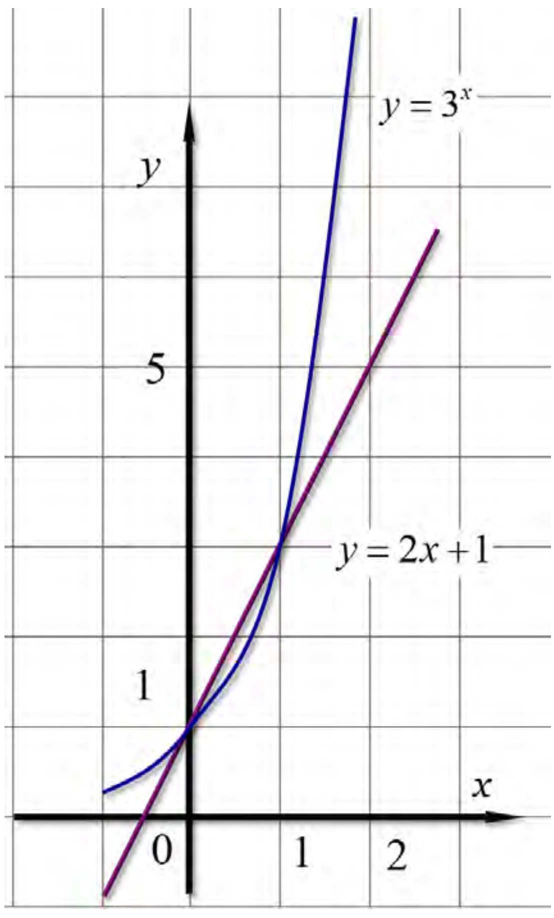


Рисунок 1.2

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій: $y=2x+1$ та $y=3^x$ (рис. 1.2). Отримане значення границі є наслідком того, що при великих значеннях x показникова функція $y=3^x$ приймає значно більші значення, ніж лінійна функція $y=2x+1$.

Отже, на підставі отриманого нульового значення границі зробити висновок про збіжність або розбіжність заданого ряду, спираючись на необхідну ознаку, неможливо.

Зрозуміло, що повинні існувати інші ознаки для дослідження збіжності рядів.

1.2.2. *Достатні ознаки збіжності числових рядів зі знакододатними членами*

Означення. Числовий ряд (1.1) називається ***знакододатним***, якщо всі його члени є невід'ємними числами: для всіх $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$.

1.2.2.1. *Ознака д'Аламбера*

Теорема (Ознака д'Аламбера, 1768 р). Якщо для ряду з додатними членами існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A,$$

тоді:

- ряд збігається, коли $A < 1$,
- ряд розбігається, коли $A > 1$,
- не можна зробити висновок про поведінку ряду, коли $A = 1$.

Саме за допомогою ознаки д'Аламбера досліджуються ряди, в яких формули для загальних членів ряду містять факторіали або скінченні добутки.

Ознаку д'Аламбера можна застосовувати і до дослідження інших рядів.

Приклад 1.7. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{(3n-1)!}.$$

Розв'язання. Вираз, який стоїть під знаком суми, є формулою поточного члена ряду:

$$a_n = \frac{4n+1}{(3n-1)!}.$$

Щоб записати вираз наступного члена ряду a_{n+1}, до формули a_n члена ряду замість n підставляють вираз $(n+1)$ і розкривають внутрішні дужки:

$$a_{n+1}=\frac{4\cdot(n+1)+1}{(3\cdot(n+1)-1)!}=\frac{4n+4+1}{(3n+3-1)!}=\frac{4n+5}{(3n+2)!}.$$

Оскільки в ознаці д’Аламбера використовується відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, тому доцільно вирази a_n та a_{n+1} членів ряду підготувати до скорочень.

Для цього спочатку згадаємо означення факторіала:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Наприклад,

$$3!=1\cdot 2\cdot 3,$$

$$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5.$$

Якщо потрібно 5! виразити через 3!, тоді записують так:

$$5!=3!\cdot 4\cdot 5.$$

Повернемося до досліджуваного ряду. Для застосування ознаки д’Аламбера потрібно факторіал в a_{n+1} члені ряду виразити через факторіал, наявний в a_n члені ряду. Це робиться так:

$$a_{n+1}=\frac{4n+5}{(3n+2)!}=\frac{4n+5}{(3n-1)!\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}.$$

Тепер вирази, отримані для a_n та a_{n+1} членів ряду, підставимо до формули з ознаки д’Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}:a_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{(3n-1)!\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}:\frac{4n+1}{(3n-1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{\cancel{(3n-1)!}\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}\cdot\frac{\cancel{(3n-1)!}}{4n+1}=$$

$$*=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(4n+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=**$$

Під знаком границі знаходиться відношення многочленів. Якщо розкрити дужки в знаменнику:

$$(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(4n+1)=108\cdot n^4+135\cdot n^3+51\cdot n^2+6n,$$

тоді стає очевидним, що там записаний многочлен четвертого степеня. З теорії границь відомо, що границя частки многочленів дорівнює відношенню коефіцієнтів при їх старших степенях.

Многочлен в чисельнику $4n+5$ є многочленом першого степеня, тому його можна записати так:

$$4n+5=0\cdot n^4+0\cdot n^3+0\cdot n^2+4n+5.$$

Отже, многочлен в чисельнику при степені n^4 має коефіцієнт 0, а многочлен у знаменнику при степені n^4 має коефіцієнт108, тоді обчислювана границя дорівнює:

$$**=\frac{0}{108}=0<1.$$

Отримане значення границі $0<1$, тому за ознакою д'Аламбера заданий ряд є збіжним.

Приклад 1.8. Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{5^n}.$$

Розв'язання. Загальний член містить скінченний добуток $1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)$, тому такий ряд можна досліджувати тільки за допомогою ознаки д'Аламбера.

Для розуміння структури загального члена ряду напишемо кілька перших доданків:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{5^n}=\frac{1}{5^1}+\frac{1\cdot 7}{5^2}+\frac{1\cdot 7\cdot 13}{5^3}+\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 19}{5^4}+\ldots$$

Загальний член ряду за умовою дорівнює

$$a_n=\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{5^n}.$$

У кожному наступному доданку скінченний добуток має на один множник більше. Тому a_{n+1} член ряду має в чисельнику на один множник більше порівняно з a_n членом ряду. Цей новий множник утворюється з останнього множника заміною *n* на (*n*+1):

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)\cdot(6(n+1)-5)}{5^{n+1}}=$$

$$=\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)\cdot(6n+6-5)}{5^{n+1}}=$$

$$=\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)\cdot(6n+1)}{5^{n+1}}.$$

Тепер вирази, отримані для a_n та a_{n+1} членів ряду, підставимо в формулу з ознаки д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}:a_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)\cdot(6n+1)}{5^{n+1}}:\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{5^{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)\cdot(6n+1)}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^{n}}{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)\cdot(6n+1)}{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}\cdot\frac{5^{n}}{5^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(6n+1)}{1}\cdot\frac{1}{5}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{5}=\infty>1.$$

Отримане значення границі більше за одиницю, тому за ознакою д'Аламбера заданий ряд розбігається.

1.2.2.2. *Радикальна ознака Коші*

Теорема (радикальна ознака Коші, 1821 р.). Якщо для ряду з додатними членами існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A,$$

тоді:

- ряд збігається, коли $A<1$,
- ряд розбігається, коли $A>1$,
- не можна зробити висновок про поведінку ряду, коли $A=1$.

При використанні радикальної ознаки Коші доцільно пам'ятати значення таких границь:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C}=1, \qquad (1.9)$$

де $C>0$.

Доведемо першу границю з формул (1.9). Доведення виконаємо за допомогою означення границі числової послідовності.

Зафіксуємо довільне значення $\varepsilon > 0$.

Згадаємо формулу бінома Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ – біноміальні коефіцієнти, $n \in \mathbb{N} \cup \left\{0\right\}$.

Використаємо цю формулу в наступних тотожних перетвореннях:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n =$$

$$= 1 + C_n^1\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + C_n^2\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + C_n^3\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^3 + \ldots + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n =$$

$$= 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n\left(n-1\right)}{2!} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^3 + \ldots + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n.$$

Будемо вважати, що $n > 1$, оскільки значення границі ми обчислюємо для $n \to \infty$. Залишимо в правій частині рівності тільки третій доданок. В результаті такої дії рівність перетвориться на нерівність:

$$n > \frac{n\left(n-1\right)}{2!} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2.$$

Поділимо обидві частини рівності на $n > 1$ і послідовно отримаємо:

$$1 > \frac{n-1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2,$$

$$\frac{2}{n-1} > \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2,$$

$$\sqrt[n]{n}-1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Нерівність $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ виконується, коли $n > 1+\frac{2}{\varepsilon^2}$.

Покладемо $N_0 = \left[1+\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$. Тоді для всіх n, які більші або дорівнюють вказаному N_0, виконується нерівність:

$$\forall n \geq N_0 \qquad \left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним числом, тоді за означенням границі послідовності маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Друга границя (1.9) доводиться аналогічно.

Приклад 1.9. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5n+2}.$$

Розв'язання. Застосування радикальної ознаки Коші приводить до наступних розрахунків:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{5n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{5n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{5n+2}} = \frac{3}{1} = 3 > 1.$$

Отже, досліджуваний ряд розбігається.

Додатково пояснимо перехід $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n+2} = 1$.

Оскільки мова йде про великі значення n $(n \to \infty)$, тому в сумі $(5n+2)$ доданком 2 можна знехтувати. Враховуючи формули (1.9), отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n+2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1 = 1\,.$$

Приклад 1.10. Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n+5}{9n+7}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Структура загального члена ряду підказує, що для цього прикладу доцільним є застосування радикальної ознаки Коші. Границя, яка при цьому отримується, обчислюється зведенням до другої важливої границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1^{\infty}\right) = e\,.$$

Застосування радикальної ознаки Коші приводить до наступних розрахунків:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{9n+5}{9n+7}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+5}{9n+7}\right)^{n} = \left(1^{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9n+5}{9n+7}-1\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9n+5-(9n+7)}{9n+7}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9n+5-9n-7)}{9n+7}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{9n+7}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{9n+7}\right)^{\frac{9n+7}{-2}\cdot\frac{-2}{9n+7}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}e^{\frac{-2n}{9n+7}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= e^{-\frac{2}{9}} \approx 0,8 < 1.$$

Отримане значення границі менше за одиницю, тому за радикальною ознакою Коші заданий ряд збігається.

Не може бути ситуації, коли за однією ознакою ряд є збіжним, а за іншою – розбіжним.

Можлива ситуація, коли за однією ознакою висновок зробити не можна, а за іншою ознакою отримуємо остаточну відповідь.

Відомо, що ознака Коші є більш сильною, ніж ознака д'Аламбера. Тобто, якщо границя в ознаці д'Аламбера дорівнює 1, тоді границя в ознаці Коші може мати інше значення. Якщо ж границя в ознаці Коші дорівнює 1, тоді застосовувати ознаку д'Аламбера немає сенсу, оскільки гарантовано буде отримано значення границі теж 1.

1.2.2.3. *Інтегральна ознака Коші-Маклорена*

Теорема (Інтегральна ознака Коші-Маклорена, 1742 р). Якщо на проміжку $[1,+\infty)$ функція $f(x)$ є

- неперервною,
- невід'ємною,
- незростаючою,

тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ та невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ збігаються та розбігаються одночасно.

Нижня границя невласного інтеграла, який використовується в інтегральній ознаці, і, відповідно, початок проміжку, на якому здійснюються дослідження, можуть відрізнятися від нуля. Вони дорівнюють номеру першого члена ряду.

Приклад 1.11. Дослідити гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ на збіжність за всіма чотирма ознаками:

1) необхідною ознакою,
2) ознакою д'Аламбера,
3) радикальною ознакою Коші,
4) інтегральною ознакою Коші-Маклорена.

Розв'язання. За необхідною ознакою маємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Отже, за необхідною ознакою висновок про поведінку ряду зробити неможливо.

За ознакою д'Аламбера маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} : a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Отже, за ознакою д'Аламбера висновок про поведінку ряду зробити неможливо.

Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Таким чином, за радикальною ознакою Коші висновок про поведінку ряду зробити теж неможливо.

Дослідимо можливість застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена. Функція $f(x)=\frac{1}{x}$ на проміжку $\left[1,+\infty\right)$ є неперервною, невід'ємною та незростаючою, тому виконані всі вимоги відповідної теореми, і є підстави застосувати інтегральну ознаку Коші-Маклорена:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln|b|-\ln 1=+\infty-0=+\infty .$$

Отже, невласний інтеграл є розбіжним, тому є розбіжним і заданий гармонічний ряд.

Як відзначалося вище, досліджений ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ називається ***гармонічним рядом***. Назва ряду пов'язана з тим, що починаючи з другого члена ряду, кожний член ряду є середнім гармонічним попереднього та наступного членів ряду. Вперше така назва зустрічається в роботах англійського математика, першого президента Лондонського королівського товариства Уільяма Браункера в 1668 р.

Число c називається середнім гармонічним чисел a і b, якщо

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Для гармонічного ряду маємо:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\right),\ n\geq 2 .$$

Перше відоме доведення розбіжності гармонічного ряду належить французькому вченому Ніколя Орему і міститься в його творі «Quaestiones super geometriam Euclidis» (біля 1350 р). Трактат не був надрукований свого часу і вийшов друком аж у 1961 р. Доведення розбіжності гармонічного ряду в цьому трактаті здійснюється за рахунок групування його членів спеціальним способом.

Інтегральна ознака Коші-Маклорена застосовується для дослідження таких рядів, які часто зустрічаються в інженерних розрахунках:

1) узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$;

2) ряду виду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$,

де p – дійсне додатне число.

Приклад 1.12. За допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Розв'язання. Очевидно, що при показнику степеня $p > 0$ функція $f(x) = \frac{1}{x^p}$ на проміжку $[1, +\infty)$ задовольняє умовам застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена, тобто функція є неперервною, невід'ємною та незростаючою на цьому проміжку.

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} p>1: & \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{1^{1-p}}{1-p}=0-\dfrac{1}{1-p}=-\dfrac{1}{1-p}, \\ p=1: & \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|b|-\ln 1=+\infty-0=+\infty, \\ 0<p<1: & \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{1^{1-p}}{1-p}=+\infty-\dfrac{1}{1-p}=+\infty. \end{array}\right.$$

За інтегральною ознакою узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$

- збігається, коли $p>1$;
- розбігається, коли $p\le 1$.

Пояснимо більш детально деякі перетворення при обчисленні границь.

Коли $p>1$, тоді показник степеня $1-p<0$, а $p-1>0$. Тому можемо написати:

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{(1-p)\cdot b^{p-1}}=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=$$

$$=\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{\infty}=\frac{1}{1-p}\cdot 0=0.$$

Коли $0<p<1$, тоді показник степеня $1-p>0$. Тому можемо написати:

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p}=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}b^{1-p}=\frac{1}{1-p}\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Розбіжність узагальненого гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ для $p\le 0$ доводиться за допомогою необхідної ознаки.

Приклад 1.13. За допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{p}n}.$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі при показнику степеня $p>0$ функція $f(x)=\dfrac{1}{n\cdot\ln^{p}n}$ на проміжку $\left[2,+\infty\right)$ задовольняє умовам застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена, тобто функція є неперервною, невід'ємною та незростаючою на цьому проміжку.

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_{2}^{+\infty}f(x)dx=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{p}x}dx=\left\|\begin{array}{l}\ln x=t,\\ \dfrac{1}{x}dx=dt,\end{array}\right\|\ \left\|\begin{array}{lll}x=2 & \Rightarrow & t=\ln 2,\\ x=+\infty & \Rightarrow & t=+\infty.\end{array}\right\|=$$

$$=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{t^{p}}dt=$$

$$\left[\begin{array}{ll}
p>1: & \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\dfrac{t^{-p+1}}{-p+1}\right|_{\ln 2}^{b}=\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{\left(\ln 2\right)^{1-p}}{1-p}=\\
 & \qquad =0-\dfrac{\left(\ln 2\right)^{1-p}}{1-p}=-\dfrac{\left(\ln 2\right)^{1-p}}{1-p},\\
p=1: & \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{b}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|b|-\ln\ln 2=\\
 & \qquad =+\infty-\ln\ln 2=+\infty,\\
0<p<1: & \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\dfrac{t^{-p+1}}{-p+1}\right|_{\ln 2}^{b}=\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{\left(\ln 2\right)^{1-p}}{1-p}=\\
 & \qquad =+\infty-\dfrac{\left(\ln 2\right)^{1-p}}{1-p}=+\infty.
\end{array}\right.$$

Коли $p=0$, заданий ряд перетворюється на гармонічний і є розбіжним.

Отже, досліджуваний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^p n}$

- збігається, коли $p > 1$;
- розбігається, коли $0 \le p \le 1$;
- потрібні більш детальні дослідження, коли $p < 0$.

Доцільно пам'ятати приклади узагальнених гармонічних рядів щодо їх збіжності та розбіжності:

Збіжні	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.
Розбіжні	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$.

Приклад 1.14. Дослідити ряд на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(9n+4)\ln(9n+4)}.$$

Розв'язання. Головною особливістю заданого ряду є наявність двох однакових дужок, тому для розв'язання прикладу достатньо залучити одну ознаку збіжності ряду, а саме інтегральну ознаку Коші-Маклорена.

На основі загального члена ряду утворимо функцію

$$f(x) = \frac{1}{(9x+4)\ln(9x+4)}.$$

На проміжку $[0,+\infty)$ ця функція задовольняє вимогам до застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена.

Функція є неперервною (до її виразу можна підставляти всі значення x з проміжку $[0,+\infty)$).

Функція є невід'ємною: коли $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{(9x+4)\cdot\ln(9x+4)} > 0$.

Функція є спадною: чим більші значення x, тим більші значення знаменника і тим менші значення самої функції.

Обчислюємо невласний інтеграл від побудованої функції. Нижньою границею в невласному інтегралі є те число, з якого починається нумерація доданків в значку суми.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(9x+4)\ln(9x+4)} = \left\| \begin{array}{l} \ln(9x+4) = t, \\ \dfrac{9dx}{(9x+4)} = dt, \\ \dfrac{dx}{(9x+4)} = \dfrac{1}{9}dt, \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{lll} x = 0 & \Rightarrow & t = \ln 4, \\ x = +\infty & \Rightarrow & t = +\infty. \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{\ln 4}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{9}\ln|t|\Big|_{\ln 4}^{b} =$$

$$= \frac{1}{9}\lim_{b\to\infty}\ln|b| - \frac{1}{9}\ln\ln 4 = \frac{1}{9}\cdot(+\infty) - \frac{1}{9}\ln\ln 4 = +\infty .$$

Обчислений невласний інтеграл розбігається, тому розбігається і заданий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(9n+4)\ln(9n+4)}$.

1.2.2.4. *Ознаки порівняння*

Ознака порівняння 1 (для збіжних рядів). Якщо для двох числових рядів з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, починаючи з деякого номера, виконується нерівність $a_n \le b_n$, і відомо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, тоді збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Умовно співвідношення між рядами в першій ознаці порівняння можна показати схемою на рис. 1.3.

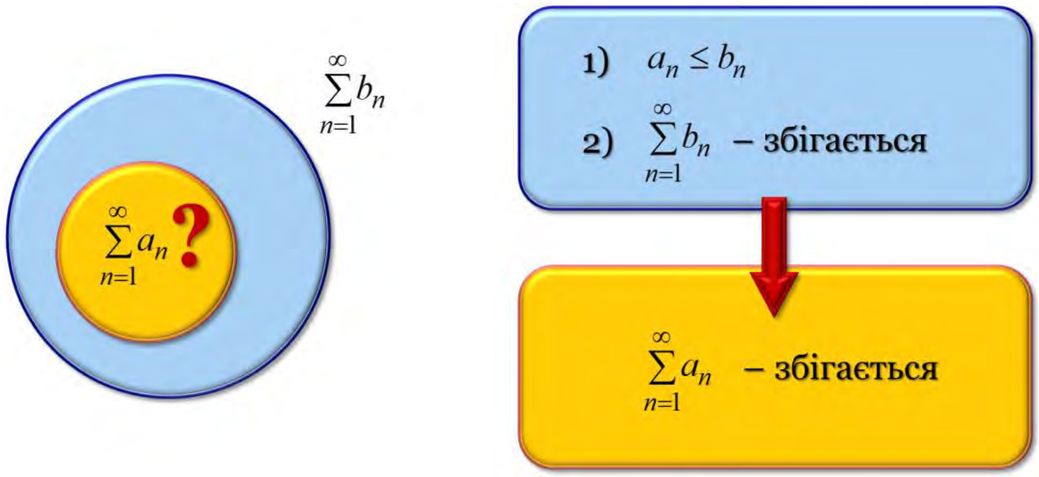


Рисунок 1.3 – Ознака порівняння для збіжних рядів

За відомий збіжний ряд часто беруть узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$.

Приклад 1.15. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2 n}$ на збіжність.

Розв'язання. Спочатку потрібно висунути гіпотезу про можливу поведінку заданого ряду, а потім застосувати ознаку порівняння для доведення цієї гіпотези.

Якщо з виразу загального члена ряду видалити доданок $\sin^2 n$, тоді отримаємо збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

З'ясуємо як співвідносяться величини відповідних членів в заданому ряді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2 n}$ та в побудованому ряді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Доданок $\sin^2 n$ приймає невід'ємні значення: $\sin^2 n \geq 0$, тому

$$n^3 + \sin^2 n \geq n^3,$$

а самі члени рядів зв'язані нерівністю:

$$\frac{1}{n^3 + \sin^2 n} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Для рядів можемо записати таку ж нерівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2 n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

За першою ознакою порівняння зі збіжності «більшого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ слідує збіжність «меншого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2 n}$ (рис. 1.4).

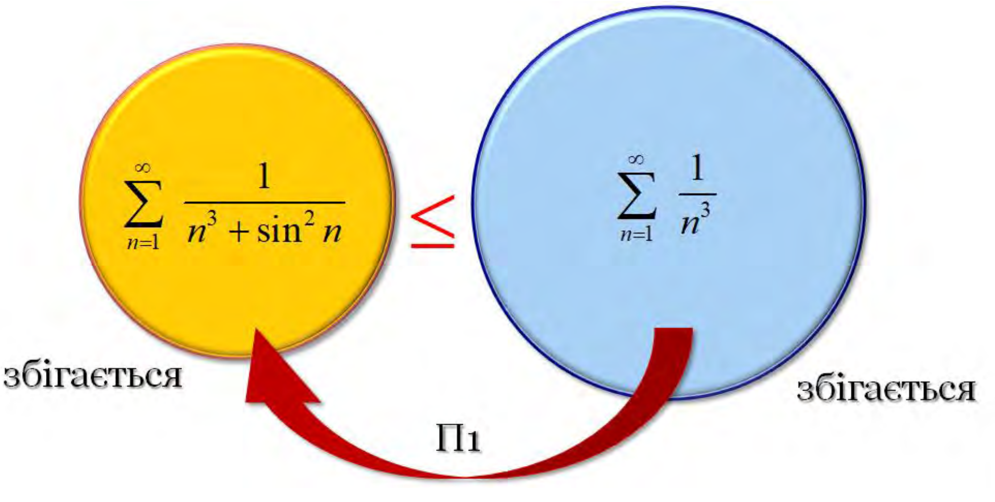


Рисунок 1.4 – Застосування ознаки порівняння для збіжних рядів до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2 n}$

Приклад 1.16. Дослідити ряд на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена та ознаки порівняння:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(9n+4)\cdot \ln^5(4n-9)}.$$

Розв'язання. Головною особливістю заданого ряду є наявність різних дужок, тому застосування тільки інтегральної ознаки Коші-Маклорена недостатньо.

Аналогічно до попереднього прикладу перевіряються умови можливості застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена.

Логарифм знаходиться в степені 5. Висуваємо гіпотезу, що заданий ряд повинен збігатися.

Для доведення збіжності ряду застосовується перша ознака порівняння. За цією ознакою потрібно побудувати ще один ряд, члени якого є більшими за відповідні члени заданого ряду, починаючи з деякого номера.

Для великих значень n значення виразів у дужках зв'язані нерівністю:

$$(9n+4) > (4n-9).$$

Якщо ми напишемо дріб з двома однаковими «меншими» дужками, тоді знаменник дробу стане меншим, а сам дріб стане більшим:

$$\frac{1}{(9n+4)\cdot \ln^5(4n-9)} < \frac{1}{(4n-9)\cdot \ln^5(4n-9)}.$$

До ряду $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(4n-9)\cdot \ln^5(4n-9)}$ вже можемо застосувати інтегральну ознаку Коші-Маклорена.

Обчислюємо невласний інтеграл від побудованої функції. Нижньою границею в невласному інтегралі є те число, з якого починається нумерація доданків у сумі ряду!

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(4x-9)\ln^5(4x-9)} = \left\| \begin{array}{c} \ln(4x-9)=t, \\ \dfrac{4dx}{(4x-9)}=dt, \\ \dfrac{dx}{(4x-9)}=\dfrac{1}{4}dt, \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{lll} x=3 & \Rightarrow & t=\ln 3, \\ x=+\infty & \Rightarrow & t=+\infty. \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{4}\int\limits_{\ln 3}^{+\infty} t^{-5}dt = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{b} \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{t^4}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{b} =$$

$$= -\frac{1}{16}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^4} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\ln^4 3} = -\frac{1}{16}\cdot 0 + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\ln^4 3} = \frac{1}{16\ln^4 3}.$$

Обчислений невласний інтеграл збігається, тому збігається і побудований ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(4n-9)\cdot\ln^5(4n-9)}$.

Тепер за першою ознакою порівняння збігається заданий ряд, який є «меншим» за побудований (рис. 1.5).

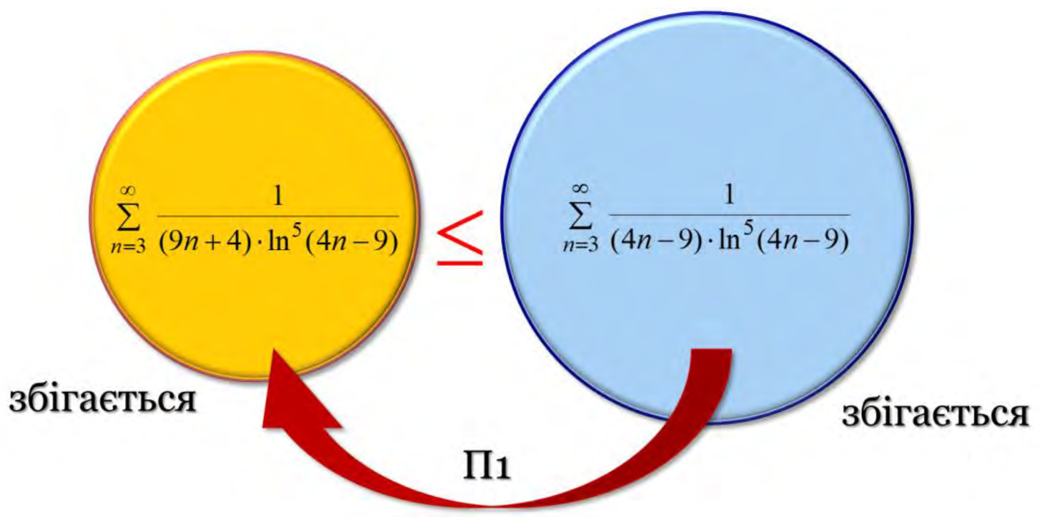


Рисунок 1.5 – Застосування ознаки порівняння для збіжних рядів до ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(9n+4)\cdot\ln^5(4n-9)}$$

Ознака порівняння 2 (для розбіжних рядів). Якщо для двох числових рядів з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, починаючи з деякого номера, виконується нерівність $a_n \le b_n$, і відомо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, тоді розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Умовно співвідношення між рядами в другій ознаці порівняння можна показати схемою на рис. 1.6.

За відомий розбіжний ряд часто беруть узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \le 1$.

