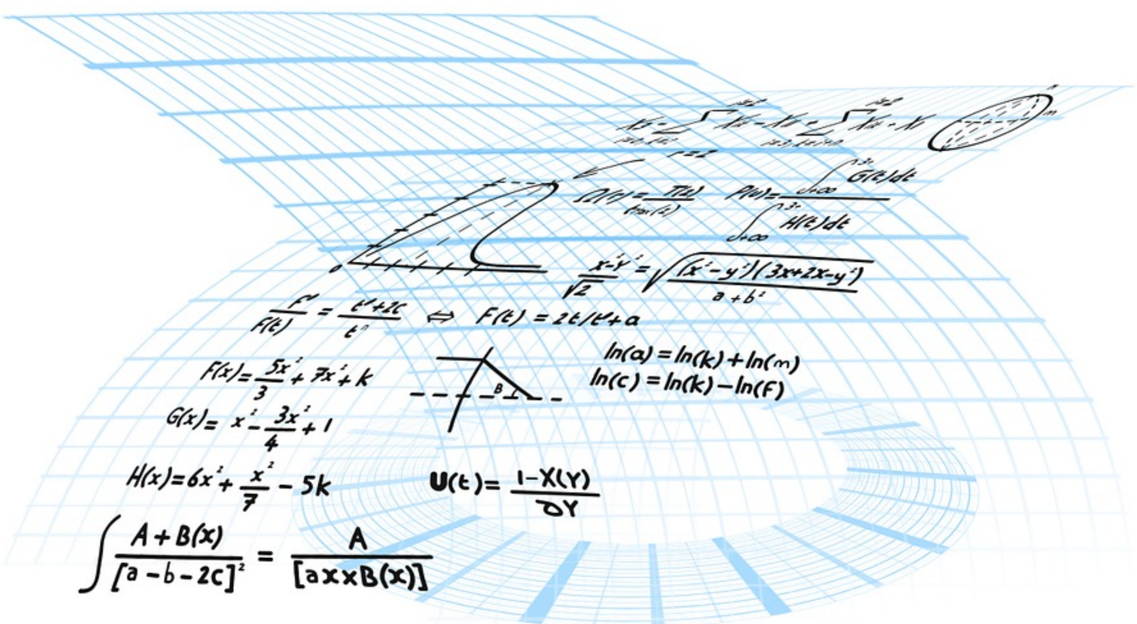
МІНІСТЕРСТВО НАУКИ І ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ



Харків, НТУ «ХПІ», 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Т.В. Потаніна

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 15.02.2024 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2024

УДК 517.91
П 64

Рецензенти:

В.М. Бурлаєнко, канд. техн. наук, професор,
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»;
І.В. Михайленко, канд. пед. наук, доцент,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Потаніна Т. В.
П 64 Звичайні диференціальні рівняння: навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей / Т. В. Потаніна – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – 69 с.

ISBN 978-617-05-0471-5

В даному посібнику наведено основні типи диференціальних рівнянь, розв’язки яких можна знайти аналітично, вказано способи їх розв’язування, розглянуто відповідні приклади. Зміст посібника розбито на практичні заняття. Частина прикладів призначена для розв’язування під час аудиторних занять студентів, інша частина – для самостійної та домашньої роботи. Наведені варіанти самостійної та контрольної робіт. В додатках посібника подано матеріал по розв’язанню систем диференціальних рівнянь та чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь.

Для студентів технічних спеціальностей.

Бібліогр. 5

УДК 517.91

ISBN 978-617-05-0471-5

ЗМІСТ

ВСТУП

Звичайні диференціальні рівняння застосовуються при моделюванні різноманітних процесів, що відбуваються в технічних, природничих, економічних та соціальних системах. Важко уявити галузь науки або виробництва, в якій не виникала би необхідність застосування диференціальних рівнянь. Приміром, якщо певна величина змінюється з часом під впливом різних чинників, то закон її змін в часі описується диференціальним рівнянням (або системою рівнянь) – рівнянням, що пов’язує початкову змінну, функцію часу та похідні цієї функції. Незалежною змінною в диференціальних рівняннях може бути не лише час, але і інші величини: координати, температура, тощо. Аналіз залежності розв’язку рівняння від параметрів задачі і початкового стану системи дозволяє встановити загальні закономірності змін шуканої фізичної величини, а також прогнозувати її поведінку, обрати оптимальне керування. Побудова нестаціонарної моделі в задачах електродинаміки, розповсюдження електромагнітних та теплових хвиль, розв’язання задачі радіоактивного розпаду, створення моделей мікро- та макроекономіки, аналіз еволюційних явищ, що відбуваються в живій та неживій природі – результат застосування теорії диференціальних рівнянь. В зв’язку з цим вивчення звичайних диференціальних рівнянь в курсі вищої математики має принципове теоретичне та прикладне значення для підготовки сучасного спеціаліста.

В даному посібнику наведено основні типи рівнянь, розв’язки яких можна знайти аналітично, вказано способи їх розв’язування, розглянуто відповідні приклади. Зміст посібника розбито на практичні заняття згідно з «Робочою програмою з навчальної дисципліни: Вища математика ч. 3» за 2023 рік для спеціальностей 171, 131, 132, 133, 145, 274. Така структура є зручною при використанні посібника в навчальному процесі. Частина прикладів призначена для розв’язування під час аудиторних занять студентів, інша частина – для самостійної та домашньої роботи.

Стандартний курс вищої математики у технічному виші, як правило, охоплює лише вивчення найбільш важливих класів звичайних диференціальних рівнянь. Об’єм усього курсу може варіюватися в залежності від спеціальності та необхідного рівня підготовки спеціалістів. В зв’язку з цим в процесі вивчення теми може виникнути необхідність виходу поза рамки стандартного матеріалу. В додатку 1 посібника подано додатковий матеріал по розв’язанню систем диференціальних рівнянь, який можна використати при більш ретельному вивченні курсу або як стислий довідник.

Клас диференціальних рівнянь, розв’язок яких можна знайти аналітичним шляхом є дуже вузький. Тому часто при розв’язанні практичних задач не вдається оминути чисельного моделювання. В додатку 2 посібника на прикладі показано методи Ейлера розв’язування звичайних диференціальних рівнянь, а також практична реалізація методу в пакеті MathCAD.

Заняття перше

Теми:

«Диференціальні рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними»,

«Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку»

Матеріали з теорії:

1.

Рівняння вигляду $y' = f(x) \cdot g(y)$ називається ***диференціальним рівнянням (ДР) з відокремлюваними змінними***.

Для розв'язання такого рівняння слід провести відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

а далі інтегрувати обидві частини отриманої рівності:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Можливий варіант ДР з відокремлюваними змінними, записаного у диференціалах

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0.$$

Для розв'язання застосовуємо аналогічний підхід: відокремлення змінних, тобто представлення рівнянням

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy,$$

і подальшим інтегруванням визначається розв'язок ДР.

Отриману після інтегрування неявну залежність змінних x і y (яка містить довільну сталу C) називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння. Якщо можливо виразити змінну y в явному вигляді, тобто як функцію змінної x: $y = y(x, C)$, то отримуємо ***загальний розв'язок*** диференціального рівняння. В випадку, коли наприкінці розв'язання зручніше змінну x записати у вигляді: $x = x(y, C)$, то така залежність також є *загальним розв’язком*.

Очевидно, що диференціальне рівняння має нескінченну множину розв’язків. Особливо на практиці відбувається пошук власне такого розв’язку, графік якого проходить через задану точку. Вимагання, щоб графік шуканого розв’язку проходив через задану точку, називається ***початковою умовою***: $y(x_0) = y_0$.

Задача пошуку розв’язку диференціального рівняння, який справджує початковим умовам називається ***задачею Коші***. Розв’язок задачі Коші – ***частинний розв’язок***.

2.

Диференціальне рівняння вигляду $y' = f(y, x)$, в випадку, якщо функція в правій частині є *однорідною*, тобто має властивість $f(ky, kx) = f(y, x)$, для будь-якого $k \neq 0$, називається ***однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку***.

Для розв’язання однорідного рівняння здійснюється *заміна* невідомої шуканої функції за формулою: $t = \dfrac{y}{x}$. Тоді вирази для невідомої функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$: $y = t \cdot x,\ y' = t' \cdot x + t$. Нова функція $t(x)$ є розв’язком диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t' \cdot x + t = f(t) \Rightarrow \frac{dt}{dx} \cdot x = f(t) - t.$$

Залежність між змінними t і x, що виникає в процесі інтегрування цього рівняння, дозволяє на основі рівності $y = t \cdot x$ знайти початкову шукану функцію y.

Теоретичні питання:

1. Що називається диференціальним рівнянням 1-го порядку?

2. Які з поданих рівнянь є диференціальними рівняннями 1-го порядку:

а) $y^2 y'' = x \cdot (y')^3 + 1$,

б) $\dfrac{x}{y'} = xy'' + 2y$,

в) $x\sqrt{y'} = y^3 (x + y')$,

г) $xy^2 = 2xy + 3$?

3. Написати загальний вигляд диференціального рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними.

4. Які з поданих рівнянь є диференціальними рівняннями 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

а) $(x+1)y' = y^2 \sin x + xy^2$,

б) $\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 y dx + (x+3)\ln y dy = 0$,

в) $\left(x^2 + e^x\right) y' = xy + y^2 \cos x$?

5. Яким є загальний вигляд однорідного диференціального рівняння 1-го порядку?

6. Які з поданих рівнянь є однорідними диференціальними рівняннями 1-го порядку:

а) $y' = \operatorname{tg} \ln \sin \dfrac{y}{x}$,

б) $y' = \dfrac{2x + 4y}{x - 3y}$,

в) $\left(x^2 + xy + 5y^2\right) dy + \left(3xy + y^2\right) dx = 0$,

г) $y' = \cos \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y^5}{x^5} - \dfrac{y^4}{x^3}$,

д) $y' = \dfrac{\sqrt{x^4 - 2y^4}}{\sqrt[3]{x^6 + xy^5 + 2x^4 y^2}}$?

7. Яка заміна невідомої функції дозволяє привести однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку до рівняння з відокремлюваними змінними?

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = e^{-y} \cdot \sin x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння є диференціальним рівнянням 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Здійснимо відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \cdot \sin x \Rightarrow e^{y} dy = \sin x dx \Rightarrow \int e^{y} dy = \int \sin x dx .$$

Обчисливши інтеграли, отримуємо

$$e^{y} = -\cos x + C .$$

Розв'язок можна залишити в неявному вигляді (у вигляді загального інтеграла диференціального рівняння). Однак, в цьому випадку, нескладно виразити шукану функцію явно, тобто отримати загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$e^{y} = C - \cos x \Rightarrow y = \ln(C - \cos x) .$$

Щоб знайти частинний розв'язок підставимо початкову умову в отриманий загальний розв'язок:

$$0 = \ln(C - \cos 0) \Rightarrow 0 = \ln(C - 1) \Rightarrow \quad C = 2 .$$

Тоді шуканий частинний розв'язок $y = \ln(2 - \cos x)$.

Відповідь: $y = \ln(2 - \cos x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $ydx + xdy = 0$.

Розв'язання. Дане диференціальне рівняння (ДР) є рівнянням з відокремлюваними змінними, яке записане у диференціалах. Відокремлення змінних приводить до виразу:

$$xdy = -ydx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} .$$

Після інтегрування отримуємо

$$\ln|y| = -\ln|x| + \tilde{C} = -\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x|^{-1} + \ln C$$

(довільна стала інтегрування $\tilde{C}$ тут записана у вигляді логарифма $\ln C$ для зручності подальших перетворень). Скористаємося властивостями логарифмічної функції:

$$\ln|y| = \ln\left(C|x|^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{C}{|x|}.$$

Звідки знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \frac{C}{x}. \tag{1}$$

Відповідь: $y = \dfrac{C}{x}$.

Так насправді, після виключення знака модуля розв'язок необхідно було записати у вигляді $y = \pm\dfrac{C}{x}$. Однак, за означенням, довільна стала C може бути лише додатною. При цьому величина $\pm C$ приймає будь-які значення – як додатні, так і від'ємні. Тоді, якщо позначити величину $\pm C$ новою сталою $\tilde{C}$ довільного знаку, приходимо до запису (1).

Приклади для самостійної роботи

1. $x^2 y' = \dfrac{1}{\cos y}, y(1) = 0$;

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(0) = 0$;

3. $y' = x^3 y^2 + 2x^3 y$;

4. $\operatorname{tg} x \cdot y' = \sqrt{y^2 + 3}$;

5. $\left(y^2 + 2\right)dx + \left(x^2 - 4\right)dy = 0$;

6. $\sqrt{y}dx + \dfrac{dy}{\ln x} = 0$.

Відповіді: 1. $y = \arcsin\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

2. $y = x$.

3. $y^2+2y=e^{\frac{x}{2}+C}$.

4. $y+\sqrt{y^2+3}=C\sin x$.

5. $y=-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln C\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\right)$.

6. $y=\left(C+\dfrac{x(1-\ln x)}{2}\right)^2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'=\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Дане рівняння є однорідним ДР 1-го порядку, тому що права частина $f(x,y)=\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$ є однорідною функцією:

$$f(kx,ky)=\mathrm{tg}\frac{ky}{kx}+\frac{ky}{kx}=\mathrm{tg}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}=f(x,y).$$

Здійснимо заміну невідомої функції:

$$t=\frac{y}{x},\ y=t\cdot x,\ y'=t'\cdot x+t.$$

Тоді для нової функції $t(x)$ отримуємо ДР з відокремлюваними змінними:

$$t'x+t=\mathrm{tg}\,t+t \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dx}x=\mathrm{tg}\,t \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{\mathrm{tg}\,t}=\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування

$$\int\frac{\cos t}{\sin t}dt=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{(\sin t)'}{\sin t}dt=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|\sin t|=\ln|x|+\ln C \quad\Rightarrow\quad \sin t=Cx.$$

Тепер можна повернутися до початкової невідомої функції $y(x)$:

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right)=Cx.$$

Отримано загальний інтеграл ДР.

