РЯДИ

<u>Числові ряди. Основні означення</u>

Нехай дано числову послідовність (u_n). Вираз вигляду

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (1)$$

або, що те саме, вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *числовим рядом* (або просто *рядом*).

Числа u_1, u_2, …, u_n, … називаються *членами ряду*, u_1 – перший член, u_2 – другий член, …, u_n – n – й або *загальний член* ряду.

Для того, щоб задати ряд (1), досить задати його загальний член.

З кожним рядом вигляду (1) будемо зв'язувати (ставити у відповідність) суми

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1, \\
&S_2 = u_1 + u_2, \\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\
&........................ \\
&S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \\
&...........................
\end{aligned}$$

Які називаються *частковими сумами* цього ряду. Часткові суми ряду утворюють деяку числову послідовність (S_n).

Ряд (1) називається збіжним, якщо збігається послідовність його часткових сум (S_n), тобто якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Число S при цьому називають *сумою ряду* (1) і записують:

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

При цьому вважають також, що ряд (1) збігається до числа S. Якщо ж послідовність часткових сум ряду (1) розбігається, то ряд (1) називається *розбіжним*. У цьому випадку ряд не має суми.

Вираз $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + ...$ називається *залишком ряду*.

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S_n + r_n \ .$$

Залишок ряду також ряд.

Ряд геометричної прогресії

Ряд вигляду

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \ \left(a \neq 0\right) \qquad (2)$$

називається *геометричною прогресією*, число q при цьому називається *знаменником прогресії*.

Твердження: Геометрична прогресія збігається тоді і тільки тоді, коли знаменник прогресії за модулем менший від одиниці:

Таким чином, якщо $|q| < 1$, то геометрична прогресія (2) збігається і її сума дорівнює $S = \dfrac{a}{1-q}$, якщо $|q| > 1, q = \pm 1$, то геометрична прогресія (2) розбігається.

Властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності числового ряду

Властивість 1. Нехай c – дійсне число. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, що називається *добутком ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на число c, причому суми цих рядів зв'язані рівністю $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Властивість 2. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u''_k$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(u'_k + u''_k\right)$, що називається *сумою* даних *рядів*, причому суми цих рядів зв'язані рівністю: $S = S' + S''$, де $S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(u'_k + u''_k\right)$, $S' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k$, $S'' = \sum_{k=1}^{\infty} u''_k$.

Наслідок. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} u''_n$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u'_n - u''_n\right)$, що називається *різницею* даних *рядів*, причому суми цих рядів зв'язані рівністю: $S = S' - S''$, де $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u'_n - u''_n\right)$, $S' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, $S'' = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n$.

Властивість 3. Розглянемо ряди:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

і $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots u_{n+k} + \ldots$ (залишок ряду).

Ці ряди одночасно збігаються або розбігаються, причому, якщо перший ряд збігається до S, то другий ряд збігається до $r_n = S - \left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right)$.

Наслідок. Якщо ряд (1) збігається до S, то, як було показано вище, залишок ряду збігається до числа $r_n = S - \left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right) = S - S_n$. Звідси випливає, що сума $n-$го залишку збіжного ряду прямує до нуля при $n \to \infty$. Таким чином, модуль суми $n-$го залишку збіжного ряду можна розглядати як абсолютну величину похибки в наближеній рівності $S \approx S_n$, коли замість суми $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ збіжного ряду беремо його $n-$у часткову суму $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Ця похибка прямує до нуля при $n \to \infty$.

Властивість 4. (*Необхідна ознака збіжності ряду*).

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то його $n-$й член u_n прямує до нуля при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *додатним*, якщо всі його члени невід'ємні, тобто $u_n \geq 0 \ (n = 1, 2, ...)$.

Теорема (*ознака порівняння*).

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ – додатні ряди і нехай, починаючи з будь-якого n, виконується нерівність $u_n \leq u'_n$. Тоді:

1) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ збігається, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ також збігається;

2) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ також розбігається.

Теорема *(гранична ознака порівняння*).

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ – додатні ряди і нехай, до того ж $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u'_n} = M = \text{const} \neq 0$. Тоді ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ поводять себе однаково, тобто збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3 + 4n - 1}}$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Це узагальнений гармонійний ряд $\left(\alpha = \dfrac{3}{2} > 1 \right)$, відомо, що він розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n^3}}{1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}k=\dfrac{3}{2}, a_0=1\\ m=\dfrac{3}{2}, b_0=1\end{matrix}\right\|=1=\text{const}\neq 0.$$

Отже ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ поводять себе однаково, розбігаються.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n-1}}$ розбігається за граничною ознакою порівняння.

Теорема *(ознака Д’Аламбера).*

Нехай $u_n>0$ $(n=1, 2, ...)$ і нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha\ , \tag{3}$$

скінченна або нескінченна. Якщо $\alpha>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ розбігається. Якщо $\alpha=1$, то питання про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ залишається відкритим (ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ може збігатись, а може й розбігатись).

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв’язання. Запишемо $u_n=\frac{n}{2^{n+1}}$, $u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1\ .$$

Відповідь: за ознакою Д'Аламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ збігається.

Теорема *(радикальна ознака Коші)*.

Нехай $u_n \geq 0 \ \ (n=1,2,...)$ і нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\alpha \ , \tag{4}$$

скінченна або нескінченна. Якщо $\alpha<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається. Якщо $1<\alpha\leq+\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ розбігається. Якщо ж $\alpha=1$, то питання про збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ залишається відкритим.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання.

В нашому прикладі $u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-\frac{n}{n+1}}=\left|\text{друга видатна границя}\right|=\frac{1}{e}<1.$$

Відповідь: за радикальною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ збігається.

Теорема *(інтегральна ознака Коші збіжності ряду).*

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $1\leq x<+\infty$, додатна і монотонно спадає на цьому ж проміжку, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (5)$$

і невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (6)$$

одночасно збігаються або розбігаються.

Приклад 4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ на збіжність.

Розв'язання.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Справді функція $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$.

Відомо, що невласний інтеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається при $\alpha>1$ та розбігається при $\alpha\le 1$, тому $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha>1$ та розбігається при $\alpha\le 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – називається *узагальненим гармонійним рядом*, при $\alpha=1$ маємо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – *гармонійний ряд.*

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається, якщо $\alpha>1$, і розбігається, якщо $\alpha\le 1$.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{1+n^2}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}$. Її похідна $f'(x)$ від'ємна при $x>2$. Тобто, $f(x)$ монотонно спадає при $x\to+\infty$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx=\left.\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}\right|_{1}^{\infty}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8}-\frac{\pi^3}{64}\right)=\frac{7\pi^3}{192}.$$

Тобто, невласний інтеграл збігається, а тому збігається і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{1+n^2}$.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{1+n^2}$ збігається за інтегральною ознакою Коші.

<u>Числові ряди з довільними членами: означення, ознака збіжності. Умовна і абсолютна збіжність</u>

Розглянемо ряди з довільними членами, одні з яких (члени) можуть бути від'ємними, інші – додатними або дорівнювати нулю.

Нехай ряд має вигляд:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{7}$$

ряд (7) – ряд з довільними членами. Складемо ряд з абсолютних величин цього ряду:

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots. \tag{8}$$

Зрозуміло, що ряд (8) додатний числовий ряд.

Теорема *(достатня ознака збіжності рядів з довільними членами).*

Якщо ряд (8) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\right)$ збігається, то збігається ряд (1) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, складений з модулів членів даного ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, складений з модулів членів даного ряду, розбігається.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin \alpha n|}{n^2}$, складений з модулів членів даного ряду. Зрозуміло, що $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ (оскільки $|\sin n\alpha| \le 1$).

Відомо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається (узагальнений гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. В нашому випадку $\alpha = 2 < 1$, тобто збігається). За ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ збіжний, а тому, за додатною ознакою збіжності рядів з довільними членами, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ збігається абсолютно.

<u>Знакозмінність ряду. Ознака Лейбніца</u>

Ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \ldots, \tag{9}$$

в якому $u_n > 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$, називається *знакозмінним.*

***Теорема** (ознака Лейбніца).*

Знакозмінний ряд (9) збігається, якщо

1) $u_{n+1} \le u_n \ (n = 1, 2, \ldots)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Наслідок. Модуль $n-$ого залишку знакозмінного ряду, що задовольняє умови теореми Лейбніца, не перевищує модуля $(n+1)-$го члена цього ряду, тобто

$$|r_n| = |S - S_n| \le u_{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Приклад 7. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Ряд знакозмінний. Перевіримо умови Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Отже, ряд збіжний. Абсолютно або умовно? Складемо ряд із модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ – узагальнений гармонійний ряд, розбіжний $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$. Тому, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

<u>Функціональні ряди. Основні означення. Область збіжності</u>

Нехай дано послідовність функцій $U_n(x)$ $(n=1,2,...)$, визначених на множині E. Вираз вигляду

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+... \tag{10}$$

або, що те саме, вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ називається *функціональним рядом*.