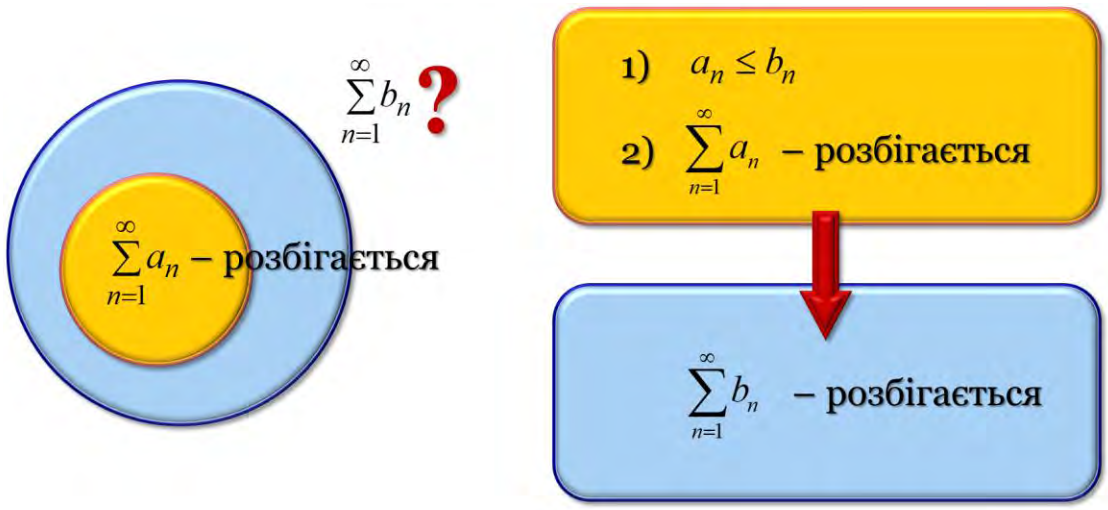


Рисунок 1.6 – Ознака порівняння для розбіжних рядів

Приклад 1.17. Дослідити ряд $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{n}}$ на збіжність.

Розв'язання. Спочатку також потрібно висунути гіпотезу про можливу поведінку заданого ряду, а потім застосувати ознаку порівняння для доведення цієї гіпотези.

Якщо з виразу загального члена ряду видалити від'ємник $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}$, тоді отримаємо розбіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

З'ясуємо як співвідносяться величини відповідних членів у заданому ряді $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}$ та в побудованому ряді $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Вираз $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}$ приймає невід'ємні значення: $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\geq 0$, тому $\sqrt{n}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\leq\sqrt{n}$, а самі члени рядів зв'язані нерівністю:

$$\frac{1}{\sqrt{n}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Для самих рядів можемо записати таку ж нерівність:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}\geq\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

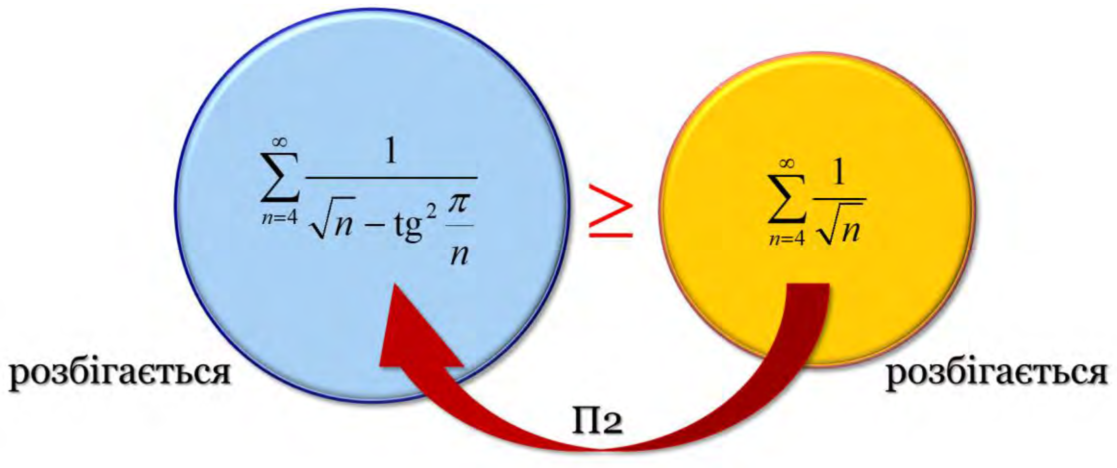


Рисунок 1.7 – Застосування ознаки порівняння для розбіжних рядів до ряду $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}$

За другою ознакою порівняння з розбіжності «меншого ряду» $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ слідує розбіжність «більшого» ряду $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}}$ (рис. 1.7).

Приклад 1.18. Дослідити ряд на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена та ознаки порівняння:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(9n+4)\sqrt[3]{\ln(4n-9)}}.$$

Розв'язання. Головною особливістю заданого ряду є наявність різних дужок, тому застосування тільки інтегральної ознаки Коші-Маклорена недостатньо.

Аналогічно до попередніх прикладів перевіряються умови можливості застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена.

Логарифм знаходиться в степені $1/3$. Висуваємо гіпотезу, що заданий ряд повинен розбігатися.

Для доведення розбіжності рядів застосовується друга ознака порівняння. За цією ознакою потрібно побудувати ряд, члени якого є меншими за відповідні члени заданого ряду, починаючи з деякого номера.

Для великих значень n значення заданих дужок зв'язані нерівністю:

$$(9n+4)>(4n-9).$$

Якщо ми напишемо дріб з двома однаковими більшими дужками, тоді знаменник дробу стане більшим, а сам дріб стане меншим:

$$\frac{1}{(9n+4)\sqrt[3]{\ln(4n-9)}}>\frac{1}{(9n+4)\sqrt[3]{\ln(9n+4)}}.$$

До ряду $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(9n+4)\sqrt[3]{\ln(9n+4)}}$ вже можемо застосувати інтегральну ознаку Коші-Маклорена.

Обчислюємо невласний інтеграл від побудованої функції. Нижньою границею в невласному інтегралі є те число, з якого починається нумерація доданків у сумі.

$$\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{(9x+4)\sqrt[3]{\ln(9x+4)}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\sqrt[3]{\ln(9x+4)}=t,\\ \ln(9x+4)=t^3,\\ \dfrac{9dx}{(9x+4)}=3t^2dt,\\ \dfrac{dx}{(9x+4)}=\dfrac{1}{3}t^2dt,\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{lll}x=3 & \Rightarrow & t=\sqrt[3]{\ln 31},\\ x=+\infty & \Rightarrow & t=+\infty.\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{\ln 31}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{t}=\frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{\ln 31}}^{+\infty}tdt=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\sqrt[3]{\ln 31}}^{b}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{6}t^2\Bigg|_{\sqrt[3]{\ln 31}}^{b}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{b\to+\infty}b^2-\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\ln 31}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot(+\infty)-\frac{1}{6}\cdot\sqrt[3]{\ln^2 31}=+\infty.$$

Обчислений невласний інтеграл розбігається, тому розбігається і побудований ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(9n+4)\cdot\sqrt[3]{\ln(9n+4)}}$.

Тепер на основі другої ознаки порівняння розбігається заданий ряд, який є більшим за побудований (рис. 1.8).

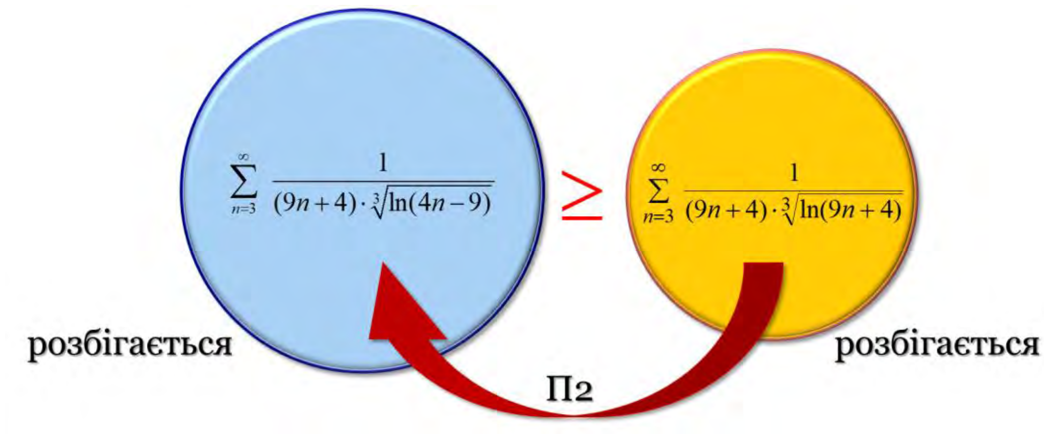


Рисунок 1.8 – Застосування ознаки порівняння для розбіжних рядів до ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(9n+4)\sqrt[3]{\ln(4n-9)}}$$

Ознака порівняння 3 (гранична). Якщо для двох числових рядів з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ існує границя

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty,$$

тоді обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 1.19. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{5n^3-n+2}$ на збіжність.

Розв'язання. Можна самостійно пересвідчитися, що при застосуванні до заданого ряду ознак д'Аламбера і Коші в обох випадках границі (які застосовуються в цих ознаках) дорівнюють одиниці, і висновок про поведінку заданого ряду зробити неможливо.

Для застосування третьої ознаки порівняння необхідно побудувати ряд, поведінка якого є відомою. Для цього випишемо із чисельника та знаменника загального члена ряду доданки в найстарших степенях і виконаємо скорочення дробу:

$$\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Саме ці доданки роблять найбільший внесок у величину чисельника і знаменника дробу в загальному члені заданого ряду, коли $n \to \infty$.

З отриманого дробу утворимо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який, як вже відомо, розбігається.

Обчислимо границю з третьої ознаки порівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n : b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{5n^3 - n + 2} : \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{5n^3 - n + 2} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n}{5n^3 - n + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{5}.$$

Отримане значення границі задовольняє нерівності:

$$0 < \frac{1}{5} < \infty,$$

тому за третьою ознакою порівняння обидва ряди ведуть себе однаково. Отже, заданий ряд є розбіжним.

За першою ознакою порівняння можна зробити висновок тільки про збіжність ряду.

За другою ознакою порівняння можна зробити висновок тільки про розбіжність ряду.

За третьою ознакою порівняння є можливими обидві відповіді.

Для дослідження деяких рядів недостатньо застосування однієї ознаки. В таких випадках застосовують кілька ознак.

1.3. Властивості числових рядів

Властивість 1. Якщо збігається ряд (1.1), тоді збігається і будь-який з його залишків R_m – ряд (1.2).

І навпаки, якщо збігається залишок ряду (1.1) – ряд (1.2), тоді збігається і сам ряд (1.1).

Інше формулювання властивості 1. Відкидання або додавання скінченного числа початкових членів ряду не впливає на його збіжність, але змінює значення його суми *S*.

Властивість 2. Якщо збігається ряд (1.1), тоді

$$\lim_{m\to\infty} R_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = 0. \tag{1.10}$$

Властивість 3. Якщо члени ряду (1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ помножити на одне і те саме число $C \neq 0$, тоді поведінка ряду не зміниться.

Тобто:

- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ є збіжним;
- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ є розбіжним.

Наслідок. Якщо сума збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дорівнює *S*, тоді сума також збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ дорівнює CS:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = CS. \tag{1.11}$$

Властивість 4. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжними і їх суми відповідно дорівнюють S_a і S_b, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ також є збіжним і його сума дорівнює $S_a \pm S_b$.

Інше формулювання властивості 4. Збіжні ряди можна почленно додавати або віднімати, при цьому отримуємо також збіжний ряд.

Наслідок. Сума збіжного та розбіжного рядів є розбіжним рядом.

Наслідок. Загального висновку про збіжність суми (або різниці) двох розбіжних рядів зробити неможна.

В результаті може бути отриманий як збіжний, так і розбіжний ряд.

Властивість 5. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, який отриманий групуванням членів першого ряду без зміни порядку їх слідування, також збігається і має ту ж суму, що і початковий ряд.

Враховуючи властивості збіжних рядів, всі теореми для знакододатних рядів є справедливими й для рядів, всі члени яких $a_n \le 0$, а також для рядів, для яких нерівність $a_n \le 0$ виконується, починаючи з деякого номера m.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення числового ряду.
2. Дайте означення частинної суми числового ряду.
3. Дайте означення залишку числового ряду.

4. Який числовий ряд називається збіжним?
5. Чи існують такі значення параметрів арифметичної прогресії, при яких вона є збіжним числовим рядом?
6. При яких значеннях знаменника q геометрична прогресія є збіжним числовим рядом?
7. Яку особливість мають ряди, що володіють властивістю телескопії?
8. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності числового ряду.
9. Які існують особливості застосування необхідної ознаки до дослідження поведінки числових рядів?
10. Які числові ряди називаються знакододатними?
11. Які Ви знаєте достатні ознаки збіжності знакододатних рядів?
12. В чому полягають відмінності в застосуванні необхідної ознаки та достатніх ознак до дослідження поведінки рядів?
13. Сформулюйте ознаку д'Аламбера збіжності знакододатного числового ряду.
14. При яких особливостях структури загального члену ряду доцільно застосовувати для дослідження його на збіжність ознаку д'Аламбера?
15. Сформулюйте радикальну ознаку Коші збіжності знакододатного числового ряду.
16. При яких особливостях структури загального члену ряду доцільно застосовувати для дослідження його на збіжність радикальну ознаку Коші?
17. При обчисленні границі з радикальної ознаки Коші отримали значення 1. Чи доцільно в цьому випадку застосовувати ознаку д'Аламбера для продовження дослідження поведінки цього ряду?
18. Який ряд називається гармонічним?
19. Чи є гармонічний ряд збіжним?
20. Які Ви знаєте узагальнення гармонічного ряду?
21. Наведіть приклади збіжних та розбіжних узагальнених числових рядів.

22. Сформулюйте ознаку порівняння для дослідження збіжного ряду.
23. Сформулюйте ознаку порівняння для дослідження розбіжного ряду.
24. Сформулюйте граничну ознаку порівняння.
25. Чи існують ряди, для дослідження яких потрібно застосовувати кілька ознак?
26. Сформулюйте властивості числових рядів.
27. Новий ряд утворили видаленням перших десяти членів із заданого ряду. Чи буде відрізнятися характер збіжності нового ряду від характеру збіжності початкового ряду?
28. Чи завжди сума двох розбіжних рядів буде розбіжним рядом?
29. Який характер збіжності буде мати ряд, утворений як сума збіжного та розбіжного рядів?
30. Чи впливає на характер збіжності ряду множення всіх його членів на одне і те саме число?

Завдання для самостійної роботи

№	Варіант 1
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3}{n^2+n-2}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{5n-4}{n(n-1)(n-2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{3n+5}}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n-3}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+1} \right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5n-3}{n^3+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+5) \cdot \ln(2n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+2) \cdot \sqrt{\ln(2n+5)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+2) \cdot \ln^3(2n+5)}$.

№	Варіант 2
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{(n+3)(n+2)n}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д’Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{\sqrt[3]{4n-3}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-4n+2}{n^5+3}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot\sqrt{\ln(3n+1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot\ln(n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot\ln^5(n+3)}$.

№	Варіант 3
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3}{9n^2-15n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n+2}}{(4n-1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{4n+3}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+5}{4n^3+n-2}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)\cdot \ln^3(4n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)\cdot \sqrt[3]{\ln(3n+4)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)\cdot \ln^2(3n+4)}$.

№	Варіант 4
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{16n^2+8n-3}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+7}{(n^2-1)(n-2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-5}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+4}}{(2n+5)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-2}{5n-1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2-2n+4}{2n^4+3n+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1) \cdot \ln(5n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1) \cdot \sqrt{\ln(n+5)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1) \cdot \ln^4(n+3)}$.

№	Варіант 5
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2+15n-4}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n+11}{(n+2)(n+3)(n+5)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot(4n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{\sqrt{2n+3}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7n+2}{7n+3}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+7}{2n^3+5n^2-1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-2)\cdot\sqrt{\ln(7n-2)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-2)\cdot \ln(2n+7)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-2)\cdot \ln^3(2n+7)}$.

№	Варіант 6
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2+24n-5}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+2)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{7\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot (2n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5n+2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3n+2}{n^5+3n^2+4}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\cdot \ln^2(2n-3)}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\cdot \sqrt[3]{\ln(3n-2)}}$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\cdot \ln^4(3n-2)}$.

№	Варіант 7
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{n(n+2)(n+3)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot...\cdot(3n-2)}{5n-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+5}}{(3n-2)!}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{2n^2+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)\cdot\ln^4(3n+5)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)\cdot\sqrt{\ln(5n+3)}}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)\cdot\ln^2(5n+3)}$.

№	Варіант 8
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{2}{n^2-6n+8}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-2}{n(n^2-4)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{\sqrt{5n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(5n-3)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-4n+5}{n^4+2n^2-1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot\sqrt{\ln(4n-1)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot\ln(n+4)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot\ln^3(n+4)}$.

№	Варіант 9
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{4n^2-16n+15}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^n}{n^2-5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!}{7n-5}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{5n-3}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+2n+5}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)\cdot \ln^2(5n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)\cdot \sqrt[3]{\ln(3n+5)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)\cdot \ln^4(3n+5)}$.

№	Варіант 10
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+4)!}{\sqrt{5n+1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+3}{7n-1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2n-1}{n^7+3n-2}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-4)\cdot \ln^3(7n-4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+7)\cdot \sqrt{\ln(7n-4)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+7)\cdot \ln^2(7n-4)}$.

№	Варіант 11
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{16n^2 - 24n + 5}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{\sqrt{3n+5}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+3} \right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 3n + 5}{n^3 + n + 2}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+9) \cdot \sqrt{\ln(2n+9)}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+9) \cdot \ln(9n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+9) \cdot \ln^3(9n+2)}$.

№	Варіант 12
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2+5n-6}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{9n+3}{(n-1)(n+1)(n-2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{4n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)}{5n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(3n+1)!}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+2}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+2n-3}{n^5+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\cdot \ln^2(3n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\cdot \sqrt[3]{\ln(2n+1)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\cdot \ln^4(2n+1)}$.

№	Варіант 13
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{36n^2-48n+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)!}{\sqrt{5n-2}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-n+2}{n^3+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+5)\cdot \ln^3(4n+5)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+5)\cdot \sqrt{\ln(5n+4)}}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+5)\cdot \ln^2(5n+4)}$.

№	Варіант 14
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+21n-10}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{\sqrt[3]{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{(2n+7)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n-4}{5n+2}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n+1}{3n^2-n+5}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+7)\cdot\sqrt{\ln(5n+7)}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+7)\cdot\ln(7n+5)}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+7)\cdot\ln^5(7n+5)}$.

№	Варіант 15
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 8n + 15}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+7}{(n+1)(n+3)(n+4)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д’Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2n^2+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!}{\sqrt{5n-1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+5}{7n+4} \right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n-1}{n^4+5}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+1) \cdot \ln^2(6n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+6)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+1) \cdot \ln^3(n+6)}$.

№	Варіант 16
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+16n+15}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+10}{n(n+1)(n+2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+3}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots \cdot (4n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{(2n)!}$; г) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2n-7}{2n+1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n-1}{n^3+4}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot \ln(2n-1)}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot \sqrt{\ln(n+2)}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot \ln^3(n+2)}$.

№	Варіант 17
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2-39n+40}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5n+2}{(n+1)(n+2)(n+4)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot(3n+2)}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+1)!}{\sqrt{4n+3}}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n-5}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2-2n+3}{n^5+7}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\cdot\sqrt{\ln(3n+4)}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\cdot\ln(4n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\cdot\ln^5(4n+3)}$.

№	Варіант 18
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4}{16n^2-40n+21}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{11n-1}{(n-2)(n^2-1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(4n-1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+7}{4n+5}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-5n+1}{3n^3+2n-2}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\cdot\ln^3(4n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(5n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\cdot\ln^2(5n+1)}$.

№	Варіант 19
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{25n^2+45n+14}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.
2.	Досліджити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{6\cdot 11\cdot 16\cdot\ldots\cdot(5n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+2}}{(2n+5)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{5n+4}\right)^{n^2}$.
3.	Досліджити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-2n+5}{3n^4+2n+1}$.
4.	Досліджити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)\cdot\ln(5n+2)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)\cdot\sqrt{\ln(2n+5)}}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)\cdot\ln^4(2n+5)}$.

№	Варіант 20
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{6}{36n^2+48n+7}$; б) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{n+8}{(n-4)(n-2)(n-1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2-1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7\cdot 11\cdot 15\cdot ...\cdot(4n+3)}{\sqrt{3n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n+1)!}{5n-2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n+1}{7n-1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2-2n+5}{2n^3+7n^2+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(6n+5)\cdot\sqrt{\ln(6n+5)}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(6n+5)\cdot\ln(7n+6)}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(6n+5)\cdot\ln^3(7n+6)}$.

№	Варіант 21
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+7n-12}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{7n-24}{n(n-2)(n-3)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+5)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n-3}{8\cdot 11\cdot 14\cdot \ldots \cdot (3n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)!}{\sqrt[3]{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\dfrac{2n-5}{2n-1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2-4n+2}{n^5+n^2+1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+7)\cdot \ln^2(2n+7)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+7)\cdot \sqrt[3]{\ln(7n+2)}}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+7)\cdot \ln^4(7n+2)}$.

№	Варіант 22
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 4n + 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+8}{n(n+1)(n+2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)}{\sqrt{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(3n-2)!}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{3n+1} \right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{5n^2 - n + 1}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-2) \cdot \ln^4(3n-2)}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-2) \cdot \sqrt{\ln(4n+3)}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-2) \cdot \ln^2(4n+3)}$.

№	Варіант 23
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{4n^2-24n+35}$; б) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{11n-15}{(n-3)(n-1)n}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5n+4}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+7}}{(5n-3)!}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-5}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-4n+2}{n^4+3n^2-2}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)\cdot\sqrt{\ln(4n-3)}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)\cdot\ln(3n+1)}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)\cdot\ln^3(3n+1)}$.

№	Варіант 24
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{9n^2+21n+10}$; б) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{7n-25}{(n-4)(n-3)(n-1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+n-1}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-5)}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!}{\sqrt{7n-4}}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n-7}{5n-3}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{n^2+3n+5}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)\cdot \ln^2(5n-4)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)\cdot \sqrt[3]{\ln(2n+5)}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)\cdot \ln^4(2n+5)}$.

№	Варіант 25
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{16n^2-56n+45}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+11}{(n+3)(n+4)(n+5)}$.
2.	Досліджувати ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{2^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+4)!}{5n-3}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n-1}{7n-4}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2+5n-1}{n^7+n-3}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)\cdot \ln^3(7n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)\cdot \sqrt{\ln(3n+7)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)\cdot \ln^2(3n+7)}$.

№	Варіант 26
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{5}{25n^2-35n+6}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n+4}{(n-2)n(n+1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)^3}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot (2n+5)}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{\sqrt{4n+5}}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n-3}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n^2-3n+4}{n^3+2n+3}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\cdot\sqrt{\ln(2n+3)}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\cdot \ln(3n+4)}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\cdot \ln^3(3n+4)}$.

№	Варіант 27
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2-24n-5}$; б) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{7n-23}{(n-5)(n-3)(n-2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4n+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots \cdot (5n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{(3n+1)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-5n+4}{3n^5+1}.$$
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)\cdot \ln^2(3n-4)}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)\cdot \sqrt[3]{\ln(5n-1)}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)\cdot \ln^4(5n-1)}$.

№	Варіант 28
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-21n-10}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-3}{n(n^2-1)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{7^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{\sqrt{n^2+5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)!}{5^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{4n-1}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n+3}{n^3+2}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n-5)\cdot \ln^3(4n-5)}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n-5)\cdot \sqrt{\ln(7n+2)}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n-5)\cdot \ln^2(7n+2)}$.

№	Варіант 29
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{2}{n^2-8n+15}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5n+4}{(n+2)(n+4)(n+5)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3n+5}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2-3}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{3n+1}}{(2n+7)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n+2}{5n-2}\right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+1}{2n^2-n+4}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+1)\cdot\sqrt{\ln(5n+1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+1)\cdot \ln(4n+7)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+1)\cdot \ln^5(4n+5)}$.

№	Варіант 30
1.	Знайти суму ряду: а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2 - 33n + 28}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n+2}{n(n+1)(n+2)}$.
2.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера або Коші: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n}{2n-3}$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{\sqrt{n+5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n-2)!}{n^2+5}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n-2}{7n-3} \right)^{n^2}$.
3.	Дослідити ряд на збіжність за допомогою третьої ознаки порівняння: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2 + 2n + 1}{n^4 + 7}$.
4.	Дослідити ряди на збіжність за допомогою однієї інтегральної ознаки Коші-Маклорена або в сукупності з ознаками порівняння: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(7n-5) \cdot \ln^2(7n-5)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(7n-5) \cdot \sqrt[3]{\ln(5n-7)}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(7n-5) \cdot \ln^3(5n-7)}$.

1.4. Числові ряди з довільними членами

1.4.1. *Знакозмінні і знакопереміжні ряди*

Означення. ***Знакозмінним*** називається ряд, членами якого є дійсні числа довільного знака.

Серед членів знакозмінного ряду є нескінченна кількість як додатних, так і від'ємних чисел, які можуть слідувати в довільному порядку.

Стосовно поведінки знакозмінного ряду продовжують застосовуватися характеристики:

- ***ряд збігається***,
- ***ряд розбігається***.

Означення. Знакозмінні ряди, в яких додатні та від'ємні члени ряду слідують один за одним по черзі, називаються ***знакопереміжними*** рядами. Вони мають вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n, \tag{1.12}$$

де $u_n > 0$.

Використовуються також інші позначення знакопереміжних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n \quad \text{або} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot u_n .$$

1.4.2. *Абсолютна і умовна збіжність. Ознака Лейбніца*

Для знакозмінного ряду існує два види збіжності (рис. 1.9):

- ***абсолютна збіжність***;
- ***умовна збіжність*** .

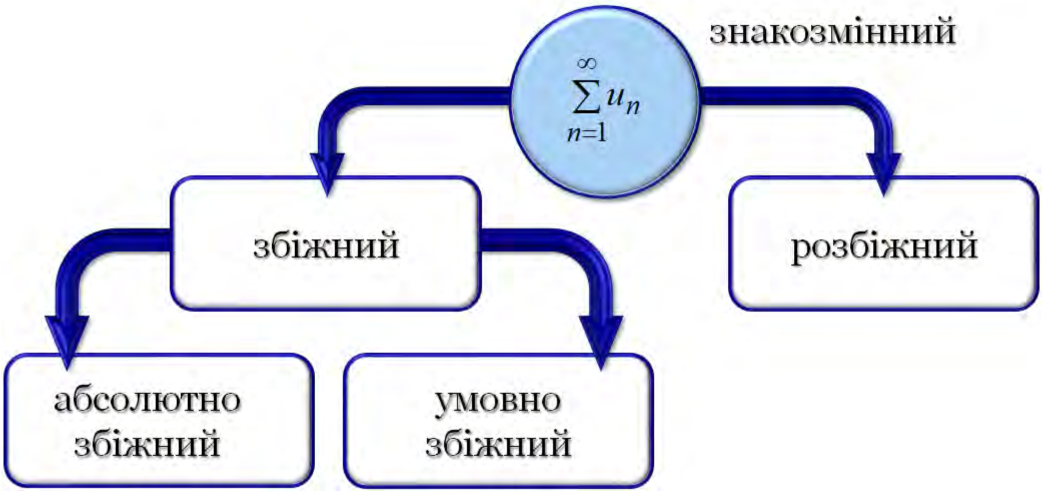


Рисунок 1.9 – Види збіжності знакозмінного ряду

Пояснимо особливості застосування цих термінів.

Означення. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з абсолютних величин членів заданого ряду.

Означення. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають ***умовно збіжним***.

Теорема Коші. Якщо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, тоді збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

В цьому випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є ***абсолютно збіжним*** (рис. 1.10).