Зазначимо, що в даному прикладі можна виразити невідому функцію явно:

$$\frac{y}{x}=\arcsin(Cx) \quad \Rightarrow \quad y=x\cdot\arcsin(Cx),$$

така функція є загальним розв'язком ДР.

Відповідь: $y=x\cdot\arcsin(Cx)$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $xy'=y+\sqrt{4x^2-y^2}$.

Розв'язання. Обидві частини даного ДР поділимо на x:

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{4x^2-y^2}{x^2}} \Leftrightarrow y'=\frac{y}{x}+\sqrt{4-\frac{y^2}{x^2}}.$$

Це однорідне ДР 1-го порядку. Здійснимо заміну:

$$t=\frac{y}{x},\ y=t\cdot x,\ y'=t'\cdot x+t.$$

Отримуємо рівняння

$$t'x+t=t+\sqrt{4-t^2} \Rightarrow t'x=\sqrt{4-t^2};$$

або в диференціалах

$$\frac{dt}{dx}x=\sqrt{4-t^2}.$$

Тепер можна відокремити змінні:

$$\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\arcsin\frac{t}{2}=\ln|x|+\ln C.$$

При поверненні до початкової невідомої:

$$\arcsin\frac{y}{2x}=\ln C|x| \text{ – загальний інтеграл ДР.}$$

Загальний розв'язок: $y=2x\cdot\sin\left(\ln C|x|\right)$.

Відповідь: $y=2x\cdot\sin\left(\ln C|x|\right)$.

Приклади для самостійної роботи

1. $y' = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x},\ y(1) = 0$;

2. $xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y$;

3. $y' = \frac{x + 3y}{x - y}$;

4. $\left(3y^2 + 3xy + x^2\right)dx = \left(x^2 + 2xy\right)dy$.

Відповіді: 1. $y = x \cdot \operatorname{arctg}\left(\ln x\right)$.

2. $y + \sqrt{3x^2 + y^2} = Cx^2$.

3. $\frac{y}{\left(y + 3x\right)^4} = C$.

4. $\left(y + x\right)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{y+x}}$.

Завдання для домашньої роботи

1. $x^2 y' = \cos^2 2y,\ y(2) = 0$;

2. $e^{3x} y' = y^2 + 9$;

3. $\left(x^2 + 4\right)y' = \operatorname{tg} y,\ y(0) = 0$;

4. $\left(y^2 - 4\right)dx + \sqrt{3 - x^2}\, ydy = 0$;

5. $y' - \frac{x^4}{y^4} = \frac{y}{x},\ y(1) = \sqrt[5]{5}$;

6. $y' = \frac{y + x}{y - x},\ y(1) = 1$;

7. $x \ln\left(\frac{x}{y}\right)dy - ydx = 0$.

Відповіді: 1. $y = 2\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$.

2. $y = 3 \cdot \operatorname{tg}\left(e^x + C\right)$.

3. $y = \arcsin\left(e^{\frac{\operatorname{arctg} x/2}{2}} - 1\right)$.

4. $\frac{1}{y^2 - 4} = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

5. $y^5 = 5x^5 \cdot \left(1 - \ln x\right)$.

6. $\frac{y}{x^2}^2 - \frac{2y}{x} + \frac{2}{x^2} = 1$.

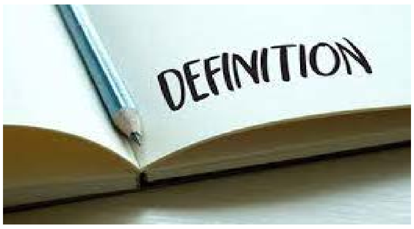
7. $1 + \ln \frac{y}{x} = Cy$.

Заняття друге

<u>Теми:</u>

«Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку»,
«Рівняння Бернуллі»

<u>Матеріали з теорії:</u>



Рівняння вигляду

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x) \tag{1}$$

називається ***лінійним ДР 1-го порядку*.**

Розв'язати таке рівняння можна за допомогою *заміни* невідомої функції та її похідної за формулами:

$$y = u\cdot v,\ y' = u'\cdot v + u\cdot v',\ \text{де } u = u(x), v = v(x).$$

Тоді отримуємо

$$u'\cdot v + u\cdot v' + P(x)\cdot u\cdot v = Q(x)$$

або

$$u\cdot\left(v' + P(x)\cdot v\right) + u'\cdot v = Q(x). \tag{2}$$

Функцію $v(x)$ оберемо так, щоб вираз в дужках в лівій частині (2) дорівнював нулю:

$$v' + P(x)\cdot v = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dx} = -P(x)\cdot v \quad\Rightarrow\quad \ln|v| = -\int P(x)dx \quad\Rightarrow$$

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Розв'язок ДР з відокремлюваними змінними відносно функції $v(x)$ слід підставити в рівняння (2). Це дозволяє отримати ДР з відокремлюваними змінними відносно функції $u(x)$ і його розв'язати. Невідому шукану функцію $y(x)$ знаходимо у вигляді добутку $y = u\cdot v$.

<u>Теоретичні питання:</u>

1. Яким є загальний вигляд лінійного ДР 1-го порядку?

2. Які з поданих рівнянь є лінійними диференціальними рівняннями 1-го порядку:

а) $y' = \frac{\sin x}{y} + e^x$,

б) $(x+3)y' = \operatorname{arctg} x \cdot y + \sqrt{x^2+9}$,

в) $x^2 y' = \sqrt{1+y} \lg x + 3$,

г) $y' = \frac{y}{\sqrt{x+\sin x}} + \arcsin\frac{1}{x}$?

3. Яка заміна невідомої функції виконується при розв'язанні лінійного ДР 1-го порядку?

4. Чому при визначенні функції $v(x)$, тобто першої з двох введених функцій, в процесі інтегрування не записується довільна стала C?

Приклад 1. Розв'язати рівняння $xy' + y = \frac{1}{x^{10}}$.

Розв'язання. Здійснімо перетворення в даному рівнянні: поділимо обидві частини на x. Тоді

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^{11}}.$$

Очевидно, дане рівняння є лінійним ДР 1-го порядку і $P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{1}{x^{11}}$.

Здійснимо заміну невідомої функції $y(x)$, як добуток нових функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$y = u \cdot v, y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Тоді

$$(u' \cdot v + u \cdot v') + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^{11}} \Rightarrow u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^{11}} \Rightarrow u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = \frac{1}{x^{11}}. \quad (3)$$

Знайдемо функцію $v(x)$:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

В результаті інтегрування $\boxed{\ln|v| = -\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}}$.

Останній рядок виділено через те, що в цьому випадку дуже часто виникають помилки. Нагадаємо правило: $\boxed{k \cdot \ln x = \ln x^k}$.

Підставимо отриману функцію $v(x)$ в рівняння (3):

$$x \cdot \frac{1}{x} u' = \frac{1}{x^{10}} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x^{-10}.$$

Відокремлення змінних і інтегрування дозволяє знайти другу з введених функцій $u(x)$:

$$\int du = \int x^{-10} dx \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{9x^9} + C.$$

Тепер можна виразити шукану функцію $y(x)$, яка є загальним розв'язком заданого ДР:

$$y = u \cdot v \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{9x^9} + C \right) = -\frac{1}{9x^{10}} + \frac{C}{x}.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{9x^{10}} + \frac{C}{x}$.

На першому етапі здійснювався пошук довільної функції $v(x)$, при підстановці якої до рівняння (3) вираз у дужках дорівнював нулю. Тому в процесі інтегрування сталу можна було обрати довільним способом. Зокрема, в **прикладі 1** (і всюди в інших прикладах) її зручно було обрати нульовою. При визначені функції $u(x)$ довільна стала інтегрування має бути записана, інакше замість загального розв'язку початкового ДР буде знайдено лише один з частинних розв'язків.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left(2x+y^2\right)y'=y$.

Розв'язання. Очевидно, що дане ДР не є лінійним відносно невідомої функції $y(x)$. Тем не менш, його можна розглядати як лінійне. Запишемо ДР у вигляді

$$\left(2x+y^2\right)\frac{dy}{dx}=y \;\Rightarrow\; y\frac{dx}{dy}=\left(2x+y^2\right).$$

Тепер, якщо розглядати змінну x, як невідому функцію аргументу y, то отримана рівність є лінійним ДР 1-го порядку відносно функції $x(y)$. Для його розв'язання здійснимо заміну невідомої функції $x(y)$:

$$x(y)=u(y)\cdot v(y), \frac{dx}{dy}=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Рівняння приймає вигляд:

$$y\left(u'v+uv'\right)=2uv+y^2 \;\Rightarrow\; yu'v-2uv+yuv'=y^2 \;\Rightarrow$$

$$u\left(yv'-2v\right)+yu'v=y^2 \;. \qquad (4)$$

Знайдемо функцію $v(y)$ з умови

$$yv'-2v=0 \;\Rightarrow\; y\frac{dv}{dy}=2v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v}=2\frac{dy}{y}.$$

Інтегруємо

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \ln|v|=2\ln|y| \;\Rightarrow\; \ln|v|=\ln|y|^2.$$

Відповідно $v=y^2$.

Підставляємо функцію $v(y)$ в ДР (4):

$$y\cdot y^2u'=y^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dy}=\frac{1}{y} \;\Rightarrow\; \int du=\int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; u=\ln C|y|.$$

Тоді шукана функція $x(y)=y^2\ln C|y|$. В результаті отримано загальний інтеграл ДР, тому що формально змінна y залишилась невираженою явно через змінну x.

Відповідь: $x(y)=y^2\ln C|y|$.

Приклади для самостійної роботи

1. $xy' - y = x^5,\ y(1) = 5/4$;

2. $xy' - 2y = \ln x$;

3. $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x},\ y(0) = 2$;

4. $y' - y = \dfrac{e^x}{x^2}$;

5. $\left(x^2+1\right)y' - 2xy = 3\left(x^2+1\right)^4$;

6. $\left(y-x\right)y' = 1$

(*Пропозиція заміни*: $x = u(y)\cdot v(y)$).

Відповіді: 1. $y = \dfrac{x^5}{4} + x$.

2. $y = -\dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{1}{4} + Cx^2$.

3. $y = \sin x + \dfrac{2}{\cos x}$.

4. $y = Ce^x - \dfrac{e^x}{x}$.

5. $y = 3\left(x^2+1\right)\left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x\right) + C\left(x^2+1\right)$.

6. $x = y - 1 + Ce^{-y}$.

Завдання для домашньої роботи

1. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^2 + 3,\ y(-1) = 0$;

2. $y' - \dfrac{y}{x+5} = \left(x+5\right)^2$;

3. $y' + 3y = e^{6x},\ y(0) = 10/9$;

4. $2xy' - y = x - 7$;

5. $xy' + y = 2x\ln x, y(1) = 1$;

6. $y'\left(2x + y^3\cos y\right) = y$

$\left(\text{Заміна: } x = u(y)\cdot v(y)\right)$

Відповіді: 1. $y = \dfrac{x^3}{5} + x + \dfrac{6}{5x^2}$.

2. $y = \dfrac{\left(x+5\right)^3}{2} + C\left(x+5\right)$.

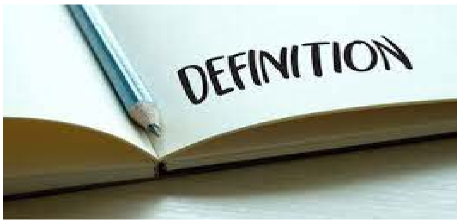
3. $y = \dfrac{1}{9}e^{6x} + e^{-3x}$.

4. $y = x + 7 + C\sqrt{x}$.

5. $y = x\ln x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x}$.

6. $x = y^2\sin y + Cy^2$.

Матеріали з теорії:



Рівняння вигляду

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \qquad (5)$$

називається ***рівнянням Бернуллі***.

Розв'язувати такі рівняння можна способом, наведеним для лінійних ДР 1-го порядку. Здійснюється *заміна* невідомої функції та її похідної за формулами:

$$y = u \cdot v, y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Тоді рівняння приймає вигляд:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x)uv = Q(x)\left(uv\right)^{\alpha} \text{ або } u \cdot \left(v' + P(x)v\right) + u' \cdot v = Q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}. \qquad (6)$$

Обираємо функцію $v(x)$ такою, щоб вираз в дужках в (6) дорівнював нулю

$$v' + P(x) \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Отриману функцію підставляємо до рівняння (6) і розв'язуємо ДР з відокремлюваними змінними відносно функції $u(x)$. Наприкінці знаходимо шукану функцію $y = u \cdot v$.

Теоретичні питання:

1. Записати загальний вигляд рівняння Бернуллі.

2. Які з наведених рівнянь є рівняннями Бернуллі:

а) $y' \sin x + y \cos x = y^{100}$,

б) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x}{y^2}$,

в) $xy' + \dfrac{x}{\sqrt{y}} = y \operatorname{tg} x$,

г) $xy' + x^2 y = y^3 + 1$?

3. Яка заміна невідомої функції виконується при розв'язання ДР Бернуллі?

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' + \frac{2y}{x} = \frac{x}{y^2}$ з початковою умовою $y(1) = 2$.