Функціональний ряд (10) називається *збіжним на множині* E до функції $S(x)$, якщо на цій множині збігається до $S(x)$ послідовність його часткових сум $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}U_n(x)$, тобто

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}U_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}U_n(x).$$

При фіксованому $x=x_0$ отримуємо числовий ряд

$$U_1(x_0)+U_2(x_0)+...+U_n(x_0)+....$$

Якщо цей числовий ряд збігається, то точка $x = x_0$ є *точкою збіжності функціонального ряду*, в іншому випадку x_0 – *точка розбіжності функціонального ряду*.

Приклад 8. Розглянемо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}}{n^2}$.

Якщо $x = 0$, то отримуємо узагальнений гармонійний $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2 > 1)$ - збіжний числовий ряд. При $x = 1$ отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$, котрий розбіжний за ознакою Д'Аламбера.

Множина точок збіжності функціонального ряду складає *множину збіжності* цього ряду.

Ряд називається *абсолютно збіжним на множині* E, якщо на множині E збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| U_n(x) \right|$.

Якщо функціональний ряд (10) збіжний, тоді його можливо подати у вигляді:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

де $r_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \ldots$ – залишок ряду.

<u>Методи знаходження області збіжності функціонального ряду</u>

Методи знаходження області збіжності функціонального ряду засновані на застосуванні ознак Д'Аламбера або радикальної ознаки Коші.

Зважаючи на вигляд функціонального ряду, використовуємо одну з цих границь:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n} \right| = \rho(x); \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| U_n(x) \right|} = \gamma(x).$$

Далі розглядають нерівності $\rho(x) < 1$ або $\gamma(x) < 1$ та отримують множину E, на якій функціональний ряд збігається абсолютно.

Якщо $\rho(x)>1$ або $\gamma(x)>1$, загальний член ряду не прямує до нуля, а тому ряд розбігається.

Граничні точка множини E, для яких $\rho(x)=1$ та $\gamma(x)=1$ досліджують на збіжність окремо.

В цих точках функціональний ряд можливо збігається абсолютно, можливо – умовно, а можливо розбігається.

Приклад 9. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Розв'язання. Складаємо ряд із абсолютних величин вихідного ряду:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|e^{-nx}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, тому що $e^{-nx}>0$, $\forall x \in R$ і скористаємось радикальною ознакою Коші. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}.$$

За ознакою Коші цей ряд збігається, коли $e^{-x}<1$, тобто коли $x \in (0;+\infty)$.

Перевіримо цей ряд на збіжність при $x=0$: отриманий при $x=0$ числовий ряд має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+...+1+....$$

Цей ряд розбігається, тому що для нього не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності вихідного ряду є область $E=(0;\infty)$.

Відповідь: область збіжності вихідного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ $E=(0;\infty)$.

Приклад 10. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+3}{x^{2n}}$.

Розв'язання. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}+3}{x^{2n+2}}\cdot\frac{x^{2n}}{4^n+3}\right| = \frac{1}{x^2}\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left(4+\frac{3}{4^n}\right)}{4^n\left(1+\frac{3}{4^n}\right)} = \frac{4}{x^2}.$$

Таким чином, $\frac{4}{x^2}<1$, $x^2>4$, тобто $x>2,\ x<-2$. Область збіжності E містить інтервали $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$.

Розглянемо поведінку ряду при $x=2$ та $x=-2$. Зрозуміло, що загальний член $U_n(\pm 2)=\frac{4^n+3}{4^n}$ не прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty}U_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3}{4^n}=1.$$

Не виконується необхідна умова збіжності числових рядів, тобто при $x=\pm 2$ функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+3}{x^{2n}}$ розбігається.

Відповідь: область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+3}{x^{2n}}$ є область $E=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Рівномірна і правильна збіжність функціональних рядів

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ називається *правильно збіжним* (*мажоріруємим*) в деякій області E, якщо існує такий збіжний числовий ряд з додатними членами $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, що для всіх значень $x\in E$ виконуються нерівності:

$$|U_k(x)|\le a_k,\ k=1,2,3. \tag{11}$$

Числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ називається *мажорантою*.

Приклад 11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$ правильно збігається на проміжку $(-\infty; 0]$. Дійсно, $\frac{e^{nx}}{n^2}\le\frac{1}{n^2}, \forall x\in(-\infty; 0]$. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(\alpha=2>1)$ збігається (узагальнений гармонійний ряд). Тому функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$ збігається правильно на цьому проміжку.

Мажорірує́мий ряд збігається абсолютно у будь-якій точці області E.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, збіжний в області E, називається *рівномірно збіжним в області* E, якщо $\forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon)$, і такий, що при $n>N(\varepsilon)$ правильна нерівність $|r_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ для всіх $x\in E$.

Теорема *(ознака Вейерштрасса).*

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, правильно збіжний на множині E, збігається рівномірно на множині E.

Приклад 12. Ряд

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots,$$

збігається рівномірно на всій числовій прямій, оскільки для всіх $n=1, 2, \ldots$ і всіх $x\in(-\infty; +\infty)$ правильні нерівності

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},$$

причому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(\alpha=2>1)$ є збіжним узагальненим гармонійним рядом.

Властивості рівномірно збіжних рядів

Багато властивостей суми скінченного числа функцій, взагалі кажучи, не переноситься на суму нескінченного числа функцій, тобто на суму функціонального ряду. Тим часом суми рівномірно збіжних функціональних рядів мають ряд властивостей сум скінченного числа функцій. Встановимо ряд таких властивостей.

Теорема *(про неперервність суми функціонального ряду).*

Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ на відрізку $[a;b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $U_n(x)$ є неперервні функції в точці $x_0 \in [a;b]$, то сума $S(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ неперервна в точці x_0.

Наслідок. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ на відрізку $[a;b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $U_n(x)$ $(n=1, 2, ...)$ є неперервні функції на цьому відрізку, то сума $S(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$.

Теорема *(про інтегрування функціонального ряду).*

Якщо функціональний ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

на відрізку $[a;b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $U_n(x)$ $(n=1, 2, ...)$ є неперервні функції на цьому відрізку, то

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx . \qquad (12)$$

Приклад 13. Обчислити суму ряду

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \ .$$

Розв'язання. Функціональний ряд

$$1-x^2+x^4-...+(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-2}+...$$

збігається рівномірно за $|x|\le q<1$ та є сумою членів спадної геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $(-x^2)$.

Сума цього ряду $S(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (за формулою: $S=\dfrac{b_1}{1-q}$). Таким чином:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-2}+... .$$

Інтегруючи цю рівність від 0 до $x<1$ отримуємо:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \left(1-t^2+t^4-...+(-1)^{n+1}\cdot t^{2n+2}+...\right)dt ,$$

а це й означає

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+... .$$

Теорема *(про диференціювання функціонального ряду).*

Нехай функції $U_n(x)$ $(n=1,2,...)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ разом із своїми похідними першого порядку і нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n'(x)$ на відрізку $[a;b]$ збігається рівномірно, тоді, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ збігається хоч би в одній точці $C\in[a;b]$, то він збігається на відрізку $[a;b]$ і його сума

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$$

на цьому відрізку має неперервну похідну, причому $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n'(x)$.

Степеневі ряди. Теорема Абеля

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \tag{13}$$

де a_n $\left(n = 0, 1, 2, ...\right)$ – сталі числа, що називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*, а x_0 – довільне фіксоване дійсне число.

Якщо $x_0 = 0$, маємо

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n x^n + ... \tag{14}$$

Надалі розглядаємо тільки ряди (14). Степеневий ряд (13) зведемо до ряду (14) підстановкою $x - x_0 = t$.

Теорема Абеля.

1) Якщо степеневий ряд (14) збігається в деякій точці $x = x_0$ $\left(x_0 \neq 0\right)$, то він збігається абсолютно при всіх значеннях x, для яких $|x| < |x_0|$.

2) Якщо ряд (14) розбігається при деякому значенні $x = x_0$, то він розбігається при всіх x, для яких $|x| > |x_0|$.

Якщо степеневий ряд (14) збігається на інтервалі $\left(-R; R\right)$ та розбігається зовні інтервалу $\left[-R; R\right]$, то інтервал $\left(-R; R\right)$ називається інтервалом збіжності, а число R – *радіусом збіжності* степеневого ряду.

Поведінка ряду на кінцях інтервалу при $x = \pm R$ аналізується додатково.

Зрозуміло, що степеневий ряд збігається в точці $x = 0$. Якщо інших точок збіжності немає, то його радіус збіжності $R = 0$.

Якщо ряд збігається в будь-якій точці числової вісі, то його радіус $R = \infty$.

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду (14) за допомогою ознак Д'Аламбера та радикальної Коші.

За ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| < 1,\text{ звідки } |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Тобто $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Так само, за радикальною ознакою Коші, маємо: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Приклад 14. Знайти радіус та область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Розв'язання. Заданий функціональний ряд є степеневим. Знайдемо його радіус збіжності за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким чином

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Вихідний ряд збігається для всіх x, що задовольняють нерівність $|x+3| < 1$ або $-4 < x < -2$. Перевіримо ряд на збіжність в точках, які є кінцями інтервалу збіжності.