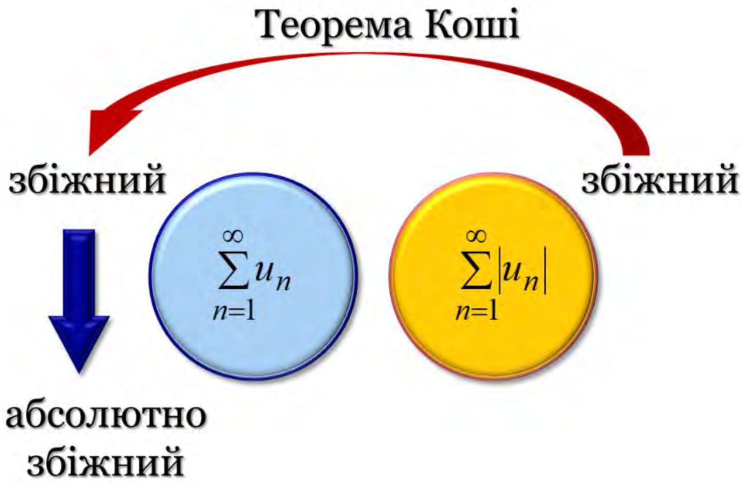


Рисунок 1.10 – Ілюстрація до застусування теореми Коші

Теорема Лейбніца (достатня умова збіжності знакопереміжного ряду). Знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ збіжний, якщо виконуються наступні умови:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$;

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доведення. Запишемо формулу частинної суми знакопереміжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ із парною кількістю доданків:

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n-1}\cdot u_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2N-1} - u_{2N}) > 0. \tag{1.13}$$

За першою умовою теореми Лейбніца $u_i > u_{i+1}$, тому кожна різниця в дужках $(u_i - u_{i+1})$ формули (1.13) є додатною. Тобто послідовність частинних сум S_{2N} є зростаючою з ростом N.

Тепер запишемо частинну суму S_{2N} в інший спосіб:

$$S_{2N}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n-1}\cdot u_n=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-u_{2N}<u_1.$$

Отже, послідовність частинних сум S_{2N} із парною кількістю доданків є зростаючою і обмеженою зверху, тоді вона є збіжною за теоремою Вейєрштрасса.

Частинна сума з непарною кількістю доданків може бути записана так:

$$S_{2N-1}=S_{2N}-u_{2N}.$$

Вона також має границю, причому рівну границі S_{2N}, оскільки за другою умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Отже, знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ має скінченну суму за вказаних умов і є збіжним.

Теорема Лейбніца має місце також, коли перша вимога виконується, починаючи з певного члена ряду. Тобто на початку ряду монотонне спадання величин членів ряду може порушуватися скінченну кількість разів.

Наслідок 1. Сума збіжного знакопереміжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ додатна і не перевищує першого його члена.

Наслідок 2. У разі заміни суми S збіжного знакопереміжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ частинною сумою $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ похибка – залишок ряду $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ – не перевищує за модулем першого з відкинутих членів ряду, тобто $|R_N|=|S-S_N|<u_{N+1}$ (рис. 1.11).

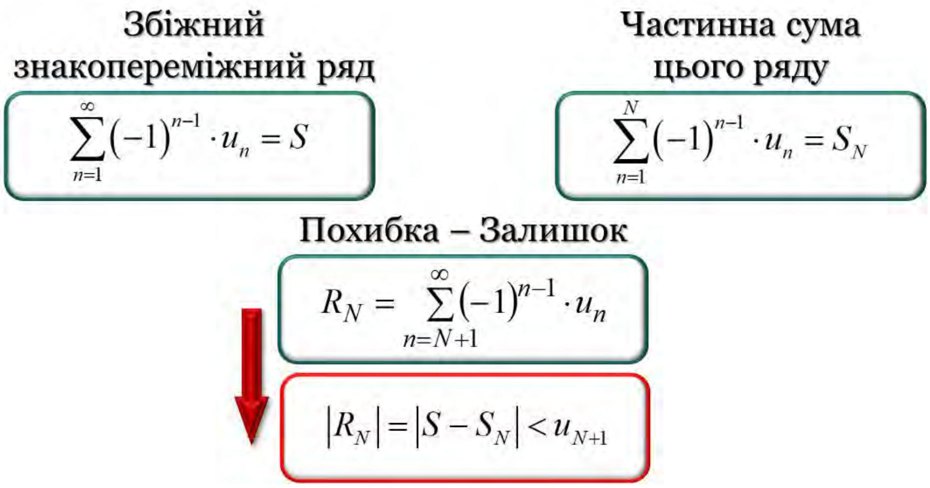


Рисунок 1.11 – Оцінка залишку знакопереміжного ряду

Обґрунтування. Оцінка величини залишку збіжного знакопереміжного ряду

$$|R_N| = |S - S_N| < u_{N+1}$$

має місце, тому що

- залишок $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ – сам є збіжним знакопереміжним рядом;
- для залишку (як для самостійного ряду) справедливий наслідок 1.

Легка оцінка величини залишку збіжних знакопереміжних рядів робить їх зручними для виконання наближених обчислень.

При дослідженні знакопереміжних рядів на збіжність доцільно користуватися схемою з рис. 1.12.

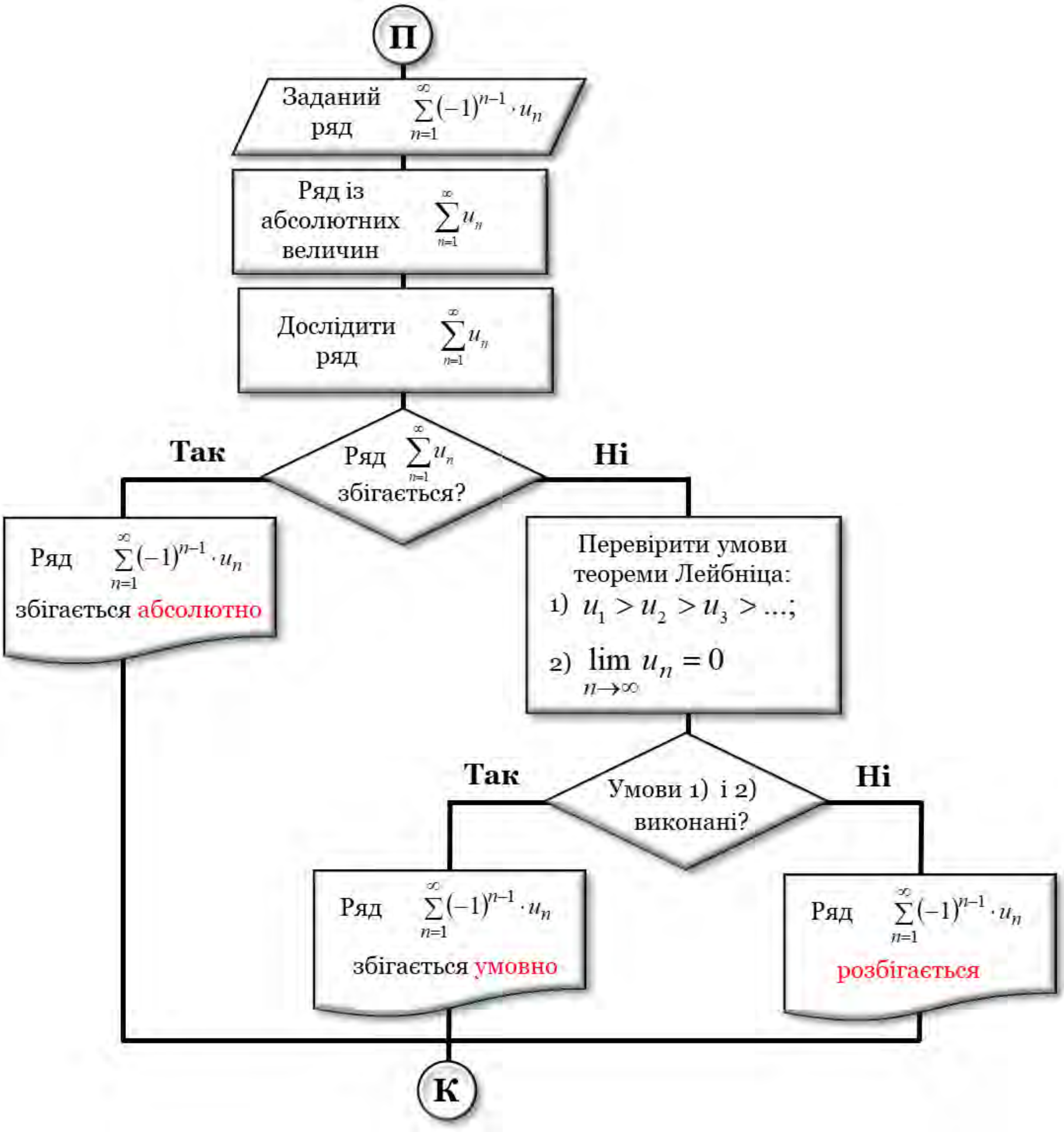


Рисунок 1.12 – Алгоритм дослідження на збіжність знакопереміжного ряду

Приклад 1.20. Дослідити знакопереміжний ряд на збіжність:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{7n+9}.$$

Розв'язання. Напишемо ряд із абсолютних величин:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{7n+9}.$$

За структурою загального члена ряду робимо висновок, що для його дослідження можна застосовувати як ознаку д'Аламбера, так і радикальну ознаку Коші. Застосуємо, для прикладу, ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n}{7n+9}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5^n}}{\sqrt[n]{7n+9}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt[n]{7n+9}} = \frac{5}{1} = 5 > 1.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші ряд із абсолютних величин розбігається, тому заданий ряд не може мати абсолютної збіжності (рис. 1.13).

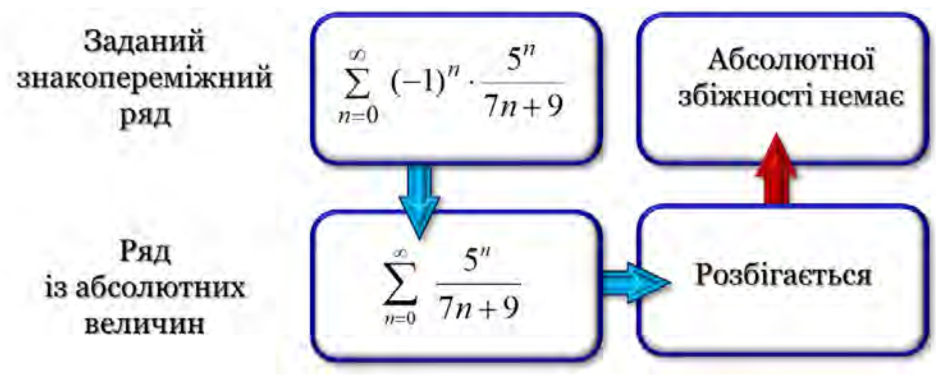


Рисунок 1.13 – До дослідження ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{7n+9}$ на збіжність

Додатково пояснимо перехід $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n+9} = 1$.

Оскільки мова йде про великі значення n $(n \to \infty)$, тому в сумі $(7n+9)$ доданком 9 можна знехтувати. Враховуючи формули (1.9), отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n+9} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1 = 1.$$

Дослідимо тепер заданий ряд на наявність у нього умовної збіжності. Для цього перевіримо виконання двох умов з теореми Лейбніца.

Друга умова з теореми Лейбніца співпадає з необхідною ознакою і може бути обчислена за правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{7n+9} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n \ln 5}{7} = \infty \neq 0.$$

Отримане значення границі є наслідком того, що показникова функція $y = 5^x$ приймає набагато більші значення, ніж лінійна функція $y = 7x + 9$ при великих значеннях x (рис. 1.14).

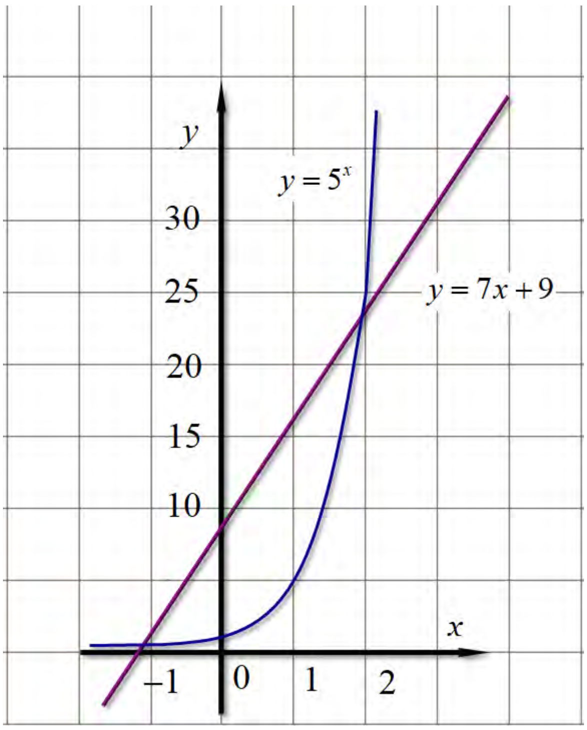


Рисунок 1.14 – Графіки функцій $y = 7x + 9$ та $y = 5^x$

Друга вимога з теореми Лейбніца не виконана, тому перевіряти виконання іншої вимоги немає потреби, оскільки для наявності умовної збіжності повинні виконуватися обидві вимоги одночасно.

Тоді за алгоритмом з рис. 1.12 заданий ряд розбігається (рис. 1.15).

Рисунок 1.15 – Виконання алгоритму дослідження на збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{5^n}{7n+9}$

Приклад 1.21. Дослідити знакопереміжний ряд на збіжність:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{4n+5}}{n^2-3n+4}.$$

Розв'язання. Напишемо ряд із абсолютних величин:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{4n+5}}{n^2-3n+4}.$$

Загальний член ряду містить тільки многочлени, тому такий ряд можна досліджувати за допомогою третьої ознаки порівняння.

Побудуємо на основі заданого ряду новий ряд. Для цього випишемо найстарші степені n з чисельника та знаменника:

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{n^{1/2}}{n^2}=\frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Новий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ є узагальненим гармонічним рядом. Параметр $p=\frac{3}{2}>1$, тому ряд є збіжним.

Обчислимо границю з третьої ознаки порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n:b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+5}}{n^2-3n+4}:\frac{1}{n^{3/2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+5}}{n^2-3n+4}\cdot\frac{\sqrt{n^3}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(4n+5)\cdot n^3}}{n^2-3n+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+5n^3}}{n^2-3n+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{\sqrt{4}}{1}=2.$$

Отримане значення границі задовольняє нерівності:

$$0<2<\infty,$$

тому за третьою ознакою порівняння обидва ряди ведуть себе однаково (рис. 1.16). Отже, ряд із абсолютних величин є збіжним.

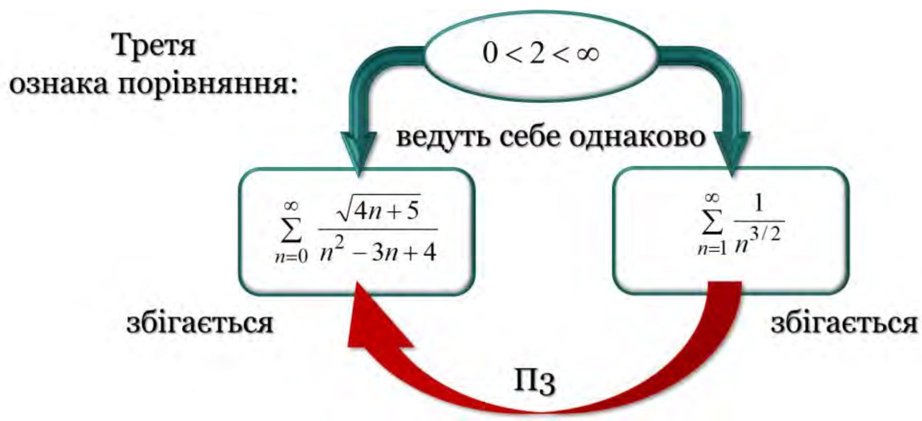


Рисунок 1.16 – Застосування третьої ознаки порівняння

Тоді за алгоритмом з рис. 1.12 заданий ряд збігається абсолютно (рис. 1.17).

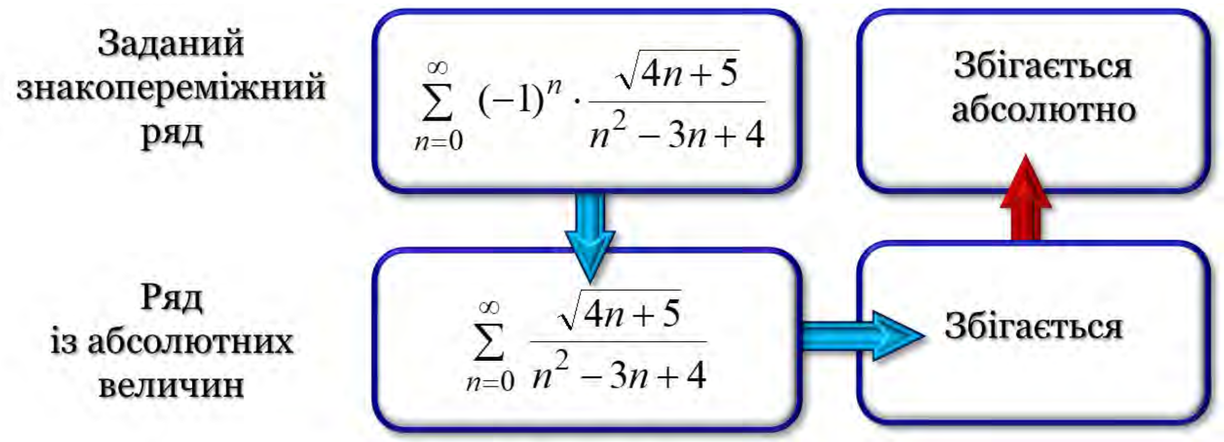


Рисунок 1.17 – Виконання алгоритму дослідження ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{4n+5}}{n^2-3n+4}$ на збіжність

Приклад 1.22. Дослідити знакопереміжний ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{(3n-1)!}.$$

Розв’язання. Напишемо ряд із абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{(3n-1)!}.$$

Загальний член містить скінченний добуток $3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)$ та факторіал $(3n-1)!$, тому такий ряд доцільно досліджувати за допомогою ознаки д’Аламбера.

Для розуміння структури загального члена ряду напишемо кілька перших доданків:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{(3n-1)!}=\frac{3}{2!}+\frac{3\cdot 8}{5!}+\frac{3\cdot 8\cdot 13}{8!}+\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot 18}{11!}+\ldots$$

Загальний член ряду з абсолютних величин дорівнює

$$a_n=\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{(3n-1)!}.$$

Сформуємо вираз для a_{n+1} члена ряду:

$$a_{n+1}=\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5\cdot(n+1)-2)}{(3\cdot(n+1)-1)!}=$$

$$=\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5n+5-2)}{(3n+3-1)!}=$$

$$=\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5n+3)}{(3n+2)!}.$$

Виразимо факторіал $(3n+2)!$ через факторіал $(3n-1)!$:

$$(3n+2)!=(3n-1)!\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2).$$

Після цього вираз a_{n+1} члена ряду набуває остаточного виду:

$$a_{n+1}=\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5n+3)}{(3n-1)!\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}.$$

Вирази, отримані для a_n та a_{n+1} членів ряду, підставимо до формули з ознаки д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}:a_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5n+3)}{(3n-1)!\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}:\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{(3n-1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5n+3)}{(3n-1)!\cdot(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}\cdot\frac{(3n-1)!}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{(3n)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{27n^3+27n^2+6n}=\frac{0}{27}=0<1.$$

Отримане значення границі менше за одиницю, тому за ознакою д'Аламбера ряд із абсолютних величин збігається.

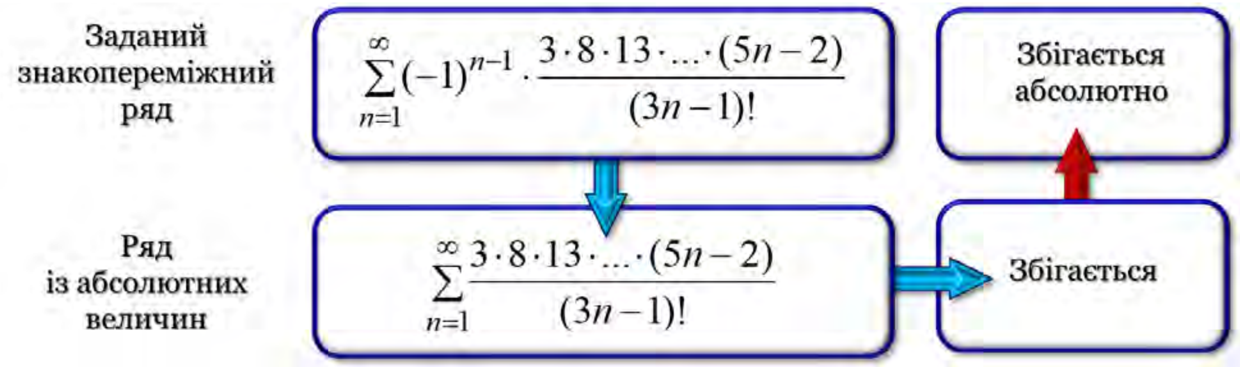


Рисунок 1.18 – Виконання алгоритму дослідження ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{(3n-1)!}$$ на збіжність

Тоді за алгоритмом з рис. 1.12 заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 1.23. Дослідити знакопереміжний ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n^2+2n-1}{n^3+n+5}.$$

Розв'язання. Напишемо ряд із абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^3+n+5}.$$

Загальний член містить тільки многочлени, тому такий ряд доцільно досліджувати за допомогою третьої ознаки порівняння.

Побудуємо на основі заданого ряду новий ряд. Для цього випишемо найстарші степені n з чисельника та знаменника:

$$\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}.$$

Новий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є гармонічним рядом. Параметр $p=1$, тому побудований ряд є розбіжним.

Обчислимо границю з третьої ознаки порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n:b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^3+n+5}:\frac{1}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^3+n+5}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n}{n^3+n+5}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{3}{1}=3.$$

Отримане значення границі задовольняє нерівності:

$$0<3<\infty,$$

тому за третьою ознакою порівняння обидва ряди ведуть себе однаково. Отже, ряд із абсолютних величин є розбіжним.

Дослідимо тепер заданий ряд на наявність у нього умовної збіжності. Для цього перевіримо виконання двох умов з теореми Лейбніца.

Перевіримо першу вимогу. Для цього в загальний член ряду будемо підставляти по черзі значення індексів:

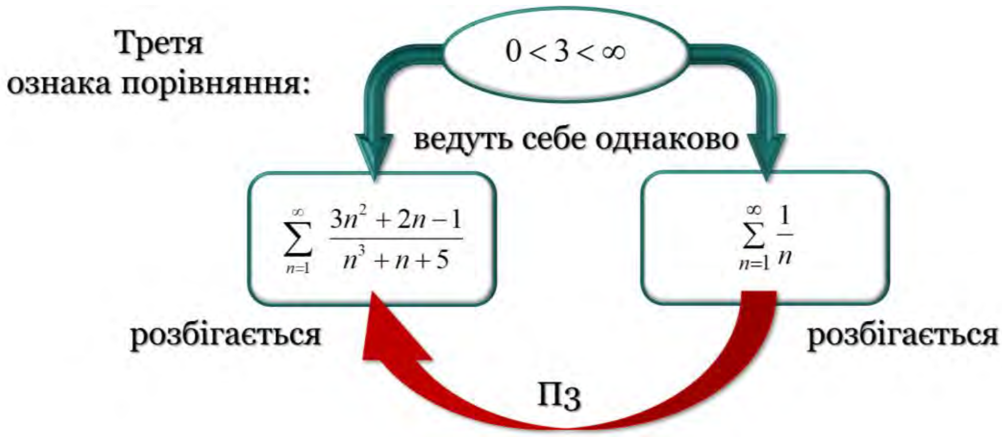


Рисунок 1.19 – Застосування третьої ознаки порівняння до дослідження на збіжність ряду з абсолютних величин

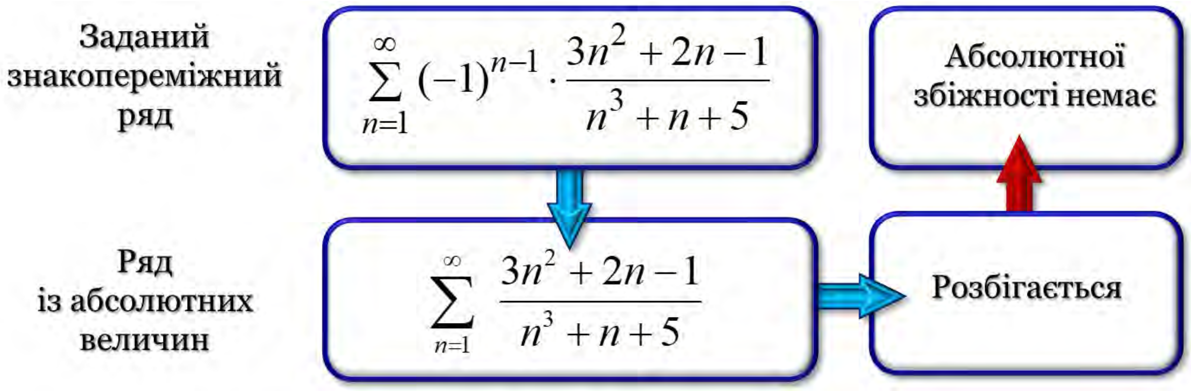


Рисунок 1.20 – Проміжні результати виконання алгоритму дослідження на збіжність знакопереміжного ряду

$$n=1 \quad a_1=\frac{3\cdot 1^2+2\cdot 1-1}{1^3+1+5}=\frac{4}{7}\approx 0{,}57;$$

$$n=2 \quad a_2=\frac{3\cdot 2^2+2\cdot 2-1}{2^3+2+5}=\frac{15}{15}=1;$$

$$n=3 \quad a_3=\frac{3\cdot 3^2+2\cdot 3-1}{3^3+3+5}=\frac{32}{35}\approx 0{,}91;$$

$$n=4 \quad a_4=\frac{3\cdot 4^2+2\cdot 4-1}{4^3+4+5}=\frac{55}{73}\approx 0{,}75;$$

$$n = 5 \quad a_5 = \frac{3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 - 1}{5^3 + 5 + 5} = \frac{28}{45} \approx 0,62;$$

....

Очевидно, що, починаючи з другого члена ряду, послідовність є спадною. У теоремі Лейбніца дозволяється порушення першої вимоги на скінченній кількості перших членів ряду. Маємо таку закономірність:

$$0,57 < 1 > 0,91 > 0,75 > 0,62 > \ldots$$

тобто $$a_1 < a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \ldots$$

Це означає, що перша вимога теореми Лейбніца виконана.

Друга умова з теореми Лейбніца співпадає з необхідною ознакою:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^3 + n + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{0}{1} = 0.$$

Друга вимога з теореми Лейбніца теж виконана.

Тоді за алгоритмом з рис. 1.12 заданий ряд збігається умовно.

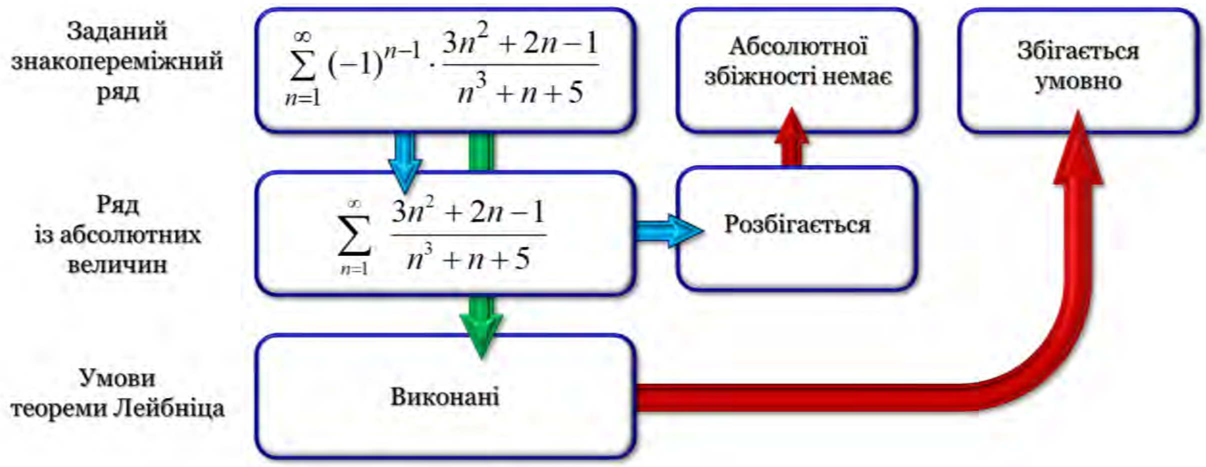


Рисунок 1.21 – Виконання алгоритму дослідження ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^3 + n + 5}$ на збіжність

1.4.3. *Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів*

Абсолютно збіжні ряди більшою мірою зберігають властивості скінченних сум (многочленів).