Розв'язання. Дане ДР – рівняння Бернуллі з $\alpha = -2$. Здійснюємо заміну функції $y = u \cdot v, y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тоді

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2uv}{x} = \frac{x}{u^2 v^2}.$$

В лівій частині рівняння згрупуємо члени, що містять множник u:

$$u \cdot \left(v' + \frac{2v}{x} \right) + u' \cdot v = \frac{x}{u^2 v^2}.$$

Так само, як в лінійних ДР обираємо функцію $v(x)$ за умови, що вираз в дужках дорівнює нулю:

$$v' + \frac{2v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|x| \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{x^2}$$

Підставляємо до рівняння:

$$\frac{1}{x^2} \cdot u' = \frac{x \cdot x^4}{u^2} \Rightarrow u^2 du = x^7 dx \Rightarrow \frac{u^3}{3} = \frac{x^8}{8} + C.$$

Далі

$$u = \sqrt[3]{\frac{3}{8} x^8 + C}.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок ДР:

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8} x^8 + C}.$$

Запишемо частинний розв'язок ДР, використовуючи початкову умову $y(1) = 2$:

$$2=\frac{1}{1^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{8}1^8+C} \;\Leftrightarrow\; 8=\frac{3}{8}+C \;\Rightarrow\; C=\frac{61}{8}.$$

Таким чином, частинний розв’язок ДР:

$$y=\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{8}x^8+\frac{61}{8}} \text{ або } y=\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt[3]{3x^8+61}.$$

Відповідь: $y=\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt[3]{3x^8+61}$.

Приклади для самостійної роботи

1. $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{3}x^2y^4$;

2. $2y'-\frac{y}{x}=\frac{4x^2}{y}$, $y(1)=0$;

3. $\left(x^2+1\right)y'=2xy+x^2y^2$;

4. $y'-2y=-y^3$, $y(0)=1$;

5. $xy'+2y=xy^4$.

Відповіді: 1. $y=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{\ln {}^1\!/_x}}+\frac{C}{x}$.

2. $y^2=2x^3-2x$.

3. $y=\frac{-3\left(x^2+1\right)}{x^3+C}$.

4. $y^2=\frac{2e^{4x}}{1+e^{4x}}$.

5. $y^3=\frac{5x^5}{3x^6+Cx^{11}}$.

Завдання для домашньої роботи

1. $xy'-2y=\frac{x}{y^3}$;

2. $y'-\frac{y}{2x}=3y^4$;

3. $y'-\frac{y}{x}=\frac{x^2}{y^3}$;

4. $y'+\frac{3y}{x}=5x^3y^2$.

Відповіді: 1. $y^4=-\frac{4}{7}x+Cx^8$.

2. $y^3=-\frac{\sqrt{x^3}}{2\sqrt{x^3}+C}$.

3. $y^4=-4x^3+Cx^4$.

4. $y=\frac{1}{Cx^3-5x^4}$.

Заняття третє

Тема:

«Диференціальні рівняння, що припускають зменшення порядку»

Матеріали з теорії:

- ДР вигляду $y^{(n)} = f(x)$ можна розв'язати *послідовним інтегруванням*:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2, \ldots$$

І так далі, аж не буде знайдено функцію $y(x)$.

- ДР вигляду $y'' = f(x, y')$, тобто таке, що *не містить явно невідому функцію* $y(x)$. Порядок таких рівнянь може бути зменшений за допомогою *заміни*:

$$y' = p(x),\ y'' = p'(x).$$

Нова невідома функція $p(x)$ задовольняє ДР 1-го порядку

$$p' = f(x, p).$$

Якщо його можна розв'язати, то розв'язок початкового рівняння можна знайти з умови

$$y' = p(x) \Rightarrow y = \int p(x)dx.$$

- ДР вигляду $y'' = f(y, y')$, тобто таке, що *не містить явно незалежну змінну* x. Застосування *заміни*

$$y' = p(y),\ y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p$$

дозволяє зменшити порядок такого ДР.

Відносно нової невідомої функції отримуємо ДР 1-го порядку

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Якщо розв'язок буде знайдено, тоді шукана функція $y(x)$ є розв'язком ДР $y' = p(y)$.

Теоретичні питання:

1. В яких випадках можна зменшити порядок ДР $F(x,y,y',y'')=0$?
2. Чи можна зменшити порядок ДР $F(y',y'')=0$? Яким способом?
3. В яких з поданих рівнянь можна зменшити порядок:

а) $xy''+(y')^5=\arcsin x$,

б) $y''\sin y+\dfrac{\cos(y')}{y}=3$,

в) $y''=5y'$,

г) $xy''-7y'+3y=0$,

д) $y'''+3y''=x^5$?

4. Яким способом розв'язується ДР вигляду $y^{(n)}=f(x)$?

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'''=x+\sin 2x$.

Розв'язання. Дане ДР розв'язується методом послідовного інтегрування:

$$y''=\int(x+\sin 2x)\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1 \quad\Rightarrow$$

$$y'=\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2 \quad\Rightarrow$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{6}-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^4}{24}+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

Зазначимо, що загальний розв'язок, як і можна було сподіватися для ДР 3-го порядку, містить три сталі C_1, C_2, C_3.

Відповідь: $y=\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{1}{8}\cos 2x+\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $xy'' - 2y' = x^2$.

Розв'язання. ДР містить другу похідну шуканої функції, тобто є ДР другого порядку і *не містить в явному вигляді* функцію y. Порядок даного рівняння можна зменшити, якщо ввести нову функцію $y' = p(x),\ y'' = p'(x)$. Тоді отримуємо $xp' - 2p = x^2$, яке є лінійним ДР першого порядку відносно невідомої функції $p(x)$. Для розв'язання цього рівняння здійснімо заміну:

$$p = uv,\ p' = u'v + uv',$$

далі

$$xu'v + xuv' - 2uv = x^2,$$

$$xu'v + u\left(xv' - 2v\right) = x^2.$$

За припущенням про рівність нулю виразу в дужках отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xv' - 2v = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

Знаходимо функцію $v(x)$:

$$xv' - 2v = 0 \ \Rightarrow\ x\frac{dv}{dx} = 2v \ \Rightarrow\ \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \ \Rightarrow\ \ln|v| = 2\ln|x| \ \Rightarrow\ v = x^2.$$

Повертаємось до другого рівняння з системи і знаходимо функцію $u(x)$:

$$u'x^2 = x \ \Rightarrow\ u' = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ u = \ln|x| + C_1.$$

Запишемо вираз для функції $p(x)$:

$$p(x) = \left(\ln|x| + C_1\right)x^2.$$

Початкову невідому функцію $y(x)$ можна знайти, використовуючи співвідношення $y' = p(x)$:

$$y' = \left(\ln|x| + C_1\right)x^2.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$y = \int\left(\ln|x| + C_1\right)x^2 dx = C_1\frac{x^3}{3} + \int x^2 \ln|x|\, dx =$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{застосовуємо метод}\\ \text{інтегрування частинами}\\ u=\ln|x| \qquad du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=x^2dx \qquad v=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right|$$

$$=C_1\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}\ln|x|-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=C_1\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}\ln|x|-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\frac{1}{3}+C_1\right)+C_2.$$

Таким чином, отримуємо остаточну відповідь – загальний розв'язок даного ДР: $y(x,C_1,C_2)=\dfrac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\dfrac{1}{3}+C_1\right)+C_2$.

Відповідь: $y=\dfrac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\dfrac{1}{3}+C_1\right)+C_2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $yy''-(y')^2+y(y')^3=0$.

Розв'язання. Дане ДР не містить явно незалежну змінну x. Порядок рівняння можна зменшити, якщо здійснити заміну: $y'=p(y),\ y''=p'(y)\cdot p$.

Нова функція задовольняє ДР:

$$ypp'-p^2+yp^3=0 \;\Leftrightarrow\; p\left(p'-\frac{p}{y}+p^2\right)=0.$$

Можливі два випадки:

1) $p=0$, тобто $y'=0 \;\Rightarrow\; y=C$.

2) $p'-\dfrac{p}{y}+p^2=0$ або $p'-\dfrac{p}{y}=-p^2$ – ДР Бернуллі з $\alpha=2$ відносно невідомої функції $p(y)$. Для розв'язання використаємо заміну:

$$p(y)=u(y)\cdot v(y).$$

Тоді рівняння має вигляд

$$u'v+uv'-\frac{uv}{y}=-u^2v^2.$$

За відповідним припущенням методу Бернуллі:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{y} = 0, \\ u' = -u^2 v. \end{cases} \Rightarrow$$

1) $v' - \dfrac{v}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|y| \quad \Rightarrow \quad v = y;$

2) $u' = -u^2 y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{u^2} = -y dy \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{u} = -\dfrac{y^2}{2} - C_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{u} = \dfrac{y^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{u} = \frac{y^2 + C_1}{2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2}{y^2 + C_1}.$$

Таким чином, функція $p(y) = \dfrac{2y}{y^2 + C_1}$.

Тепер залишається знайти шукану функцію $y(x)$ з умови $y' = p(y)$:

$$y' = \frac{2y}{y^2 + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{y^2 + C_1} \Rightarrow \frac{y^2 + C_1}{y} dy = 2dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 \ln|y| = 2x + C_2.$$

Отримали загальний інтеграл ДР.

Відповідь: $\dfrac{y^2}{2} + C_1 \ln|y| = 2x + C_2$.

Приклади для самостійної роботи

1. $y''' = x^2 + \cos 3x + 2$;

2. $y'' - \dfrac{y'}{x} = x^2$;

3. $y''(x+1) + y' = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$;

4. $2yy'' + (y')^2 = 0$;

5. $y'' = (y')^2$.

Відповіді: 1. $y = \dfrac{x^5}{60} - \dfrac{1}{27} \sin 3x + \dfrac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2. $y = \dfrac{x^4}{8} + C_1 x^2 + C_2$.

3. $y = 2\left(1 + \ln|x+1|\right)$.

4. $\sqrt{y^3} = C_1 x + C_2$, $y = \text{const}$.

5. $y = C_1 - \ln|C_2 - x|$.

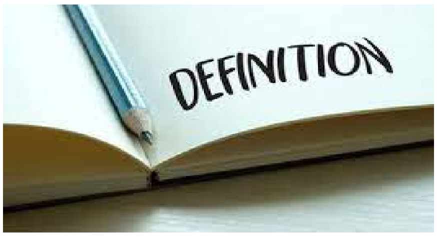
Заняття четверте

<u>Теми:</u>

«Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами»,

«Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною вигляду $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$».

<u>Матеріали з теорії:</u>



ДР вигляду $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$, де a_0, a_1, a_2 – сталі величини, називається ***лінійним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами***; в випадку $f(x)\equiv 0$ ДР є ***однорідним***, а в випадку $f(x)\neq 0$ – рівняння ***неоднорідне***.

Загальний розв'язок лінійного однорідного ДР 2-го порядку є лінійною комбінацією розв'язків y_1, y_2 з фундаментальної системи:

$$\boxed{y_{з.о.}=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2}.$$

Для розв'язання однорідного рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ слід скласти і розв'язати ***характеристичне рівняння*** (алгебраїчне рівняння з невідомою k):

$$\boxed{a_0k^2+a_1k+a_2=0}.$$

В залежності від значення дискримінанту цього квадратного рівняння виникають наступні ситуації:

- $\underline{D>0}$, тоді характеристичне рівняння має два дійсних кореня $k_1\neq k_2$, і загальний розв'язок однорідного ДР записується у вигляді

$$\boxed{y_{з.о.}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}},$$

де $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ – фундаментальна система розв'язків.

- $D = 0$. Характеристичне рівняння має кратний корінь (кратність дорівнює двом) k і, відповідно, загальний розв'язок ДР має вигляд

$$\boxed{y_{з.о.} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}},$$

де $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x \cdot e^{kx}$ – фундаментальна система розв'язків.

- $D < 0$. Характеристичне рівняння має пару комплексно-спряжених коренів $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$. В цьому випадку загальний розв'язок

$$\boxed{y_{з.о.} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)},$$

де $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ – фундаментальна система розв'язків.

Теоретичні питання:

1. Які з поданих ДР є однорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами:

а) $6y'' + y = 0$,

б) $y'' + xy' - 7y = 0$,

в) $y'' + 2y' + y = 14$?

2. Що називається визначником Вронського для двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$?

3. Які розв'язки ДР порядку більше двох утворюють фундаментальну систему розв'язків? Яким є критерій?

4. Записати загальний розв'язок однорідного ДР, якщо розв'язки характеристичного рівняння дорівнюють:

а) $k_1 = -3, k_2 = -3$;

б) $k_1 = 4i, k_2 = -4i$;

в) $k_1 = 2, k_2 = 0$;

г) $k_1 = -2 + 5i, k_2 = -2 - 5i$, $k_3 = -4$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2y'' - 3y' + y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння

$$2k^2 - 3k + 1 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \quad \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{2},$$

тобто корені дійсні і різні – $k_1 \neq k_2$. Таким чином, загальний розв'язок ДР

$$y_{3.0.} = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

Відповідь: $y_{3.0.} = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} \quad \Rightarrow k_1 = k_2 = -3,$$

отримали дійсні і рівні корені, тому загальний розв'язок ДР

$$y_{3.0.} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Відповідь: $y_{3.0.} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 25 = 0.$$

В даному випадку характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = 3 \pm \sqrt{-16} \quad \Rightarrow k_1 = 3 + 4i, k_2 = 3 - 4i.$$

Дійсна частина цих чисел $\alpha = 3$, а модуль уявної $\beta = 4$.

Загальний розв'язок ДР: $y_{3.0.} = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Відповідь: $y_{3.0.} = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' + 25y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння та визначимо його розв'язки

$$k^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow k^2 = -25.$$

В даному випадку характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені, які є чисто уявними числами (дійсна частина дорівнює нулю)

$$k_1 = 5i, k_2 = -5i,$$

модуль уявної частини $\beta = 5$.

Тому загальний розв'язок ДР: $y_{3.0.} = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

Відповідь: $y_{3.0.} = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

Приклади для самостійної роботи

1. $2y'' + 7y' + 5y = 0$;

2. $y'' + 10y' + 9y = 0$;

3. $4y'' + 12y' + 9y = 0$;

4. $y'' + 16y = 0$;

5. $y'' + 25y' = 0$;

6. $y'' + 4y' + 29y = 0$;

7. $y'' - 49y = 0$;

8. $2y'' - y' = 0$;

9. $y'' - 2y' + y = 0$;

10. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Відповіді: 1. $y_{з.о.} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x/2}$.