Числовий ряд, що відповідає $x = -2$, має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Це узагальнений гармонійний ряд $(\alpha = 2 > 1)$ – збігається. Отже, $x = -2$ є точкою збіжності ряду. Числовий ряд, що відповідає $x = -4$, має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ і теж збігається, більш того, абсолютно, оскільки збігається ряд, складений з абсолютних значень $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Отже, і $x = -4$ є точкою збіжності ряду.

Таким чином, область збіжності вихідного ряду є $[-4;-2]$.

Відповідь: радіус збіжності $R=1$; $[-4;-2]$ – область збіжності ряду.

Степеневий ряд в своєму інтервалі збіжності, взагалі кажучи, збігається не рівномірно. Але є справедливими такі теореми.

Теорема. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ збігається рівномірно на кожному відрізку $[x_0-r; x_0+r]$, що лежить всередині його інтервалу збіжності.

Наслідок. Сума $f(x)$ степеневого ряду неперервна всередині його інтервалу збіжності.

Теорема. Нехай степеневий ряд $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ має радіус збіжності $R>0$. Тоді:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$, утворений почленним диференціюванням степеневого ряду, має той самий радіус збіжності R;

2) сума $f(x)$ степеневого ряду є диференційована функція в середині його інтервалу збіжності, причому правильна рівність

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} .$$

Теорема. Нехай степеневий ряд має радіус збіжності $R>0$ і нехай $f(x)$ – його сума. Тоді для будь-якого $x\in(x_0-R; x_0+R)$ правильна рівність:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\ldots$$

причому радіус збіжності цього ряду дорівнює радіусу збіжності вихідного степеневого ряду.

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Задачі, які приводять до поняття подвійного інтеграла

Розглянемо задачу про обчислення об'єму „циліндричного бруса".

Нехай задана певна функція $z = f(x, y)$, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Цими інтервалами визначається певний прямокутник (D), який є областю змінювання змінних x та y. Розглянемо тіло (V), яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, з боків – циліндричною поверхнею з твірними, які паралельні осі OZ, знизу – плоскою фігурою (D) на площині XOY. Потрібно знайти об'єм тіла V.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод, що полягає в розкладанні шуканої величини на елементарні частини, наближеному підрахунку кожної частини, підсумовуванні та наступному граничному переході.

Для цього розкладемо основу бруса – прямокутник (D) на елементарні прямокутники за допомогою сітки прямих, паралельних осям OX та OY:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_m = d.$$

Позначимо $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $(i = 0, \ldots, n-1)$, $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, $(k = 0, \ldots, m-1)$. Зауважимо, що Δx_i та Δy_k $\forall i, k$ мають довільні розміри, не обов'язково однакові. Площа прямокутника розташованого на перетині i – ї та k – ї смуг $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_k$ (рис.1).

Проводячи вертикальні площини через усі прямі, якими розкладена на частини основа бруса, ми розкладемо брус на елементарні „стовпчики". Якщо наближено кожен „стовпчик" вважати циліндром з висотою $z_{ik} = f(x_i, y_k)$, то його об'єм дорівнюватиме $V_i = f(x_i, y_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_k$.

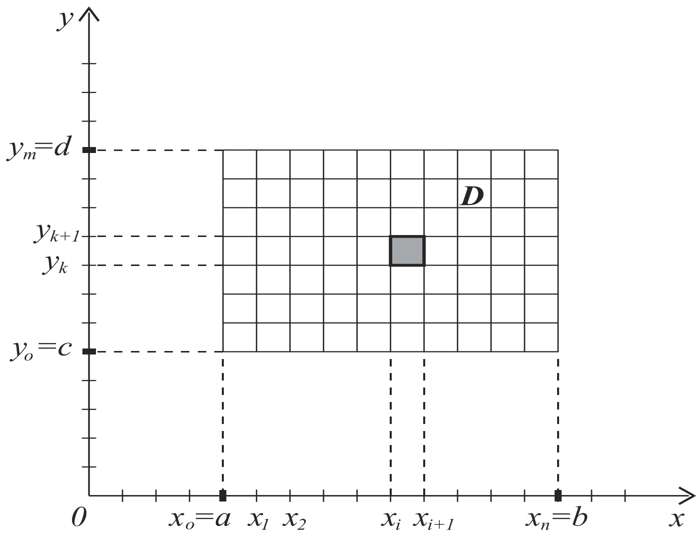

Рис.1

Таким чином, наближений вираз для об'єму V усього бруса

$$V \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_k\right) \cdot \Delta x_i \Delta y_k \ .$$

Для підвищення точності цієї рівності будемо зменшувати розміри $\left(D_i\right)$, підвищуючи їх кількість. Якщо $\Delta x_i \to 0, \quad \Delta y_k \to 0$, то граничне значення подвійної суми є точним значенням шуканого об'єму

$$V = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_k\right) \cdot \Delta x_i \Delta y_k \tag{1}$$

Границю вигляду (1.1) називають *подвійним інтегралом* від функції $z = f\left(x, y\right)$ по області $\left(D\right)$ та позначають символом

$$\iint\limits_{(D)} f\left(x, y\right) dxdy \ .$$

В певному сенсі можна сказати, що подвійний інтеграл є сумою нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

Аналогічний результат можна отримати для більш загального випадку, коли область (D) на площині XOY є криволінійною трапецією, яка обмежена двома кривими $y = y_1(x), y = y_2(x)$ та прямими $x = a$ та $x = b$. У цьому випадку проміжок $[c,d]$ змінювання y є проміжком $[y_1(x_0), y_2(x_0)]$ $(a \le x_0 \le b)$ (рис.2).

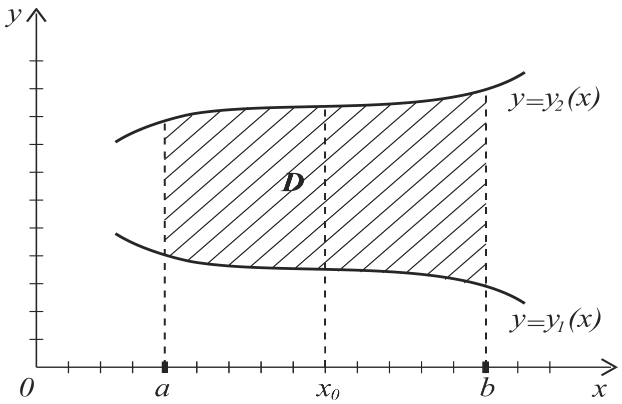

Рис.2.

Від геометричної трактовки поняття подвійного інтеграла перейдемо до аналітичного викладання цього питання. Спочатку наведемо кілька означень.

Область (D) називається *замкненою*, якщо вона обмежена замкненою лінією, та точки межі належать області (D).

Внутрішньою точкою області називатимемо точку, яка не належить межі області.

Діаметром області Δd_i називається максимальна відстань між точками, які належать межі області.

Розглянемо в площині XOY замкнену область (D), обмежену лінією *L.* Нехай в області (D) задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область (D) будь-якими лініями на *n*частин $\Delta d_1, \Delta d_2, ..., \Delta d_n$. Позначимо площі цих областей $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. У кожній з областей Δd_i візьмемо довільну точку P_i. Позначимо $f(P_1)$, $f(P_2)$, ..., $f(P_n)$ значення функції в обраних точках та складемо суму вигляду

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta s_i \quad . \tag{2}$$

Рівність (2) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по області (D). Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум, які складені за допомогою функції $f(x, y)$ для даної області (D):

$$\sigma_{n_1}, \; \sigma_{n_2}, ..., \; \sigma_{n_k} \tag{3}$$

при різних способах розбиття області (D) на частини Δd_i. Припускатимемо, що максимальний діаметр областей Δd_i прямує до нуля при $n_k \to \infty$.

Теорема. (існування подвійного інтеграла).

Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій області (D), то існує границя послідовності (3) інтегральних сум (2), якщо максимальний діаметр областей Δd_i прямує до нуля при $n_k \to \infty$. Ця границя не залежить від способів розбиття області (D) на області Δd_i та від вибору точки P_i всередині Δd_i.

Ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області (D) та позначується

$$\lim_{diam \Delta d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta s_i = \iint_{(D)} f(x, y)\, ds = \iint_{(D)} f(x, y)\, dxdy \, .$$

Область (D) називається *областю інтегрування*.

Властивості подвійних інтегралів

Властивість 1. Подвійний інтеграл від суми двох функцій $\varphi(x,y)+\psi(x,y)$ по області (D) дорівнює сумі двох подвійних інтегралів по області (D) від кожної функції окремо

$$\iint_{(D)}\left(\varphi(x,y)+\psi(x,y)\right)ds=\iint_{(D)}\varphi(x,y)ds+\iint_{(D)}\psi(x,y)ds .$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак подвійного інтеграла $\iint_{(D)}C\cdot\varphi(x,y)ds=C\iint_{(D)}\varphi(x,y)ds$, де $C=const$.