Суттєву різницю між абсолютною та умовною збіжностями ряду ілюструють наступні властивості.

Теорема. В ***абсолютно збіжному*** ряді можна довільно групувати члени, зберігаючи порядок їх слідування, при цьому сума ряду не змінюється.

Теорема. Якщо ряд ***абсолютно збіжний***, тоді будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки його членів, також абсолютно збіжний і має ту ж суму.

Теорема. Якщо ряд ***умовно збіжний***, тоді яке б не було наперед задане число A, можна так переставити члени цього ряду, щоб його сума дорівнювала A.

Крім того, можна так переставити члени умовно збіжного ряду, що ряд, отриманий після перестановки, буде розбіжним.

Питання для самоперевірки

1. Які ряди називаються знакозмінними?
2. Які ряди називаються знакопереміжними?
3. Які види збіжності існують для знакозмінних рядів?
4. Дайте означення знакозмінного ряду.
5. Дайте означення знакопереміжного ряду.
6. Чи є знакопереміжний ряд також знакозмінним рядом?
7. Дайте означення абсолютно збіжного ряду.
8. Дайте означення умовно збіжного ряду.

9. Сформулюйте теорему Коші про збіжність ряду.
10. Сформулюйте теорему Лейбніца.
11. Чи можна застосовувати теорему Лейбніца для дослідження поведінки знакозмінних рядів у загальному випадку?
12. Сформулюйте наслідки з теореми Лейбніца.
13. Як використовуються в наближених обчисленнях наслідки з теореми Лейбніца?
14. Опишіть алгоритм дослідження знакопереміжного ряду на збіжність.
15. Чи може порушуватися вимога монотонного спадання абсолютних величин членів знакопереміжного ряду для скінченного числа перших членів ряду?
16. Приведіть приклади абсолютно збіжних знакопереміжних рядів.
17. Приведіть приклади умовно збіжних знакопереміжних рядів.
18. Приведіть приклади розбіжних знакопереміжних рядів.
19. Показано, що одна умова з теореми Лейбніца порушена. Чи існує практична доцільність перевіряти виконання другої умови з теореми Лейбніца?
20. Сформулюйте властивості абсолютно збіжних рядів.
21. Сформулюйте властивості умовно збіжних рядів.

Завдання для самостійної роботи

Варіант	Завдання			
1	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{4^n}{3n+5}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(2n)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt{5n+3}}{n^2+2n+4}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2n^2+5n-3}{n^3+1}$.
2	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{5n+2}{3^n}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(3n+1)!}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt[3]{4n+3}}{2n+1}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3n^2-4n+2}{n^5+3}$.
3	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2^n}{(n+1)^2}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{(4n-1)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt{5n+1}}{3n+2}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{5n^2-2n-1}{n^7+3n-2}$.

Варі-ант	Завдання			
4	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+3}{5^n}$;	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n+5)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$;
	2)	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt[3]{3n+1}}{5n+2}$;	4)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{7n^2-2n+4}{2n^4+3n+1}$.
5	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{n^2-2}$;	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{(3n+1)!}$;
	2)	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{4n+7}}{n^2+3n+5}$;	4)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n^2-3n+7}{2n^3+5n^2-1}$.
6	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+2)^2}{7^n}$;	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n+1)!}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;
	2)	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt[3]{5n+4}}{3n+2}$;	4)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{4n^2-3n+2}{n^5+3n^2+4}$.

Варі-ант	Завдання			
7	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{n^2+7}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(3n-2)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{3n^2+5}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{4n+5}{2n^2+n+1}$.
8	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4n+1}{3^n}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(5n-3)!}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt[3]{5n+1}}{4n+3}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n^2-4n+5}{n^4+2n^2-1}$.
9	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{4^n}{n^2-5}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(4n-3)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{6n+5}}{7n^2-5}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n-1}{n^2+2n+5}$.

Варі-ант	Завдання			
10	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{3n+4}{5^n}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(2n-1)!}{4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5n-3}}{2n^2+7}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{2n^2+5n-3}{n^3+1}$.
11	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{7^n}{(n+1)^3}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (4n+1)}{(4n-3)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{4n+3}}{2n^2+1}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{4n^2-3n+5}{n^3+n+2}$.
12	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n^2-1}{3^n}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(2n+3)!}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n+3}}{2n+7}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{5n^2+2n-3}{n^5+1}$.

Варіант	Завдання			
13	Дослідити знакозмінні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^n}{5n-3}$;	3)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{(3n-2)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{4n+1}}{n^2+2n+3}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3n^2-n+2}{n^3+1}$.
14	Дослідити знакозмінні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\left(2n+1\right)^2}{4^n}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{(4n-1)!}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\sqrt{3n+1}}{n^2+4}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{4n+1}{3n^2-n+5}$.
15	Дослідити знакозмінні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{5^n}{3n+2}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{8\cdot 11\cdot 14\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{(2n+5)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{7n+4}}{3n+1}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2n^2+3n-1}{n^4+5}$.

Варі-ант	Завдання			
16	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{7^n}$;	3)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(3n+7)!}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}$;
	2)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{3n+2}}{5n-1}$;	4)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^3+4n^2-5}{2n^5-n+3}$.
17	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^n}{(4n-1)^2}$;	3)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot \ldots \cdot (5n-2)}{(4n+1)!}$;
	2)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2n+5}}{3n^2-1}$;	4)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{4n^3+3n-1}{n^4+5n-2}$.
18	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n-2}{2^{n+1}}$;	3)	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n+7)!}{5\cdot 11\cdot 17\cdot \ldots \cdot (6n+5)}$;
	2)	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[3]{7n+1}}{2n+5}$;	4)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{5n^2-n+4}{3n^4+2n-1}$.

Варі-ант	Завдання			
19	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{4^n}{n^2+5}$;	3)	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(3n-5)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\sqrt{5n+4}}{2n^2-1}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n^4+1}{2n^5+n^4+3}$.
20	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(3n-1)^2}{5^{n-1}}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{(4n+3)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{2n+7}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3n+5}{4n^3+n^2-2}$.
21	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{3^{n+1}}{n^2+4}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{(2n-3)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt{9n+2}}{n^2+n+1}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{7n^2-5n+2}{n^3+3n^2+4}$.

<table>
<tr><th>Варі-
ант</th><th colspan="4">Завдання</th></tr>
<tr><td rowspan="3">22</td><td colspan="4">Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(3n+2)^2}{2^{n-1}}$;</td><td>3)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(3n+4)!}{6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot (5n+1)}$;</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2n^2+3}}{4n-1}$;</td><td>4)</td><td>$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \dfrac{5n^3+4n^2-5}{2n^5-3n+1}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">23</td><td colspan="4">Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{4^n}{5n-1}$;</td><td>3)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot (6n-1)}{(4n+5)!}$;</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\sqrt{5n-4}}{3n^2-n+2}$;</td><td>4)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n^3+1}{4n^4+n^2-2}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">24</td><td colspan="4">Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \dfrac{2n^2-3}{5^{n-1}}$;</td><td>3)</td><td>$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \dfrac{(2n)!}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$;</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{9n-5}}{n^2+4}$;</td><td>4)</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{6n^2-n+3}{2n^3-3n^2+5}$.</td></tr>
</table>

Варі-ант	Завдання			
25	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{7^n}{4n-1}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-5)}{(3n-5)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n^2+3}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{4n^2-3n+5}{3n^5+n^3+1}$.
26	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{5n-2}{3^{n-1}}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{(2n+3)!}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$;
	2)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{4n-3}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{7n^2-3n+2}{2n^5+4n-1}$.
27	Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:			
	1)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2^n}{(4n-3)^2}$;	3)	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{3\cdot8\cdot13\cdot\ldots\cdot(5n-7)}{(4n-3)!}$;
	2)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{5n^2+4}$;	4)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{4n^3+5n^2-3}{2n^7+5}$.

<table>
<tr><th>Варі-
ант</th><th colspan="4">Завдання</th></tr>
<tr><td rowspan="3">28</td><td colspan="4">Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{7^n}$;</td><td>3)</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(3n-2)!}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot (6n+1)}$;</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[3]{4n+5}}{n+2}$;</td><td>4)</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{5n+7}{3n^5+n-2}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">29</td><td colspan="4">Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{5^{n-1}}{(4n-1)^2}$;</td><td>3)</td><td>$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-5)}{(4n-5)!}$;</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{6n+1}}{3n^2+2}$;</td><td>4)</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{4n^3-n+2}{5n^4+n^3-1}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">30</td><td colspan="4">Дослідити знакопереміжні ряди на збіжність:</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{4^n}$;</td><td>3)</td><td>$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n+5)!}{8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}$;</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{7n-3}}{n^2+5}$;</td><td>4)</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{6n+5}{4n^2+3n-3}$.</td></tr>
</table>

Розділ 2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1. Основні поняття. Область визначення

Означення. ***Ряд*** називається ***функціональним***, якщо його члени є функціями, наприклад, від аргументу x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right) = u_1\left(x\right) + u_2\left(x\right) + \ldots + u_n\left(x\right) + \ldots \qquad (2.1)$$

Якщо в цьому функціональному ряді покласти $x = x_0$, тоді він перетвориться на числовий ряд.

Означення. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x_0\right)$ збігається, тоді точка $x = x_0$ називається ***точкою збіжності функціонального ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$, в протилежному випадку – ***точкою розбіжності.***

Означення. Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Отже, областю збіжності функціонального ряду є проміжок на числовій осі.

Дослідження функціонального ряду на збіжність відбувається аналогічно до дослідження на збіжність знакозмінного ряду.

Алгоритм дослідження

функціонального ряду на збіжність

1. Знаходження проміжків значень аргументу членів ряду, при яких ряд збігається абсолютно.
2. Знаходження проміжків значень аргументу членів ряду, при яких ряд розбігається.
3. Додаткові дослідження в граничних точках, які відділяють області

абсолютної збіжності від областей розбіжності.

Приклад 2.1. Знайти область збіжності функціонального ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-3)^n}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-3|^n}$. Останній ряд має додатні члени, а тому можемо застосувати до його дослідження одну з ознак збіжності додатних рядів, наприклад, ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{|x-3|^n}}=\frac{1}{|x-3|}.$$

За ознакою Коші ряд буде збігатись, якщо $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$. Звідси

$$\frac{1}{|x-3|}<1 \quad\Rightarrow\quad |x-3|>1 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x-3>1 \\ x-3<-1 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<2 \end{array}\right.$$

Отже, коли $x\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ заданий ряд збігається абсолютно.

У крайніх точках $x=4$ і $x=2$ необхідно виконати додаткові дослідження.

Якщо $x=4$, заданий ряд приймає вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(4-3)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n},$$

а для такого числового ряду не виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty\neq 0$$

Тому в точці $x=4$ заданий функціональний ряд розбігається.

Якщо $x = 2$, маємо знакопереміжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}\,.$$

Для цього ряду теж не виконується необхідна умова збіжності. Тому точка $x = 2$ теж не входить до області збіжності.

Таким чином, область абсолютної збіжності заданого функціонального ряду $x \in (-\infty, 2) \bigcup (4, +\infty)$.

2.2. Рівномірна збіжність функціонального ряду

2.2.1. *Означення та критерії рівномірної збіжності функціональних рядів*

Означення. Функціональний ряд (2.1) називається ***рівномірно збіжним*** на множині *X*, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N, що для кожного $n > N$ та для всіх x з множини X виконується нерівність:

$$\left| R_N(x) \right| < \varepsilon,$$

де $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)$ – залишок ряду (2.1).

Символьно означення рівномірно збіжного функціонального ряду записується так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon):\ \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in X \quad \left| R_N(x) \right| < \varepsilon\,.$$

Збіжність числового ряду означає, що для нього можна знайти число, до якого прямує послідовність його частинних сум. Збіжність функціонального ряду означає, що для нього можна знайти функцію, до якої прямує послідовність його частинних сум.

Тому можна дати еквівалентне означення рівномірно збіжного ряду.

Означення. Функціональний ряд (2.1) називається ***рівномірно збіжним*** до функції $S(x)$ на множині X, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N, що для кожного $n > N$ та для всіх x з множини X виконується нерівність:

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

де $S_n(x)$ – частинні суми ряду (2.1).

Різниця між звичайною і рівномірною збіжністю функціонального ряду (2.1) полягає в тому, що у випадку звичайної збіжності номер N (починаючи з якого виконується нерівність (2.2)) залежить як від ε, так і від конкретної точки $x \in X$, тобто для кожної точки x існує свій номер N: $N(\varepsilon, x)$.

У випадку рівномірної збіжності ряду (2.1) номер N (починаючи з якого виконується нерівність (2.2)) залежить тільки від ε, тобто для всіх точок $x \in X$ існує один і той самий номер N: $N(\varepsilon)$.

Геометрична інтерпретація рівномірної збіжності функціонального ряду. Геометрично рівномірна збіжність ряду (2.1) на відрізку $\left[a, b\right]$ означає, що для $n \geq N(\varepsilon)$ графіки всіх частинних сум $S_n(x)$ знаходяться всередині смуги, яка обмежена кривими: $y = S(x) - \varepsilon$, $y = S(x) + \varepsilon$ – та прямими: $x = a$, $x = b$ (рис. 2.1 а).

Теорема (Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду). Функціональний ряд (2.1) збігається абсолютно і рівномірно на множині X, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами:

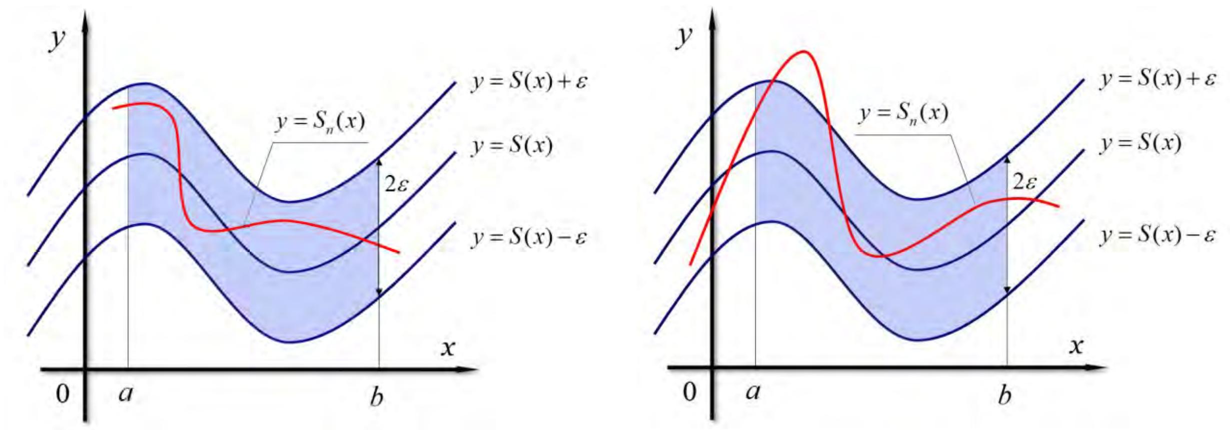
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{2.3}$$

такий, що для всіх x з даної множини X мають місце нерівності

$$|u_n(x)| < a_n,$$

де $n \in \mathbb{N}$.

В цьому випадку ряд (2.3) називається ***мажорантним***, а ряд (2.1) – ***мажорованим***.



а) б)

Рисунок 2.1 – До геометричної інтерпретації рівномірної збіжності функціонального ряду: а) рівномірно збіжний ряд, б) нерівномірно збіжний ряд

Теорема (Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). Для того, щоб функціональний ряд (2.1) рівномірно збігався на множині X, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існувало таке натуральне число N, що для кожного $n > N$ і для будь-якого натурального числа p та для всіх x з множини X, виконувалася нерівність:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon .$$

Символьно критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду записується так:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon): \forall n>N(\varepsilon),\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon .$$

Приклад 2.2. Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

Розв'язання. Для дослідження заданого ряду на рівномірну збіжність скористаємося ознакою Вейєрштрасса. Для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$ має місце нерівність:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом. Для заданого ряду він є мажорантним рядом. Отже, за ознакою Вейєрштрасса заданий функціональний ряд є абсолютно та рівномірно збіжним на всій числовій осі.

Всі збіжні функціональні ряди за характером збіжності поділяються на рівномірно та нерівномірно збіжні.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають низку властивостей, які дозволяють ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях. У цьому полягає практична перевага рівномірно збіжних рядів над нерівномірно збіжними рядами.

2.2.2. ***Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів***

Теорема про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду. Сумою рівномірно збіжного на відрізку $[a,\,b]$ функціонального ряду, члени якого неперервні на $[a,\,b]$, є функція, яка неперервна на цьому ж відрізку.

Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.

Якщо

- члени збіжного функціонального ряду (2.1) мають неперервні на відрізку $[a,\ b]$ похідні,
- а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[a,\ b]$,

тоді

- на цьому відрізку ряд (2.1) можна почленно диференціювати і має місце рівність:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

де $x \in [a,\ b]$.

Теорема про почленне інтегрування функціонального ряду.

Якщо

- члени функціонального ряду (2.1) є неперервними на відрізку $[a,\ b]$ функціями
- і цей ряд рівномірно збігається на відрізку $[a,\ b]$,

тоді

- на цьому відрізку ряд (2.1) можна почленно інтегрувати і має місце рівність:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx\right),$$

де $x \in [a,\ b]$.

2.3. Степеневі ряди

Означення. ***Степеневим рядом*** називають функціональний ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \ldots + a_n \cdot (x-c)^n + \ldots, \quad (2.4)$$

де $c,\ a_n \in \mathbb{R}$.

Числа $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ називаються ***коефіцієнтами степеневого ряду***.

Коли $c=0$ маємо поширений окремий випадок:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \quad (2.5)$$

Ряд (2.4) називають ***рядом за степенями*** $(x-c)$, а ряд (2.5) – ***рядом за степенями*** x.

2.3.1. *Радіус, інтервал, область збіжності степеневого ряду*

Теорема Абеля (1826 р). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при $x = x_0$, тоді він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, що задовольняє нерівності $|x| < |x_0|$.

Доведення. За умовою теореми степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є збіжним, коли $x = x_0$. Тоді для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ виконується необхідна ознака: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Тобто послідовність членів ряду $\left\{a_n x_0^n\right\}$ є обмеженою зверху і існує таке додатне число M, що $\left|a_n x_0^n\right| < M$.

Виконаємо з рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ такі тотожні перетворення:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| <$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n . \qquad (2.6)$$

Отриманий у формулі (2.6) степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ є нескінченно спадною геометричною прогресією з $b_1 = 1$ і $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ $\left(x < x_0\right)$, тобто є збіжним рядом.

Тоді за першою ознакою порівняння заданий ряд теж є збіжним.

Наслідок. Для степеневого ряду існує інтервал збіжності з центром в точці $x = c$:

$$|x - c| < R,$$

$$c - R < x < c + R.$$

Всередині інтервалу збіжності $\left(c - R,\ c + R\right)$ ряд збігається абсолютно, а зовні – розбігається (рис. 2.2).

На кінцях інтервалу збіжності в точках $x = c \pm R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись, тому збіжність в цих точках потребує спеціального дослідження.

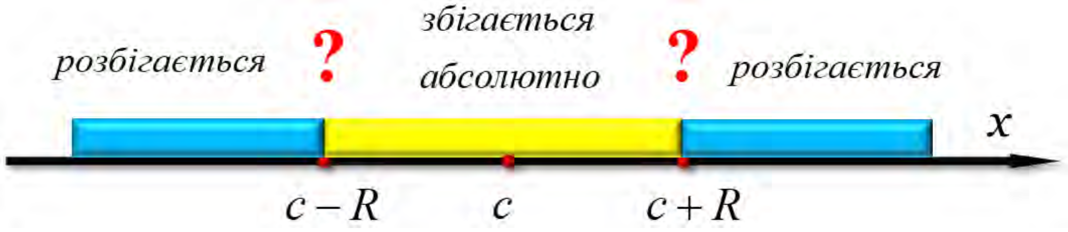


Рисунок 2.2 – Інтервал збіжності степеневого ряду

Тобто ***область збіжності*** степеневого ряду (2.4) має вигляд інтервалу $(c-R,\ c+R)$.

Число R – половина довжини інтервалу збіжності – називається ***радіусом збіжності степеневого ряду***.

В окремих випадках

- радіус збіжності R може дорівнювати 0 (тоді степеневий ряд збігається лише в точці $x=c$)
- або R може дорівнювати ∞ (тоді степеневий ряд збігається на всій числовій осі).

Інтервал збіжності степеневого ряду знаходять аналогічно, як і в загальному випадку для функціонального ряду: будують ряд з абсолютних величин членів заданого ряду та застосовують одну з достатніх ознак збіжності числових рядів.

Формули для знаходження радіусу збіжності степеневого ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{або} \qquad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}},$$

якщо жоден з коефіцієнтів степеневого ряду $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ не дорівнює нулю (тобто степеневий ряд повний).

Приклад 2.3. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)}.$$

Розв'язання. Маємо ряд за степенями x, тому це степеневий ряд виду (2.5), у якого центр інтервалу збіжності знаходиться в початку координат

($c=0$), а, отже, інтервал збіжності цього ряду $(-R, R)$. Заданий ряд повний, тобто містить всі цілі додатні степені x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{32} + \ldots + \frac{x^n}{2^n(n+1)} + \ldots$$

Тому скористаємось формулою знаходження радіусу збіжності на основі ознаки д'Аламбера:

$$|a_n| = \frac{1}{2^n(n+1)}, \qquad |a_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)},$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} : \frac{1}{2^{n+1}(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} = 2.$$

Перевіримо збіжність заданого ряду на кінцях інтервалу $(-2;2)$.

В точці $x=2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. За ознакою порівняння в граничній формі цей ряд поводиться так само, як і гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається, тому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ теж розбігається. Отже, точка $x=2$ не входить до інтервалу збіжності.

В точці $x=-2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Цей ряд є знакопереміжним. Для нього виконуються умови теореми Лейбніца:

1) $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

тому він збігається умовно (оскільки ряд з абсолютних величин цього ряду розбігається).

Відповідь:

- коли $x \in (-2;2)$, ряд збігається абсолютно;
- коли $x \in (-\infty,-2) \bigcup [2,+\infty)$, ряд розбігається;
- коли $x = -2$, ряд збігається умовно.

2.3.2. ***Дії над степеневими рядами***

1. Множення степеневого ряду на сталий множник C виконується, як і для будь-якого збіжного ряду, шляхом множення кожного члена ряду на цей множник:

$$C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C \cdot a_n x^n ,$$

де $C = const$.

2. Нехай $R > 0$ – менший із радіусів збіжності рядів $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Тоді на інтервалі $|x| < R$ ці ряди можна додавати, віднімати та множити за правилами вказаних дій для алгебраїчних многочленів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

де $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

3. Продовжимо розглядати два ряди на інтервалі їх спільної збіжності. Крім того, будемо вимагати, щоб $b_0 \neq 0$ Часткою двох степеневих рядів є степеневий ряд:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

коефіцієнти якого послідовно встановлюються з нескінченної системи рівнянь:

$$a_0 = b_0 c_0 ,$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Сама система утворюється за правилом множення степеневих рядів з п. 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

2.3.3. *Ряди Тейлора і Маклорена*

Означення. Для функції $y = f(x)$, яка нескінченно диференційована в точці x_0, **формально складений степеневий ряд**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \ldots \tag{2.7}$$

називається

- ***рядом Тейлора*** за степенями $(x - x_0)$;

або

- ***рядом Тейлора*** функції $y = f(x)$ в околі точки x_0.

Похідна нульового порядку від функції означає просто відсутність похідної, тобто це сама функція:

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Коли $x_0 = 0$, тоді ряд (2.7) називають ***рядом Маклорена***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n. \tag{2.8}$$

Формально складений для функції ряд Тейлора може:

- збігатися до функції, для якої він складений;
- збігатися до іншої функції, ніж та, для якої він складений;
- розбігатися.

Приклад функції, для якої ряд Тейлора збігається до іншої функції.

Скласти ряд Тейлора в точці $x_0 = 0$ для функції

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Дослідити отриманий ряд на збіжність.

Розв'язання. Легко пересвідчитися, що всі похідні для заданої функції в точці $x_0 = 0$ дорівнюють нулю:

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Підставимо значення самої функції та її похідних до формули (2.7):

$$S(x) = 0 + \frac{0}{1!}\cdot(x-0) + \frac{0}{2!}\cdot(x-0)^2 + \ldots + \frac{0}{n!}\cdot(x-0)^n + \ldots = 0.$$

Очевидно, що всі члени отриманого ряду дорівнюють нулю, тобто дорівнюють нулю і всі його частинні суми, тоді такий ряд Тейлора збігається за означенням до нуля, а не до функції, для якої він був побудований (рис. 2.3).

З іншими прикладами функцій, для яких породжені ними ряди Тейлора, не збігаються до заданої функції або розбігаються, можна ознайомитися в книгах [7, гл. 5, п. 24; 8, стор. 11].

Оскільки сума ряду Тейлора (2.7) може відрізнятися від функції $f(x)$, яка породжує цей ряд, тому введемо для неї окреме позначення:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n.$$

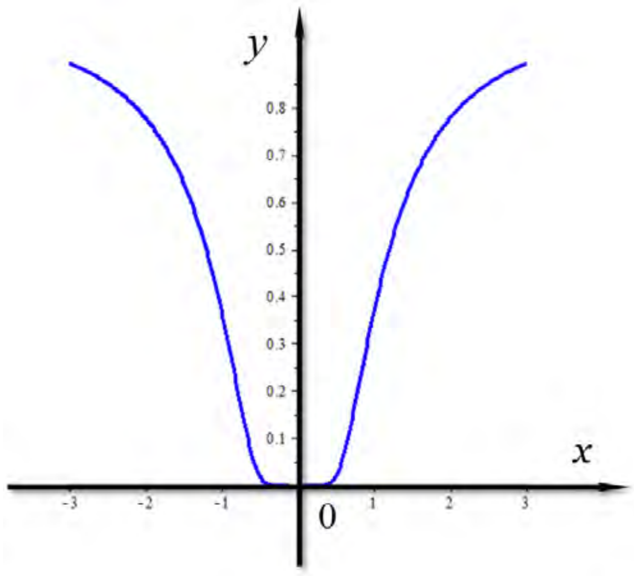


Рисунок 2.3 – Графік функції $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Означення. ***Многочленом Тейлора*** називається частинна сума перших n членів ряду Тейлора:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=$$

$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n. \qquad (2.9)$$

Таким чином, ***частинні суми ряду*** (2.7) співпадають з многочленом Тейлора (2.9):

$$S_n(x)=P_n(x).$$

Означення. Якщо функція $f(x)$ нескінченну кількість разів диференційована в околі точки x_0, тоді для неї можна скласти вираз, який називається ***формулою Тейлора***:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

де різниця

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{2.10}$$

називається ***залишковим членом формули Тейлора***

Означення. ***Залишковим членом формули Тейлора*** (2.10) ***у формі Лагранжа*** називається вираз:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \tag{2.11}$$

де $c \in (x_0, x)$, $c = x_0 + \theta \cdot (x_0 - x)$, $0 < \theta < 1$.

Справедливість формули (2.11) доводиться окремою теоремою.