2. $y_{з.о.} = C_1 e^{-9x} + C_2 e^{-x}$.

3. $y_{з.о.} = C_1 e^{-3x/2} + C_2 x e^{-3x/2}$.

4. $y_{з.о.} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

5. $y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{-25x}$.

6. $y_{з.о.} = e^{-2x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right)$.

7. $y_{з.о.} = C_1e^{7x} + C_2e^{-7x}$.

8. $y_{з.о.} = C_1 + C_2e^{x/2}$.

9. $y_{з.о.} = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$.

10. $y_{з.о.} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$.

Завдання для домашньої роботи

1. $y'' - y' = 0$;

2. $y'' - 36y = 0$;

3. $y'' + 36y = 0$;

4. $y'' - 16y' + 64y = 0$;

5. $4y'' - y = 0$;

6. $3y'' - 5y' - 2y = 0$;

7. $y'' - y' - 12 = 0$;

8. $y'' + 14y' + 49y = 0$;

9. $2y'' - 4y' + 3y = 0$;

10. $y''' + 6y'' + 25y' = 0$.

Відповіді: **1.** $y_{з.о.} = C_1 + C_2e^{x}$.

2. $y_{з.о.} = C_1e^{6x} + C_2e^{-6x}$.

3. $y_{з.о.} = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$.

4. $y_{з.о.} = C_1e^{8x} + C_2xe^{8x}$.

5. $y_{з.о.} = C_1e^{x/2} + C_2e^{-x/2}$.

6. $y_{з.о.} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x/3}$.

7. $y_{з.о.} = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x}$.

8. $y_{з.о.} = C_1e^{-7x} + C_2xe^{-7x}$.

9. $y_{з.о.} = e^{x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}x}{2} + C_2\sin\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$.

10. $y_{з.о.} = C_1 + e^{-3x}\left(C_2\cos 4x + C_3\sin 4x\right)$.

Матеріали з теорії:

Для розв'язання неоднорідного рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ слід знайти деякий частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$. Тоді

Загальний розв'язок неоднорідного ДР є сумою

$$\boxed{y_{\text{з.н.}}=y_{\text{з.о.}}+\tilde{y}(x)},$$

де $y_{\text{з.о.}}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного ДР: $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$.

Якщо функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, то є можливість записати частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$ з невизначеними коефіцієнтами, які слід обчислити.

Розглянемо випадок, коли $f(x)$ є добутком многочлена $P_n(x)$ (n – степінь многочлена) і показникової функції $e^{\alpha x}$: $\boxed{f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}}$ (*). Частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$, в певному сенсі, повторює структуру правої частини ДР, тобто функції $f(x)$. Але також на вигляд $\tilde{y}(x)$ впливає зв'язок між числом α і розв'язками характеристичного рівняння k_1, k_2:

- Якщо $\underline{\alpha\neq k_1, \alpha\neq k_2}$, то окремий розв'язок має вигляд $\boxed{\tilde{y}(x)=Q_n(x)e^{\alpha x}}$, де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами, степінь якого співпадає зі степенем многочлена $P_n(x)$. Наприклад, в випадку $n=0$ многочлен $Q_0(x)=A$, при $n=1$ – $Q_1(x)=Ax+B$, $n=2$ – $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$ і т.д.
- Якщо $\underline{\alpha=k_1, \alpha\neq k_2}$ (або $\underline{\alpha\neq k_1, \alpha=k_2}$), то окремий розв'язок має вигляд $\boxed{\tilde{y}(x)=Q_n(x)e^{\alpha x}\cdot x}$.
- Якщо $\underline{\alpha=k_1=k_2}$, то окремий розв'язок має вигляд $\boxed{\tilde{y}(x)=Q_n(x)e^{\alpha x}\cdot x^2}$.

Теоретичні питання:

1. Які з поданих ДР є неоднорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами та з правою частиною спеціального вигляду (*):

а) $y'' - y = (x+5)e^{2x}$,

б) $y'' - y = \dfrac{3}{e^{4x}}$,

в) $y'' + y = x^2$,

г) $y'' + y = \dfrac{e^{3x}}{x-1}$?

2. Якою є структура загального розв'язку неоднорідного лінійного ДР?

3. Записати загальний вигляд окремого розв'язку, якщо $f(x) = x \cdot e^{-3x}$, а корені характеристичного рівняння $k_1 = 1, k_2 = -1$.

4. Записати загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР, якщо $f(x) = 4e^{-2x}$, а корені характеристичного рівняння $k_1 = 6, k_2 = -2$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' = (3x+1)e^{x}$.

Розв'язання. Дане неоднорідне ДР зі сталими коефіцієнтами має праву частину вигляду $P_n(x)e^{\alpha x}$, тобто праву частину спеціального вигляду. Розв'язання рівняння буде складатися з трьох етапів: відшукання загального розв'язку однорідного ДР, яке відповідає даному неоднорідному ДР; відшукання певного частинного розв'язку неоднорідного ДР; побудова загального розв'язку неоднорідного ДР.

1) Розв'яжемо однорідне ДР: $y'' + 2y' = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k(k+2) = 0$. Розв'язки $k_1 = 0, k_2 = -2$ і, очевидно, $k_1 \neq k_2$. Таким чином, загальний розв'язок $y_{З.О.} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-2 \cdot x}$ або $y_{З.О.} = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

2) Побудуємо певний частинний розв'язок. Права частина ДР $f(x) = (3x+1)e^{x}$. Отже, степінь многочлена $n = 1$ і коефіцієнт $\alpha = 1$. Порівняємо α з коренями характеристичного рівняння – коефіцієнт не співпадає з жодним коренем. Таким чином, частинний розв'язок слід шукати у вигляді: $\tilde{y} = (Ax + B)e^x$. Обчислимо невизначені коефіцієнти A, B:

$$\begin{array}{c|c} 0 & \tilde{y} = (Ax + B)e^x, \\ 2 & \tilde{y}' = (Ax + B)e^x + Ae^x = e^x(Ax + B + A), \\ 1 & \tilde{y}'' = (Ax + B + A)e^x + Ae^x = e^x(Ax + B + 2A). \end{array}$$

Підставимо частинний розв'язок до початкового ДР (для зручності ліворуч вертикальної лінії записуємо коефіцієнти, з якими відповідні похідні невідомої функції входять до лівої частини ДР):

$$e^x(Ax + B + 2A) + 2e^x(Ax + B + A) \equiv (3x + 1)e^x,$$

або після скорочення на e^x і приведення подібних доданків, отримуємо

$$3Ax + 3B + 4A \equiv 3x + 1.$$

Виходячи з ідеї методу невизначених коефіцієнтів, необхідно порівняти коефіцієнти при відповідних степенях змінної x в лівій та правій частинах останнього рівняння.

І тоді

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 3B + 4A = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Випишемо частинний розв'язок

$$\tilde{y} = (x - 1)e^x.$$

3) Загальний розв'язок початкового неоднорідного ДР є сумою загального розв'язку однорідного ДР та частинного розв'язку –

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{-2x} + (x - 1)e^x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{-2x} + (x - 1)e^x$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x}$ з початковими умовами $y(0) = 3, y'(0) = 7$.

Розв'язання. Маємо задачу Коші для неоднорідного ДР з правою частиною спеціального вигляду $P_n(x)e^{\alpha x}$. Розв'язання окрім названих трьох етапів, поданих у попередньому прикладі, буде містити відшукання сталих C_1 та C_2.

1) Розв’яжемо відповідне однорідне ДР:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0$, яке має два однакові корені $k_1 = k_2 = 2$. Для такого випадку загальний розв’язок однорідного ДР:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

2) В правій частині неоднорідного ДР – функція $f(x) = 10e^{2x}$, тобто многочлен нульового степеня $P_0(x) = 10$, помножений на e^{2x} ($\alpha = 2$).

Оскільки маємо ситуацію, коли $\alpha = k_1 = k_2 = 2$, то частинний розв’язок слід шукати у вигляді:

$$\tilde{y} = Ae^{2x}x^2.$$

Знаходимо невизначений коефіцієнт A:

$$\begin{array}{r|l} 4 & \tilde{y} = Ae^{2x}x^2, \\ -4 & \tilde{y}' = 2Ae^{2x}\left(x^2 + x\right), \\ 1 & \tilde{y}'' = 2Ae^{2x}\left(2x^2 + 4x + 1\right). \end{array}$$

Підставляємо вирази $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ до початкового ДР і отримуємо тотожність:

$$4Ae^{2x}x^2 - 8Ae^{2x}\left(x^2 + x\right) + 2Ae^{2x}\left(2x^2 + 4x + 1\right) \equiv 10e^{2x} \Rightarrow$$

$$2Ae^{2x} = 10e^{2x} \Rightarrow$$

$$A = 5.$$

Частинний розв’язок неоднорідного ДР – $\tilde{y} = 5e^{2x}x^2$ (цей частинний розв’язок, очевидно, не є остаточним розв’язком задачі Коші).

3) Загальний розв’язок початкового неоднорідного ДР –

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 5x^2 e^{2x}.$$

4) Залишилось обчислити довільні сталі C_1 та C_2. Підставляємо у загальний розв’язок початкову умову $y(0) = 3$:

$$3 = C_1 e^{2\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{2\cdot 0} + 5 \cdot 0 \cdot e^{2\cdot 0} \Leftrightarrow C_1 = 3.$$

Обчислимо похідну від загального розв'язку

$$y'_{\text{з.н.}} = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}(1+2x) + \left(10x^2 + 10x\right)e^{2x},$$

підставимо до отриманого виразу умову $y'(0) = 7$:

$$7 = 6e^{2\cdot 0} + C_2 e^{2\cdot 0}(1 + 2\cdot 0) + (10\cdot 0 + 10 \cdot 0)e^{2\cdot 0} \Rightarrow C_2 = 1.$$

Запишемо розв'язок задачі Коші: $y = 3e^{2x} + xe^{2x} + 5x^2 e^{2x}$.

Відповідь: $y = 3e^{2x} + xe^{2x} + 5x^2 e^{2x}$.

Приклади для самостійної роботи

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$;

2. $y'' + y = 5x^2 e^{2x}$;

3. $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{2x}$;

4. $y'' - 5y' + 6y = 15e^{-2x}, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

5. $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$;

6. $y'' - 2y' + y = 12xe^x$.

Відповіді: 1. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$.

2. $y_{\text{з.н.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x}\left(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{22}{25}\right)$.

3. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} - \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}$.

4. $y = 3e^{3x} - 4e^{2x} + e^{-2x}$.

5. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 xe^x + x^2 + 2x + 3$.

6. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 xe^x + 2x^3 e^x$.

Завдання для домашньої роботи

1. $y'' - 4y = 4, y(0) = 4, y'(0) = -2$;

2. $y'' - 4y = 8x$;

3. $y'' + 2y' + y = 5e^{-x}$;

4. $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}, y(0) = y'(0) = 0$;

5. $y'' + 2y' + y = x^3 + 1$;

6. $y'' + 4y = 2xe^{-2x}$.

Відповіді: **1.** $y = 2e^{2x} + 3e^{-2x} - 1$.

2. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x$.

3. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \dfrac{5}{2} x^2 e^{-x}$.

4. $y = -e^{2x} \sin x + x e^{2x}$.

5. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^3 - 4x^2 + 10x - 11$.

6. $y_{\text{з.н.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(\dfrac{1}{4} x + \dfrac{1}{8} \right) e^{-2x}$.

Заняття п’яте

Тема:

«Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами та зі спеціальною правою частиною вигляду $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cdot\cos\beta x+R_m(x)\cdot\sin\beta x\right]$»

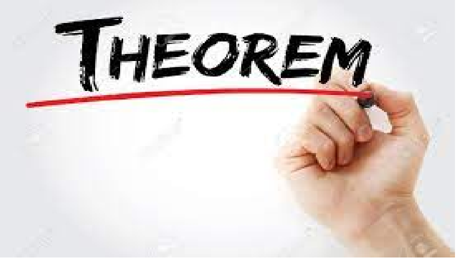
Матеріали з теорії:

Для визначення окремого розв’язку лінійного неоднорідного ДР зі сталими коефіцієнтами $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ в випадку, коли права частина має вигляд

$$\boxed{f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cdot\cos\beta x+R_m(x)\cdot\sin\beta x\right]}\ (**),$$

де $P_n(x)$ і $R_m(x)$ – многочлени, відповідно степенів n та m, які взагалі є різними, тобто $n\neq m$, слід застосувати наступне правило:

- Якщо число $\alpha+i\beta$ *не є розв’язком* характеристичного рівняння, то окремий розв’язок ДР має вигляд $\boxed{\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x]}$, причому многочлени з невизначеними коефіцієнтами $Q_s(x)$ і $N_s(x)$ мають однаковий степінь $s=\max(n,m)$.
- Якщо число $\alpha+i\beta$ *є розв’язком* характеристичного рівняння, то окремий розв’язок ДР має вигляд $\boxed{\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x]\cdot x}$.



***Про суперпозицію окремих розв’язків*:**

Якщо неоднорідне ДР має вигляд

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)\ (***),$$

а $\tilde{y}_i(x)$ – окремий розв’язок неоднорідного ДР

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=f_i(x),\ i=1,\ldots,m,$$

то функція $\tilde{y}(x)=\sum_{i=1}^{m}\tilde{y}_i(x)$ – окремий розв’язок неоднорідного ДР (***).

Теоретичні питання:

1. Які з поданих ДР є неоднорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами та з правою частиною спеціального вигляду (**):

а) $y'' - y = e^{2x}\cos x$,

б) $y'' - y = 3\sin 5x + x\cos 5x$,

в) $y'' + y = e^{-x}\operatorname{tg} x$,

г) $y'' + y = \sqrt{x}\cdot\sin 2x$?