Властивість 3. Якщо область (D) розбита на дві області (D_1) та (D_2), які не мають спільних внутрішніх точок та функція $f(x,y)$ неперервна в усіх точках області (D), то

$$\iint_{(D)}f(x,y)ds=\iint_{(D_1)}f(x,y)ds+\iint_{(D_2)}f(x,y)ds . \qquad (4)$$

Обчислення подвійного інтеграла

Нехай область (D) в площині XOY така, що будь-яка пряма, що паралельна одній з координатних осей, наприклад осі OY, і проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області в двох точках N_1 та N_2 (рис.3).

Припускається, що область (D) обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$,де функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, до того ж $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x),\forall x\in(a,b)$, $a<b$. Таку область називатимемо *правильною в напрямку осі* OY. Аналогічно визначається область *правильна в напрямку осі* OX (рис.4).

Область, яка є правильною в обох напрямках, називатимемо *правильною областю.*

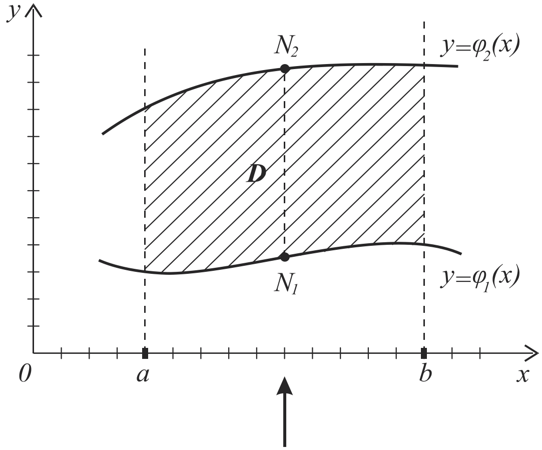

Рис.3.

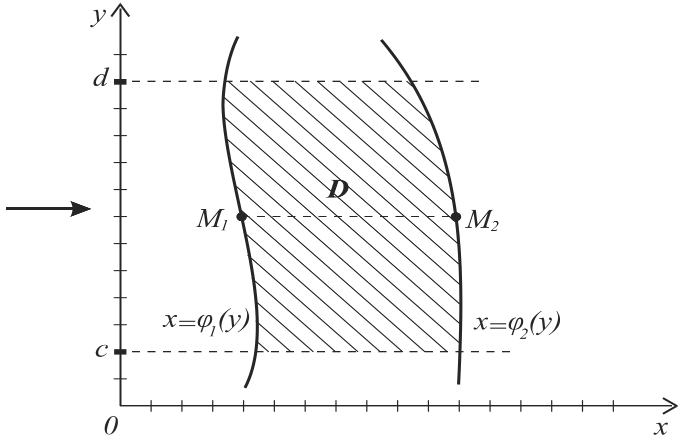

Рис. 4.

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), до того ж (D) визначається нерівностями: $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$.

Розглянемо вираз

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \ , \qquad (6)$$

який називатимемо *двократним* (*повторним*) інтегралом від функції $f(x,y)$ по області (D).

У цьому виразі спочатку обчислюється інтеграл, який міститься у дужках, до того ж інтегрування проводиться за змінною y, а x вважається сталою. У результаті інтегрування отримуємо неперервну функцію від x: $\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$. Цю функцію ми інтегруємо за змінною x в межах від a до b: $I_D = \int_a^b \Phi(x)\,dx$. У результаті отримуємо певне постійне число.

Аналогічно обчислюється двократний інтеграл, коли (D) визначається нерівностями: $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$. У цьому випадку

$$I_D = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \ . \qquad (7)$$

Зауваження. Неперервність функції $\Phi(x)$ приймаємо без доведення.

Приклад 1. Обчислити двократний інтеграл $\int_0^2 dx \int_{x^2}^4 \left(x^2 + y^2\right) dy$.

Розв'язання.

$$\Phi(x) = \int_{x^2}^4 \left(x^2 + y^2\right) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^4 = x^2\left(4 - x^2\right) + \frac{64 - x^6}{3} =$$

$$= 4x^2 - x^4 + \frac{64}{3} - \frac{1}{3}x^6;$$

$$I_D = \int_0^2 \left(4x^2 - x^4 + \frac{64}{3} - \frac{1}{3}x^6\right)dx = 4\int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x^4 dx + \frac{64}{3}\int_0^2 dx - \frac{1}{3}\int_0^2 x^6 dx =$$

$$= 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 + \frac{64}{3}x\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = 4\frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} + \frac{64}{3}2 - \frac{1}{3}\frac{2^7}{7} = \frac{4288}{105}.$$

Відповідь: $\frac{4288}{105}$.

Приклад 2. Обчислити двократний інтеграл $\int_1^4 dy \int_1^y \frac{y}{x} dx$.

Розв'язання. $\Phi(y) = \int_1^y \frac{y}{x} dx = y \ln|x| \Big|_1^y = y\left(\ln|y| - \ln|1|\right) = y \ln|y|$;

$$I_D = \int_1^4 y \ln|y|\, dy = \left\| \begin{matrix} u = \ln|y|, & dv = ydy, \\ du = \dfrac{dy}{y}, & v = \dfrac{y^2}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{y^2}{2}\ln|y| \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{y^2}{2}\frac{dy}{y} =$$

$$\frac{y^2}{2}\ln|y| \Big|_1^4 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{16}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}(16-1) = 8\ln 4 - \frac{15}{4}.$$

Відповідь: $8\ln 4 - \frac{15}{4}$.

<u>Властивості двократного інтеграла</u>

Властивість 1. Якщо правильну в напрямку осі OY область (D) розбити на дві області (D_1) та (D_2) прямою, яка паралельна осі OY або осі OX, то двократний інтеграл I_D від функції $f(x, y)$ по області (D) дорівнюватиме сумі інтегралів по областям (D_1) та (D_2) від тієї ж підінтегральної функції, тобто $I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$.

Властивість 2. (Оцінка двократного інтеграла).

Нехай m та M – найменше та найбільше значення функції $f(x, y)$ в області (D). Позначимо через S площу області (D). Тоді має місце співвідношення

$$m \cdot S \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le M \cdot S . \qquad (8)$$

Властивість 3. (Теорема про середнє значення).

Двократний інтеграл I_D від неперервної функції $f(x,y)$ по області (D) з площею S дорівнює добутку площі S на значення функції в певній точці P області (D). Тобто

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = f(P) \cdot S .$$

Теорема.

Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x,y)$ по правильній області (D) дорівнює двократному інтегралу від цієї функції $f(x,y)$ по області (D), до того ж (D) визначається нерівностями: $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$, тобто

$$\iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Зауваження.

Для випадку, коли $f(x,y) \ge 0$ ця теорема має явний геометричний зміст. Розглянемо тіло, яке обмежене поверхнею $z = f(x,y)$, площиною $z = 0$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ, а напрямною є межа області (D). Обчислимо об'єм V цього тіла.

Раніше було показано, що об'єм саме цього тіла дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x,y)$ по області (D):

$$V = \iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy . \qquad (11)$$

Обчислимо цей об’єм користуючись площами паралельних перерізів. Проведемо площину $x = const$ $(a < x < b)$, яка розтинає тіло (рис.5).

Обчислимо площу $S(x)$ фігури, що є результатом розтину $x = const$. Ця фігура є криволінійною трапецією, яка обмежена лініями $z = f(x,y)$ ($x = const$), $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Отже, ця площа зображується інтегралом

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy . \qquad (12)$$

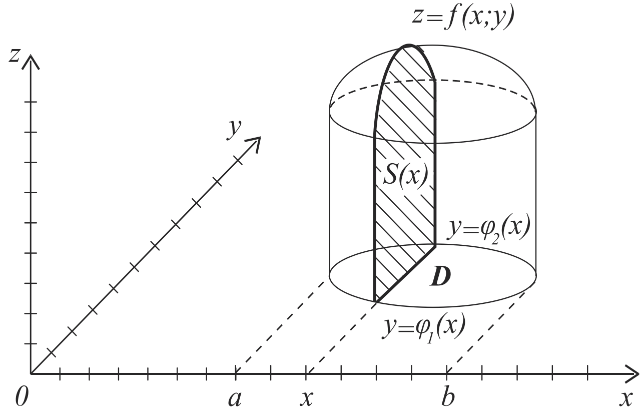

Рис.5.

Звідси легко знайти об’єм тіла $V = \int_a^b S(x)\,dx$. Підставляючи вираз (12) для площі $S(x)$, отримуємо

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx . \qquad (13)$$

В формулах (11) та (13) ліві частини рівні між собою, отже, праві частини також дорівнюють одна одній:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

При обчисленні подвійного інтеграла істотним є правильне розміщення меж інтегрування. Доцільно зробити креслення області інтегрування (D). Для обчислення подвійного інтеграла його необхідно зобразити у вигляді двократного. В кожному конкретному випадку, в залежності від вигляду області (D) або підінтегральної функції, обираємо одну або іншу формулу для обчислення подвійного інтеграла.