Теорема. Для того, щоб ряд Тейлора для функції $f(x)$ збігався до цієї ж функції $f(x)$ в точці x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n,$$

необхідно і достатньо, щоб в цій точці залишковий член формули Тейлора прямував до нуля, коли $n \to \infty$, тобто щоб

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{2.12}$$

Необхідність. Нехай ряд Тейлора для функції $f(x)$ збігається до цієї ж функції $f(x)$ в точці x: $S(x) = f(x)$. Доведемо, що виконується рівність (2.12).

Доведення необхідності. Якщо ряд Тейлора (2.7) збігається до функції $f(x)$, тоді за означенням збіжного ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S(x) - S_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - S_n(x)\right) = 0. \tag{2.13}$$

Різниця $\left(f(x) - S_n(x)\right)$ в формулі (2.13) співпадає з означенням залишкового члена ряду Тейлора (2.10). Отже,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Достатність. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, тоді ряд Тейлора (2.7) збігається саме до функції $f(x)$.

Доведення достатності. Знайдемо границю частинних сум формули Тейлора:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - R_n(x)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) =$$

$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x).$$

При виконанні перетворень використані властивості границь та перевірені умови можливості їх застосування:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f(x) \pm g(x) \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} C = C.$$

Границя різниці функцій дорівнює різниці границь від кожної функції окремо, якщо кожна з згаданих границь існує і скінченна.

Границя константи дорівнює самій константі. Ця властивість стосується границі від функції $f(x)$, оскільки границя обчислюється за n, а функція $f(x)$ від n не залежить, тобто розуміється константою в цьому випадку.

Теорема. Якщо модулі всіх похідних функції $f(x)$ є обмеженими в околі точки x_0 одним і тим самим числом $M > 0$, тоді для будь-якого x з цього околу ряд Тейлора для функції $f(x)$ збігається до функції $f(x)$.

Доведення. Оцінимо залишковий член формули Тейлора в формі Лагранжа:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} \cdot \left|x - x_0\right|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot \left|x - x_0\right|^{n+1}.$$

Показникова функція $\left|x - x_0\right|^{n+1}$ зростає повільніше, ніж факторіал $(n+1)!$, тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Цей же результат можна отримати, дослідивши ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|x - x_0\right|^n}{n!}$$

за ознакою д'Аламбера. Він виявляється збіжним, тоді за необхідною ознакою збіжності загальний член збіжного ряду прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

Тому остаточно маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M}{(n+1)!} \cdot \left|x - x_0\right|^{n+1} =$$

$$= M \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = M \cdot 0 = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Дослідимо розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій.

2.3.4. *Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена*

2.3.4.1. *Розвинення в ряд Маклорена експоненціальної функції*

Обчислимо вирази похідної для експоненціальної функції $y = e^x$ та значення цих похідних у точці $x_0 = 0$. Розрахунки занесемо в таблицю.

Вирази похідних	Значення похідних в точці $x_0 = 0$
$y(x) = e^x$	$y(0) = e^0 = 1$
$y'(x) = e^x$	$y'(0) = e^0 = 1$
$y''(x) = e^x$	$y''(0) = e^0 = 1$
……………..	……………..
$y^{(n)}(x) = e^x$	$y^{(n)}(0) = e^0 = 1$
……………..	……………..

Підставимо знайдені вирази похідних експоненціальної функції в ряд Маклорена (2.8):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

Отриманий ряд можна записати коротко, використовуючи значок суми:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (2.14)$$

Знайдемо проміжок, у якому отриманий ряд збігається абсолютно. Загальний член цього ряду містить факторіал, тому для дослідження застосуємо ознаку д'Аламбера.

Загальний член ряду: $a_n = \frac{x^n}{n!}$.

Наступний член ряду: $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n!\cdot(n+1)}$.

Ознака д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| : |a_n| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n!\cdot(n+1)} \right| : \left| \frac{x^{n+1}}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n!\cdot(n+1)} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Отже, отриманий ряд збігається при будь-яких значеннях $x \in (-\infty, +\infty)$.

Приклад 2.4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$y = e^{-\frac{x^2}{3}}.$$

Розв'язання. Якщо зробити заміну $t = -\frac{x^2}{3}$ в формулі (2.14), тоді можна скористатися стандартним розвиненням: $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. Підставивши в нього вираз для t, отримаємо остаточну відповідь:

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!} \cdot x^{2n}.$$

2.3.4.2. *Розвинення в ряд Маклорена функції синус*

Обчислимо вирази похідних для функції $y = \sin x$ та значення цих похідних у точці $x_0 = 0$. Розрахунки занесемо в таблицю.

Вирази похідних	Значення похідних в точці $x_0 = 0$
$y(x) = \sin x$	$y(0) = \sin 0 = 0$
$y'(x) = \cos x$	$y'(0) = \cos 0 = 1$
$y''(x) = -\sin x$	$y''(0) = -\sin 0 = 0$
$y'''(x) = -\cos x$	$y'''(0) = -\cos 0 = -1$
$y^{(4)}(x) = \sin x$	$y^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$
$y^{(5)}(x) = \cos x$	$y^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$
$y^{(6)}(x) = -\sin x$	$y^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0$
$y^{(7)}(x) = -\cos x$	$y^{(7)}(0) = -\cos 0 = -1$
……………..	……………..

Підставимо знайдені вирази похідних синуса в ряд Маклорена (2.8):

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 +$$

$$+ \frac{0}{6!} \cdot x^6 + \frac{-1}{7!} \cdot x^7 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + \ldots$$

Отриманий ряд можна записати коротко, використовуючи значок суми:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \qquad (2.15)$$

Якщо нумерацію членів ряду (2.15) починати з 0, тоді розвинення функції синус в ряд Маклорена має вигляд:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Відзначимо, що отриманий ряд містить тільки непарні степені змінної x та факторіали від непарних чисел. Це відповідає тому, що функція синус є непарною. Неможливо непарну функцію наблизити парними функціями.

Знайдемо проміжок, у якому отриманий ряд збігається абсолютно. Загальний член цього ряду містить факторіал, тому для дослідження застосуємо однаку д'Аламбера.

Загальний член ряду: $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Наступний член ряду:

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1-1} \frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} = (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!(2n)(2n+1)}.$$

Ознака д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| : |a_n| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!(2n)(2n+1)}\right|:\left|(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!(2n)(2n+1)}\right|:\left|\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!(2n)(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n)(2n+1)}\right|=0<1.$$

Отже, отриманий ряд збігається при будь-яких значеннях $x\in(-\infty,+\infty)$.

Аналогічно виводиться розвинення функції косинус:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad x\in(-\infty,+\infty). \tag{2.16}$$

Відзначимо, що отриманий ряд містить тільки парні степені змінної x та факторіали від парних чисел. Це відповідає тому, що функція косинус є парною. Неможливо парну функцію наблизити непарними функціями.

Приклад 2.5. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$y=x\sin\frac{x^3}{2}.$$

Розв'язання. Скористаємося стандартним розвиненням функції синус (2.15), а множник x перед знаком суми до деяких пір залишимо без змін:

$$x\sin\frac{x^3}{2}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x^3}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{6n-3}}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-1}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\text{внесемо множник } x\\ \text{всередину суми}\end{array}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{6n-2}}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-1}}.$$

Приклад 2.6. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$y=\sin^2\frac{x^3}{6}.$$

Розв'язання. В заданій функції синус знаходиться в другому степені, а стандартне розвинення наявне для функції в першому степені. Спочатку скористаємося формулою зниження степеня, а потім стандартним розвиненням функції косинус (2.16):

$$\sin^2\frac{x^3}{6}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\left(2\cdot\frac{x^3}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n}}{(2n)!\cdot 3^{2n}}\right)=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\text{відокремимо від суми}\\ \text{перший доданок}\\ \text{з індексом } n=0\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n}}{(2n)!\cdot 3^{2n}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n}}{(2n)!\cdot 3^{2n}}\right)=$$

$$= \left\| \begin{matrix} \text{внесемо мінус} \\ \text{під знак суми} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{6n}}{(2n)! \cdot 3^{2n}}.$$

2.3.4.3. *Біноміальний ряд*

Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = (1+x)^m,$$

де m – стале число.

Змінимо підхід до обчислення коефіцієнтів шуканого ряду. Обчислимо похідну заданої функції:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}.$$

Помножимо обидві частини отриманої рівності на $(1+x)$:

$$(1+x) f'(x) = m(1+x)^m.$$

Тоді можемо написати:

$$(1+x) f'(x) = m f(x), \tag{2.17}$$

причому

$$f(0) = 1. \tag{2.18}$$

Знайдемо степеневий ряд, сума $S(x)$ якого задовольняє диференціальному рівнянню (2.17) і початковій умові (2.18): $S(0) = 1$.

Послідовно отримаємо:

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.19}$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=m+\sum_{n=1}^{\infty}ma_nx^n. \qquad (2.20)$$

Перенумеруємо доданки в першій сумі і відокремимо доданок з індексом 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Підставимо отриманий вираз до рівності (2.20) і згрупуємо доданки при однакових степенях x:

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=m+\sum_{n=1}^{\infty}ma_nx^n,$$

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1}+na_n\right)x^n=m+\sum_{n=1}^{\infty}ma_nx^n.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо нескінченну систему рівнянь:

$$a_1=m,$$

$$2a_2+a_1=ma_1,$$

$$3a_3+2a_2=ma_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n+1)a_{n+1}+na_n=ma_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Розв'язуючи цю систему, послідовно отримують:

$$a_1 = m,$$

$$a_2 = \frac{(m-1)}{2} a_1 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{(m-2)}{3} a_2 = \frac{(m-2)}{3} \cdot \frac{m(m-1)}{2} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{3!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{n!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Підставивши вираз загального члена ряду до формули (2.19), отримаємо розвинення заданої функції в ряд, який називається біноміальним:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{n!} x^n . \qquad (2.21)$$

З формули (2.21) очевидно, що для цілих додатних показників m, починаючи з доданка з номером $(m+1)$, всі члени ряду (2.21) дорівнюють нулю.

Коли показник степеня m є дробовим або від'ємним, тоді ряд (2.21) має нескінченну кількість ненульових членів ряду.

Дослідимо ряд (2.21) на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера.

Загальний член ряду: $a_n = \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{n!} x^n$.

Наступний член ряду:

$$a_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Ознака д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}|:|a_n|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|:\right.$$

$$\left.:\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!}x^{n}\right|\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left|\frac{n!}{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))x^{n}}\right|\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\cdot x\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|\cdot|x|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1}{1}\right|\cdot|x|=|x|<1\,.$$

Отже, отриманий ряд збігається, коли $x\in(-1,1)$.

Приклад 2.7. Розвинути функцію

$$y=\frac{1}{\sqrt[5]{1-6x^4}}$$

в ряд Маклорена, використовуючи стандартне подання (2.21), та написати перших чотири члени отриманого ряду.

Розв'язання. Напишемо задану функцію у вигляді, який відповідає стандартному розвиненню (2.21):

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{1-6x^4}} = \left(1+\left(-6x^4\right)\right)^{-1/5}.$$

З отриманого виразу встановлюємо, що $m = -\frac{1}{5}$. Підставимо до формули (2.21) замість змінної x доданок $\left(-6x^4\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-6x^4}} = \left(1+\left(-6x^4\right)\right)^{-1/5} =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{5}}{1!}\cdot\left(-6x^4\right) + \frac{-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)}{2!}\cdot\left(-6x^4\right)^2 + \frac{-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(-\frac{11}{5}\right)}{3!}\cdot\left(-6x^4\right)^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!}\cdot\left(6x^4\right) + \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}}{2!}\cdot\left(6x^4\right)^2 + \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{5}}{3!}\cdot\left(6x^4\right)^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{5\cdot 1!}\cdot\left(6x^4\right) + \frac{1\cdot 6}{5^2\cdot 2!}\cdot\left(6x^4\right)^2 + \frac{1\cdot 6\cdot 11}{5^3\cdot 3!}\cdot\left(6x^4\right)^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{5^n\cdot n!}\cdot\left(6x^4\right)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{5^n\cdot n!}\cdot 6^n\cdot x^{4n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{n!}\cdot\frac{6^n}{5^n}\cdot x^{4n}.$$

Напишемо перші чотири члени отриманого ряду. В останньому виразі перший доданок – одиниця, яка не підпадає під загальну формулу, і є першим членом ряду. Далі замість n в формулу загального члена ряду будемо послідовно підставляти 1, 2, 3:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-6x^4}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{n!}\cdot\frac{6^n}{5^n}\cdot x^{4n}=$$

$$=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{6^1}{5^1}\cdot x^{4\cdot 1}+\frac{1\cdot 6}{2!}\cdot\frac{6^2}{5^2}\cdot x^{4\cdot 2}+\frac{1\cdot 6\cdot 11}{3!}\cdot\frac{6^3}{5^3}\cdot x^{4\cdot 3}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{6}{5}\cdot x^{4}+\frac{1\cdot 6}{2!}\cdot\frac{6^2}{5^2}\cdot x^{8}+\frac{1\cdot 6\cdot 11}{3!}\cdot\frac{6^3}{5^3}\cdot x^{12}+\ldots$$

2.3.4.4. *Розвинення в степеневий ряд логарифмічної функції*

Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\ln\left(1+x\right).$$

Для розвинення заданої функції в степеневий ряд скористаємося отриманим вище біноміальним рядом. Оскільки розвинення відбувається в степеневий ряд, а, як було сказано в п. 2.2, всі степеневі ряди в своїх проміжках збіжності мають рівномірну збіжність, тому за властивостями рівномірно збіжних рядів їх можна в проміжках збіжності диференціювати та інтегрувати.

Для цього спочатку обчислимо похідну від заданої функції і саме вираз похідної розвинемо в біноміальний ряд за формулою (2.21):

$$f'(x)=\left(\ln\left(1+x\right)\right)'=\frac{1}{1+x}=$$

$$=\left(1+x\right)^{-1}=\|\ m=-1\ \|=$$

$$=1+\frac{-1}{1!}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3+\ldots.=$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n .$$

Проінтегруємо отриманий ряд від 0 до x в межах інтервалу збіжності біноміального ряду:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(\ln(1+x)\right)' dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n \right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \int_0^x x^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^x \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} .$$

Члени отриманого ряду прийнято перенумеровувати:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \qquad (2.22)$$

Ряд (2.22) збігається, коли $x \in (-1,1)$, як і біноміальний ряд, який використовувався при виведенні формули (2.22).

Також зазначимо, що інтегрування від 0 відповідає виконанню початкової умови: $f(0) = \ln(1+x)\big|_{x=0} = \ln 1 = 0$.

Коли $x = 1$, ряд (2.22) перетворюється на знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Очевидно, що ряд із абсолютних величин для останнього ряду є гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Гармонічний ряд, як відомо, є розбіжним, але для нього виконуються обидві умови з теореми Лейбніца. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ є умовно збіжним. Тому точку $x=1$ приєднують до інтервалу збіжності ряду (2.22). Остаточно маємо, що ряд (2.22) збігається, коли $x \in \left(-1,1\right]$.

Приклад 2.8. Розвинути функцію

$$y=\ln(25-x)$$

в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення (2.22), та написати перших три члени отриманого ряду.

Розв'язання. Для того, щоб скористатися стандартним розвиненням, аргумент заданої функції повинний містити доданок 1, а не 25. Тому винесемо 25 за дужки. Тоді розвинення відбувається так:

$$\ln\left(25-x\right)=\ln\left(25\cdot\left(1+\left(-\frac{x}{25}\right)\right)\right)=\ln 25+\ln\left(1+\left(-\frac{x}{25}\right)\right)=$$

$$=\ln 5^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\left(-\dfrac{x}{25}\right)^n}{n}=2\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\left(-1\right)^n\cdot\dfrac{x^n}{25^n}}{n}=$$

$$=2\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\cdot\frac{x^n}{25^n\cdot n}=2\ln 5-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^{2n}\cdot n}.$$

Пояснимо зникнення множника $(-1)^{2n-1}$. Вираз $(2n-1)$ дорівнює виключно непарним числам при всіх натуральних n. Тому запис $(-1)^{2n-1}$ означає (–1) в непарному степені. Отже, $(-1)^{2n-1}=-1$. Останній мінус поставлений перед знаком суми.

Напишемо перші три члени отриманого ряду. Для цього замість n в формулу загального члена ряду будемо послідовно підставляти 1, 2, 3:

$$\ln\left(25-x\right)=2\ln 5-\frac{x^1}{5^{2\cdot 1}\cdot 1}-\frac{x^2}{5^{2\cdot 2}\cdot 2}-\frac{x^3}{5^{2\cdot 3}\cdot 3}-\ldots=$$

$$= 2\ln 5 - \frac{x}{25} - \frac{x^2}{5^4 \cdot 2} - \frac{x^3}{5^6 \cdot 3} - \ldots =$$

$$= 2\ln 5 - \frac{x}{25} - \frac{x^2}{1250} - \frac{x^3}{46875} - \ldots$$

2.3.4.5. *Розвинення в степеневий ряд функції арксинус*

Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = \arcsin x \, .$$

Для розвинення заданої функції в степеневий ряд також скористаємося отриманим вище біноміальним рядом.

Обчислимо похідну від заданої функції і саме вираз похідної розвинемо в біноміальний ряд за формулою (2.21):

$$f'(x) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-1/2} = \| \ m = -1/2 \ \| =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}\left(-x^2\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-x^2\right)^3 + \ldots. =$$

$$= 1 + \frac{1}{1! \cdot 2^1} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3} x^6 + \ldots. = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n} x^{2n} \, .$$

Проінтегруємо отриманий ряд від 0 до x в межах інтервалу збіжності біноміального ряду:

$$\arcsin x=\int\limits_0^x\left(\arcsin x\right)'dx=\int\limits_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n}x^{2n}\right)dx$$

$$=\int\limits_0^x dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n}\int\limits_0^x x^{2n}dx\right)=$$

$$=x\Big|_0^x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^x\right)=$$

$$=x-0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}0=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n\cdot\left(2n+1\right)}\cdot x^{2n+1}\right). \qquad (2.23)$$

Ряд (2.23) збігається, коли $x\in\left(-1,1\right)$, як і біноміальний ряд, який використовувався при виведенні формули (2.23).

Також зазначимо, що інтегрування від 0 відповідає виконанню початкової умови: $f(0)=\arcsin x\big|_{x=0}=\arcsin 0=0$.

Дослідимо ряд (2.23) на збіжність за допомогою ознаки д'Аламбера.

Загальний член ряду: $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n\cdot\left(2n+1\right)}\cdot x^{2n+1}$.

Наступний член ряду:

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{\left(n+1\right)!\cdot 2^{n+1}\cdot\left(2n+3\right)}\cdot x^{2n+3}$$

Ознака д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}\right|:\left|a_n\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!\cdot2^{n+1}\cdot(2n+3)}\cdot x^{2n+3}\right|:\right.$$

$$\left.:\left|\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot2^{n}\cdot(2n+1)}\cdot x^{2n+1}\right|\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!\cdot2^{n+1}\cdot(2n+3)}\cdot x^{2n+3}\right|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left|\frac{n!\cdot2^{n}\cdot(2n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot x^{2n+1}}\right|\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)}{(n+1)\cdot2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot x^{2}\right|=1\cdot1\cdot x^{2}<1.$$

Отже, отриманий ряд збігається, коли $x\in(-1,1)$.

Можна також показати, що ряд (2.23) збігається, коли $x=\pm1$. Тому остаточно ряд (2.23) збігається, коли $x\in[-1,1]$.

Приклад 2.9. Розвинути функцію

$$y=\arcsin\frac{x^5}{7}$$

в ряд Маклорена, використовуючи стандартне розвинення (2.23), та написати перших чотири члени отриманого ряду:

Розв'язання. Підставимо до формули (2.23) замість змінної x аргумент заданої функції $\left(\frac{x^5}{7}\right)$:

$$\arcsin\frac{x^5}{7}=\frac{x^5}{7}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\cdot\left(\frac{x^5}{7}\right)^{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{x^5}{7}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\cdot\frac{x^{5\cdot(2n+1)}}{7^{2n+1}}\right)=$$

$$=\frac{x^5}{7}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\cdot\frac{x^{10n+5}}{7^{2n+1}}\right).$$

Напишемо перші чотири члени отриманого ряду. Для цього замість n в формулу загального члена ряду будемо послідовно підставляти 1, 2, 3:

$$\arcsin\frac{x^5}{7}=\frac{x^5}{7}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\cdot\frac{x^{10n+5}}{7^{2n+1}}\right)=$$

$$=\frac{x^5}{7}+\frac{1}{2^1\cdot1!\cdot(2\cdot1+1)}\cdot\frac{x^{10\cdot1+5}}{7^{2\cdot1+1}}+$$

$$+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!\cdot(2\cdot2+1)}\cdot\frac{x^{10\cdot2+5}}{7^{2\cdot2+1}}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!\cdot(2\cdot3+1)}\cdot\frac{x^{10\cdot3+5}}{7^{2\cdot3+1}}+\ldots=$$

$$=\frac{x^5}{7}+\frac{1}{2\cdot1!\cdot3}\cdot\frac{x^{15}}{7^3}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!\cdot5}\cdot\frac{x^{25}}{7^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!\cdot7}\cdot\frac{x^{35}}{7^7}+\ldots$$

Аналогічно виводяться формули для розвинення в ряд Маклорена функцій арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

2.3.4.6. *Ряди Маклорена для деяких елементарних функцій*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,\ 1];$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n \cdot (2n+1)} \cdot x^{2n+1} \right), \quad x \in [-1,\ 1];$$

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in [-1,\ 1];$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{n!} x^n, \quad x \in (-1,\ 1).$$

2.3.5. *Деякі застосування степеневих рядів до наближених обчислень*

2.3.5.1. *Наближене обчислення визначених інтегралів*

Приклад 2.10. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{0,6} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

з точністю до $0,01$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right).$$

Розкладемо функцію $\cos 2x$ в ряд за формулою (2.16), де замість x запишемо $2x$:

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

Область збіжності цього ряду $x \in (-\infty; +\infty)$.

Тоді

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2x^2}\left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n-2}.$$

Оскільки отриманий ряд збігається при довільному x, тому його можна інтегрувати на довільному інтервалі, зокрема на інтервалі $[0,\ 0{,}6]$:

$$\int_0^{0,6} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{0,6} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n-2} \right) dx =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \int_0^{0,6} x^{2n-2} dx \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) \Bigg|_0^{0,6} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \frac{(0{,}6)^{2n-1}}{2n-1} \right) - 0 =$$

$$= 0,6 - \frac{0,6^3}{9} + \frac{2 \cdot 0,6^5}{225} - \frac{0,6^7}{2205} + \ldots$$

Оскільки

$0,6 > 0,005$,

$\frac{0,6^3}{9} \approx 0,024 > 0,005$,

$\frac{2 \cdot 0,6^5}{225} \approx 0,0007 < 0,005$,

тоді в останньому ряді відкидаємо третій і всі наступні члени.

Отже,

$$\int_0^{0,6} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \approx 0,6 - 0,024 = 0,576.$$

2.3.5.2. *Методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів*

У межах даного курсу розглянемо два методи наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів:

- метод послідовного диференціювання;
- метод невизначених коефіцієнтів.

Метод послідовного диференціювання. Нехай потрібно знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = f(x, y),$$

який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Припустимо, що розв’язок $y = y(x)$ можна представити у вигляді степеневого ряду Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Задача зводиться до визначення коефіцієнтів цього ряду:

- $y(x_0)$ відоме за умовою задачі;
- $y'(x_0)$ знаходиться із заданого диференціального рівняння і початкової умови $y\big|_{x=x_0} = y_0$;
- $y''(x_0)$ знаходиться з продиференційованого заданого рівняння, початкової умови $y\big|_{x=x_0} = y_0$ і вже знайденого $y'(x_0)$;
- $y'''(x_0)$ знаходиться з два рази продиференційованого заданого рівняння, початкової умови $y\big|_{x=x_0} = y_0$ і вже знайдених $y'(x_0)$ і $y''(x_0)$ і т.д.

Аналогічно можна знайти розв’язок диференціальних рівнянь вищого порядку.

Приклад 2.11. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння

$$y' = x + y^2 - 1,$$

що задовольняє початковій умові $y\big|_{x=0} = 1$.

Розв’язання. Оскільки початкова умова задана в точці $x = 0$, тому розв’язок розкладаємо в степеневий ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

За початковою умовою $y(0)=1$.

Із заданого диференціального рівняння і початкової умови знаходимо:

$$y'(0)=0+1^2-1=0.$$

Для знаходження другої похідної шуканої функції диференціюємо обидві частини заданого рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$y''=1+2yy'.$$

Тоді

$$y''(0)=1+2\cdot y(0)\cdot y'(0)=1+2\cdot 1\cdot 0=1.$$

Один із визначених коефіцієнтів ряду дорівнює нулю, тому знайдемо наступний коефіцієнт. Для цього продиференціюємо рівняння $y''=1+2yy'$ і отримаємо:

$$y'''=2\left(y'\cdot y'+y\cdot y''\right)=2\left(\left(y'\right)^2+y\cdot y''\right),$$

$$y'''(0)=2\left(\left(y'(0)\right)^2+y(0)\cdot y''(0)\right)=2\cdot\left(0^2+1\cdot 1\right)=2.$$

Отже, наближений розв’язок заданого рівняння має вигляд:

$$y(x)\approx 1+0\cdot x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3 \quad \text{або} \quad y(x)\approx 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3.$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Історична довідка. Вже в 1693 р. Лейбніц користувався при інтегруванні диференціальних рівнянь нескінченними рядами на основі методу невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2.12. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння

$$y'' + xy' + y = x\cos x,$$

який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Знайдемо першу і другу похідну від загального вигляду розв'язка:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n ,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n .$$

Підставимо знайдені вирази для похідних в ліву частину заданого рівняння і згрупуємо доданки при однакових степенях x:

$$y'' + xy' + y =$$

$$= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + ... +$$

$$+x\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...\right) +$$

$$+a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = .$$

$$= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_4 x^3 + ... +$$

$$+\left(a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \ldots\right) +$$

$$+a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots =$$

$$= 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + 4\cdot 5a_4 x^3 + \ldots +$$

$$+\left(a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \ldots\right) +$$

$$+a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots =$$

$$= (2a_2 + a_0) + (2\cdot 3a_3 + a_1 + a_1)x + (3\cdot 4a_4 + 2a_2 + a_2)x^2 + (4\cdot 5a_4 + 3a_3 + a_3)x^3 + \ldots + =$$

$$= (2a_2 + a_0) + (2\cdot 3a_3 + 2a_1)x + (3\cdot 4a_4 + 3a_2)x^2 + (4\cdot 5a_4 + 4a_3)x^3 + \ldots$$

Розкладемо в ряд Маклорена праву частину заданого рівняння:

$$x\cos x = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{x}{0!} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + \ldots$$

Прирівняємо коефіцієнти, які знаходяться при однакових степенях x:

$$\begin{aligned}
x^0 &:\quad 2a_2 + a_0 = 0,\\
x^1 &:\quad 2\cdot 3a_3 + 2a_1 = 1,\\
x^2 &:\quad 3\cdot 4a_4 + 3a_2 = 0,\\
x^3 &:\quad 4\cdot 5a_4 + 4a_3 = -\frac{1}{2!}.
\end{aligned}$$

Значення коефіцієнтів a_0 та a_1 знайдемо з початкових умов:

$$y(0)=0,\qquad y'(0)=1,$$

$$a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0^2+a_3\cdot 0^3+\ldots=0,\qquad a_1+2a_2\cdot 0+3a_3\cdot 0^2+\ldots=1,$$

$$a_0=0.\qquad a_1=1.$$

Перепишемо сформовану систему, підставивши знайдені значення коефіцієнтів та виконаємо її розв'язання:

$$\begin{cases}2a_2+0=0,\\ 2\cdot 3a_3+2\cdot 1=1,\\ 3\cdot 4a_4+3a_2=0,\\ 4\cdot 5a_4+4a_3=-\dfrac{1}{2!},\end{cases}\quad \begin{cases}a_2=0,\\ 2\cdot 3a_3=-1,\\ 3\cdot 4a_4+3a_2=0,\\ 4\cdot 5a_4+4a_3=-\dfrac{1}{2!},\end{cases}\quad \begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{2\cdot 3}=-\dfrac{1}{3!},\\ 3\cdot 4a_4+3a_2=0,\\ 4\cdot 5a_4+4a_3=-\dfrac{1}{2!},\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{3!},\\ 3\cdot 4a_4+3\cdot 0=0,\\ 4\cdot 5a_4+4\cdot\left(-\dfrac{1}{3!}\right)=-\dfrac{1}{2!},\end{cases}\quad \begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{3!},\\ a_4=0,\\ 4\cdot 5a_4=-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{4}{3!},\end{cases}\quad \begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{3!},\\ a_4=0,\\ 4\cdot 5a_4=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3},\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{3!},\\ a_4=0,\\ 4\cdot 5a_4=\dfrac{1}{2\cdot 3},\end{cases}\quad \begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{3!},\\ a_4=0,\\ a_4=\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\end{cases}\quad \begin{cases}a_2=0,\\ a_3=-\dfrac{1}{3!},\\ a_4=0,\\ a_4=\dfrac{1}{5!}.\end{cases}$$

Тоді шуканий розв'язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x .$$

Отже, частинним розв'язком заданого рівняння є функція $y(x) = \sin x$. Виконаємо перевірку, підставивши знайдений розв'язок до заданого рівняння:

$$(\sin x)'' + x(\sin x)' + \sin x = x \cos x ,$$

$$-\sin x + x \cos x + \sin x = x \cos x ,$$

$$x \cos x = x \cos x .$$

Отриманий наближений розв'язок необов'язково повинен відповідати стандартному розвиненню певної функції в степеневий ряд. Такий випадок має місце, коли задане рівняння можна розв'язати аналітично.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення функціонального ряду.
2. Які точки називаються точками збіжності функціонального ряду?
3. Опишіть алгоритм дослідження функціонального ряду на збіжність.
4. Дайте означення рівномірно збіжного функціонального ряду.
5. В чому полягає різниця між звичайною та рівномірною збіжністю функціонального ряду?
6. Сформулюйте ознаку Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.
7. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.