2. Записати загальний вигляд окремого розв'язку неоднорідного ДР з правою частиною $f(x)$ та відомими коренями характеристичного рівняння k_1, k_2:

1) $k_1 = 2i, k_2 = -2i$, $f(x) = -\sin 3x$;

2) $k_1 = 3+i, k_2 = 3-i$, $f(x) = e^{3x}\cos x$;

3) $k_1 = 2, k_2 = -5$, $f(x) = 6\cos 2x + 3x\sin 2x$.

3. Записати загальний розв'язок неоднорідного ДР з правою частиною $f(x)$ та відомими коренями характеристичного рівняння k_1, k_2:

1) $k_1 = 2+i, k_2 = 2-i$, $f(x) = -2\sin x$;

2) $k_1 = -3+i, k_2 = -3-i$, $f(x) = 2e^{-3x}\sin x$;

3) $k_1 = -5, k_2 = -5$, $f(x) = (x+1)\cos 5x$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' - y' = 3\sin 5x$.

Розв'язання. Дане ДР є лінійним неоднорідним, права частина якого має вигляд (**).

1) Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне ДР (тобто його ліва частина співпадає з лівою частиною початкового неоднорідного ДР):

$$y'' - y' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0$ має різні дійсні корені $k_1 = 0, k_2 = 1$. Для такого випадку загальний розв'язок ДР записуємо так

$$y_{з.о.} = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{1\cdot x}, \text{ або } y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{x}.$$

2) Права частина неоднорідного ДР $f(x) = 3\sin 5x$ має спеціальний вигляд (**), а саме, в ній $\alpha = 0$ (показникова функція $e^{\alpha x}$ відсутня), $\beta = 5, P_n(x) \equiv 0, R_0(x) = 3$.

Число $\alpha + \beta i = 5i$ не є розв'язком характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР слід шукати в такому вигляді

$$\tilde{y}(x) = Q_0(x)\cos 5x + N_0(x)\sin 5x,$$

або

$$\tilde{y}(x) = A\cos 5x + B\sin 5x.$$

Многочлени $Q_0(x), N_0(x)$ мають нульовий степінь і $Q_0(x) = A, N_0(x) = B$, тому що в правій частині нульовий степінь мав многочлен $R_0(x) = 3$.

Необхідно визначити невідомі коефіцієнти A, B. Диференціюємо $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x,$$
$$\tilde{y}''(x) = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x.$$

Підставляємо вирази для частинного розв'язку та його похідних до ДР:

$$\begin{array}{r|l} 0 & \tilde{y} = A\cos 5x + B\sin 5x, \\ -1 & \tilde{y}' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x, \\ 1 & \tilde{y}'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x. \end{array}$$

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 5A\sin 5x - 5B\cos 5x \equiv 3\sin 5x,$$
$$(5A - 25B)\sin 5x + (-25A - 5B)\cos 5x \equiv 3\sin 5x.$$

Коефіцієнти при однакових функціях в лівій і правій частині тотожності рівні. Тому

$$\sin 5x: \quad 5A - 25B = 3,$$
$$\cos 5x: -25A - 5B = 0.$$

Розв'яжемо дану лінійну систему з двох рівнянь. Очевидно, $A = \frac{11}{60}, B = -\frac{1}{12}$. І окремий розв'язок $\tilde{y}(x) = \frac{11}{60}\cos 5x - \frac{1}{12}\sin 5x$.

3) Остаточно загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^x + \frac{11}{60}\cos 5x - \frac{1}{12}\sin 5x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^x + \frac{11}{60}\cos 5x - \frac{1}{12}\sin 5x$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 81y = 36\cos 9x$.

Розв'язання. Розв'язання знову буде складатися з двох етапів – визначення загального розв'язку однорідного ДР і визначення частинного розв'язку неоднорідного ДР.

1) Відповідне лінійне однорідне ДР:

$$y'' + 81y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 81 = 0$ має комплексно-спряжені корені $k_1 = 9i, k_2 = -9i$. Загальний розв'язок ДР відповідно

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos 9x + C_2 \sin 9x.$$

2) Права частина початкового неоднорідного ДР $f(x) = 36\cos 9x$ і є добутком многочлена нульового степеня й тригонометричної функції, тобто $\alpha = 0, \beta = 9, P_0(x) = 36, R_m(x) \equiv 0$. Число $\alpha + \beta i = 9i$ є коренем характеристичного рівняння. Це означає, що частинний розв'язок має структуру

$$\tilde{y}(x) = \left[Q_0(x)\cos 9x + N_0(x)\sin 9x\right] \cdot x,$$

інакше

$$\tilde{y}(x) = \left[A\cos 9x + B\sin 9x\right] \cdot x.$$

Далі

$$\tilde{y}'(x) = \left[-9A\sin 9x + 9B\cos 9x\right] \cdot x + A\cos 9x + B\sin 9x,$$

$$\tilde{y}''(x) = \left[-81A\cos 9x - 81B\sin 9x\right] \cdot x - 9A\sin 9x + 9B\cos 9x - 9A\sin 9x + 9B\cos 9x =$$

$$= \left[-81A\cos 9x - 81B\sin 9x\right] \cdot x - 18A\sin 9x + 18B\cos 9x.$$

Для визначення A, B підставимо $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$ та $\tilde{y}''(x)$ в неоднорідне ДР:

$$[-81A\cos 9x - 81B\sin 9x]\cdot x - 18A\sin 9x + 18B\cos 9x +$$
$$+81[A\cos 9x + B\sin 9x]\cdot x \equiv 36\cos 9x,$$

$$-18A\sin 9x + 18B\cos 9x \equiv 36\cos 9x.$$

Розв'язання даного рівняння з двома невідомими A, B еквівалентно розв'язанню системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} -18A = 0, \\ 18B = 36, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 2. \end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного ДР має вигляд $\tilde{y}(x) = 2x\sin 9x$. Слід зауважити, що функція в правій частині ДР містила лише $\cos 9x$, а окремий розв'язок містить $\sin 9x$ – відома в механіці зміна фази вимушених коливань.

3) Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного ДР

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + \tilde{y}(x) = C_1\cos 9x + C_2\sin 9x + 2x\sin 9x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 9x + C_2\sin 9x + 2x\sin 9x$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 8y' + 17y = e^{-4x}\cos x, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Розв'язання задачі Коші – знайдення частинного розв'язку, що задовольняє початковим умовам. Визначимо загальний розв'язок неоднорідного ДР за вже відомою схемою, а далі знайдемо розв'язок, котрий буде таким, що $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

1) Однорідне ДР: $y'' + 8y' + 17y = 0$;

характеристичне рівняння $k^2 + 8k + 17 = 0$, його розв'язки

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 17}}{2} = \frac{-8 \pm 2i}{2} = -4 \pm i.$$

Ситуація комплексно-спряжених коренів. Відповідний загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_{\text{з.о.}} = e^{-4x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right).$$

2) Наступний крок – визначення загального вигляду окремого розв'язку неоднорідного ДР у відповідності з правою частиною спеціального вигляду $f(x) = e^{-4x}\cos x$. За правилом, окремий розв'язок повторює структуру правої частини (**). Для $f(x)$ даного ДР $\alpha = -4$, $\beta = 1, P_0(x) = 1, R_m(x) \equiv 0$. Число $\alpha + \beta i = -4 + i$ є розв'язком характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР

$$\tilde{y}(x) = e^{-4x}\left[A\cos x + B\sin x\right]\cdot x.$$

Його похідні

$$\tilde{y}'(x) = -4e^{-4x}\left[A\cos x + B\sin x\right]\cdot x + e^{-4x}\left[A\cos x + B\sin x\right] + \\ + e^{-4x}\left[-A\sin x + B\cos x\right]\cdot x,$$

$$\tilde{y}''(x) = 15e^{-4x}\left[A\cos x + B\sin x\right]\cdot x - 8e^{-4x}\left[A\cos x + B\sin x\right] - \\ -8e^{-4x}\left[-A\sin x + B\cos x\right]\cdot x + 2e^{-4x}\left[-A\sin x + B\cos x\right].$$

Після підстановки до початкового неоднорідного ДР

$$\tilde{y}'' + 8\tilde{y}' + 17\tilde{y} = 2e^{-4x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) \equiv e^{-4x}\cos x,$$

і відповідна система для визначення A і B:

$$\begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

3) Запишемо загальний розв'язок

$$y_{\text{з.н.}} = e^{-4x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + 1/2\, xe^{-4x}\sin x.$$

З цього сімейства розв'язків виділимо такий, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2, y'(0) = 1$. Підставимо в загальний розв'язок $x = 0$ і скористаємося початковою умовою $y(0) = 2$:

$$y(0) = e^{-4\cdot 0}\left(C_1\cos 0 + C_2\sin 0\right) + 1/2\, 0\cdot e^{-4\cdot 0}\sin 0 = C_1 = 2.$$

Похідна

$$y'_{\text{з.н.}} = -4e^{-4x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^{-4x}\left(-C_1\sin x + C_2\cos x\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}e^{-4x}\sin x + \tfrac{1}{2}xe^{-4x}\cos x - 2xe^{-4x}\sin x,$$

а її значення при $x = 0$:

$$y'(0) = -4C_1 + C_2 = -8 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 9.$$

Можемо зробити висновок, що частинний розв'язок задачі Коші

$$y = e^{-4x}\left(2\cos x + 9\sin x\right) + \tfrac{1}{2}xe^{-4x}\sin x.$$

Відповідь: $y = e^{-4x}\left(2\cos x + 9\sin x\right) + \tfrac{1}{2}xe^{-4x}\sin x$.

Приклад 4. Розв'язати ДР $y'' + 9y = 2x\cos x + 3\sin 3x$.

Розв'язання. Дане ДР є лінійним, неоднорідним, зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо відповідне однорідне ДР і знайдемо його загальний розв'язок.

Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ і його корені $k_{1,2} = \pm 3i$. Таким чином загальний розв'язок однорідного ДР: $y_{\text{з.о.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.

Права частина $f(x) = 2x\cos x + 3\sin 3x$ не є правою частиною спеціального вигляду ні типу (*), ні типу (**). Але доданки, з яких вона складається, кожний окремо є правою частиною спеціального вигляду: $f_1(x) = 2x\cos x,\ f_2(x) = 3\sin 3x$. Скористаємося теоремою про суперпозицію розв'язків і визначимо окремі розв'язки для неоднорідних ДР з відповідними правими частинами.

1) $y'' + 9y = 2x\cos x$. Права частина $f_1(x) = 2x\cos x$ є функцією типу (**), причому $\alpha = 0, \beta = 1, P_1(x) = 2x, R_m(x) \equiv 0$. Число $\alpha + \beta i = i$ не є розв'язком характеристичного рівняння. Виходячи з цього, частинний розв'язок запишемо:

$$\tilde{y}_1(x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x,$$

многочлени $Q_1(x) = Ax + B, N_1(x) = Cx + D$ в $\tilde{y}_1(x)$ мають однаковий перший степінь, як максимальний степінь многочленів $P(x), R(x)$ в правій частині.

І далі

$$\begin{array}{r|l}
9 & \widetilde{y_1}(x)=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,\\
0 & \tilde{y}'_1(x)=A\cos x+C\sin x-(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x,\\
1 & \tilde{y}''_1(x)=-2A\sin x+2C\cos x-(Ax+B)\cos x-(Cx+D)\sin x.\\
\hline
\multicolumn{2}{l}{8(Ax+B)\cos x+8(Cx+D)\sin x-2A\sin x+2C\cos x\equiv 2x\cos x.}
\end{array}$$

Для чотирьох невизначених коефіцієнтів A,B,C,D можна записати співвідношення:

$$\begin{array}{ll}
x\cdot\cos x: & 8A=2,\\
\cos x \quad : & 8B+2C=0,\\
x\cdot\sin x: & 8C=0,\\
\sin x \quad : & 8D-2A=0.
\end{array}$$

З яких випливає $A=\frac{1}{4}, B=0, C=0, D=\frac{1}{16}$.

І частинний розв'язок $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{16}\sin x$.

2) $y''+9y=3\sin 3x$. Права частина $f_2(x)=3\sin 3x$ є функцією типу (**), причому $\alpha=0, \beta=3, P_n(x)\equiv 0, R_0(x)=3$. Число $\alpha+\beta i=3i$ є розв'язком характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок запишемо:

$$\tilde{y}_2(x)=(E\cos 3x+F\sin 3x)\cdot x.$$

Наступна дія – підстановка $\tilde{y}_2(x)$ в неоднорідне ДР $y''+9y=3\sin 3x$. Інакше

$$\begin{array}{r|l}
9 & \tilde{y}_2(x)=(E\cos 3x+F\sin 3x)\cdot x,\\
0 & \tilde{y}'_2(x)=E\cos 3x+F\sin 3x+(-3E\sin 3x+3F\cos 3x)\cdot x,\\
1 & \tilde{y}''_2(x)=-6E\sin 3x+6F\cos 3x+(-9E\cos 3x-9F\sin 3x)\cdot x.\\
\hline
\multicolumn{2}{l}{-6E\sin 3x+6F\cos 3x\equiv 3\sin 3x.}
\end{array}$$

Для коефіцієнтів E,F складемо залежності:

$$\begin{cases}-6E=3,\\ 6F=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E=-\frac{1}{2},\\ F=0.\end{cases}$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{2}x\cos 3x$.

Остаточно загальний розв'язок початкового неоднорідного ДР

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{16}\sin x - \frac{1}{2}x\cos 3x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{16}\sin x - \frac{1}{2}x\cos 3x$.