Це можна зробити двома способами: або за формулою (6), або за формулою (7). Значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. Але для економії обчислювальної роботи треба, якщо це можливо, обрати такий порядок інтегрування, при якому не потрібно розбивати область інтегрування на частини. Якщо область (D)не є правильною ані в напрямку осі OY , ані в напрямку осі OX , то подвійний інтеграл по цій області ми не можемо зобразити у вигляді одного двократного інтеграла. Якщо неправильну область (D) можна розбити на скінченне число правильних або в напрямку осі OY , або в напрямку осі OX областей (D_1), (D_2), ..., (D_n), то, обчислюючи подвійний інтеграл по кожній з цих областей за допомогою двократного інтеграла та додаючи отримані результати, ми дістанемо шуканий інтеграл по області (D). Проілюструємо це прикладами.

Приклад 3. Розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds$, де область (D) обмежена лініями: $y = x - 4, \quad y^2 = 2x$.

Розв'язання. Зробимо креслення області (D) (рис 6).

Область (D) є правильною в напрямку осі OX , отже, область (D) можна записати у вигляді $(D) = \left\{ (x,y) : -2 \le y \le 4; \frac{1}{2} y^2 \le x \le y + 4 \right\}$, де $x=\psi_1(y)=\frac{1}{2}y^2$ є лінією „входу” (нижня межа внутрішнього інтеграла), $x=\psi_2(y)=y+4$ є лінією „виходу” (верхня межа внутрішнього інтеграла).

Таким чином, користуючись формулою (7), отримуємо:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds=\int\limits_{-2}^{4}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_{-2}^{4}dy\int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} f(x,y)\,dx\,.$$

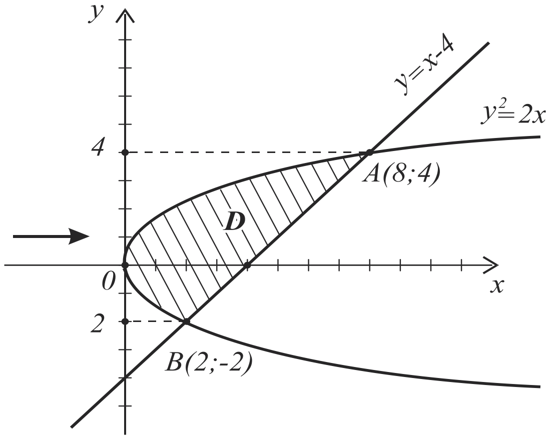

Рис.6.

Слід зазначити, що рівноправним є інтегрування в іншому порядку, в напрямку осі OY (рис 7).

Область (D) в напрямку осі OY не є правильною, отже, її потрібно розбити на правильні області:

$$(D_1)=\left\{(x,y):0\le x\le 2;-\sqrt{2x}\le y\le\sqrt{2x}\right\},$$

$$(D_2)=\left\{(x,y):2\le x\le 8;x-4\le y\le\sqrt{2x}\right\}.$$

Таким чином,

$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds=\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\,ds+\iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\,ds$, де

$$\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\,ds = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,,\quad \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\,ds = \int\limits_2^8 dx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy.$$

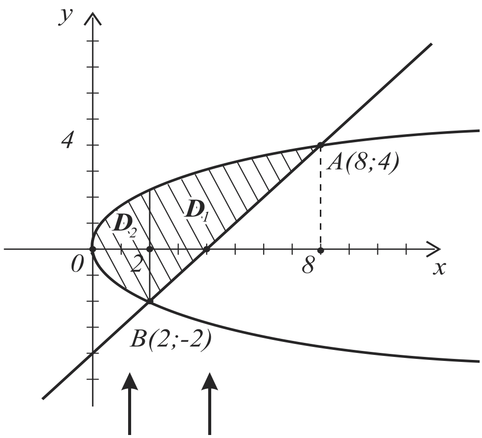

Рис.7.

Приклад 4. Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$.

Розв’язання. По межах інтегрування зробимо креслення області (D): $(D) = \left\{(x,y): 0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 3-2y\right\}$ (рис 8).

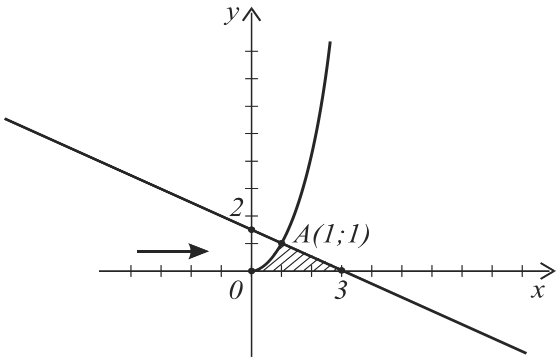

Рис.8.

В початковому інтегралі область (D) було розглянуто у напрямку осі OX . У цьому напрямку область (D) є правильною. За умовою задачі треба змінити порядок інтегрування в інтегралі, тобто розглядати область (D) у напрямку осі OY (рис 9).

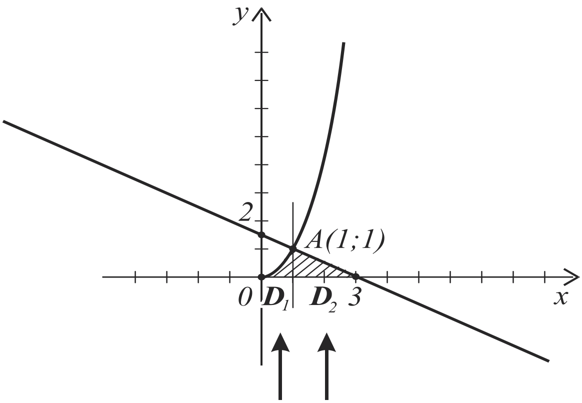

Рис.9.

У цьому напрямку область (D) не є правильною (одна лінія „входу” $y=0$, дві лінії „виходу” $y=x^2$ та $y=\frac{1}{2}(3-x)$), отже, область (D) потрібно розбити на правильні області прямою $x=1$:

$$(D_1)=\left\{(x,y): 0\le x\le 1; 0\le y\le x^2\right\},$$

$$(D_2)=\left\{(x,y): 1\le x\le 3; 0\le y\le \frac{1}{2}(3-x)\right\}.$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy .$$

Заміна змінних в подвійному інтегралі (загальний випадок)

В багатьох задачах, що потребують застосування подвійних інтегралів, декартова система координат не є найкращою. Тому слід вміти переходити від однієї системи координат до іншої, більш зручної.

Для спрощення обчислення подвійного інтеграла застосовують метод підстановки, тобто вводять нові змінні під знаком подвійного интеграла. Визначимо перетворення незалежних змінних *x* і *y*.

Нехай

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v) \tag{14}$$

функції, які визначені в певній області (D') площини OUV та мають неперервні частинні похідні першого порядку та визначник

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{du} & \dfrac{d\varphi}{dv} \\ \dfrac{d\psi}{du} & \dfrac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{15}$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), то справедлива формула заміни змінних в подвійному інтегралі:

$$\iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint_{(D')} f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)|J|\,dudv. \tag{16}$$

Визначник J називається *функціональним визначником* функцій $\varphi(u,v)$ та $\psi(u,v)$. Його називають також *якобіаном* на честь німецького математика Якобі.

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Розглянемо окремий випадок заміни змінних у подвійному інтегралі – перехід від декартових координат до полярних. Таку заміну змінних доцільно робити, якщо область (D) є кругом або частиною круга.

Визначимо, яка область у полярних координатах є правильною.

Нехай у полярній системі координат ρ, φ задана така область (D), що кожен промінь, який проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більш ніж у двох точках. Припустимо, що область (D) обмежена кривими $\rho = \Phi_1(\varphi), \rho = \Phi_2(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, до того ж $\Phi_1(\varphi) < \Phi_2(\varphi)$ та $\alpha < \beta$ (рис. 10). Таку область назвемо *правильною.*

Обчислимо якобіан переходу від декартових координат до полярних. Відомо, що у полярних координатах $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\varphi} & \dfrac{dx}{d\rho} \\ \dfrac{dy}{d\varphi} & \dfrac{dy}{d\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho\sin^2\varphi - \rho\cos^2\varphi = -\rho .$$

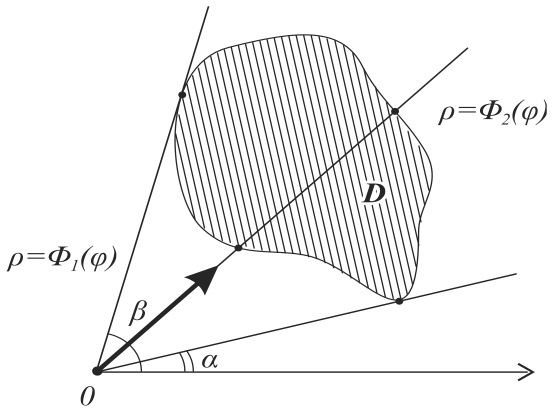

Рис. 10

Отже, $|J| = \rho$ та формула для обчислення подвійного інтеграла набуває вигляду

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} F(\varphi,\rho)\rho d\rho\right)d\varphi . \qquad (17)$$

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ по області (D), яка обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 = 2x$.