8. Який ряд називається мажорантним для досліджуваного функціонального ряду?
9. Сформулюйте властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
10. Наведіть приклади застосування теореми про почленне диференціювання функціонального ряду.
11. Наведіть приклади застосування теореми про почленне інтегрування функціонального ряду.
12. Дайте означення степеневого ряду.
13. Сформулюйте теорему Абеля.
14. Сформулюйте наслідок з теореми Абеля про інтервал збіжності степеневого ряду.
15. Дайте означення радіусу збіжності степеневого ряду.
16. Які значення може приймати радіус збіжності степеневого ряду?
17. Які Ви знаєте формули для обчислення радіусу збіжності степеневого ряду?
18. Які операції можна виконувати над степеневими рядами?
19. Опишіть правило множення двох степеневих рядів.
20. Як визначається радіус збіжності степеневого ряду, отриманого в результаті додавання двох степеневих рядів?
21. Чи зберігається попереднє правило визначення радіусу збіжності степеневого ряду, якщо він отриманий в результаті множення двох степеневих рядів?
22. Дайте означення ряду Тейлора.
23. Як співвідносяться ряд Тейлора та ряд Маклорена для однієї і тієї ж функції?
24. Чи завжди ряд Тейлора збігається?
25. Чи може ряд Тейлора збігатися до іншої функції, а не до тієї, для якої він складений?
26. Дайте означення залишкового члена формули Тейлора.

27. Які Ви знаєте форми подання залишкового члена формули Тейлора?
28. Сформулюйте необхідну і достатню умови, при яких ряд Тейлора збігається до функції, що його породжує?
29. Запишіть формули розвинення в ряд Маклорена елементарних функцій.
30. Для яких функцій розвинення в ряд Маклорена доцільно отримувати, використовуючи біноміальний ряд?
31. Опишіть алгоритм застосування степеневих рядів для наближеного обчислення визначених інтегралів?
32. Як при наближеному обчисленні визначених інтегралів за допомогою степеневих рядів визначається досягнення заданої точності?
33. Які Ви знаєте методи наближеного розв’язання звичайних диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів?
34. Опишіть алгоритм реалізації методу послідовного диференціювання при наближеному розв’язанні звичайних диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.
35. Опишіть алгоритм реалізації методу невизначених коефіцієнтів при наближеному розв’язанні звичайних диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Для заданого функціонального ряду побудувати мажорантний ряд. Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданому відрізку.

Варіант	Ряд	Відрізок
1	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}$	$[0,\ 2]$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)^2\ln(n+1)}$	$[3,\ 4]$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}$	$[-3,\ 0]$
4	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$	$[2,\ 4]$
5	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5^n}\right)(x+2)^n$	$[-3,\ -1]$
6	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}$	$[0,\ \pi]$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$	$[-2,\ 0]$
8	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n$	$[1,\ 3]$
9	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(5n+2)\sqrt{n+3}}$	$[0,\ 2]$

Варіант	Ряд	Відрізок
10	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)(x+2)^n$	$[-3,\ -1]$
11	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x-1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^4+n+1}}$	$[2,\ 5]$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	$[0,\ 1]$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)\sin^2 nx}{\sqrt{n^3+2n+1}}$	$[-2,\ 1]$
14	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(4n+3)\sqrt[3]{n+1}}$	$[-2,\ 0]$
15	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}\right)(x+4)^n$	$[-5,\ -3]$
16	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pi-x)\cos^4 nx}{\sqrt[3]{n^5+3}}$	$[0,\ \pi]$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n+2)\ln^3(3n+2)}$	$[0,\ 2]$
18	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5^n}\right)(x-3)^n$	$[2,\ 4]$
19	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(5n+3)\sqrt[3]{n+4}}$	$[-4,\ -2]$
20	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}\right)(x-1)^n$	$[0,\ 2]$
21	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x+3}\cos nx}{\sqrt{n^3+5}}$	$[0,\ 1]$

Варіант	Ряд	Відрізок
22	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n-1)\ln^3(n-1)}$	$[5,\ 7]$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)\sin^4 nx}{n\sqrt{n^2+2}}$	$[-3,\ 0]$
24	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(7n+1)\sqrt{n^2+2}}$	$[4,\ 6]$
25	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7^n}\right)(x+1)^n$	$[-2,\ 0]$
26	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\pi)\cos^2 nx}{\sqrt{n^4-n+3}}$	$[0,\ \pi]$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+5)\ln^2(n+5)}$	$[2,\ 4]$
28	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\right)(x+2)^n$	$[-3,\ -1]$
29	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(3n+2)\sqrt{n^2+5}}$	$[-5,\ -3]$
30	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}\right)(x-3)^n$	$[2,\ 4]$

Завдання 2. Знайти область збіжності степеневого ряду.

Варіант	Завдання	
1	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+2)^5\cdot 4^n}(x+1)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n-3}}{n+5}(x-2)^n$;
2	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{\left(4n-1\right)^2}(x-2)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{4n+1}}{3n+2}(x+3)^n$;
3	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3}{\left(n+1\right)^3\cdot 7^n}(x+3)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{4n+5}}{n+2}(x-4)^n$;
4	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(4n-3)^2}(x-4)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{5n^2+4}(x+5)^n$;
5	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{3^{n-1}}(x-5)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{4n-3}(x+1)^n$;
6	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 7^n}{4n-1}(x-1)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n^2+3}(x+2)^n$;
7	1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2-3}{n^4\cdot 5^{n-1}}(x+2)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{9n-5}}{n+4}(x-3)^n$;
8	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 4^n}{5n-1}(x-3)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5n-4}}{3n^2-n+2}(x+4)^n$;
9	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^2}{n^5\cdot 2^n}(x+4)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^2+3}}{4n-1}(x-5)^n$;
10	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+4}(x-5)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{7n+2}}{n^2+n+1}(x+1)^n$;

Варіант	Завдання	
11	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3n+5}(x-1)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5n+1}}{n^2+3n+4}(x+2)^n$;
12	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5n+2}{\left(n^2+1\right)\cdot 3^n}(x+2)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{4n+3}}{2n^3+1}(x-3)^n$;
13	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)^2}(x-3)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5n+1}}{3n+2}(x+4)^n$;
14	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{\left(n^3+1\right)\cdot 5^n}(x+4)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n+1}}{5n^2+2}(x-5)^n$;
15	1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\left(2n+1\right)\cdot 3^n}{n^2-2}(x-5)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+7}}{n^2-4n+5}(x+1)^n$;
16	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{\left(n^3+1\right)\cdot 7^n}(x+1)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n+4}}{5n^2+2}(x-2)^n$;
17	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot\sqrt{n^2+1}}{n^2+7}(x-2)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{3n^2+5}(x+3)^n$;
18	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{3^n\cdot n\sqrt{n}}(x+3)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n+1}}{2n^2+3}(x-4)^n$;
19	1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\left(3n-2\right)\cdot 4^n}{n^2-5}(x-4)^n$;	2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{6n+5}}{5n^2-7}(x+5)^n$;
20	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n+4}{\left(n\sqrt{n}+1\right)\cdot 5^n}(x+5)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n-3}}{2n^2+7}(x-1)^n$;
21	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3n^2-n+2\right)\cdot 7^n}{(n+1)^4}(x-1)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{2n+1}(x+4)^n$;

Варіант	Завдання	
22	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{\left(n^5-n+2\right)\cdot 3^n}(x+2)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+7}}{2n+3}(x-5)^n$;
23	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5n\sqrt{n}-3}(x-3)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{4n+1}}{2n+3}(x+1)^n$;
24	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\left(n+3\right)^5\cdot 4^n}(x+4)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-1}}{4n+3}(x-2)^n$;
25	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(2n+7\right)\cdot 5^n}{3n^4+2}(x-5)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{7n+4}}{3n+1}(x+3)^n$;
26	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{\left(n^3+5\right)\cdot 7^n}(x+1)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n+2}}{5n^2-1}(x-4)^n$;
27	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\cdot 3^n}{\left(4n-1\right)^4}(x-2)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+5}}{3n^2-1}(x+5)^n$;
28	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{\left(n\sqrt{n}+1\right)\cdot 2^{n+1}}(x+3)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{7n+1}}{5n^2+2}(x-1)^n$;
29	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}\cdot 4^n}{n^2+5}(x-4)^n$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n+4}}{2n^2-1}(x+2)^n$;
30	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3n-1\right)^2}{5^n\cdot n^2\sqrt{n}}(x+5)^n$;	2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{5n^2+7}(x-3)^n$.

Завдання 3. Розвинути функції в ряд Маклорена, використовуючи стандартні розвинення, та написати перших три члени отриманого ряду:

Варіант	Завдання	
1	1) $y=\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$;	2) $y=\sin^2\frac{7}{2}x$;
	3) $y=e^{x/2}$;	4) $y=\ln(3+x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x^3}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^2}{3}$.
2	1) $y=x^2\sin\left(\frac{5}{6}x\right)$;	2) $y=\cos^2\frac{5}{4}x$;
	3) $y=e^{-x/3}$;	4) $y=\ln(4-x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-6x^2}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^3}{4}$.
3	1) $y=x\sin\left(\frac{4}{3}x\right)$;	2) $y=\sin^2\frac{3}{2}x$;
	3) $y=e^{x/4}$;	4) $y=\ln(5+x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1-5x^2}}$;	6) $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}$.
4	1) $y=\sin\left(\frac{2}{3}x^2\right)$;	2) $y=\cos^2\frac{3}{2}x$;
	3) $y=e^{-x/5}$;	4) $y=\ln(6-x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}$;	6) $y=\arcsin 5x^2$.

Варіант	Завдання	
5	1) $y=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{2}{5}x\right)$;	2) $y=\sin^2\frac{x}{3}$;
	3) $y=e^{-x/6}$;	4) $y=\ln(7+x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1-4x^2}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^3}{5}$.
6	1) $y=x^3\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$;	2) $y=\cos^2\frac{x}{8}$;
	3) $y=e^{x/7}$;	4) $y=\ln(8-x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-7x^3}}$;	6) $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$.
7	1) $y=\sin\left(\frac{2}{3}x^3\right)$;	2) $y=\sin^2\frac{5}{2}x$;
	3) $y=e^{-x/8}$;	4) $y=\ln(9+x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1+5x^2}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^2}{4}$.
8	1) $y=\sin\frac{5}{2}x$;	2) $y=\cos^2\frac{5}{6}x$;
	3) $y=e^{x/9}$;	4) $y=\ln(4+x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-9x^3}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^2}{16}$.

Варіант	Завдання	
9	1) $y = x^2 \sin\left(\dfrac{3}{7}x\right)$;	2) $y = \sin^2 \dfrac{3}{8}x$;
	3) $y = e^{x^2/2}$;	4) $y = \ln(5 - x)$;
	5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - 7x^2}}$;	6) $y = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x^2}{25}$.
10	1) $y = x \sin\left(\dfrac{7}{2}x\right)$;	2) $y = \cos^2 \dfrac{3}{4}x$;
	3) $y = e^{-x^3/3}$;	4) $y = \ln(6 + x)$;
	5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^3}}$;	6) $y = \arcsin \dfrac{x^2}{5}$.
11	1) $y = \dfrac{1}{x} \sin\left(\dfrac{3}{5}x\right)$;	2) $y = \sin^2 \dfrac{3}{4}x$;
	3) $y = e^{-5x/2}$;	4) $y = \ln\left(2 - x^2\right)$;
	5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8 + x^3}}$;	6) $y = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x^2}{3}$.
12	1) $y = x^3 \sin\left(\dfrac{3}{8}x\right)$;	2) $y = \cos^2\left(\dfrac{1}{4}x\right)$;
	3) $y = e^{2x/3}$;	4) $y = \ln\left(4 + x^3\right)$;
	5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{25 + x^2}}$;	6) $y = \arcsin 4x^2$.

Варіант	Завдання	
13	1) $y=\sin\left(\frac{3}{4}x^3\right)$;	2) $y=\sin^2\left(\frac{2}{3}x\right)$;
	3) $y=e^{-2x/5}$;	4) $y=x\ln(5-x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{27-x^3}}$;	6) $y=\arcsin 9x^2$.
14	1) $y=\sin\left(\frac{4}{3}x\right)$;	2) $y=\cos^2\left(\frac{1}{5}x\right)$;
	3) $y=e^{3x/4}$;	4) $y=\ln\left(6+x^2\right)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{9+x^2}}$;	6) $y=\mathrm{arctg}\frac{x^3}{2}$.
15	1) $y=x^2\sin\left(\frac{4}{3}x\right)$;	2) $y=\sin^2\left(\frac{5}{6}x\right)$;
	3) $y=e^{-2x/7}$;	4) $y=\ln(7-x^2)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{64-x^2}}$;	6) $y=\arcsin 5x^3$.
16	1) $y=x\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$;	2) $y=\cos^2\frac{7}{4}x$;
	3) $y=e^{5x/6}$;	4) $y=\ln\left(8+x^3\right)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{49+x^2}}$;	6) $y=\arcsin 2x^2$.

Варіант	Завдання			
17	1)	$y=x^2\sin\left(\frac{2}{5}x\right);$	2)	$y=\sin^2\left(\frac{5}{8}x\right);$
	3)	$y=e^{-2x/9};$	4)	$y=x\ln\left(5-x^2\right);$
	5)	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{125-x}};$	6)	$y=\operatorname{arctg}4x^3.$
18	1)	$y=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{3}x\right);$	2)	$y=\cos^2\left(\frac{2}{3}x\right);$
	3)	$y=e^{3x/8};$	4)	$y=\ln\left(4-x^3\right);$
	5)	$y=\frac{1}{\sqrt{81+x^3}};$	6)	$y=\arcsin 3x^2.$
19	1)	$y=x^3\sin\left(\frac{2}{3}x\right);$	2)	$y=\sin^2\left(\frac{5}{4}x\right);$
	3)	$y=e^{-3x/5};$	4)	$y=\ln\left(9+x^5\right);$
	5)	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}};$	6)	$y=\arcsin 5x^4.$
20	1)	$y=\sin\left(\frac{5}{2}x^3\right);$	2)	$y=\cos^2\left(\frac{3}{8}x\right);$
	3)	$y=e^{7x/5};$	4)	$y=x\ln\left(2+x^2\right);$
	5)	$y=\frac{1}{\sqrt{16+x^3}};$	6)	$y=\operatorname{arctg}4x^5.$

Варіант	Завдання	
21	1) $y=\sin\left(\frac{3}{7}x^2\right)$;	2) $y=\sin^2\left(\frac{7}{8}x\right)$;
	3) $y=e^{-5x/4}$;	4) $y=x\ln(2-x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1-2x^5}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^2}{9}$.
22	1) $y=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$;	2) $y=\cos^2\left(\frac{5}{2}x\right)$;
	3) $y=e^{x^2/3}$;	4) $y=x^3\ln(4+x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-5x^3}}$;	6) $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}$.
23	1) $y=\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$;	2) $y=\sin^2\left(\frac{1}{4}x\right)$;
	3) $y=e^{-x^3/2}$;	4) $y=\ln(5-x^2)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1+6x^4}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^3}{3}$.
24	1) $y=\sin\left(\frac{3}{8}x^2\right)$;	2) $y=\cos^2\left(\frac{1}{3}x\right)$;
	3) $y=e^{-7x/5}$;	4) $y=x\ln(6-x)$;
	5) $y=\frac{1}{\sqrt{1+4x^3}}$;	6) $y=\arcsin\frac{x^2}{25}$.

Варіант	Завдання	
25	1) $y = x^3 \sin\left(\frac{2}{5}x\right)$;	2) $y = \sin^2\left(\frac{7}{6}x\right)$;
	3) $y = e^{x^2/4}$;	4) $y = x\ln(7+x)$;
	5) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$;	6) $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{9}$.
26	1) $y = \sin\left(\frac{1}{3}x^3\right)$;	2) $y = \cos^2\left(\frac{4}{3}x\right)$;
	3) $y = e^{-5x/7}$;	4) $y = x^2\ln(8-x)$;
	5) $y = \frac{1}{\sqrt{1+3x^4}}$;	6) $y = \arcsin\frac{x^2}{2}$.
27	1) $y = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$;	2) $y = \sin^2\left(\frac{4}{3}x\right)$;
	3) $y = e^{x^3/8}$;	4) $y = \ln\left(9-x^2\right)$;
	5) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$;	6) $y = \arcsin 7x^2$.
28	1) $y = x\sin\left(\frac{5}{2}x\right)$;	2) $y = \cos^2\left(\frac{5}{2}x\right)$;
	3) $y = e^{-4x/9}$;	4) $y = x\ln\left(4+x^2\right)$;
	5) $y = \frac{1}{\sqrt{1+4x^5}}$;	6) $y = \operatorname{arctg}\frac{x^3}{8}$.

Варіант	Завдання	
29	1) $y = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{3}{7}x\right)$;	2) $y = \sin^2\left(\frac{1}{8}x\right)$;
	3) $y = e^{-x^3/2}$;	4) $y = x\ln(5+x)$;
	5) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}}$;	6) $y = \arcsin\frac{x^2}{49}$.
30	1) $y = x^3\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$;	2) $y = \cos^2\left(\frac{7}{2}x\right)$;
	3) $y = e^{4x/3}$;	4) $y = \ln\left(3-x^2\right)$;
	5) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^4}}$;	6) $y = \arcsin\frac{x^2}{100}$.

Завдання 4. Використовуючи стандартні розвинення підінтегральної функції в ряд Маклорена, обчислити вказані визначені інтеграли з точністю до 0,001.

Варіант	Визначений інтеграл	Варіант	Визначений інтеграл
1	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$	11	$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{625-x^4}}$
2	$\int_0^{0,5} \ln\left(1+x^2\right)dx$	12	$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{arctg}x^2}{x^2}dx$
3	$\int_0^{0,5} \sqrt{1-x^2}dx$	13	$\int_0^{1} \sqrt{4+x^2}dx$
4	$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx$	14	$\int_0^{1/5} \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx$
5	$\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2}dx$	15	$\int_0^{1/5} \cos\left(25x^2\right)dx$
6	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$	16	$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$
7	$\int_0^{1/4} \frac{\mathrm{arctg}x}{x}dx$	17	$\int_0^{1/4} \ln\left(1-4x^2\right)dx$
8	$\int_0^{1/3} \sqrt{9-x^2}dx$	18	$\int_0^{1} \sqrt{25+x^2}dx$
9	$\int_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+2x\right)}{x}dx$	19	$\int_0^{1/2} e^{-x^4}dx$
10	$\int_0^{1/4} \cos\left(4x^2\right)dx$	20	$\int_0^{1} x\sin x dx$

Варіант	Визначений інтеграл	Варіант	Визначений інтеграл
21	$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$	26	$\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{64+x^3}}$
22	$\int\limits_0^{0,1} \ln(1-5x)dx$	27	$\int\limits_0^{1/2} x\mathrm{arctg}x dx$
23	$\int\limits_0^{1/2} \sqrt{16-x^2}dx$	28	$\int\limits_0^{1} \sqrt{100-x^2}dx$
24	$\int\limits_0^{1/5} xe^{-x}dx$	29	$\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}dx$
25	$\int\limits_0^{1} \cos\sqrt{x}dx$	30	$\int\limits_0^{1/3} \frac{\sin(9x^2)}{x^2}dx$

Завдання 5. Розв’язати задану задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку аналітично.

Використовуючи один з розглянутих в теоретичній частині наближених методів, знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд частинного розв’язку диференціального рівняння для заданої задачі Коші.

В одній системі координат побудувати точний та наближений розв’язки. Для побудови графіків скористатися комп’ютерним застосунком за власним вибором. Усно пояснити розбіжності між графіками аналітичного та наближеного розв’язку.

Якщо початкова умова задана в точці $x_0 \neq 0$, тоді частинний розв’язок потрібно шукати у вигляді степеневого ряду Тейлора в цій точці:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \quad \text{або} \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n,$$

в залежності від обраного наближеного методу розв’язання.

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
1	$xy' + y = x\cos x$	$y(0) = 0$
2	$y' - x^2 y = 4x^3 e^{x^3/3}$	$y(0) = 1$
3	$xy' - y = x^2 \sin x$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
4	$xy' + y = xe^x$	$y(0) = 0$
5	$xy' - y = x^2 \cos x$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
6	$y' + x^3 y = 5x^4 e^{-x^4/4}$	$y(0) = 0$
7	$xy' - y = x^3 \sin x$	$y(\pi) = 0$
8	$xy' - y = x^2 e^x$	$y(1) = e$
9	$xy' - y = x^3 \cos x$	$y(\pi) = 0$
10	$xy' - y = x^3 e^x$	$y(1) = 0$
11	$xy' + y = 4x\cos 2x$	$y(0) = 0$
12	$y' - xy = 3x^2 e^{x^2/2}$	$y(0) = 1$
13	$xy' - y = 3x^2 \sin 3x$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
14	$xy' + y = 16xe^{4x}$	$y(0) = 0$
15	$xy' - y = 5x^2 \cos 5x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
16	$y' + 3x^2 y = 4x^3 e^{-x^3}$	$y(0) = 0$
17	$xy' - 2y = 2x^3 \sin 2x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
18	$xy' - 4y = 3x^5 e^{3x}$	$y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e}{81}$
19	$xy' - 2y = x^3 \cos x$	$y(\pi) = \pi^2$
20	$xy' - 3y = 2x^4 e^{2x}$	$y(1) = e^2$
21	$xy' + y = 9x \cos 3x$	$y(0) = 0$
22	$y' + xy = 3x^2 e^{-x^2/2}$	$y(0) = 1$
23	$xy' - y = 5x^2 \sin 5x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
24	$xy' + y = \frac{1}{2} xe^{x/2}$	$y(0) = 0$
25	$xy' - y = 7x^2 \cos 7x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
26	$y' - 3x^2 y = 4x^3 e^{x^3}$	$y(0) = 0$

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
27	$xy' - 4y = 2x^5 \sin 2x$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
28	$xy' - 5y = x^6 e^x$	$y(1) = e$
29	$xy' - 3y = 3x^4 \cos 3x$	$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$
30	$xy' - 4y = \frac{1}{2} x^5 e^{x/2}$	$y(2) = 16e$

Завдання 6. Методом послідовного диференціювання розв’язати задану задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння: знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд частинного розв’язку диференціального рівняння.

Оскільки всі початкові умови задані в точці $x_0 = 0$, тому частинний розв’язок потрібно шукати у вигляді ряду Маклорена.

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
1	$y' = \cos x + y^2$	$y(0) = 1$
2	$y' = e^x + y^2$	$y(0) = 0$
3	$y' = y + y^2$	$y(0) = 3$
4	$y' = \sin x + y^2$	$y(0) = 1$
5	$y' = x^2 + y^2$	$y(0) = 2$

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
6	$y' = y\cos 2x + y^2$	$y(0) = 1$
7	$y' = y - xe^y$	$y(0) = 0$
8	$y' = y^2 + xy$	$y(0) = 1$
9	$y' = x\sin 2x - y^2$	$y(0) = 1$
10	$y' = x^2 - y^3$	$y(0) = -1$
11	$y' = 2x + \cos y$	$y(0) = 0$
12	$y' = 2e^y + xy$	$y(0) = 0$
13	$y' = 3y - \frac{1}{2}y^2$	$y(0) = 2$
14	$y' = 6x\cos x - \sin y$	$y(0) = 0$
15	$y' = x + x^2 + y^2$	$y(0) = 1$
16	$y' = 2y\cos\frac{x}{2} + y^2$	$y(0) = 1$
17	$y' = 2xy - e^y$	$y(0) = 0$
18	$y' = x^2 y - y^2$	$y(0) = 1$
19	$y' = x\sin 3x - 2y^2$	$y(0) = 1$
20	$y' = xy^2 + x^3$	$y(0) = 1$
21	$y' = 2\cos x - xy^2$	$y(0) = 2$
22	$y' = 2x + e^x + y^2$	$y(0) = 1$

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
23	$y' = 2y^2 - 5y$	$y(0) = 2$
24	$y' = 2\cos x + x\sin y$	$y(0) = 0$
25	$y' = x^2 y^2 - 1$	$y(0) = 3$
26	$y' = 3y\cos\dfrac{x}{3} + y^2$	$y(0) = 1$
27	$y' = 3xy + 2e^y$	$y(0) = 0$
28	$y' = 5x^2 y - 2y^2$	$y(0) = 1$
29	$y' = 2x\sin\dfrac{x}{2} - y^2$	$y(0) = 1$
30	$yy' = x^2 y + 1$	$y(0) = 1$

Розділ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Попередні зауваження та історичні відомості

Тригонометричні ряди Фур'є є ефективним математичним апаратом, який широко застосовується для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь в частинних похідних, в задачах інтерполяції, апроксимації, обробки сигналів і експериментальних даних та ін. Особливо широко застосовуються ряди Фур'є при вивченні коливальних і періодичних процесів і явищ.

У 18 ст вже знали, що функцію можна наблизити не тільки за допомогою степеневих многочленів, але й за допомогою тригонометричних функцій синус та косинус. Ж.Б. Фур'є не є відкривачем цього факту.

Тригонометричні ряди вперше ввів Леонард Ейлер у 1748 році. Формули для обчислення коефіцієнтів ряду були відомі Леонарду Ейлеру з 1777. Ейлер вивів їх шляхом почленного інтегрування, а опублікував у 1798 році. Ще раніше, до Ейлера, їх вказав французький математик Алексі Клод Клеро в 1757 році.

Фур'є належить заслуга систематизації накопичених до нього знань та розробка методології застосування тригонометричних рядів для наближених обчислень.

Фур'є першим дав приклади розвинення в тригонометричний ряд функцій, які на різних ділянках задані різними аналітичними виразами. «Великою математичною поемою» назвав працю Фур'є лорд Кельвін.

Фур'є вважав, що будь-яку функцію можна представити тригонометричним рядом. Загалом це твердження неточне, і Фур'є критикували за відсутність строгості. Питання про збіжність рядів Фур'є залишалося значною проблемою в математиці впродовж 19 ст. Перше строге доведення збіжності тригонометричних рядів Фур'є дав німецький математик Й. П. Г. Діріхле у 1829. Він з'ясував вимоги до функції, яка розкладається в тригонометричний ряд Фур'є, щоб цей ряд збігався до функції, яка його породжує. Діріхле на той час було 24 роки.