Приклади для самостійної роботи

1. $y'' + 9y = \sin 3x - 3\cos 3x,$ $y(0) = y'(0) = 0;$

2. $y'' + y = \cos x - 2x;$

3. $y'' + 2y' - 3y = e^x \sin 3x;$

4. $y'' + 2y' - 3y = x\sin 3x + 122\cos 3x,$ $y(0) = 0, y'(0) = 0;$

5. $y'' - 2y' + y = \cos x - 2\sin x$**;**

6. $y'' - 2y' + y = e^{-x}\cos x$**.**

Відповіді: 1. $y = \frac{1}{18}\sin 3x + x\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{6}\cos 3x\right).$

2. $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cdot\sin x - 2x.$

3. $y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2e^{-3x} - e^x\left(\frac{9}{181}\cos 3x + \frac{10}{181}\sin 3x\right).$

4. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - e^x\left(\frac{9}{181}\cos 3x + \frac{10}{181}\sin 3x\right).$

5. $y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2xe^x - \cos x - \frac{1}{2}\sin x.$

6. $y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-x}\left(\frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x\right).$

Завдання для домашньої роботи

1. $y'' + 4y = 4\cos 2x + 8\sin 2x,$
$y(0) = 1, y'(0) = 0;$

2. $y'' - 9y = 6e^{3x} + 24e^{-3x},$
$y(0) = 1, y'(0) = 3;$

3. $y'' + 2y' + y = -\sin x;$

4. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}\cos 2x.$

Відповіді: **1.** $y = \cos 2x + \sin 2x - 2x\cos 2x + x\sin 2x.$

2. $y = \dfrac{3}{2}e^{3x} - \dfrac{1}{2}e^{-3x} + xe^{3x} - 4xe^{-3x}.$

3. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \dfrac{1}{2}\cos x.$

4. $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - e^{-x}\cos 2x.$

Заняття шосте

Теми:

«Розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь методом Лагранжа», «Розв'язання систем диференціальних рівнянь»

Матеріали з теорії:

Нагадаємо, що для розв'язання неоднорідного ДР слід знайти будь-який частинний розв'язок цього рівняння, і тоді загальний розв'язок представляється сумою загального розв'язку однорідного ДР, що відповідає даному неоднорідному ДР, і частинного розв'язку.

Універсальним методом відшукання загального розв'язку неоднорідного ДР є метод Лагранжа (***метод варіації сталих***), який припускає, що загальний розв'язок неоднорідного ДР представляється як $y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$, де $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки з фундаментальної системи розв'язків (в зазначених випадках це були відповідно $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$; $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$; $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$), а $C_1(x), C_2(x)$ – певні функції змінної x. Можна показати, що тоді відшукання загального розв'язку неоднорідного ДР здійснюється розв'язанням системи рівнянь:

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}} \qquad (1)$$

Невідомими системи (1) є функції $C_1'(x)$, $C_2'(x)$. Очевидно, що по відшуканню $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ подальшим інтегруванням визначаються

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + C_1, C_2(x) = \int C_2'(x)dx + C_2,$$

і далі розв'язок $y = y(x, C_1, C_2)$.

Теоретичні питання:

1. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного однорідного ДР?

2. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР?

3. Що називається фундаментальною системою розв'язків однорідного ДР?

4. Які існують методи розв'язання неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

Приклад 1. Розв'язати неоднорідне ДР: $4y''+y=\dfrac{2}{1+\cos x}$.

Розв'язання. Запишемо відповідне лінійне однорідне ДР: $4y''+y=0$. Складемо для нього характеристичне рівняння: $4k^2+1=0 \Leftrightarrow k^2=-{}^1\!/_4$; його корені –комплексно-спряжені числа $k_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}i$. Фундаментальна система розв'язків містить дві функції $y_1=\cos\dfrac{x}{2}, y_2=\sin\dfrac{x}{2}$.

Загальний розв'язок однорідного ДР – лінійна комбінація розв'язків з фундаментальної системи: $y_{\text{з.о.}}=C_1\cos\dfrac{x}{2}+C_2\sin\dfrac{x}{2}$. Загальний розв'язок неоднорідного ДР, згідно з методом Лагранжа, будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{з.н.}}=C_1(x)\cdot\cos\frac{x}{2}+C_2(x)\cdot\sin\frac{x}{2}. \tag{2}$$

Похідні $C_1'(x), C_2'(x)$ задовольняють системі лінійних рівнянь (1), є невідомими:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos\dfrac{x}{2}+C_2'(x)\cdot\sin\dfrac{x}{2}=0, \\ C_1'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)+C_2'(x)\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{1+\cos x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему методом Крамера. Визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos\dfrac{x}{2} & \sin\dfrac{x}{2} \\ -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} & \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Визначники $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{x}{2} \\ \frac{2}{1+\cos x} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -\frac{2\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x} = -\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{2}{1+\cos x} \end{vmatrix} = \frac{2\cos\frac{x}{2}}{1+\cos x} = \frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Відповідно $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{\cos\frac{x}{2}}$.

Інтегруємо

$$C_1(x) = \int -\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = 4\int\frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = -\frac{4}{\cos\frac{x}{2}} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int\frac{2}{\cos\frac{x}{2}}dx = 4\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2 .$$

Підставляємо до розв'язку (2) функції $C_1(x), C_2(x)$ і отримуємо шуканий розв'язок неоднорідного ДР:

$$y_{\text{з.н.}} = \left(-\frac{4}{\cos\frac{x}{2}} + C_1\right)\cdot\cos\frac{x}{2} + \left(4\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2\right)\cdot\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \underbrace{\left[C_1\cdot\cos\frac{x}{2} + C_2\cdot\sin\frac{x}{2}\right]}_{y_{\text{з.о.}}} + \underbrace{\left[-4 + 4\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\cdot\sin\frac{x}{2}\right]}_{\tilde{y}}.$$

Слід зауважити, що даний загальний розв'язок має необхідну відповідну структуру, тобто є сумою загального розв'язку однорідного ДР та деякого частинного розв'язку неоднорідного ДР.

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1\cdot\cos\frac{x}{2} + C_2\cdot\sin\frac{x}{2} + 4\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\cdot\sin\frac{x}{2} - 4.$

Приклади для самостійної роботи

1. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$;

2. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$;

3. $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 3x}$.

Відповіді: 1. $y_{\text{з.н.}}=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{-x}+\dfrac{e^{-2x}}{3}\ln\left(e^x+1\right)+\dfrac{e^{-x}}{3}\left[-x+\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right]$.

2. $y_{\text{з.н.}}=C_1\cdot e^x+C_2\cdot xe^x+e^x\cdot\left(\sqrt{4-x^2}+x\cdot\arcsin\dfrac{x}{2}\right)$.

3. $y_{\text{з.н.}}=C_1\cdot\cos 3x+C_2\cdot\sin 3x-\dfrac{1}{3}x\cdot\cos 3x+\dfrac{1}{9}\sin 3x\cdot\ln\left|\sin 3x\right|$.

Завдання для домашньої роботи

1. $y''-y'=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$;

2. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

3. $y''+2y'+y=3e^{-x}\cdot\sqrt{1+x}$;

4. $y''-y'=e^{2x}\cdot\sin e^x$.

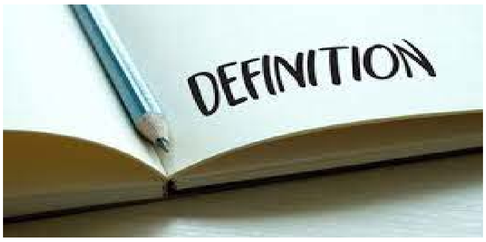
Відповіді: 1. $y_{\text{з.н.}}=C_1+C_2\cdot e^x-\ln\left(1+e^x\right)+e^x\cdot\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. $y_{\text{з.н.}}=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x-1+\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right|$.

3. $y_{\text{з.н.}}=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot xe^{-x}+\dfrac{12}{15}e^{-x}\cdot\sqrt{(1+x)^5}$.

4. $y_{\text{з.н.}}=C_1+C_2\cdot e^x-\sin e^x$.

Матеріали з теорії:



Система диференціальних рівнянь другого порядку вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(t, x, y), \end{cases} \tag{3}$$

де t – незалежна змінна; $x(t), y(t)$ – невідомі функції, називається ***нормальною системою ДР***.

Клас функцій вигляду $x = x(t, C_1, C_2), y = y(t, C_1, C_2)$ – ***загальний розв'язок системи*** (3), якщо при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2 пара функцій x, y є розв'язком (3).

Задача Коші для системи ДР (3): знайти розв'язок $x = x(t), y = y(t)$ такий, що задовольняє початковим умовам $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$.

Іноді нормальну систему ДР можна привести до одного диференціального рівняння другого порядку, яке містить одну невідому функцію. Цього можна досягти через диференціювання одного з рівнянь системи і виключенням усіх невідомих, окрім однієї – ***метод виключення*** інтегрування систем диференціальних рівнянь.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи ДР

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 6y. \end{cases}$$

Розв'язання. Візьмемо перше ДР в системі: $\dfrac{dx}{dt} = -6x + 4y$ і ще раз диференціюємо його:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}.$$

Виключимо з нього невідому $y(t)$ та її похідну. Для цього з другого рівняння системи підставимо вираз для похідної $\frac{dy}{dt}=9x-6y$, а далі з першого рівняння функцію $y=\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}+6x\right)$, тому

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-6\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}=-6\frac{dx}{dt}+4(9x-6y)=-6\frac{dx}{dt}+36x-24y=$$

$$=-6\frac{dx}{dt}+36x-24\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}+6x\right)=-12\frac{dx}{dt},$$

або $\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}=0$.

На попередніх заняттях ми розглядали ДР, в яких шуканою функцією був $y(x,C_1,C_2)$, відповідно x – незалежна змінна. В системах ДР і y, і x є функціями параметра t, тому доречно застосовувати символ похідної $\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2}$.

Рівняння $\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}=0$ – лінійне однорідне ДР другого порядку відносно невідомої функції $x(t)$. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2+12k=0\Leftrightarrow k(k+12)=0$, а його корені $k_1=0,k_2=-12$. Тому загальний розв'язок $x(t,C_1,C_2)=C_1+C_2e^{-12t}$.

Другу невідому функцію $y(t)$ можна знайти з співвідношення

$$y=\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}+6x\right).$$

Таким чином,

$$y(t,C_1,C_2)=\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\left(C_1+C_2e^{-12t}\right)+6\left(C_1+C_2e^{-12t}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-12C_2e^{-12t}+6C_1+6C_2e^{-12t}\right)=\frac{3}{2}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right).$$

Загальний розв'язок системи ДР:

$$x(t,C_1,C_2)=C_1+C_2e^{-12t},\ y(t,C_1,C_2)=\frac{3}{2}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right).$$

Відповідь: $x(t,C_1,C_2)=C_1+C_2e^{-12t},\ y(t,C_1,C_2)=\frac{3}{2}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right).$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$$

$$x(0)=2,\, y(0)=-1.$$

Розв'язання. Застосуємо для розв'язання метод виключення. Візьмемо друге рівняння системи і диференціюємо його ще раз:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=3\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}.$$

А далі будемо виключати з цього рівняння невідому функцію $x(t)$ та її похідну $\frac{dx}{dt}$, застосовуючи співвідношення з системи ДР, а саме $\frac{dx}{dt}=4x-3y$ і $x=\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}-4y\right)$:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=3\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}=3(4x-3y)+4\frac{dy}{dt}=12\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}-4y\right)-9y+4\frac{dy}{dt}=$$
$$=8\frac{dy}{dt}-25y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-8\frac{dy}{dt}+25y=0.$$

Дане ДР – лінійне однорідне ДР другого порядку відносно невідомої функції $y(t)$.

Відповідне характеристичне рівняння: $k^2-8k+25=0$; його корені

$$k_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 25}}{2}=\frac{8\pm 6i}{2}=4\pm 3i.$$

Загальний розв'язок ДР – $y(t,C_1,C_2)=e^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right)$.

Невідома функція $x(t,C_1,C_2)$ відповідно

$$x(t,C_1,C_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}-4y\right)=\frac{1}{3}\Big[4e^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right)+e^{4t}\left(-3C_1\sin 3t+3C_2\cos 3t\right)-$$
$$-4e^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right)\Big]=e^{4t}\left(-C_1\sin 3t+C_2\cos 3t\right).$$

Загальний розв'язок системи ДР:

$$x(t,C_1,C_2)=e^{4t}\left(-C_1\sin 3t+C_2\cos 3t\right),\ y(t,C_1,C_2)=e^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right).$$

Враховуючи поставлені початкові умови задачі Коші, виділимо з сімейства загальних розв'язків частинний розв'язок:

$$x(0)=e^{4\cdot 0}\left(-C_1\sin 0+C_2\cos 0\right)=C_2=2,$$

$$y(0)=e^{4\cdot 0}\left(C_1\cos 0+C_2\sin 0\right)=C_1=-1.$$

Остаточно частинний розв'язок задачі Коші

$$x(t)=e^{4t}\left(\sin 3t+2\cos 3t\right),\ y(t)=e^{4t}\left(-\cos 3t+2\sin 3t\right).$$

Відповідь: $x(t)=e^{4t}\left(\sin 3t+2\cos 3t\right),\ y(t)=e^{4t}\left(-\cos 3t+2\sin 3t\right)$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи ДР

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-y-5t+1,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y+t-1.\end{cases}$$

Розв'язання.

Дана система диференціальних рівнянь є ***неоднорідною***, тобто системою вигляду

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t),\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+f_2(t).\end{cases}$$

Застосуємо для розв'язання метод виключення. Розглянемо перше рівняння і обчислимо похідну обох частин по змінній t:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}-5. \qquad (*)$$

З другого рівняння системи $\frac{dy}{dt}=x+2y+t-1$, а з першого – $y=4x-\frac{dx}{dt}-5t+1$.