Розв'язання. Лінії, які обмежують область (D), є колами з центрами в точках $O_1(2,0), O_2(1,0)$ та радіусами $R_1 = 2, R_2 = 1$ відповідно. Зробимо креслення області (D) (рис. 11).

Перейдемо до полярних координат. Рівняння кіл набуває вигляду: $\rho = 4\cos\varphi, \rho = 2\cos\varphi$. Підінтегральна функція після переходу до полярних координат набуває вигляду $\sqrt{x^2+y^2} = |\rho| = \rho$, $|J| = \rho$.

Зауважимо, що область (D) симетрична відносно осі абсцис, отже φ можна змінювати від 0 до $\frac{\pi}{2}$, а результати обчислень подвоїти.

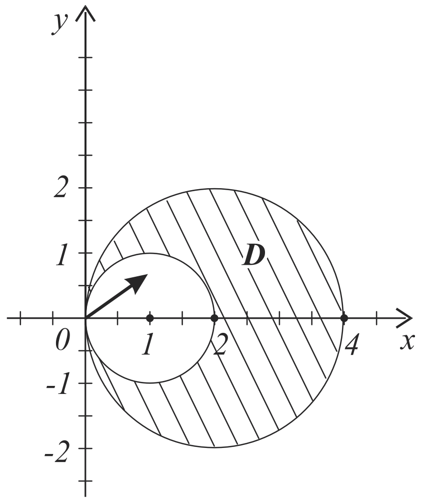

Рис. 11

Межі інтегрування для ρ змінюються від $\rho = 2\cos\varphi$ (лінія входу) до $\rho = 4\cos\varphi$ (лінія виходу). Отже, отримуємо:

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho \right) d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho .$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\Phi(\varphi)=\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}=\frac{1}{3}\left(64\cos^3\varphi-8\cos^3\varphi\right)=\frac{56}{3}\cos^3\varphi\,.$$

Обчислимо зовнішній інтеграл:

$$I_D=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{56}{3}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{112}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\left\|\begin{matrix} t=\sin\varphi, & t_н=0, \\ dt=\cos\varphi d\varphi, & t_в=1 \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{112}{3}\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)dt=\frac{112}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{112}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{112}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{224}{9}.$$

Відповідь: $\dfrac{224}{9}$.

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійні інтеграли. Основні означення

Нехай в певній області V простору R^3 задано неперервну криву AB довжиною l. Крива визначається параметричними рівняннями:

$\{x = x(s), y = y(s), z = z(s)\}$, де параметр s – довжина дуги і $0 \le s \le l$.

Крива AB є орієнтованою кривою, тобто заданий порядок слідування точок вздовж кривої при зростанні параметра s від 0 до l, інакше від точки A до точки B. Припустимо, що задана крива AB є гладкою, тобто вона має дотичну, що змінюється неперервно (або AB є кусково-гладкою – складається зі скінченого числа гладких кусків; наприклад, будь-яка ламана – кусково-гладка лінія).

Нехай вектор $\overrightarrow{\tau_0}(M)$ – орт дотичної в точці M кривої AB, який співпадає за напрямом з напрямом кривої: $\overrightarrow{\tau_0}(M) = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$.

Нехай кожній точці M області V відповідає вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то кажуть, що задана векторна функція точки

$$\vec{a}(M) = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\},$$

яку надалі називатимемо векторним полем.

Розіб'ємо криву AB довільним способом на n «елементарних дуг» довжиною Δs_i, $i = 1,\dots,n$ в напрямку від A до B, а на кожній елементарній дузі візьмемо, також довільним способом, точку M_i (набір точок $M_1,\dots,M_n$ називаємо зазначеними точками); вектор $\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta s_i \cdot \overrightarrow{\tau_0}(M_i)$. Для дуги з номером i складемо скалярний добуток: $\left(\vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}\right) = \left(\vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{\tau_0}(M_i)\right) \cdot \Delta s_i$, а потім укладемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{\tau_0}(M_i)\right) \cdot \Delta s_i . \tag{1}$$

Це є інтегральна сума для функції $\left(\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{\tau_0}(M)\right)$ вздовж кривої AB.

Нехай тепер $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$ – найбільша з довжин Δs_i.

Якщо існує скінчена границя послідовності інтегральних сум (1), за умови, що $\lambda\to 0$ (або $n\to\infty$), і ця границя не залежить ані від способу розбиття кривої на дуги, ані від вибору зазначених точок, то вона є *криволінійним інтегралом* від функції $\left(\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{\tau_0}(M)\right)$ вздовж кривої AB і позначається

$$\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(M_i)\cdot\overrightarrow{\tau_0}(M_i)\right)\cdot\Delta s_i\,. \tag{2}$$

В даному виразі розкриваємо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}$, і тоді

$$\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\int\limits_{AB}\left(P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma\right)ds\,. \tag{3}$$

Введемо вектор $\overrightarrow{ds}=\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\{dx;dy;dz\}$. Тоді

$$\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}=\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\,ds=\int\limits_{AB}Pdx+Qdy+Rdz\,. \tag{4}$$

Криволінійний інтеграл (2) є *криволінійним інтегралом 1-го роду* (по довжині дуги), а інтеграл (3) – *криволінійним інтегралом 2-го роду* (по координатам).

<u>Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду</u>

Теорема. Якщо крива AB міститься на площині і задана рівняннями

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ визначені та неперервні на проміжку $[\alpha,\beta]$, причому $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ також існують й неперервні на $[\alpha,\beta]$, а параметр t зростає від α до β, і, якщо в кожній точці кривої AB функції $P(x,y)$ і

$Q(x,y)$ – координати векторної функції $\vec{a}(M)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z)\}$ – неперервні, то тоді криволінійний інтеграл другого роду вздовж кривої AB існує і виражається через визначений інтеграл:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big[\varphi(t),\psi(t)\big]\cdot\varphi'(t)+Q\big[\varphi(t),\psi(t)\big]\cdot\psi'(t)\Big)dt. \qquad (5)$$

Якщо крива AB є кривою у просторі та задається параметричними рівняннями

$$\{x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\eta(t),\ t\in[\alpha,\beta]\,(\alpha<\beta)$$

і функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ – неперервно-диференційовні на проміжку $[\alpha,\beta]$, функції $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ – координати векторної функції $\vec{a}(M)$ – неперервні в кожній точці кривої AB, то справедливе твердження

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big[P(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\cdot\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\cdot\psi'(t)+$$
$$+R(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\cdot\eta'(t)\big]dt. \qquad (6)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L x^3dx+2xy^2dy-3x^2zdz$, де L – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(1;2;-2)$ і $B(0;-1;0)$.

Розв’язання. Складемо рівняння прямої AB. Використаємо наступну формулу: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-2}{-1-2}=\frac{z+2}{0+2},\quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{2}.$$

Запишемо рівняння прямої AB у параметричній формі.

$$\{x=1-t, y=2-3t, z=-2+2t,$$

а для ділянки AB параметр, очевидно, змінюється в межах: $0 \le t \le 1$.

Отже, $x'(t) = -1, y'(t) = -3, z'(t) = 2$.

Тоді $dx = -dt, dy = -3dt, dz = 2dt.$

Отримуємо:

$$\int_L x^3 dx + 2xy^2 dy - 3x^2 zdz =$$

$$= \int_0^1 \left(-\left(1-t\right)^3 dt - 6\left(1-t\right)\left(2-3t\right)^2 dt - 6\left(1-t\right)^2 \left(-2+2t\right) dt \right) =$$

$$= \int_0^1 (25t^3 - 51t^2 + 31t - 5) dt = \left(\frac{25}{4} t^4 - \frac{51}{3} t^3 + \frac{31}{2} t^2 - 5t \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{4}$.

<u>Робота силового поля.</u>

Якщо векторна функція $\vec{a}(M)$ є силовим полем, то криволінійний інтеграл (14) виражає *роботу* даного поля, що витрачена на переміщення матеріальної точки вздовж траєкторії AB.

Приклад 2. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \{y, z, -x\}$ вздовж одного вітка гвинтової лінії $\{x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\}$ від точки $A(a;0;2b\pi)$ до точки $B(a;0;0)$.

Розв'язання. Орієнтація лінії відповідає зміні параметра t від $t = 2\pi$ (в точці A) до $t = 0$ (в точці B).