Розрізняють тригонометричні ряди, узагальнені ряди Фур'є та тригонометричні ряди Фур'є. Співвідношення між ними показані на рис. 3.1.

Рисунок 3.1 – Співвідношення між видами рядів

Формально тригонометричний ряд має вигляд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right). \quad (3.1)$$

Щоб тригонометричний ряд (3.1) був тригонометричним рядом Фур'є, його коефіцієнти повинні задовольняти певним вимогам і, як наслідок, обчислюватися за спеціальними формулами, які будуть розглянуті далі.

Не кожний тригонометричний ряд є тригонометричним рядом Фур'є.

Узагальнений ряд Фур'є утворюється в результаті представлення довільної складної функції сумою простіших, необов'язково тригонометричних функцій синус і косинус. Ці простіші функції складають базис розвинення і задовольняють умові ортонормованості, про що буде йти мова в п. 3.2.

Надалі буде показано, що послідовності тригонометричних функцій: синус і косинус – утворюють ортогональні системи функцій, які легко можуть бути нормованими. Використовуючи такі системи функцій, і формують ряди, які називаються тригонометричними рядами Фур’є.

Для побудови і застосування тригонометричних рядів Фур’є потрібно розумітися на таких питаннях.

По-перше, щоб ряд (3.1) мав відношення до певної функції $f(x)$ його коефіцієнти мають обчислюватися за допомогою формул, які містять цю функцію.

По-друге, на функцію $f(x)$ мають бути накладені вимоги, які дозволяють виконувати всі дії в формулах для коефіцієнтів.

По-третє, на функцію $f(x)$ мають бути накладені вимоги, при яких ряд (3.1) збігається саме до заданої функції.

По-четверте, виникає питання навіщо наближувати функцію більш складним способом, коли є ряд Тейлора?

Почнемо з відповіді на останнє питання. Згадаємо, як наближується функція, наприклад, експоненціальна, рядом Маклорена (рис. 3.2):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^n + \ldots .$$

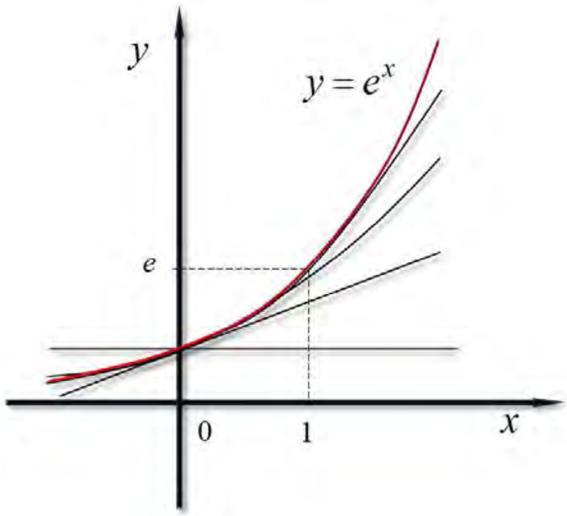


Рисунок 3.2 – Наближення функції $y = e^x$ частинними сумами ряду Маклорена

По мірі росту степеня многочлена, який використовується для наближення, в обидва боки від точки розвинення функції в ряд зростає проміжок, на якому графіки заданої функції та многочлена співпадають з задовільною точністю.

При використанні тригонометричних рядів має місце інший спосіб наближення функції. Забігаючи наперед, покажемо, як функція наближується тригонометричним рядом Фур’є на рис. 3.3.

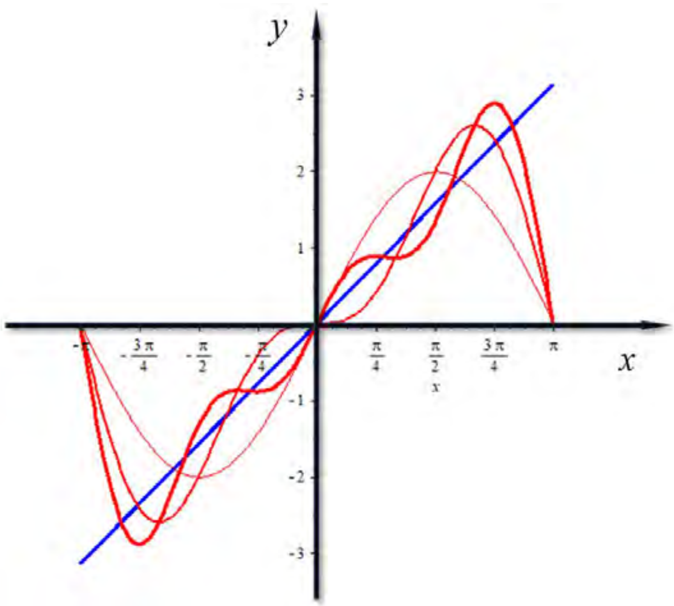


Рисунок 3.3 – Приклад наближення функції тригонометричним рядом Фур’є

З ростом кількості доданків в тригонометричному ряді його графік все щільніше «навивається» на графік заданої функції на всьому проміжку наближення, а не в околі певної точки як це має місце при наближенні рядом Тейлора.

3.2. Узагальнені ряди Фур'є

Розглянемо нескінченну послідовність функцій:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ ...,\ \varphi_n(x),\ ..., \tag{3.2}$$

які задані та неперервні на відрізку $[a, b]$. Будемо вважати, що серед цих функцій немає функції, яка тотожно дорівнює нулю на вказаному відрізку.

Означення. Послідовність функцій (3.2) називається ***ортогональною*** на відрізку $[a, b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \lambda_n > 0, & n = m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Послідовність функцій (3.2) називається ***ортонормованою*** на відрізку $[a, b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{3.4}$$

Очевидно, що перехід від ортогональної до ортонормованої системи функцій здійснюється діленням кожної функції системи (3.2) на $\sqrt{\lambda_n}$: $\left\{ \dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$. Перехід від ортогональної до ортонормованої системи можливий, коли ортогональна система не містить функцій з нульовою нормою.

Вимога $\lambda_n > 0$ є рівносильною вимозі про відсутність серед функцій послідовності (3.2) тотожно рівних нулю на відрізку $[a, b]$.

Приклади ортогональних систем:

на відрізку $[-\pi, \pi]$: $\quad 1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ ...,\ \cos nx,\ \sin nx,\ ..., \qquad (3.5)$

на відрізку $[0, \pi]$: $\quad 1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ ...,\ \cos nx,\ ..., \qquad (3.6)$

на відрізку $\left[0,\ \pi\right]$: $\quad \sin x,\ \sin 2x,\ ...,\ \sin nx,\ \ ...,$ (3.7)

на відрізку $\left[0,\ l\right]$: $\quad 1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ ...,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \ ...,$ (3.8)

на відрізку $\left[0,\ l\right]$: $\quad \sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ ...,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ ....$ (3.9)

Перевірка на ортогональність систем, які наведені в прикладах, здійснюється безпосереднім обчисленням інтегралів виду (3.3).

Узагальнений ряд Фур’є для функції $f(x)$ за ортогональною системою функції (3.2) має вигляд:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\,. \tag{3.10}$$

Будемо вважати, що ряд (3.10) збігається саме до функції, яка його породжує. Встановлення в загальному випадку вимог до функції $f(x)$, коли така ситуація має місце, обґрунтовуються спеціальними теоремами, вивчення яких виходить за межі даного курсу математики.

Для обчислення коефіцієнтів розвинення (3.10), припускаючи його можливість, помножимо обидві частини рівності на $\varphi_m(x)$ і проінтегруємо її почленно:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx\,.$$

В силу ортогональності послідовності функцій $\{\varphi_n(x)\}$ всі інтеграли, крім одного, в правій частині останньої рівності дорівнюють нулю. Відмінний від нуля інтеграл дорівнює λ_m. Тоді коефіцієнти ряду (3.10) дорівнюють:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx. \qquad (3.11)$$

Означення. Ряд (3.10) з коефіцієнтами (3.11) називається ***узагальненим рядом Фур'є*** відносно ортогональної системи функцій $\{\varphi_n(x)\}$.

3.3. Тригонометричні ряди Фур'є

Дослідженням тригонометричних рядів Фур'є займається розділ математики, який називається гармонічним аналізом.

Найбільш прості формули для коефіцієнтів тригонометричного ряду отримують для функцій, які мають період 2π і розглядаються на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Потім відбувається узагальнення формул для функцій з довільним періодом $2l$, які розглядаються на відрізку $[-l, l]$.

Наступним узагальненням є розвинення в тригонометричний ряд функцій, які задані на відрізку $[0, l]$. В цьому випадку дослідника цікавить поведінка функції тільки на відрізку $[0, l]$, тому поза його межами на функцію можуть накладатися будь-які вимоги. Для отримання простих формул досліджувана функція може бути продовжена на відрізок $[-l, 0]$ парним способом або непарним способом. Тобто в тригонометричному ряді будуть використовуватися тільки косинуси або тільки синуси відповідно.

Класичне означення ряду Фур'є для 2π-періодичних функцій, що розглядаються відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right), \qquad (3.12)$$

буде дано нижче в п. 3.3.1. Саме для так визначених рядів Фур'є з'явилися перші теореми, які обґрунтовують умови збіжності тригонометричного ряду Фур'є до функції, що його породжує. Ці теореми легко узагальнюються на випадок функцій з довільним періодом $2l$, які розглядаються на відрізку $\left[-l, l\right]$.

Види збіжності тригонометричного ряду Фур'є

Середньо квадратична збіжність ряду Фур'є

Позначимо частинні суми ряду Фур'є (3.12) за

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right). \tag{3.13}$$

Якщо на відрізку $\left[-\pi, \pi\right]$ для функції $f(x)$ виконується нерівність:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty . \tag{3.14}$$

тоді середнє квадратичне відхилення частинних сум ряду Фур'є від функції $f(x)$ буде прямувати до нуля:

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - S_N(x)\right)^2 dx = 0 . \tag{3.15}$$

Коли виконується рівність (3.15), говорять, що ряд Фур'є (3.12) ***збігається до функції*** $f(x)$ ***в середньому квадратичному***.

Геометрично це означає, що сума площ зафарбованих на рис. 3.4 фігур прямує до нуля.

Але наявність середньо квадратичної збіжності не гарантує поточкової збіжності ряду Фур'є до функції $f(x)$. Тобто існують неперервні (кусковонеперервні) функції, для яких рівність (3.15) виконується, але в окремих точках їх ряд Фур'є розбіжний. Звичайно, що такі функції є складними і виходять за межі повсякденного використання.

Відомим прикладом такої функції є функція, побудована угорським математиком Ліпотом (Леопольдом) Фейєром:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right).$$

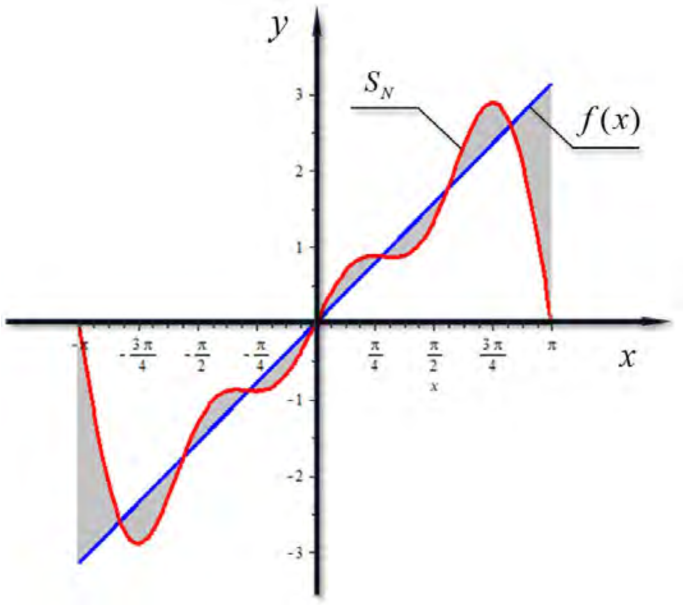


Рисунок 3.4 – До геометричного змісту поняття «збіжність у середньому квадратичному»

Ця функція (рис. 3.5) є неперервною для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$, але побудований для неї ряд Фур'є є розбіжним в точці $x=0$. Очевидно, що доведення цього факту є доволі громіздким, а графічна ілюстрація неможлива через щільність хвиль самої функції.

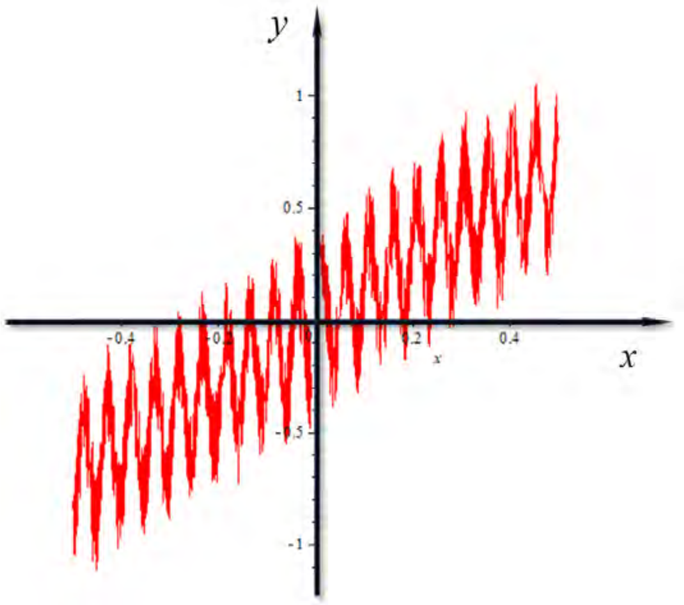


Рисунок 3.5 – Приклад функції, яка має порушення збіжності ряду Фур'є в точці $x = 0$

Поточкова збіжність ряду Фур'є

Вперше умови поточкової збіжності ряду Фур'є були сформульовані і доведені німецьким математиком Йоганом Петером Густавом Леженом Діріхле на початку XIX століття. Інший підхід до визначення вимог до функції, які забезпечують поточкову збіжність її ряду Фур'є, був запропонований італійським математиком Уліссе Діні в 1880 р.

Теорема (Ознака поточкової збіжності ряду Фур'є). Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом 2π є кусково-монотонною і обмеженою на відрізку $[-\pi, \pi]$, тоді тригонометричний ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається у всіх точках.

Сума одержаного ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках її неперервності. В точках розриву $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ справа і зліва.

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\big(f(x_0-0)+f(x_0+0)\big).$$

На проміжках неперервності функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається до неї рівномірно.

Вимога кускової монотонності і обмеженості на відрізку $[-\pi,\,\pi]$ передбачає, що функція на цьому відрізку може мати скінченну кількість розривів першого роду.

З цієї теореми випливає, що тригонометричні ряди Фур'є можуть бути застосовні до достатньо широкого класу функцій.

3.3.1. *Розвинення в ряд Фур'є на відрізку* $[-\pi,\,\pi]$ *2π-періодичних функцій*

3.3.1.1. *Загальний випадок* (*функція індиферентна*)

Класичне означення тригонометричного ряду Фур'є.

Означення. Функція ***називається абсолютно інтегрованою на відрізку***, якщо по цьому відрізку можна обчислити визначений інтеграл від неї самої та від її модуля.

Класичне означення. Для функції $f(x)$, яка є абсолютно інтегрованою на відрізку $[-\pi,\,\pi]$**,** тригонометричним рядом Фур'є називається ряд виду:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big), \tag{3.16}$$

де сталі числа $a_0,\,a_n,\,b_n$ $(n\in N)$ називаються ***коефіцієнтами тригонометричного ряду*** та обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad (3.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Приклад 3.1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x+1$, яка задана на періоді своєї зміни $(-\pi, \pi]$.

Розв'язання. За формулами (3.17) обчислимо спочатку значення коефіцієнтів ряду Фур'є для заданої функції:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(x+1)^2\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left((\pi+1)^2 - (-\pi+1)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\pi^2+2\pi+1\right) - \left(1-2\pi+\pi^2\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot 4\pi = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos(nx)dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = \cos(nx)dx & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{matrix} \right\| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(\big((\pi+1)\sin(n\pi)-(-\pi+1)\sin(-n\pi)\big)+\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(\big((\pi+1)\cdot 0-(-\pi+1)\cdot 0\big)+\frac{1}{n}\big(\cos(n\pi)-\cos(-n\pi)\big)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(0+\frac{1}{n}\big(\cos(n\pi)-\cos(n\pi)\big)\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin(nx)dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=x+1 & du=dx \\ dv=\sin(nx)dx & v=-\frac{1}{n}\cos(nx)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(-\big((\pi+1)\cos(n\pi)-(-\pi+1)\cos(-n\pi)\big)+\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(-\big((\pi+1)\cos(n\pi)-(1-\pi)\cos(n\pi)\big)+\frac{1}{n}\big(\sin(n\pi)-\sin(-n\pi)\big)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(-(\pi+1-1+\pi)\cos(n\pi)+\frac{1}{n}\big(\sin(n\pi)+\sin(n\pi)\big)\right)=$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-2\pi \cdot (-1)^n + \frac{1}{n} \cdot 0 \right) = \frac{1}{\pi n} \cdot 2\pi \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів:

$$a_0 = 2, \quad a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \; –$$

до формули (3.16) і отримаємо ряд Фур'є для заданої функції:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) =$$

$$= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0 \cdot \cos(nx) + (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \cdot \sin(nx) \right) =$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Графічні ілюстрації до наближення заданої функції скінченними сумами побудованого ряду Фур'є наведені на рис. 3.6 і 3.7.

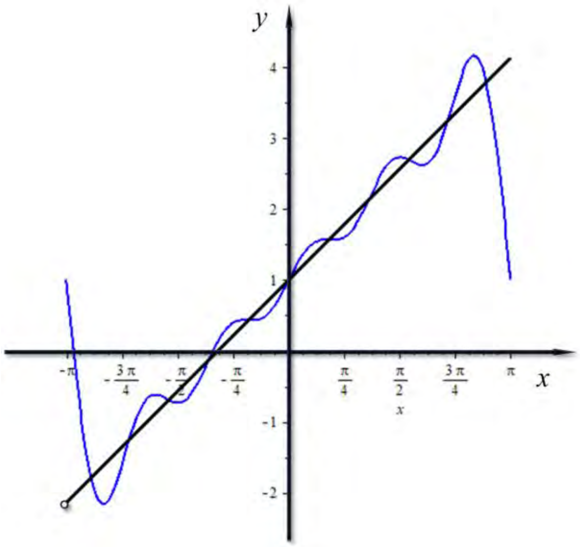


Рисунок 3.6 – Наближення частинною сумою ряду Фур'є функції $f(x) = x + 1$ на проміжку періодичності $(-\pi, \pi]$

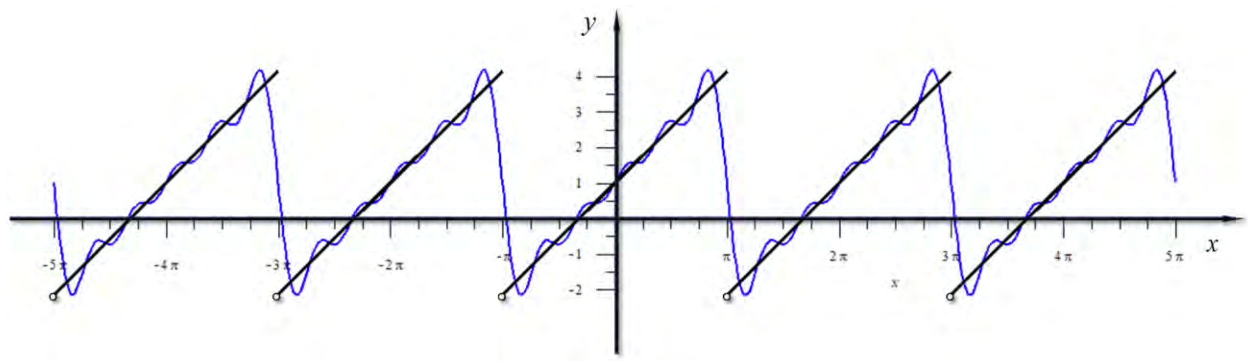


Рисунок 3.7 – Наближення частинною сумою ряду Фур'є функції $f(x) = x + 1$ як періодичної

3.3.1.2. *Функція парна*

Дослідимо питання, як зміняться формули (3.17) для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є в залежності від парності та непарності функції $f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ **парна**, тоді за властивістю визначеного інтеграла коефіцієнт a_0 може бути обчислений за формулою:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

У цьому випадку використана властивість: визначений інтеграл від парної функції по симетричному проміжку дорівнює подвоєному інтегралу по половині проміжку інтегрування.

Якщо функція $f(x)$ **парна**, тоді добуток $f(x)\cos(nx)$ теж є парною функцією, і за тією ж властивістю визначеного інтеграла всі коефіцієнти a_n можуть бути обчислені за формулою:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,.$$

Якщо функція $f(x)$ **парна**, тоді добуток $f(x)\sin(nx)$ є непарною функцією і за іншою властивістю визначеного інтеграла всі коефіцієнти b_n дорівнюють:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0\,.$$

Нагадаємо, що використана властивість: визначений інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку дорівнює нулю.

Приклад 3.2. Розвинути в ряд Фур’є функцію

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \tag{3.18}$$

яка задана на проміжку $[-\pi,\, \pi]$.

Розв’язання. Побудуємо графік заданої функції (рис. 3.8).

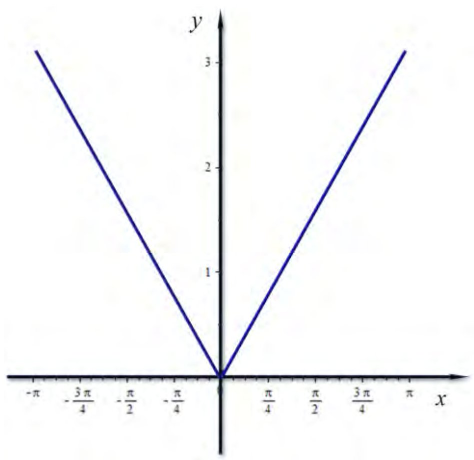


Рисунок 3.8 – Графік функції (3.18)

Графік заданої функції є симетричним відносно осі Oy і виконується рівність $y(-x)=y(x)$, тому задана функція є парною. Скористаємося відповідними формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур’є:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2-0\right)=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx=$$

$$=\begin{Vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos(nx)dx & v=\dfrac{1}{n}\sin(nx) \end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin(nx)\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(\left(\pi\cdot\sin(n\pi)-0\cdot\sin 0\right)+\frac{1}{n}\cos(nx)\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(\left(\pi\cdot 0-0\cdot 0\right)+\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi)-\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(2n-1\right)^2},$$

$$b_n=0.$$

Підкреслимо, що вираз $\left((-1)^n-1\right)$ приймає значення:

$$\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-2, & n\ -\ \text{непарне},\\ 0, & n\ -\ \text{парне}.\end{cases}$$

Тому в розвиненні заданої функції в ряд Фур'є косинуси будуть тільки з непарними коефіцієнтами аргументів.

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів до формули ряду Фур'є (3.16):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right) + 0 \cdot \sin(nx) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right) \right).$$

Ряд Фур'є для парної функції містить тільки члени ряду з косинусами. Ще раз підкреслимо, що відбулася заміна коефіцієнтів у аргументах косинусів, а саме: $\cos(nx)$ замінено на $\cos\left((2n-1)x\right)$, оскільки коефіцієнти a_n з парними індексами дорівнюють нулю.

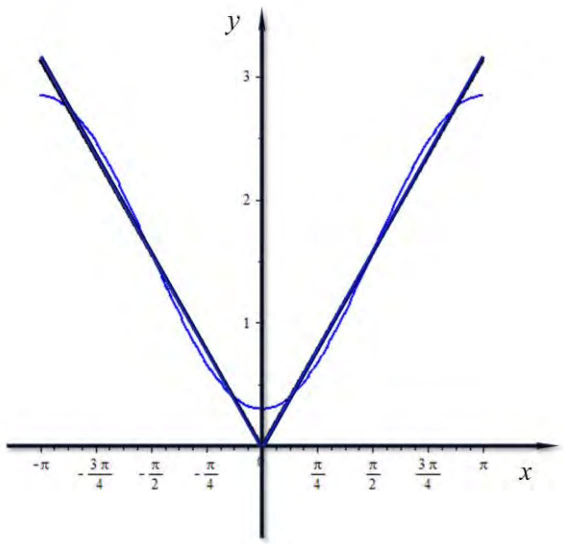


Рисунок 3.9 – Наближення частинною сумою ряду Фур'є функції (3.18) на відрізку $[-\pi, \pi]$

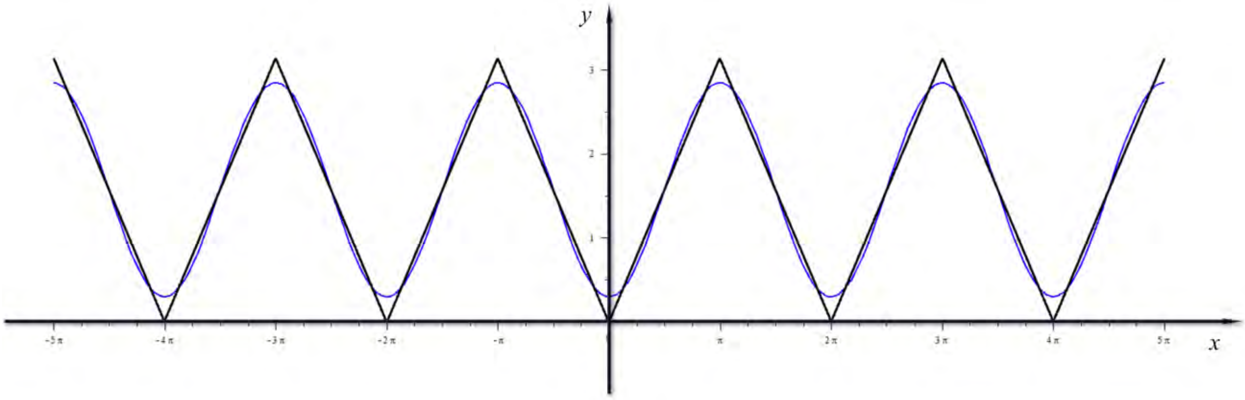


Рисунок 3.10 – Наближення частинною сумою ряду Фур'є функції (3.18) як періодичної

3.3.1.3. *Функція непарна*

Якщо функція $f(x)$ **непарна**, тоді за властивістю визначеного інтеграла коефіцієнт a_0 дорівнює:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ **непарна**, тоді добуток $f(x)\cos(nx)$ теж є непарною функцією. І за вже згадуваною властивістю визначеного інтеграла всі коефіцієнти a_n дорівнюють:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ **непарна**, тоді добуток $f(x)\sin(nx)$ є парною функцією і за першою властивістю визначеного інтеграла всі коефіцієнти b_n дорівнюють:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\,.$$

Для зручності використання сформуємо отримані результати у вигляді таблиці.

Таблиця 3.1

Формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є
для парних та непарних функцій, які задані на відрізку $[-\pi,\ \pi]$

Функція $f(x)$	
парна	непарна
$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx\,,$ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,,$ $b_n = 0\,.$	$a_0 = 0\,,$ $a_n = 0\,,$ $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\,.$

Приклад 3.3. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \tag{3.19}$$

яка задана на проміжку $(-\pi,\ \pi]$.

Розв'язання. Побудуємо графік заданої функції (рис. 3.11).

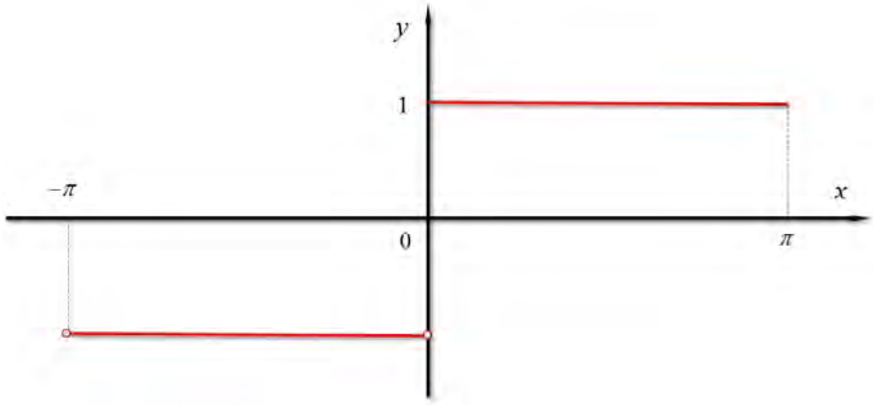


Рисунок 3.11 – Графік функції (3.19)

Графік заданої функції є симетричним відносно початку координат, та виконується рівність $y(-x) = -y(x)$, тому задана функція є непарною. Скористаємося відповідними формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є (табл. 3.1):

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{2}{n\pi}\cdot\left((-1)^{n+1} + 1\right) = \frac{4}{\left(2n-1\right)\pi}.$$

Звернемо увагу, що вираз $\left((-1)^{n+1} + 1\right)$ приймає значення:

$$\left((-1)^{n+1} + 1\right) = \begin{cases} 2, & n \text{ – непарне}, \\ 0, & n \text{ – парне}. \end{cases}$$

Тому в розвиненні заданої функції в ряд Фур'є синуси будуть тільки з непарними коефіцієнтами аргументів.

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів до формули ряду Фур'є (3.16):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) =$$

$$= \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos(nx) + \frac{4}{(2n-1)\pi} \cdot \sin((2n-1)x) \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x) \right).$$

Ряд Фур'є для непарної функції містить тільки члени ряду з синусами. Ще раз підкреслимо, що відбулася заміна коефіцієнтів у аргументах синусів, а саме: $\sin(nx)$ замінено на $\sin((2n-1)x)$, оскільки коефіцієнти b_n з парними індексами дорівнюють нулю.

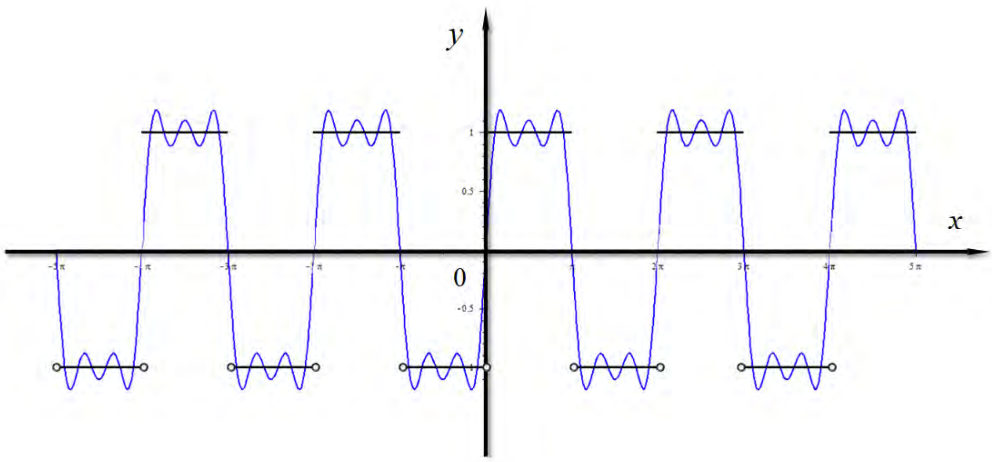


Рисунок 3.12 – Наближення функції (3.19) частинною сумою ряду Фур'є за синусами із 3 членами

3.3.2. *Розвинення в ряд Фур'є на відрізку* $[-l,\, l]$ *2l-періодичних функцій*

Для узагальнення формул (3.16)-(3.17) на довільний відрізок $[-l,\, l]$, скористаємося заміною:

$$x = \frac{\pi}{l} t \,.$$

У цій заміні нова змінна t, яка міститься в правій частині рівності, одразу перепозначається за x, щоб зберегти одноманітність позначень для різних випадків ряду Фур'є.

Тоді отримаємо наступні формули:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\right), \tag{3.20}$$

де сталі числа $a_0,\, a_n,\, b_n \;\left(n \in N\right)$ називаються ***коефіцієнтами тригонометричного ряду*** та обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \,,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)dx \,, \tag{3.21}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)dx \,.$$

Відповідно для парних та непарних функцій дістанемо спрощені формули (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є

для парних та непарних функцій, які задані на відрізку $[-l,\, l]$

Функція $f(x)$	
парна	непарна
$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$, $b_n = 0$.	$a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$.

Приклад 3.4. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0, \\ x/5, & 0 \le x \le 5, \end{cases} \tag{3.22}$$

яка задана на проміжку $(-5,\, 5]$.

Розв'язання. Побудуємо графік заданої функції (рис. 3.13).

За умовою задачі l=5. Користуючись формулами (3.21), обчислимо послідовно коефіцієнти ряду Фур'є для заданої функції.

$$a_0 = \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0dx + \int_0^5 \frac{x}{5}dx\right) = \frac{1}{5}\left(0 + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^5\right) = \frac{1}{50}x^2\Bigg|_0^5 = \frac{1}{50}\left(5^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2},$$

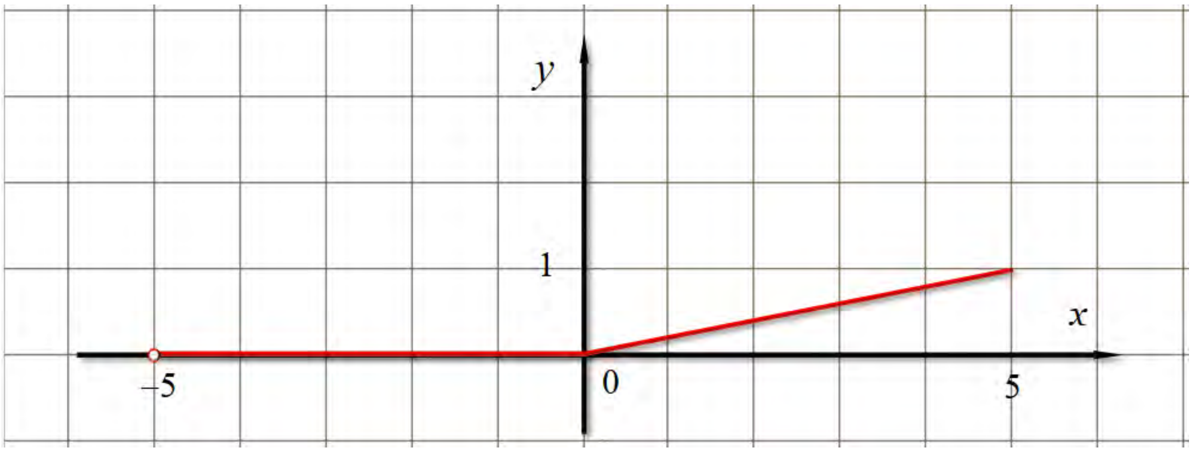


Рисунок 3.13 – Графік функції (3.22)

$$a_n = \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx + \int_{0}^{5}\frac{x}{5}\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} x\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx\right) = \frac{1}{25}\int_{0}^{5} x\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx & v = \frac{5}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right) \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{5}{\pi n}x\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\Big|_0^5 - \frac{5}{\pi n}\int_0^5 \sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{5}{\pi n}\left(5\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 5\right) - 0\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 0\right)\right) - \frac{5}{\pi n}\cdot\frac{5}{\pi n}\left(-\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\right)\Big|_0^5\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{5}{\pi n}(0-0) + \frac{25}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 5\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 0\right)\right)\right) =$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{\pi^2 n^2}\left(\cos(\pi n)-\cos 0\right)=\frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right),$$

$$b_n=\frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0}0\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx+\int_{0}^{5}\frac{x}{5}\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(0+\frac{1}{5}\int_{0}^{5}x\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx\right)=\frac{1}{25}\int_{0}^{5}x\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx & v=-\frac{5}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{25}\left(-\frac{5}{\pi n}x\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\Bigg|_0^5+\frac{5}{\pi n}\int_0^5\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{25}\left(-\frac{5}{\pi n}\left(5\cos\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 5\right)-0\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 0\right)\right)+\frac{5}{\pi n}\cdot\frac{5}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\Bigg|_0^5\right)=$$

$$=\frac{1}{25}\left(-\frac{5}{\pi n}\left(5\cos(\pi n)-0\cdot\cos 0\right)+\frac{5}{\pi n}\cdot\frac{5}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 5\right)-\sin\left(\frac{\pi n}{5}\cdot 0\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{25}\left(-\frac{5}{\pi n}\left(5\cos(\pi n)-0\right)+\frac{25}{\pi^2 n^2}\left(\sin(\pi n)-\sin 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{25}\left(-\frac{5}{\pi n}\left(5\cdot(-1)^n-0\right)+\frac{25}{\pi^2 n^2}(0-0)\right)=$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\left(-\frac{25}{\pi n}\right)\cdot(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів ряду Фур'є до формули (3.20):

$$f(x)=\frac{1/2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{\pi n}{5}x\right)+(-1)^{n+1}\pi n\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\right).$$

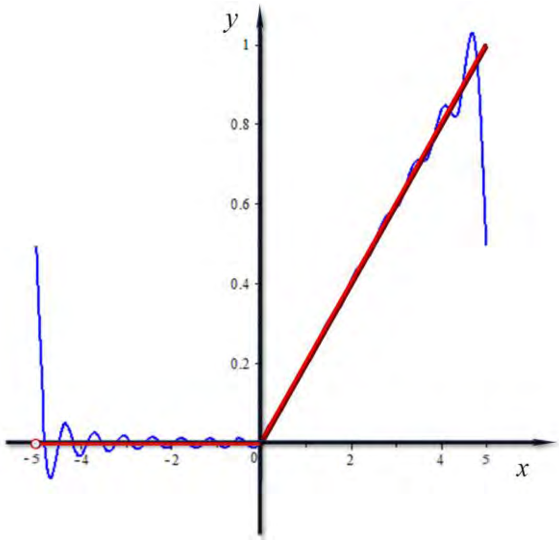


Рисунок 3.14 – Наближення частинною сумою ряду Фур'є функції (3.22) на проміжку $(-5,\,5]$

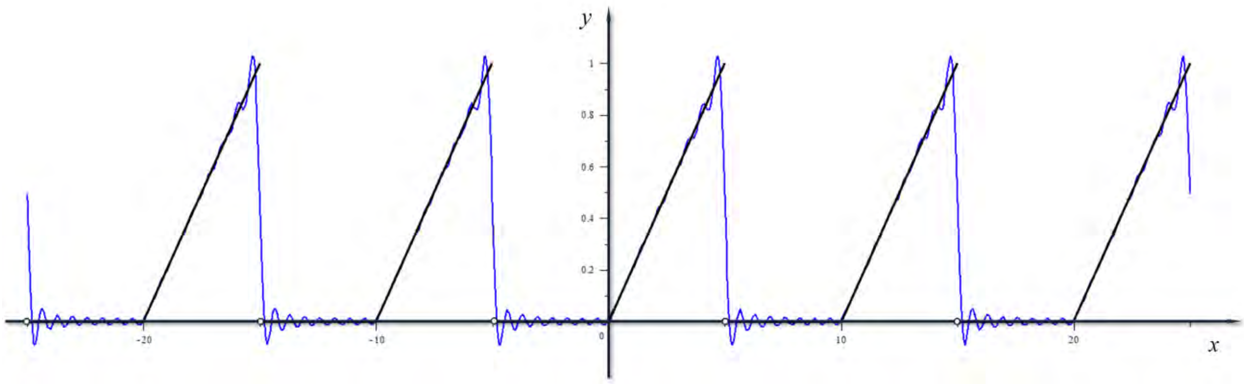


Рисунок 3.15 – Наближення частинною сумою ряду Фур'є функції (3.22) як періодичної

3.3.3. *Розвинення в ряд Фур'є функцій, які задані на відрізку* $[0,\, l]$

Якщо дослідника цікавить лише поведінка функції на відрізку $[0,\, l]$, тоді на проміжок $[-l,\, 0)$ функція може бути продовжена як парним, так і непарним способом.

При розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь за допомогою рядів Фур'є початкові умови впливають на доцільність способу продовження функції на проміжок $[-l,\, 0)$.

3.3.3.1. *Розвинення парним способом*

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле на відрізку $[0,\, l]$, тоді на проміжок $[-l,\, 0)$ функція може бути продовжена парним способом з використанням відповідних формул (табл. 3.2).

Приклад 3.5. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x + 1,$$

яка задана на відрізку $[0,\, 2]$, двома способами:

1) парним способом;
2) непарним способом.

Розв'язання. 1) Розвинемо функцію парним способом:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 0\right) = 4,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 (x+1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx & v = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(x+1\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left((2+1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 2\right) - (0+1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 0\right)\right) - \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\left(-\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(3\sin\left(\pi n\right) - 0\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 2\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 0\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(3\cdot 0 - 0\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\pi n\right) - \cos 0\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\left(-1\right)^n - 1\right) = \frac{4}{\pi^2\left(2n-1\right)^2}\cdot\left(-2\right) = -\frac{8}{\pi^2\left(2n-1\right)^2},$$

$$b_n = 0.$$

Наприкінці розрахунку коефіцієнтів a_n вираз $\left(\left(-1\right)^n - 1\right)$ замінений на своє ненульове значення:

$$\left(\left(-1\right)^n - 1\right) = \begin{cases} -2, & n \text{ – непарне,} \\ 0, & n \text{ – парне.} \end{cases}$$

Тому в розвиненні заданої функції в ряд Фур’є косинуси будуть тільки з непарними коефіцієнтами аргументів.

Сформуємо ряд Фур’є для заданої парної функції:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) =$$

$$= \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{8}{\pi^2\left(2n-1\right)^2}\cos\left(\frac{\pi\left(2n-1\right)}{2}x\right)\right) =$$

$$= 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2} x \right).$$

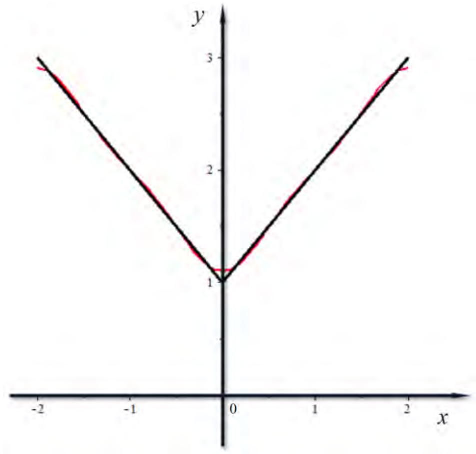


Рисунок 3.16 – Наближення парним способом рядом Фур'є функції $f(x) = x + 1$, яка задана на відрізку $[0,\ 2]$

3.3.3.2. *Розвинення непарним способом*

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле на відрізку $[0,\ l]$, тоді на проміжок $[-l,\ 0)$ функція також може бути продовжена непарним способом з використанням відповідних формул (табл. 3.2).

Розв'язання (продовження). 2) Розвинемо задану функцію тепер непарним способом, використовуючи формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є з табл. 3.2:

$a_0 = 0$,

$a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{2} \int_0^2 (x+1) \sin\left(\frac{\pi n}{2} x \right) dx =$$

$$=\left\| \begin{array}{ll} u = x+1 & du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx & v = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) \end{array} \right\| =$$

$$=-\frac{2}{\pi n}(x+1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2 - \left(-\frac{2}{\pi n}\right)\cdot\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$=-\frac{2}{\pi n}(x+1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left((2+1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 2\right) - (0+1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 0\right)\right) +$$

$$+\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 2\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\cdot 0\right)\right) =$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\big(3\cos(\pi n) - \cos 0\big) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\big(\sin(\pi n) - \sin 0\big) =$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(3\cdot(-1)^n - 1\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}(0-0) =$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1 - 3\cdot(-1)^n\right).$$

Сформуємо ряд Фур'є для заданої непарної функції:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left(1 - 3\cdot(-1)^n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\right).$$

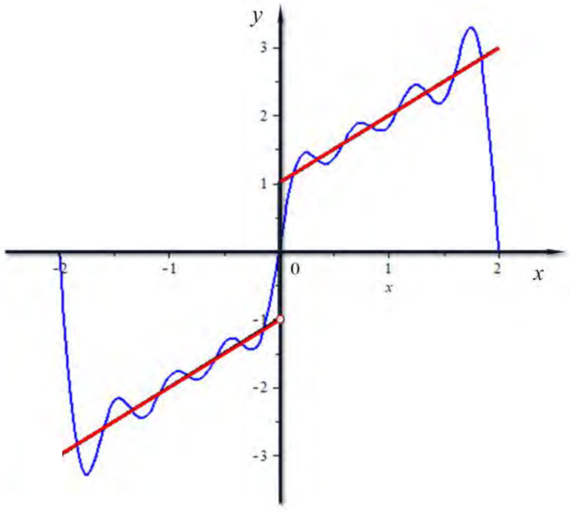


Рисунок 3.17 – Наближення непарним способом рядом Фур'є функції $f(x) = x + 1$, яка задана на відрізку $[0,\ 2]$

Очевидно (рис. 3.16 і рис. 3.17), що функцію, яка при $x = 0$ має значення, відмінне від нуля, доцільно продовжувати парним способом.

Питання для самоперевірки

1. Яку структуру має загальний член тригонометричного ряду?
2. В чому полягає принципова відмінність наближення функцій за допомогою ряду Тейлора та ряду Фур'є?
3. Яка послідовність функцій називається ортогональною на відрізку?
4. Яка послідовність функцій називається ортонормованою на відрізку?
5. Як виконується нормування системи функцій, якщо попередньо встановлена її ортогональність?
6. Приведіть приклади ортогональних систем функцій. Вкажіть відрізки, на яких виконується умова ортогональності.
7. Виконайте нормування обраної Вами системи ортогональних функцій.
8. Яку структуру має узагальнений ряд Фур'є?
9. Як обчислюються коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є?
10. Яка функція називається абсолютно інтегрованою?

11. Дайте класичне означення тригонометричного ряду Фур'є та запишіть формули коефіцієнтів цього ряду.
12. Які види збіжності традиційно досліджують для рядів Фур'є?
13. У чому полягає принципова відмінність між збіжністю ряду Фур'є в середньому квадратичному та поточковою збіжністю?
14. Сформулюйте вимоги до функції, для якої будується ряд Фур'є, які забезпечують збіжність цього ряду в середньому квадратичному.
15. Сформулюйте вимоги до функції, для якої будується ряд Фур'є, які забезпечують поточкову збіжність цього ряду.
16. Які значення приймає сума ряду Фур'є в точках розриву функції, що його породжує?
17. Які особливості мають коефіцієнти ряду Фур'є для парних та непарних функцій, які задані на симетричних інтервалах?
18. У які способи можна довизначити функцію на проміжку $[-l,\ 0)$, якщо вона визначена на відрізку $[0,\ l]$?
19. Які можна дати практичні рекомендації щодо вибору способу продовження функції на проміжку $[-l,\ 0)$? В яких випадках є доцільним вибір парного, а в яких непарного способу?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Розвинути в ряд Фур'є $2l$-періодичну функцію $f(x)$, яка задана на проміжку $(-l,\, l]$.

За допомогою самостійно обраного комп'ютерного застосунку побудувати в одній системі координат на проміжку $(-l,\, l]$ графік функції $f(x)$ та графік частинної суми ряду Фур'є з трьома першими доданками.

Варіант	$f(x)$	Варіант	$f(x)$
1	$\begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ -1+2x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$	2	$\begin{cases} -2-x, & -3 \le x < 0, \\ -2, & 0 \le x < 3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 1+\dfrac{3}{2}x, & -4 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 4. \end{cases}$	4	$\begin{cases} 3, & -5 < x < 0, \\ 3-\dfrac{1}{5}x, & 0 \le x \le 5. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4-\dfrac{1}{2}x, & -2 \le x < 0, \\ 4, & 0 \le x < 2. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 1+2x, & -4 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 4. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2, & -5 < x < 0, \\ 2-x, & 0 \le x \le 5. \end{cases}$	8	$\begin{cases} -2, & -2 < x < 0, \\ -2+\dfrac{3}{2}x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x-1, & -3 \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x < 3. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3, & -4 < x < 0, \\ 3-\dfrac{5}{4}x, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 1, & -3 < x < 0, \\ 1-2x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3-x, & -4 \le x < 0, \\ 3, & 0 \le x < 4. \end{cases}$
13	$\begin{cases} -1-\dfrac{5}{2}x, & -2 \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x < 2. \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2+\dfrac{1}{3}x, & -3 \le x < 0, \\ 2, & 0 \le x < 3. \end{cases}$

Варіант	$f(x)$	Варіант	$f(x)$
15	$\begin{cases} 1, & -4 < x < 0, \\ 1 + \frac{3}{4}x, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1 - 2x, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2. \end{cases}$
17	$\begin{cases} -2, & -3 < x < 0, \\ -2 + x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3, & -4 < x < 0, \\ 3 - \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$
19	$\begin{cases} -1 + \frac{2}{5}x, & -5 \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x < 5. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2, & -4 < x < 0, \\ 2 - \frac{3}{4}x, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$
21	$\begin{cases} -2x - 1, & -3 \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x < 3. \end{cases}$	22	$\begin{cases} -3, & -4 < x < 0, \\ -3 + x, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2, & -6 < x < 0, \\ 2 - \frac{3}{2}x, & 0 \le x \le 6. \end{cases}$	24	$\begin{cases} 4 + 3x, & -2 \le x < 0, \\ 4, & 0 \le x < 2. \end{cases}$
25	$\begin{cases} -1, & -3 < x < 0, \\ -1 - \frac{1}{3}x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 1, & -4 < x < 0, \\ 1 + 2x, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$
27	$\begin{cases} -1 - x, & -5 \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x < 5. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3 + \frac{5}{2}x, & -2 \le x < 0, \\ 3, & 0 \le x < 2. \end{cases}$
29	$\begin{cases} 2, & -5 < x < 0, \\ 2 - \frac{3}{5}x, & 0 \le x \le 5. \end{cases}$	30	$\begin{cases} -3 - \frac{5}{6}x, & -6 \le x < 0, \\ -3, & 0 \le x < 6. \end{cases}$

Завдання 2. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0, l]$, двома способами:

- парним та
- непарним.

Для кожного способу окремо за допомогою самостійно обраного комп’ютерного застосунку побудувати в одній системі координат на відрізку $[-l, l]$ графік функції $f(x)$ та графік частинної суми ряду Фур’є з трьома першими доданками.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$f(x)=5-\frac{3}{4}x$, l=4.	2	$f(x)=1+\frac{1}{3}x$, l=3.
3	$f(x)=3-2x$, l=1.	4	$f(x)=3x-1$, l=2.
5	$f(x)=-1+4x$, l=1.	6	$f(x)=2-\frac{4}{3}x$, l=3.
7	$f(x)=-1+\frac{5}{4}x$, l=4.	8	$f(x)=3-4x$, l=2.
9	$f(x)=5-2x$, l=3.	10	$f(x)=1+3x$, l=2.
11	$f(x)=2+\frac{x}{4}$, l=4.	12	$f(x)=-1+\frac{4}{5}x$, l=5.
13	$f(x)=3-x$, l=3.	14	$f(x)=-3+4x$, l=2.
15	$f(x)=2-3x$, l=2.	16	$f(x)=-2+2x$, l=4.
17	$f(x)=3-\frac{5}{6}x$, l=6.	18	$f(x)=-2+4x$, l=2.
19	$f(x)=5-x$, l=3.	20	$f(x)=-1+2x$, l=2.
21	$f(x)=3-\frac{1}{2}x$, l=4.	22	$f(x)=2-\frac{1}{3}x$, l=3.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
23	$f(x) = -3 + 2x$, l=2.	24	$f(x) = 3 - \frac{3}{5}x$, l=5.
25	$f(x) = 4 - 2x$, l=2.	26	$f(x) = 2 - \frac{1}{6}x$, l=6.
27	$f(x) = -2 + \frac{4}{3}x$, l=3.	28	$f(x) = 4 - x$, l=2.
29	$f(x) = -1 + 5x$, l=1.	30	$f(x) = 5 - 3x$, l=2.

Список використаних джерел

1. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики у 2-х частинах. Ч. 2 / Чікіна Н. О. [та ін.] – Х.: Підручник НТУ «ХПІ», 2013. – 216 с. – Режим доступу : http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/17448/1/Chikina_Zbirnyk_rozrakhunkovo_Ch_2_2013.pdf

2. Курпа Л. В. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Т. II.: Навч. посібник. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – 312 с.

3. Методичні вказівки до індивідуальних завдань за темою «Ряди» з вищої математики для студентів заочної та дистанційної форм навчання : навч. посіб. / укл. О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 88 с.

4. Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Числові та функціональні ряди» з курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей заочної та скороченої форм навчання / уклад. Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднєва. – Харків : НТУ «ХПІ». – 36 с.

5. Методичні вказівки і завдання з теми «Ряди» для студентів і курсантів / уклад. О. В. Меньшикова, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин та ін. Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – 30 с.

6. Ясницька Н. М. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 9 : Ряди / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боєва, О. А. Геляровська. – 2-е вид., перероб. і доп. – Харків : вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2014. – 162 с.

7. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. М.: МИР, 1967. – 250 с.

8. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. М.: Наука, 1978. – 375 с.

9. Bourchtein L., Bourchtein A. Theory of Infinite Sequences and Series: Textbook / L. Bourchtein, A. Bourchtein. Springer International Publishing, 2022. 377 p. DOI: 10.1007/978-3-030-79431-6

10. Bromwich Thomas John I'Anson. An Introduction to the Theory of Infinite Series / Thomas John I'Anson Bromwich. Andesite Press, 2017. 534 p.

11. Bromwich T. J., Watson G. N. An Introduction to the Theory of Infinite Series / T. J. Bromwich, G. N. Watson. Merchant Books, 2008. 528 p.

12. Green L. Fourier Synthesis: defeating the Gibbs Phenomenon / L. Green. Electronics World. 2003. – March. – P. 48–51. URL: http://lesliegreen.byethost3.com/articles/EWmar2003.pdf

13. Green L. Show-Me Collection of Series / L. Green. CEng MIEE. 2022. July. 34 p. URL: http://lesliegreen.byethost3.com/articles/series.pdf?i=1

14. Knopp K. Infinite Sequences and Series / K. Knopp. New York: Dover Publications, 2012. 276 p. URL: https://www.scribd.com/read/271552719/Infinite-Sequences-and-Series

15. Knopp K. Theory and Application of Infinite Series / K. Knopp. New York: Dover Publications, 1990. 592 p.

ДОДАТОК 1

Важливі границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Еквівалентні нескінченно малі величини $x\to 0$	
$\sin x\to x$	$\sin(kx^n)\to(kx^n)$
$\mathrm{tg}x\to x$	$\mathrm{tg}(kx^n)\to(kx^n)$
$\arcsin x\to x$	$\arcsin(kx^n)\to(kx^n)$
$\mathrm{arctg}x\to x$	$\mathrm{arctg}(kx^n)\to(kx^n)$
$(e^x-1)\to x$	$(a^x-1)\to x\ln a$
$\ln(1+x)\to x$	$\log_a(1+x)\to x\log_a e$
$(1+x)^k-1\to kx,\quad k>0$	

Табличні значення тригонометричних функцій

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

З М І С Т Стор.

ДЛЯ НОТАТОК

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Тулученко Галина Яківна

РЯДИ

Навчальний посібник

Відповідальна за випуск проф. *Ю. І. Першина*

Роботу до видання рекомендувала проф. *Н. О. Чікіна*

Комп'ютерне верстання *Галини Яківни Тулученко*

Художник-дизайнер *Галина Яківна Тулученко*

В авторській редакції

Здано у видавництво 17.01.2024. Підписано до друку 18.01.2024
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Папір офсетний. Друк на різографі
Умовн. друк. арк. 12,7. Обл.-вид. арк. 10,2
Наклад 300 прим. Зам. 240063

Видавець і виготівник: Видавництво Львівської політехніки
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4459 від 27.12.2012 р.

вул. Ф. Колесси, 4, Львів, 79013
тел. +380 32 2584103, факс +380 32 2584101
vlp.com.ua, ел. пошта: vmr@vlp.com.ua