Дані вирази підставимо в (*):

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4\frac{dx}{dt}-x-2y-t+1-5=4\frac{dx}{dt}-x-2\cdot\left(4x-\frac{dx}{dt}-5t+1\right)-t-4=$$

$$=6\frac{dx}{dt}-9x+9t-6.$$

Таким чином, отримуємо неоднорідне ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+9x=9t-6. \qquad (**)$$

Структура загального розв'язку даного рівняння $x_{\text{з.н.}}=x_{\text{з.о.}}+\tilde{x}(t)$. Характеристичне рівняння $k^2-6k+9=0 \Leftrightarrow (k-3)^2=0$, має кратний корінь $k_1=k_2=3$. Тому $x_{\text{з.о.}}=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}$. Права частина неоднорідного рівняння (**) має спеціальний вигляд, а саме, є многочленом першого степеня. В зв'язку з чим, частинний розв'язок $\tilde{x}(t)=At+B$. Визначимо невідомі коефіцієнти A,B підстановкою частинного розв'язку до ДР (**):

$$\begin{array}{r|l} 9 & \tilde{x}(t)=At+B, \\ -6 & \tilde{x}'(t)=A, \\ 1 & \tilde{x}''(t)=0. \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-6A+9At+9B\equiv 9t-6.} \end{array}$$

Очевидно, що $9A=9\Rightarrow A=1$ і $-6A+9B=-6\Rightarrow -6+9B=-6\Rightarrow B=0$. Таким чином, $\tilde{x}(t)=t$ і $x_{\text{з.н.}}=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}+t$.

Залишається визначити другу шукану функцію $y = y(C_1, C_2, t)$. З першого рівняння системи вираз для неї: $y = 4x - \frac{dx}{dt} - 5t + 1$.

Далі

$$y_{\text{з.н.}} = 4\left(C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + t\right) - \frac{d}{dt}\left(C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + t\right) - 5t + 1 =$$

$$= 4\left(C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + t\right) - \left(3C_1 e^{3t} + C_2\left(e^{3t} + 3te^{3t}\right) + 1\right) - 5t + 1 =$$

$$= C_1 e^{3t} - C_2 e^{3t} + C_2 t e^{3t} - t = \left(C_1 - C_2\right)e^{3t} + C_2 t e^{3t} - t.$$

Остаточно, $x = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + t$, $y = \left(C_1 - C_2\right)e^{3t} + C_2 t e^{3t} - t$.

Відповідь: $x(t, C_1, C_2) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + t$, $y(t, C_1, C_2) = \left(C_1 - C_2\right)e^{3t} + C_2 t e^{3t} - t$.

Приклади для самостійної роботи

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 1$.

Відповіді. 1. $x(t, C_1, C_2) = C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}$,

$y(t, C_1, C_2) = -2C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}$.

2. $x(t, C_1, C_2) = C_2 e^{2t}$,

$y(t, C_1, C_2) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$.

3. $x(t) = -2e^{-t}\sin t$,

$y(t) = e^{-t}\left(\cos t + \sin t\right)$.

Завдання для домашньої роботи

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

$x(0) = 2, y(0) = 2$.

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = 3$.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$

Відповіді. 1. $x(t, C_1, C_2) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$,
$y(t, C_1, C_2) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$.

2. $x(t) = 2e^{4t}$,
$y(t) = 2e^{4t}$.

3. $x(t) = -e^t + 2e^{3t}$,
$y(t) = e^t + 2e^{3t}$.

4. $x(t, C_1, C_2) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \dfrac{6}{5} e^{2t}$,

$y(t, C_1, C_2) = (2C_1 + C_2)\cos t + (2C_2 - C_1)\sin t + \dfrac{49}{5} e^{2t}$.

Самостійна робота (заняття 1-3)

1. Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння.

2. Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння.

3. Розв'язати задачу Коші.

Варіант 1

1. $x^2dy+(y-2)dx=0$;

2. $(x+2y)dx-xdy=0$;

3. $(1+e^x)yy'=e^x, y(0)=1$.

Варіант 2

1. $y'=3^{x+y}$;

2. $y+\sqrt{xy}=xy'$;

3. $y'=\dfrac{2x}{3y}, y(0)=1$.

Варіант 3

1. $y'(x^2+2)=y$;

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{3y^2+1}$;

3. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}, y(-1)=1$.

Варіант 4

1. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$;

2. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$;

3. $(x^2-4)y'=2xy, y(0)=1$.

Варіант 5

1. $x^2+y^2+xyy'=0$;

2. $xydx+\sqrt{1-x^2}dy=0$;

3. $y'=2\sqrt{y}\ln x, y(e)=1$.

Варіант 6

1. $(1-x^2)dy=\left(xy+xy^2\right)dx$;

2. $y'=y\cdot\operatorname{tg}x$;

3. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+8, y(0)=1$.

Контрольна робота (заняття 4-6)

1. Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння.

2. Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння.

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

Варіант 1

1. $y'' + 4y' + 4y = 17\sin x + 6\cos x$;

2. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3 x}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Варіант 2

1. $y'' + 4y = -56e^{2x}$;

2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

Варіант 3

1. $y'' - 2y' - 3y = -6x^2 + 7x - 4$;

2. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$

Варіант 4

1. $y'' + 2y' + 2y = 85e^{3x}$;

2. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^4}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

Варіант 5

1. $y'' + y = 4e^x$;

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$

Варіант 6

1. $y'' + y = 2\cos x - \sin x$;

2. $4y'' + y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Додаток 1.

Розв'язання систем диференціальних рівнянь довільного порядку

Метод виключення розв'язання систем диференціальних рівнянь достатньо просто дозволяє розв'язати систему, що складається з двох рівнянь. Вже в випадку трьох рівнянь задача ускладнюється. Розглянемо ***універсальний метод*** розв'язання систем диференціальних рівнянь, що базується на поняттях ***характеристичного рівняння*** системи ДР, ***спектру матриці***.

Розглянемо систему лінійних ДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_i(t) + f_i(t), \quad i = 1,\dots,n \ , \qquad (1)$$

де a_{ij} – коефіцієнти рівнянь, $y_i(t)$ – шукані функції, t – незалежна змінна.

Перепишемо систему (1) в матричній формі. Нехай

$$\mathbf{Y(t)} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

тоді система (1) набуває вигляду

$$\frac{d\mathbf{Y(t)}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y(t)} + \mathbf{F}. \qquad (2)$$

Якщо $\mathbf{F} \equiv 0$, то система (2) називається ***однорідною***. Теореми про структуру загального розв'язку однорідної і неоднорідної системи ДР аналогічні відповідним теоремам для лінійних ДР.

Розглянемо однорідну систему ДР:

$$\frac{d\mathbf{Y(t)}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y(t)}. \qquad (3)$$

Розв'язок (3) шукатимемо в вигляді:

$$\mathbf{Y(t)} = \mathbf{V} \cdot e^{kt} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot e^{kt} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot e^{kt} \\ \vdots \\ v_n \cdot e^{kt} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

слід визначити $\mathbf{V}, k$.

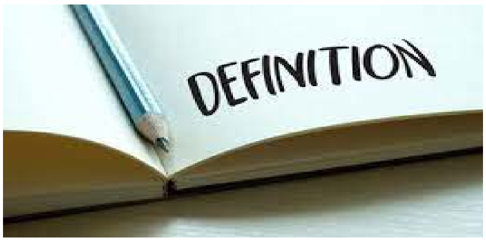
Підставимо (3) до (4):

$$k\cdot\mathbf{V}\cdot e^{kt}\equiv\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}\cdot e^{kt}\Leftrightarrow\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}-k\cdot\mathbf{V}=0\Leftrightarrow\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}-k\cdot\mathbf{E}\right)=0, \tag{5}$$

$\mathbf{E}$ – одинична матриця розміру $n\times n$.

Останнє співвідношення є однорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку відносно $v_1,\ldots,v_n$; вона має ненульовий розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\det\left(\mathbf{A}-k\cdot\mathbf{E}\right)=0. \tag{6}$$



Рівняння (6) називається ***характеристичним рівнянням***. Це алгебраїчне рівняння n-го порядку; його корені $k_1,\ldots,k_n$ – ***характеристичні числа*** (або ***спектр матриці*** $\mathbf{A}$).

Нехай усі $k_1,\ldots,k_n$ – дійсні числа, які є різними. Якщо для кожного $k_i, i=1,\ldots,n$ розв'язати систему (5), то отримаємо набір векторів $\mathbf{V}^{(i)}, i=1,\ldots,n$. Тоді

$$\mathbf{Y}^{(i)}(\mathbf{t})=\mathbf{V}^{(i)}\cdot e^{k_i t}, i=1,\ldots,n \tag{7}$$

– розв'язки системи (3), причому лінійно незалежні.

Загальний розв'язок однорідної системи ДР (3):

$$\mathbf{Y}_{\text{о.о.}}(t)=C_1\cdot\mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{t})+\ldots+C_n\cdot\mathbf{Y}^{(n)}(\mathbf{t}), C_1,\ldots,C_n\in\mathbb{R} \tag{8}$$

Приклад 1. Розв'язати однорідну систему ДР

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1+2y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=4y_1+3y_2.\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо вектор шуканих функцій та матрицю системи:

$$\mathbf{Y(t)} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{A} - k \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (аналог системи (5)).}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(\mathbf{A} - k \cdot \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-k)(3-k) - 8 = 0,$$

$$k^2 - 4k - 5 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}, \ k_1 = 5, k_2 = -1.$$

Розглянемо перше значення $k_1 = 5$. Підставляємо до $(\mathbf{A} - k \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V} = 0$ для визначення вектора $\mathbf{V}^{(1)}$.

$$(\mathbf{A} - k_1 \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-k_1 & 2 \\ 4 & 3-k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4v_1^{(1)} + 2v_2^{(1)} = 0$$

(друге рівняння системи таке саме). Або $v_2^{(1)} = 2v_1^{(1)}$, і, якщо $v_1^{(1)} = 1$, то $v_2^{(1)} = 2$.

Тобто $\mathbf{V}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Наступне друге значення спектру матриці $\mathbf{A}$ – $k_2 = -1$. Визначимо вектор $\mathbf{V}^{(2)}$:

$$(\mathbf{A} - k_2 \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-k_2 & 2 \\ 4 & 3-k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2v_1^{(2)} + 2v_2^{(2)} = 0 \Rightarrow v_1^{(2)} = -v_2^{(2)},$$

Нехай, наприклад, $v_1^{(2)} = 1$, тоді $v_2^{(2)} = -1$. Вектор $\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Згідно з (10)-(11) загальний розв'язок даної однорідної системи ДР:

$$\mathbf{Y}_{\text{o.o.}}(t) = C_1 \cdot \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{t}) + C_2 \cdot \mathbf{Y}^{(2)}(\mathbf{t}) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{5t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $y_1(t, C_1, C_2) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}, y_2(t, C_1, C_2) = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$.

Приклад 2 . Розв'язати однорідну систему з трьох ДР

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Вектор шуканих функцій в даному випадку має три компоненти $\mathbf{Y(t)} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, матриця $\mathbf{A}$ системи: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\det(\mathbf{A} - k \cdot \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-k & -1 & 1 \\ -1 & 5-k & -1 \\ 1 & -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0;$$

розкладемо детермінант, наприклад, за правилом трикутника:

$$(3-k)^2 \cdot (5-k) + 1 + 1 - (5-k) - (3-k) - (3-k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3-k)^2\cdot(5-k)+3k-9=0 \Leftrightarrow$$

$$(3-k)^2\cdot(5-k)-3(3-k)=0 \Leftrightarrow$$

$$(3-k)\cdot\big((5-k)\cdot(3-k)-3\big)=0 \Leftrightarrow$$

$$(3-k)\cdot\left(k^2-8k+12\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$(3-k)\cdot(k-2)\cdot(k-6)=0\ .$$

Таким чином спектр матриці $\mathbf{A}$: $k_1=3, k_2=2, k_3=6.$

Розв'яжемо систему (5) для кожного значення k.

1) $k_1=3$

$$(\mathbf{A}-k_1\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{V}^{(1)}=\begin{pmatrix}3-k_1 & -1 & 1\\ -1 & 5-k_1 & -1\\ 1 & -1 & 3-k_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1^{(1)}\\ v_2^{(1)}\\ v_3^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1^{(1)}\\ v_2^{(1)}\\ v_3^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-v_2^{(1)}+v_3^{(1)}=0\\ -v_1^{(1)}+2v_2^{(1)}-v_3^{(1)}=0,\\ v_1^{(1)}-v_2^{(1)}=0\end{cases}$$

Друге рівняння є лінійною комбінацією першого і третього рівнянь, тому

$$\begin{cases}-v_2^{(1)}+v_3^{(1)}=0\\ v_1^{(1)}-v_2^{(1)}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_3^{(1)}=v_2^{(1)}\\ v_1^{(1)}=v_2^{(1)}\end{cases}.$$

І, якщо, скажімо $v_2^{(1)}=1$, то і $v_3^{(1)}=1, v_1^{(1)}=1$. Остаточно $\mathbf{V}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

2) $k_2=2$. Аналогічним способом розв'язуємо систему (5) і визначаємо вектор $\mathbf{V}^{(2)}$.

$$(\mathbf{A}-k_2\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{V}^{(2)}=\begin{pmatrix}3-k_2 & -1 & 1\\ -1 & 5-k_2 & -1\\ 1 & -1 & 3-k_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1^{(2)}\\ v_2^{(2)}\\ v_3^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1^{(2)}-v_2^{(2)}+v_3^{(2)}=0\\ -v_1^{(2)}+3v_2^{(2)}-v_3^{(2)}=0.\\ v_1^{(2)}-v_2^{(2)}+v_3^{(2)}=0\end{cases}$$

Очевидно далі

$$\begin{cases} v_1^{(2)} - v_2^{(2)} + v_3^{(2)} = 0 \\ -v_1^{(2)} + 3v_2^{(2)} - v_3^{(2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^{(2)} = v_2^{(2)} - v_3^{(2)} \\ 2v_2^{(2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^{(2)} = -v_3^{(2)} \\ v_2^{(2)} = 0 \end{cases}.$$

Нехай $v_3^{(1)} = 1$, тоді $v_1^{(1)} = -1$. Вектор $\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Корінь характеристичного рівняння $k_3 = 6$ визначає систему для $\mathbf{V}^{(3)}$:

$$(\mathbf{A} - k_3 \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3-k_3 & -1 & 1 \\ -1 & 5-k_3 & -1 \\ 1 & -1 & 3-k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3v_1^{(2)} - v_2^{(2)} + v_3^{(2)} = 0 \\ -v_1^{(2)} - v_2^{(2)} - v_3^{(2)} = 0 \\ v_1^{(2)} - v_2^{(2)} - 3v_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3v_2^{(3)} + 3v_3^{(3)} - v_2^{(3)} + v_3^{(3)} = 0 \\ v_1^{(3)} = -v_2^{(3)} - v_3^{(3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^{(3)} = -2v_3^{(3)} \\ v_1^{(3)} = v_3^{(3)} \end{cases}.$$

З чого випливає, що при значенні, скажімо, $v_3^{(3)} = 1$, інші дві компоненти вектора $\mathbf{V}^{(3)}$: $v_1^{(3)} = 1, v_2^{(3)} = -2$. Тоді $\mathbf{V}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Загальний розв'язок даної однорідної системи ДР:

$$\mathbf{Y}_{\text{o.o.}}(t) = C_1 \cdot \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{t}) + C_2 \cdot \mathbf{Y}^{(2)}(\mathbf{t}) + C_2 \cdot \mathbf{Y}^{(3)}(\mathbf{t}) =$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6t} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} - C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t} \\ C_1 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \\ C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $y_1(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t}$, $y_2(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}$,

$y_3(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t}$.