Робота сили поля

$$A = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{AB} ydx + zdy - xdz =$$

$$= \int_{2\pi}^0 \left(a\sin t \cdot \left(-a\sin t\right) + bt \cdot a\cos t - ba\cos t \right) dt =$$

$$= \int_{2\pi}^0 \left(-a^2 \frac{1-\cos 2t}{2} + ab\left(t-1\right) \cdot \cos t \right) dt.$$

Інтеграл $\int\limits_{2\pi}^{0} ab(t-1)\cos t dt$ обчислюємо методом інтегрування частинами: $u=(t-1), dv=\cos t dt \Rightarrow du=dt, v=\sin t$. Таким чином

$$A=\left(-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+ab(t-1)\cdot\sin t+ab\cos t\right)\Bigg|_{2\pi}^{0}=a^2\pi .$$

Відповідь: $A=a^2\pi$.

<u>Властивості криволінійного інтеграла другого роду.</u>

Коли точка A співпадає з точкою B, тобто коли крива AB є замкненим контуром L, криволінійний інтеграл другого роду позначається символом:

$$\oint\limits_{L} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz ,$$

причому не має значення, в якій точці починається рух вздовж контуру.

Слід зазначити, якщо L – плоский замкнений контур, який сам себе не перетинає, то у нього розрізняють додатний і від'ємний напрямки обходу, а саме: *додатний напрямок обходу* – напрямок, при якому область, що обмежена контуром L, залишається ліворуч, якщо спостерігач рухається вздовж контуру за цим напрямком. Якщо L – крива у просторі, то напрямок обходу контуру обговорюють окремо.

Розглянемо деякі властивості криволінійного інтеграла другого роду:

1) При визначенні криволінійного інтеграла другого роду $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ слід розрізняти початок та кінець шляху інтегрування, а саме:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=-\int\limits_{BA} Pdx+Qdy+Rdz . \qquad (7)$$

2) В тому випадку, коли крива AB замкнена, тобто замкненим є контур L, то

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = -\oint_L Pdx + Qdy + Rdz \ , \qquad (8)$$

тобто зміна напряму обходу контуру L змінює знак інтеграла на протилежний.

3) Якщо точка C розбиває криву на дві ділянки AC та CB, то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AC} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{CB} Pdx + Qdy + Rdz \ . \qquad (9)$$

4) Лінійність: $\overrightarrow{a_1}(M) = \{P_1(x,y,z); Q_1(x,y,z); R_1(x,y,z)\}$, $\vec{a}_2(M) = \{P_2(x,y,z); Q_2(x,y,z); R_2(x,y,z)\}$ – векторні функції, α, β – сталі величини

$$\int_{AB} \left(\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}\right)\cdot\overrightarrow{ds} = \alpha\int_{AB} \overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{ds} + \beta\int_{AB} \overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{ds} \qquad (10)$$

Якщо лінія AB є прямолінійним відрізком, перпендикулярним осі OX, то $\int_{AB} \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}$ дорівнює нулю, бо рівняння кривої $x = \text{const}$ і $dx = 0$.

Формула Гріна.

Нехай в області D, яка міститься на площині XOY і контур L є межею даної області, задане неперервна векторна функція $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j}$, тоді справедлива формула

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \ , \qquad (11)$$

при цьому рух вздовж контуру відбувається в додатному напрямі, тобто в такому напрямі, аби область залишалася ліворуч.

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy$ вздовж замкненого контуру L (рис. 1), який складається з частин кривих $y = -x^2, y = -1$ (напрям обходу додатний).

Розв'язання. Спочатку обчислимо циркуляцію безпосередньо за допомогою криволінійного інтеграла:

$$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int_{BA}(x+y)dx+(x-y)dy+\int_{AOB}(x+y)dx+(x-y)dy.$$

Відрізок прямої BA, з врахуванням напрямку руху, можна записати: $y=-1,-1\le x\le 1$. Відповідно $dy=0$ і інтеграл

$$\int_{AB}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{-1}^{1}\left(x-1\right)dx=\left.\frac{\left(x-1\right)^2}{2}\right|_{-1}^{1}=-2\ .$$

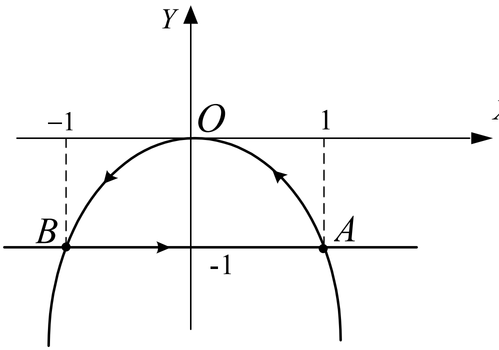

Рис. 1

Дуга параболи AOB задається рівнянням $y=-x^2$, а змінна x змінюється від 1 до -1, тому

$$\int_{AOB}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{1}^{-1}\left(x-x^2+x\cdot\left(-2x\right)+x^2\cdot\left(-2x\right)\right)dx=$$

$$=\int_{1}^{-1}\left(x-3x^2-2x^3\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)\right|_{1}^{-1}=2.$$

Остаточно $\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=0$.

Контур L (рис. 1) – замкнений, застосуємо формулу Гріна, враховуючи те, що

$$P(x,y)=x+y\Rightarrow\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1\ ,$$

$$Q(x,y) = x - y \Rightarrow \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1,$$

$$\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy = \iint_D (1-1)dxdy = 0.$$

Відповідь: $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy = 0.$

<u>Умова незалежності криволінійного інтеграла від форми кривої інтегрування.</u>

Інтеграл $I = \int_{AB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds}$ *не залежить від шляху інтегрування,* якщо результати інтегрування вздовж будь-яких кривих, які з'єднують точки A та B, співпадають (рис. 2), тобто, якщо

$$\int_{AMB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{ANB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds}.$$

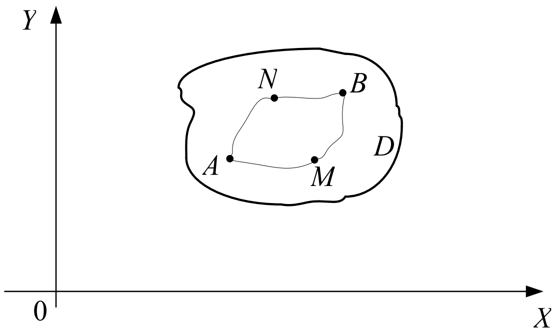

Рис. 2

Теорема. Для того, щоб інтеграл $I = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був незалежним від шляху інтегрування необхідно і достатньо, щоб в кожній точці області D виконувалася умова

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \qquad (12)$$

Теорема. Якщо в кожній точці області D функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні, для яких $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, то вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом неперервної функції

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

тобто $d\Phi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Функцію $\Phi(x,y)$ називають *потенційною функцією*.

ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$.

Розв'язання. Запишемо $u_n=\frac{5^n}{n+1}$, $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{n+2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{n+2}\cdot\frac{n+1}{5^n}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}k=1, a_0=1\\ m=1, b_0=1\end{matrix}\right\|=5\cdot 1>1.$$

Відповідь: за ознакою Д'Аламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$ розбігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}$.

Розв'язання.

В нашому прикладі $u_n=\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}k=3, a_0=1\\ m=3, b_0=5^3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{5^3}<1.$$

Відповідь: за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n}{5n}\right)^{3n}$ збігається.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Це гармонійний ряд, відомо, що він розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_n'}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}\cdot\frac{n}{1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}k=3, a_0=1\\ m=3, b_0=1\end{matrix}\right\|=1=\text{const}\neq 0.$$

Отже ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ поводять себе однаково, розбігаються.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$ розбігається за граничною ознакою порівняння.

Приклад 4. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$.

Розв'язання. Ряд знакозмінний. Перевіримо умови Лейбніца:

1) $\frac{1}{2}>\frac{1}{\sqrt{7}}>\frac{1}{\sqrt{10}}>\ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}=0$.

Отже, ряд збіжний.

Абсолютно або умовно? Складемо ряд із модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Дослідимо отриманий ряд на збіжність за допомогою граничної ознаки порівняння. Розглянемо допоміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ – узагальнений гармонійний ряд, розбіжний $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_n'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=$$

$$= \left\| \begin{matrix} k = \frac{1}{2}, a_0 = 1 \\ m = \frac{1}{2}, b_0 = \sqrt{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{const} \neq 0 .$$

Отже ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ поводять себе однаково, розбігаються. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$ збігається умовно.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$ збігається умовно.

Приклад 5. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Розв'язання. Ряд знакозмінний. Перевіримо умови Лейбніца:

1) $\frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{4!} > ...$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$.

Отже, ряд збіжний. Абсолютно або умовно? Складемо ряд із модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$. Дослідимо цей ряд на збіжність за допомогою ознаки Д'Аламбера.

Запишемо $u_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $\quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0 < 1.$$

За ознакою Д'Аламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ збігається, отже ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ збігається абсолютно.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ збігається абсолютно.

Приклад 6. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)3^n}$.

Заданий функціональний ряд є степеневим. За ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}}{(2(n+1)-1)3^{n+1}}\cdot\frac{(2n-1)3^n}{(x+2)^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^n\cdot(x+2)}{(2n+1)3^n\cdot 3}\cdot\frac{(2n-1)3^n}{(x+2)^n}\right|=|x+2|\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3\cdot(2n+1)}=$$

$$=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\text{за правилом}\\ \text{старших степенів}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}k=1, a_0=2\\ m=1, b_0=6\end{matrix}\right\|=\frac{2}{6}|x+2|=\frac{1}{3}|x+2|<1.$$

$|x+2|<3\Rightarrow -3<x+2<3$.

Остаточно отримуємо: $-5<x<1$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

$$x=-5:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+2)^n}{(2n-1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n-1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n-1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Ряд знакозмінний. Перевіримо умови Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$.

Отже, ряд збіжний. Абсолютно або умовно? Складемо ряд із модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. Дослідимо цей ряд на збіжність за допомогою граничної ознаки порівняння. Розглянемо допоміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонійний ряд, розбіжний.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{n}{1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{matrix} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} k=1, a_0=1 \\ m=1, b_0=2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} = \text{const} \neq 0.$$

Отже ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ поводять себе однаково, розбігаються. Тому, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ збігається умовно. Отже, $x=-5$ є точкою збіжності ряду.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2)^n}{(2n-1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, розбігається.

Таким чином, область збіжності вихідного ряду є $[-5;1)$.

Відповідь: $[-5;1)$ – область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)3^n}$.

Приклад 7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x+2y)\,dxdy$, де область D обмежена кривими: $y=x^2-2x,\ y=x.$

Розв'язання. Розглянемо криві, якими обмежена область D.

Пряма $y=x$ - бісектриса I та III координатних кутів, $y=x^2-2x$ - парабола, вітки вгору ($a=1>0$). Обчислимо координати вершини $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1,\ y_0=1-2=-1$. Отже, $(1;-1)$ - вершина параболи. Знайдемо точки перетину прямої та параболи. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=x, \end{cases}$$

звідси $x^2-2x=x \Rightarrow x^2-3x=0$. Розв'язавши квадратне рівняння, знайдемо, що $x_1=0$, $x_2=3$, $y_1=0$, $y_2=3$, відповідно.

Отже, лінії, що обмежують область, перетинаються в точках $O(0,0)$ та $M(3,3)$.

Зобразимо фігуру D за рівняннями її межі (рисунок 1).

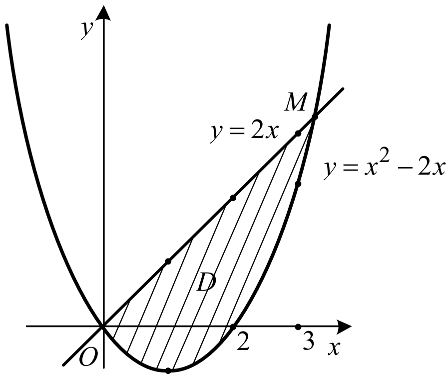

Рисунок 1

Таким чином, область D задається системою нерівностей

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ x^2 - 2x \le y \le x. \end{cases}$$

Область D в напрямку осі $OУ$ є правильною. Тоді подвійний інтеграл зобразимо у вигляді двократного:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} (x+2y)\,dy\ .$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_{x^2-2x}^{x}(x+2y)\,dy = x\int_{x^2-2x}^{x}dy + 2\int_{x^2-2x}^{x} ydy = xy\Big|_{x^2-2x}^{x} + 2\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2-2x}^{x}$$

$$= x\left(x-\left(x^2-2x\right)\right)+x^2-\left(x^2-2x\right)^2 = 3x^3 - x^4.$$

Обчислимо зовнішній інтеграл:

$$\int_0^3\left(3x^3-x^4\right)dx=3\int_0^3 x^3dx-\int_0^3 x^4dx=3\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^3-\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^3=3\cdot\frac{81}{4}-\frac{243}{5}=$$

$$=\frac{243\cdot5-243\cdot4}{20}=\frac{243}{20}.$$

Відповідь: $\frac{243}{20}$.

Приклад 8. Переходячи до полярної системи координат, знайти масу пластинки, яка займає область обмежену кругом $x^2+y^2=a^2$, що лежить в I чверті, та прямими $y=x$ та $y=\sqrt{3}\cdot x$ і має поверхневу щільність $\gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок області (рис. 2). Перейдемо до полярної системи координат: $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}$

Запишемо її межі в полярних координатах. Рівняння кола має вигляд: $x^2+y^2=a^2\Rightarrow(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=a^2$ $\Rightarrow\rho^2=a^2.$

Остаточно, $\rho=a$ - рівняння кола. Відрізки прямих $y=x$ та $y=\sqrt{3}\cdot x$ є променями $\varphi=\frac{\pi}{4}$ та $\varphi=\frac{\pi}{3}$. При визначенні цих кутів використано, що кутові коефіцієнти прямих $k=\mathrm{tg}\,\varphi$.

Маса пластинки, яка займає область D визначається за формулою:

$$m=\iint_D\gamma(x,y)dxdy.$$

В нашому випадку: $m=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=\iint_D\rho^2d\rho d\varphi$.

Враховано, що $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Перейдемо до двократного інтегралу:

$$m = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho.$$

1) $\left.\dfrac{\rho^3}{3}\right|_0^a = \dfrac{a^3}{3}$,

2) $\dfrac{a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \left.\dfrac{a^3}{3}\varphi\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a^3}{3}\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{a^3\pi}{36}$.

Відповідь: $\dfrac{a^3\pi}{36}$.

Приклад 8. Обчислити за формулою Гріна криволінійний другого роду $\oint_L (x^2y+y)dx+(xy^3-y)dy$, де L - контур, утворений лініями $y=x^2$, $y=1$, який має додатну орієнтацію

Розв'язання. Зробимо рисунок контуру, утвореного лініями $y=x^2$, $y=1$, (рис. 3). Визначимо точки перетин у параболи та прямої: $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$.

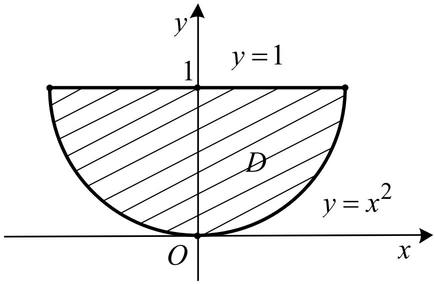

Рисунок 3

В нашому прикладі $P(x,y)=x^2y+y, Q(x,y)=xy^3-y.$

Обчислимо $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+1, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^3.$

Скористаємось формулою Гріна: $\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$

Отримуємо

$$\oint\limits_L (x^2y+y)dx+(xy^3-y)dy=\iint\limits_D\left(y^3-\left(x^2+1\right)\right)dxdy=\iint\limits_D\left(y^3-x^2-1\right)dxdy=$$
$$=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\left(y^3-x^2-1\right)dy.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_{x^2}^{1}\left(y^3-x^2-1\right)dy=\int\limits_{x^2}^{1}y^3dy-\left(x^2+1\right)\int\limits_{x^2}^{1}dy=\left.\frac{y^4}{4}\right|_{x^2}^{1}-\left(x^2+1\right)y\Big|_{x^2}^{1}=\frac{1}{4}\left(1-x^8\right)-\left(x^2+1\right)\left(1-x^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x^8-1+x^4=x^4-\frac{1}{4}x^8-\frac{3}{4}.$$

Обчислимо зовнішній інтеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{1}{4}x^8-\frac{3}{4}\right)dx=2\int\limits_{0}^{1}\left(x^4-\frac{1}{4}x^8-\frac{3}{4}\right)dx=2\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{1}{4}\frac{x^9}{9}-\frac{3}{4}x\right)\right|_0^1=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{36}-\frac{3}{4}\right)=$$
$$=2\cdot\frac{36-5-135}{180}=2\cdot\frac{-104}{180}=-\frac{52}{45}.$$

Відповідь: $-\frac{52}{45}.$

Приклад 9. Обчислити роботу сили $\vec{F}=\left\{x^2-y,\, y\right\}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y=x^3$ від точки $A\left(1;1\right)$ до точки $B\left(2;8\right)$.

Розв'язання. Робота сили поля обчислюється за формулою:

$$A=\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

В нашому прикладі $P(x,y)=x^2-y, Q(x,y)=y.$

Отримуємо криволінійний інтеграл 2-го роду $A=\int\limits_{AB}\left(x^2-y\right)dx+ydy.$ Оскільки переміщення матеріальної точки здійснюється вздовж кривої $y = x^3$, то $dy = \left(x^3\right)' dx = 3x^2 dx$. Нижня та верхня межі інтегрування це абсциси точок $A(1;1)$ і $B(2;8)$ відповідно. Отже, криволінійний інтеграл 2-го роду перетворюється на наступний визначений інтеграл:

$$\int_1^2 \left(\left(x^2 - x^3\right)dx + x^3 \cdot 3x^2 dx\right) = \int_1^2 \left(x^2 - x^3 + 3x^5\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^6}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - 4 + 32 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 28 + \frac{7}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= 28 + \frac{28 + 3 - 6}{12} = 28 + \frac{25}{12} = 30\frac{1}{12}.$$

Відповідь: $A = 30\frac{1}{12}$.