Додаток 2.

Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, для якого необхідно знайти частинний розв'язок, що відповідає початковій умові $y(x_0) = y_0$. Задача Коші – це основна задача, з якою стикаємося на практиці. Слід відшукати таку функцію $y = y(x)$, що справджує ДР і графік якої проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

ДР першого порядку ми вже розглядали на практичному занятті 1. Але ситуація може бути такою, що рівняння не належить до основних класів ДР 1-го порядку, методи розв'язання яких нам відомі. Або інтегрування після відокремлення змінних чи застосування замін є дуже складним. Відповіддю на таку проблему є чисельні методи, які дозволяють з достатньо високою точністю відтворити (змоделювати) функцію-розв'язок $y = y(x)$ на певному проміжку.

Розглянемо застосування найпростішого метода, який був до речі і першим в історії розв'язання звичайних ДР чисельними методами, – ***метод Ейлера***.

Поставимо наступну задачу: знайти частинний розв'язок ДР $y' + 2y = x^2$, який відповідає початковій умові $y(0) = 1$. Очевидно, що це лінійне ДР 1-го порядку і стандартний метод Бернуллі інтегрування таких рівнянь (див. ***практичне заняття*** …) допомагає досить просто знайти точний розв'язок, а саме $y = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Застосуємо для розв'язання даної задачі метод Ейлера і порівняємо отриманий результат з точним розв'язком. Тим самим продемонструємо зміст метода та похибку наближеного розв'язку.

Слід задати проміжок, на якому буде визначено наближений розв'язок, причому його лівий кінець співпадає з $x_0 = 0$, і кількість відрізків розбиття (або крок розбиття h) цього проміжку $[x_0, b]$. Візьмемо приміром проміжок $[0,1]$ і $h = 0{,}1$.

Ідея метода – отримати набір точок (їхня кількість співпадає з кількістю відрізків розбиття), котрі є вершинами ламаної, що приймається, як фрагмент графіка розв'язку ДР на обраному проміжку. Зрозуміло, що ми не отримаємо аналітичного представлення шуканого розв'язку. Це можливо, але вже за допомогою процедури ***апроксимації*** – в певному сенсі реконструкція простого зі складного, тобто наближене представлення заданої таблицею функції простішою функцією, яка має мінімальні відхилення від початкової функції.

Ординати точок – вершин ламаної за формулою Ейлера визначаються рекурентною формулою:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i, y_i\right). \tag{1}$$

Функція $f\left(x,y\right)$ в ДР $y' + 2y = x^2$ очевидно дорівнює

$$y' + 2y = x^2 \Rightarrow y' = x^2 - 2y = f(x,y).$$

Починаємо процедуру знаходження точок. Перша точка – початкова умова $y\left(0\right) = 1$, тобто $x_0 = 0, y_0 = 1$. Далі за формулою (1):

$$f\left(x_0, y_0\right) = f(0{,}1) = 0^2 - 2 \cdot 1 = -2,$$
$$h \cdot f\left(x_0, y_0\right) = 0{,}1 \cdot (-2) = -0{,}2,$$

$$x_1 = 0{,}1, \text{ бо } x_{i+1} = x_i + h, i = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0, y_0\right) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Друга точка в шуканому наборі – $x_1 = 0{,}1, y_1 = 0{,}8$. І так далі.

Алгоритм метода Ейлера в достатньо популярному в інженерному середовищі пакеті MathCAD має наступну структуру:

```
EILER(f, a, b, h, y0) := | n ← (b − a)/h
                         | y_0 ← y0
                         | for  i ∈ 0 .. n − 1
                         |   | x_i ← a + i·h
                         |   | Δy_i ← h·f(x_i, y_i)
                         |   | y_{i+1} ← y_i + Δy_i
                         | y
```

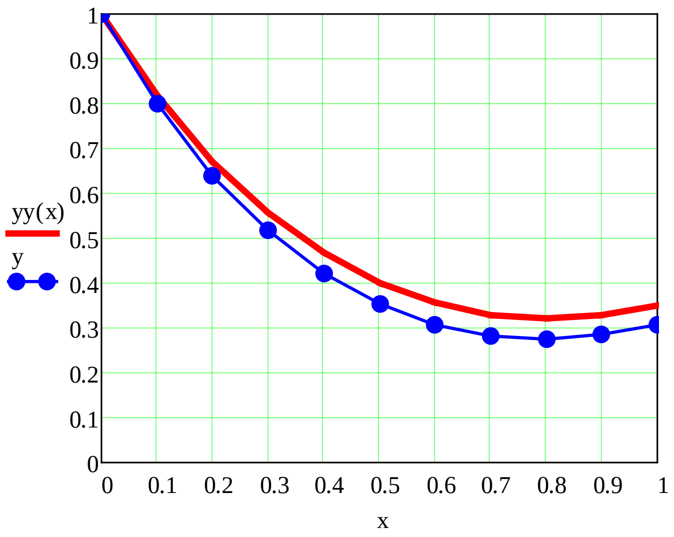
Деякі пояснення: $\text{EILER}\left(f, a, b, h, y0\right)$ – назва процедури знаходження точок за методом Ейлера, що звертається до функції $f\left(x, y\right)$, значень a і b – кінцевих точок проміжку, на якому застосовуємо метод, причому $a = x_0$, кроку розбиття h і, нарешті, до початкової умови $y0 = y_0$.

Результатом обчислень є таблиця ординат точок ламаної:

y =

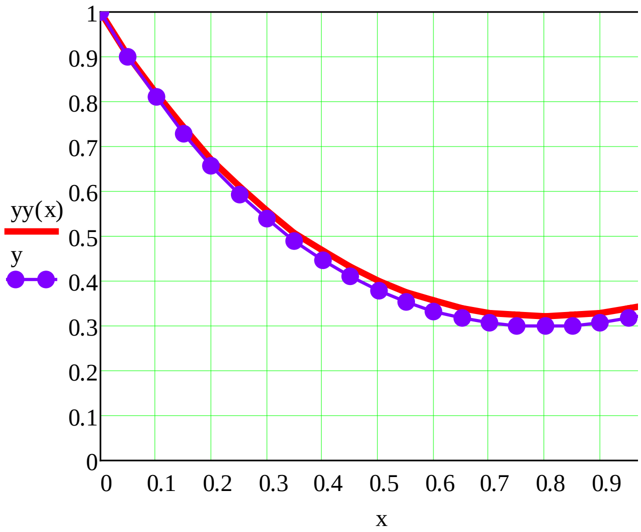
	0
0	1
1	0.8
2	0.641
3	0.517
4	0.422
5	0.354
6	0.308
7	0.283
8	0.275
9	0.284
10	0.308
11	0.347

Наступний рисунок демонструє графіки точного частинного розв’язку (червоний колір) і ламаної метода Ейлера (синій колір). Суттєвий недолік очевидний – чисельний розв’язок ДР збігається з точним лише в точці $x_0 = 0, y_0 = 1$, а в наступних точках різниця між графіками збільшується, тобто похибка зростає.



Це пояснює геометричний зміст даного чисельного методу: ланки ламаної паралельні дотичним до графіка функції-розв'язку в точках $x_0 = 0, x_1 = 0{,}1, \ldots, x_n = 1$.

Чи можна покращити результат? Часто цього можна досягти шляхом подрібнення розбиття проміжку, тобто зменшення кроку h – досить популярний підхід в чисельних методах. Зменшуючи h в два рази в нашому прикладі отримуємо краще наближення – ламана з 21 точки (фіолетовий колір) на рисунку.



Якісно змінює ситуацію ***вдосконалений метод Ейлера***, в якому ланки ламаної паралельні дотичним в точках, які знаходяться посередині інтервалів розбиття:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i) \right). \qquad (2)$$

Процедура побудови цієї ламаної в MathCAD:

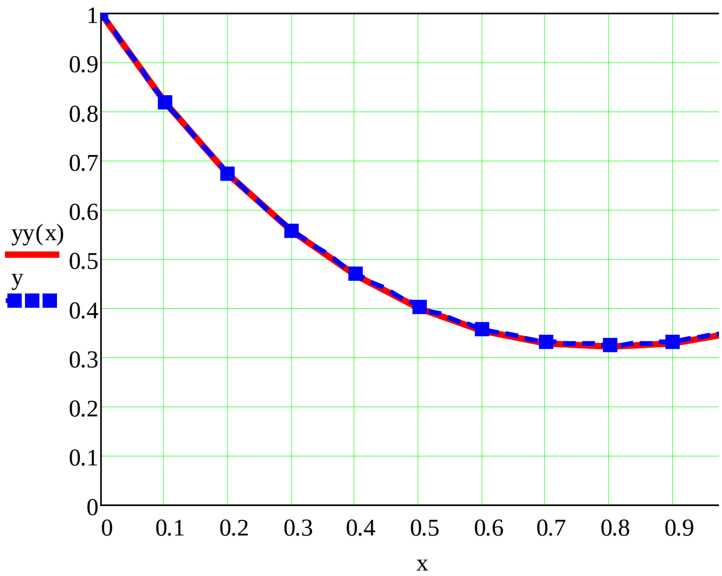
$$\text{VD\_EILER}(f, a, b, h, y0) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \dfrac{(b-a)}{h} \\ y_0 \leftarrow y0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ \Delta y_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + f(x_i, y_i) \cdot \dfrac{h}{2} \right) \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta y_i \end{array} \right. \\ y \end{array} \right.$$

Результати

застосування вдосконаленого метода Ейлера представимо в таблиці і на графіку.

y =

	0
0	1
1	0.82
2	0.675
3	0.559
4	0.47
5	0.404
6	0.359
7	0.333
8	0.324
9	0.332
10	0.354
11	0.391



Ламана чисельного розв’язку (синій пунктир) практично не відрізняється від кривої точного частинного розв’язку (червона). Похибка наближення складає по точках:

$yy(x_i) - y_i =$

	0
0	0
1	$-1.202\cdot10^{-3}$
2	$-2.015\cdot10^{-3}$
3	$-2.54\cdot10^{-3}$
4	$-2.856\cdot10^{-3}$
5	$-3.019\cdot10^{-3}$
6	$-3.076\cdot10^{-3}$
7	$-3.059\cdot10^{-3}$
8	$-2.993\cdot10^{-3}$
9	$-2.897\cdot10^{-3}$
10	$-2.783\cdot10^{-3}$

Кожний метод має свої переваги і недоліки. Безумовна цінність методів Ейлера – вони дозволяють знайти розв’язок ДР вигляду $y' = f(x, y)$ з досить складною правою частиною, коли класичні аналітичні методи не працюють. Але недоліком є те, що не кожне ДР можна привести до такого вигляду, тобто виразити y', і тоді застосування цих чисельних методів пошуку розв’язку задачі Коші неможливе.

Література:

1. Курпа Л.В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник: у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа, Н.О. Кириллова, Г.Б. Лінник, І.О. Морачковська; за ред. Л.В. Курпи. – Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : НТУ "ХПІ", 2009. – 432 с.
http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/4623

2. Копась І.М. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Копась. – Електрон. текст. данні . – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/23638/1/Dyf_riv_Kopas.pdf – Назва з тит. екрана. – Дата звернення: 01.01.2024.

3. Богач І.В. Чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь засобами MathCAD : навчальний посібник / І. В. Богач, О. Ю. Краковецький, Л. В. Крилик. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 106 с.
http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/IRVC/Bogach_2020_106.pdf

4. Габрусєв Г.В. Звичайні диференціальні рівняння. Навчальний посібник для студентів, які навчаються за напрямом автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології/ Г.В. Габрусєв, О.М. Самборська. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.
https://core.ac.uk/download/pdf/249318049.pdf

5. Чікіна Н.О. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н. О. Чікіна, А.М. Гайдаш, В.Д. Крупка, Л.Т. Кобизська; за ред. Н. О. Чікіна. – Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : Підручник НТУ "ХПІ", 2013. – 216 с.
http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/17448

Навчальне видання

ПОТАНІНА Тетяна Володимирівна

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Відповідальний за випуск Першина Ю.І.
Роботу до видання рекомендував Чікіна Н.О.

В авторській редакції

План 2024 р., поз.7

Підп. до друку 2024 р.
Гарнітура Times New Roman.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання