ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Знайти $\alpha A+\beta B$ і AB^T, де $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\-1&2&4\end{pmatrix}$, $\alpha=4, \beta=3.$

Розв'язання.

$$4A+3B=4\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&-1&-3\\-1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&-4\\0&12&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-3&-9\\-3&6&12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8+0&4+(-3)&-4+(-9)\\0+(-3)&12+6&8+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&-13\\-3&18&20\end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриць AB^T. Спочатку знайдемо B^T. Для цього рядки матриці B запишемо в стовпці $B^T=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\\-3&4\end{pmatrix}$.

Матриці A і B^T узгоджені (кількість стовбців матриці A збігається з кількість рядків матриці B^T), отже їх можна перемножити. Добуток матриць обчислюємо за правилом «рядок на стовбець».

$$AB^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)&2\cdot(-1)+1\cdot2+(-1)\cdot4\\0\cdot0+3\cdot(-1)+2\cdot(-3)&0\cdot(-1)+3\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-4\\-9&14\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&3\\3&-5&-1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Обчислимо визначник матриці A за правилом трикутника.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-1) + 3\cdot1\cdot3 + 1\cdot(-5)\cdot0 - 3\cdot(-2)\cdot0 -$$ отже,

$$-1\cdot1\cdot(-1) - 2\cdot(-5)\cdot3 = 4+9+0-0+1+30 = 44 \neq 0,$$

обернена матриця існує. Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A. Елементи братимемо з рядків матриці, а записуватимемо у стовпці. Тим самим, за умовчанням, проходить транспонування матриці, складеної з алгебраїчних доповнень елементів матриці. A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1) - (-5)\cdot3 = 2+15 = 17,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\left(1\cdot(-1) - 3\cdot3\right) = -(-1-9) = 10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - 3\cdot(-2) = -5+6 = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -\left(1\cdot(-1) - (-5)\cdot0\right) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot0 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -\left(2\cdot(-5) - 1\cdot3\right) = -(-10-3) = 13,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot3 - (-2)\cdot0 = 3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\left(2\cdot3 - 1\cdot0\right) = -6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot1 = -5.$$

Отже, отримуємо: $A^{-1} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 17 & 1 & 3 \\ 10 & -2 & -6 \\ 1 & 13 & -5 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання.

За допомогою елементарних перетворень приведемо матрицю до трапецієподібного вигляду. Римськими числами позначатимемо номера рядків. Наприклад, запис $\mathrm{II}\cdot(-3)+\mathrm{III}$ означає, що елементи другого рядка множимо на (-3) та додаємо відповідні елементи третього рядка. Отримані елементи записуємо в третій рядок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-4)+\mathrm{III} \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{pmatrix} \mathrm{II}\cdot(-3)+\mathrm{III} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали матрицю, яка містить два ненульових рядка, отже $\mathrm{Rg}\, A = 2$.

Приклад 4. Розв’язати систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$ за правилом Крамера.

Розв’язання.

Складемо головну матрицю системи з коефіцієнтів при невідомих x_1, x_2, x_3: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ і стовбець вільних членів $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначники за правилом трикутника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 2\cdot 1+1\cdot(-2)\cdot 1-1\cdot 0\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1-$$

$$-1\cdot(-2)\cdot(-1) = 0+2-2-0-6-2=-8.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8\cdot 0\cdot(-1)+4\cdot 2\cdot 1+(-4)\cdot(-2)\cdot 1-(-4)\cdot 0\cdot 1-$$

$$-8\cdot 2\cdot 1-4\cdot(-2)\cdot(-1)=0+8+8-0-16-8=-8.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-1)+1\cdot(-4)\cdot 1+1\cdot 8\cdot 1-1\cdot 4\cdot 1-3\cdot(-4)\cdot 1-1\cdot 8\cdot(-1)=$$

$$=-12-4+8-4+12+8=8.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot(-4)+1\cdot 2\cdot 8+1\cdot(-2)\cdot 4-1\cdot 0\cdot 8-3\cdot 2\cdot 4-$$

$$-1\cdot(-2)\cdot(-4)=0+16-8-0-24-8=-24.$$

Визначники Δ_i $(i=1,2,3)$ утворені з визначника Δ заміною i-го стовбця стовбцем вільних членів. За формулами Крамера маємо: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$

Остаточно маємо: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Приклад 5. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 \quad - x_4 = -2 \end{cases}$ за методом Гауса.

Розв'язання.

Виписуємо розширену матрицю системи. Ліворуч від вертикальної риски головна матриця системи, праворуч стовбець вільних членів.

За допомогою елементарних перетворень приведемо матрицю до трапецієподібного вигляду. Римськими числами позначатимемо номера рядків (див. приклад 3), позначка $\leftrightarrow$ означає, що ми поміняли місцями відповідні рядки.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&1&3\\4&-3&-1&-1&-1\\1&-2&0&-1&-2\end{array}\right)\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&0&-1&-2\\4&-3&-1&-1&-1\\2&1&-1&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}\cdot(-4)+\mathrm{II}\\\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{III}\end{array}\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&0&-1&-2\\0&5&-1&3&7\\0&5&-1&3&7\end{array}\right)\mathrm{II}\cdot(-1)+\mathrm{III}\approx\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{\begin{matrix}1&-2\\0&5\end{matrix}}&&0&-1&-2\\&&-1&3&7\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Підрахуємо кількість ненульових рядків у головної та розширеної матриць системи. Отримуємо $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg}\tilde{A}=2$, отже система сумісна, тобто має розв'язок. Через те, що кількість невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 перебільшує ранг матриць, то система має нескінченну кількість розв'язків. Для того, щоб визначити, які змінні брати головними, а які вільними потрібно виписати базисний мінор. Це будь-який ненульовий мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, наприклад $M=\begin{vmatrix}1&-2\\0&5\end{vmatrix}\neq 0$ (обведено рамкою в останній матриці). Змінні, які «увійшли» до базисного мінору – головні, які «не увійшли» до базисного мінору – вільні. В нашому прикладі головні x_1, x_2, вільні – x_3, x_4. Для зручності позначимо вільні змінні $x_3=q_1, x_4=q_2$. Останній матриці $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ відповідає система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - q_2 = -2 \\ 5x_2 - q_1 + 3q_2 = 7 \end{cases}.$$

Знайдемо x_2 з останнього рівняння: $x_2 = \frac{1}{5}q_1 - \frac{3}{5}q_2 + \frac{7}{5}$.

Підставимо вираз для x_2 в перше рівняння і знайдемо x:

$$x_1 - 2\left(\frac{1}{5}q_1 - \frac{3}{5}q_2 + \frac{7}{5}\right) - q_2 = -2,$$

$$x_1 - \frac{2}{5}q_1 + \frac{6}{5}q_2 - \frac{14}{5} - q_2 = -2,$$

$$x_1 - \frac{2}{5}q_1 + \frac{1}{5}q_2 - \frac{14}{5} = -2,$$

$$x_1 = \frac{2}{5}q_1 - \frac{1}{5}q_2 - 2 + \frac{14}{5},$$

$$x_1 = \frac{2}{5}q_1 - \frac{1}{5}q_2 + \frac{4}{5}.$$

Остаточно маємо: $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}q_1 - \frac{1}{5}q_2 + \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5}q_1 - \frac{3}{5}q_2 + \frac{7}{5} \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$

Приклад 6. Задано точки:

$A(1,4,-1), B(-2,4,-5), C(8,4,0), D(-6,2,1)$.

Знайти:

а) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

б) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AC}$;

в) площу паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

г) об’єм піраміди з вершинами в точках A, B, C, D.

Розв’язання.

а) Спочатку знайдемо координати векторів:

$\overrightarrow{AB} = \left(-2-1, 4-4, -5-(-1)\right) = (-3, 0, -4), \overrightarrow{AC} = \left(8-1, 4-4, 0-(-1)\right) = (7, 0, 1),$

(з координати кінця вектора віднімаємо координату початку вектора).

Для обчислення косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ використаємо формули для знаходження скалярного добутку векторів і довжини вектора:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}, \quad \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi},$$

де $\varphi -$ кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$,

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}}.$$

В нашому прикладі:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3\cdot 7 + 0\cdot 0 + (-4)\cdot 1 = -21 - 4 = -25,$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5, \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{49+0+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б) Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}}.$$

В нашому прикладі $np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{-25}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{2}}.$

в) Площа паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ це довжина векторного добутку цих векторів $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Нагадаємо, що векторний добуток векторів обчислюється за формулою:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}.$$

В нашому прикладі

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -4 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \cdot \vec{k} + 7 \cdot \vec{j} \cdot (-4) - 7 \cdot 0 \cdot \vec{k} -$$

$$-\vec{i} \cdot 0 \cdot (-4) - (-3) \cdot \vec{j} \cdot 1 = 0 + 0 - 28\vec{j} - 0 - 0 + 3\vec{j} = -25\vec{j}.$$

Отже, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -25, 0)$, $\quad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + (-25)^2 + 0^2} = 25.$

Отримуємо $S = 25$.

г) Об’єм піраміди з вершинами в точках A, B, C, D, тобто піраміди, що побудована на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, обчислюється за формулою $V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|$, де $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ – мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, який обчислюється за формулою:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}.$$

Слід зазначити, що модуль мішаного добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ записано на випадок, якщо трійка векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ ліва і мішаний добуток від’ємний.

Знайдемо $\overrightarrow{AD} = \left(-6 - 1, 2 - 4, 1 - (-1)\right) = (-7, -2, 2)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 0 & -4\\ 7 & 0 & 1\\ -7 & -2 & 2\end{vmatrix}=-3\cdot0\cdot2+7\cdot(-2)\cdot(-4)+(-7)\cdot0\cdot1-(-7)\cdot0\cdot(-4)-$$

$$-7\cdot2\cdot0-1\cdot(-3)\cdot(-2)=0+56+0-0-0-6=50.$$

Отримуємо $V=\dfrac{50}{6}=\dfrac{25}{3}$.

Приклад 7. Установити, яка лінія визначається рівнянням $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$. Побудувати цю лінію.

Розв’язання.

Рівняння $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$ це загальне рівняння кривої другого порядку. Щоб установити вид заданої кривої, загальне рівняння кривої необхідно звести до канонічного рівняння кривої. Для цього згрупуємо x і y :

$$(4x^2-24x)+(9y^2+36y)+36=0$$

$$4(x^2-6x)+9(y^2+4y)+36=0$$

Доповнимо до повних квадратів, користуючись відомою формулою скороченого множення:

$$\boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}\,.$$

$$x^2-6x=x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9,\ y^2+4y=y^2+4y+4-4=(y+2)^2-4.$$

Підставляючи отримані вирази до рівняння кривої та проводячи перетворення,

$$4\left((x-3)^2-9\right)+9\left((y+2)^2-4\right)+36=0,$$

$$4(x-3)^2-36+9(y+2)^2-36+36=0,$$

отримуємо рівняння: $4(x-3)^2+9(y+2)^2=36$.

Поділивши ліву та праву частини рівняння на 36, отримуємо канонічне рівняння :

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Це еліпс з центром симетрії в точці $(3,-2)$ і півосями $a=3, b=2$ (рисунок 1).

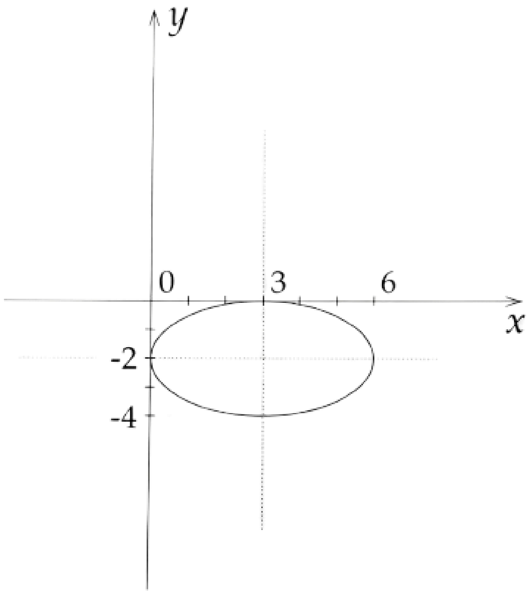


Рисунок 1

Приклад 8. Задано точки: $A(1,4,-1), B(-2,4,-5), C(8,4,0), D(-6,2,1)$. Скласти

а) канонічні в параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки *A* і *B*;

б) рівняння площини, яка проходить через точки *A*, *B*, *C* (площини *ABC*);

в) рівняння прямої, яка проходить через точку D, перпендикулярно до площини *ABC*.

Розв'язання.

а) Складемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(1,4,-1), B(-2,4,-5)$. Для цього використаємо формулу:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}},$$

де $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ точки на прямій.

В нашому прикладі: $\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-4}{4-4}=\frac{z-(-1)}{-5-(-1)} \Rightarrow \frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+1}{-4}$ – канонічні рівняння прямої *AB*.

Отримаємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+1}{-4}=t \Rightarrow \frac{x-1}{-3}=t, \quad \frac{y-4}{0}=t, \quad \frac{z+1}{-4}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-3t+1, \\ y=4, \\ z=-4t-1. \end{cases}$$

б) Складемо рівняння площини, яка проходить через три точки $A(1,4,-1), B(-2,4,-5), C(8,4,0)$. Для цього використаємо формулу:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0},$$

де $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$ точки, які належать площині.

В нашому прикладі

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-(-1) \\ -2-1 & 4-4 & -5-(-1) \\ 8-1 & 4-4 & 0-(-1) \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z+1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник за правилом трикутника.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z+1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 0\cdot 1 + (y-4)\cdot 7\cdot(-4) + (z+1)\cdot 0\cdot(-3) - 7\cdot 0\cdot(z+1) -$$

$$-(-4)\cdot 0\cdot(x-1) - (-3)\cdot 1\cdot(y-4) = 0,$$

$$0 - 28\cdot(y-4) + 0 - 0 - 0 + 3\cdot(y-4) = 0.$$

Розкриваючи дужки та приводячи подібні, отримуємо рівняння площини ABC:

$$-25\cdot(y-4) = 0 \Rightarrow -25y + 100 = 0 \Rightarrow y = 4.$$

в) Канонічні рівняння прямої:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}},$$

де $\vec{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої, $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка належить прямій.

В нашому прикладі $D(-6, 2, 1)$ – точка, яка належить прямій, а напрямний вектор прямої збігається з нормальним вектором площини, оскільки за умовою пряма перпендикулярна до площини ABC.

Випишемо координати нормального вектора площини ABC. Користуємось тим, що координати нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ це коефіцієнти при x, y, z в загальному рівнянні площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

В нашому прикладі: $y - 4 = 0 \Rightarrow \vec{N} = (0, 1, 0)$. Отже, $m = 0, n = 1, p = 0$ і канонічні рівняння шуканої прямої: $\frac{x+6}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$

Приклад 9. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+2}}{\sqrt[4]{4x^3+1} - \sqrt[3]{x^4-1}}$, *б)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$.

Розв’язання.

а) В цьому прикладі маємо справу з невизначеністю $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ (для перевірки невизначеності замість змінної x у вираз підставили ∞).

Для розкриття такої невизначеності використаємо правило «старших степенів». Випишемо степені змінної x в чисельнику і знаменнику, нехтуючи молодшими степенями.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[4]{4x^3+1}-\sqrt[3]{x^4-1}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\left\|\begin{matrix}\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}, \\ \sqrt[4]{4x^3}=x^{\frac{3}{4}},\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}}.\end{matrix}\right\|.$$

В чисельнику старший степінь $\frac{3}{2}$, в знаменнику – $\frac{4}{3}$. Порівнюючи ці числа, отримуємо $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$, (приводячи до спільного знаменника $\frac{9}{6}>\frac{8}{6}$). Старший степінь чисельника більше старшого степеня знаменника. Отримуємо відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[4]{4x^3+1}-\sqrt[3]{x^4-1}}=\infty$.

б) В цьому прикладі маємо справу з невизначеністю $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ (для перевірки невизначеності замість змінної x у вираз підставили 1).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\left\|\frac{1^2+2\cdot 1-3}{2\cdot 1^2-1-1}=\frac{0}{0}\right\|.$$

Для усунення невизначеності необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити. В нашому прикладі і в чисельнику, і знаменнику квадратні тричлени, які можна розкласти на множники за формулою:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)},$$

де x_1,x_2 – корені відповідного квадратного рівняння.

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16,\quad \sqrt{D}=\sqrt{16}=4,$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-2\pm 4}{2}\Rightarrow x_1=\dfrac{-2-4}{2}=-3,\quad x_2=\dfrac{-2+4}{2}=1.$

$2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9,\quad \sqrt{D}=\sqrt{9}=3,$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{1\pm 3}{4}\Rightarrow x_1=\dfrac{1+3}{4}=1,\quad x_2=\dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}.$

Отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 10. Знайти похідні

а) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{3x}\cdot\sin^4 7x$, *б)* $y=\dfrac{\left(x^9+x\right)^5}{\ln\left(x^3-2\right)}$.

Розв’язання.

а) В цьому прикладі маємо похідну від добутку функцій:

$$\boxed{(U\cdot V)'=U'V+UV'},$$

де $U=\mathrm{arctg}\sqrt{3x},\cdot V=\sin^4 7x$.

Отже,

$$y'=\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3x}\cdot\sin^4 7x\right)'=\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3x}\right)'\cdot\sin^4 7x+\mathrm{arctg}\sqrt{3x}\cdot\left(\sin^4 7x\right)'.$$

Розглянемо окремо $\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3x}\right)'$ та $\left(\sin^4 7x\right)'$.

Функція $y=\mathrm{arctg}\sqrt{3x}$ складена: $y=\mathrm{arctg}\,q$, де $q=\sqrt{g}$ та $g=3x$.

Нагадаємо, якщо $y = y(U)$ і $U = U(x)$ – диференційовані функції, то складена функція $y = y(U(x))$ є також диференційованою, причому $\boxed{y'_x = y'_U \cdot U'_x}$.

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого скінченного числа диференційованих функцій: похідна складеної функції дорівнює добутку похідних функцій, які її складають.

Маємо ланцюжок з трьох похідних: $y'_x = y'_q \cdot q'_g \cdot g'_x$.

Обчислимо ці похідні по черзі:

$$(\operatorname{arctg} q)' = \frac{1}{1+q^2} \cdot q', q' = \left(\sqrt{g}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot g', g' = (3x)' = 3 .$$

Остаточно маємо: $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{3x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3$.

Аналогічно, $y = \sin^4 7x$ складена: $y = q^4$, де $q = \sin g$, та $g = 7x$. Маємо ланцюжок з трьох похідних: $y'_x = y'_q \cdot q'_g \cdot g'_x$:

$$\left(q^4\right)' = 4q^3, q' = (\sin g)' = \cos g, g' = (7x)' = 7 .$$

Остаточно маємо: $\left(\sin^4 7x\right)' = 4\sin^3 7x \cdot \cos 7x \cdot 7$.

Після підстановки отриманих виразів, одержуємо похідну заданої функції:

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{3x} \cdot \sin^4 7x\right)' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{3x}\right)' \cdot \sin^4 7x + \operatorname{arctg}\sqrt{3x} \cdot \left(\sin^4 7x\right)' =$$

$$. = \frac{1}{1+\left(\sqrt{3x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 \cdot \sin^4 7x + \operatorname{arctg}\sqrt{3x} \cdot 4\sin^3 7x \cdot \cos 7x \cdot 7.$$

б) В цьому прикладі маємо похідну від частки функцій:

$$\boxed{\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}},$$

де $U=\left(x^9+x\right)^5$, $V=\ln\left(x^3-2\right)$.

Отже, $y'=\dfrac{\left(\left(x^9+x\right)^5\right)'\ln\left(x^3-2\right)-\left(x^9+x\right)^5\left(\ln\left(x^3-2\right)\right)'}{\left(\ln\left(x^3-2\right)\right)^2}$.

Функції $y=\left(x^9+x\right)^5$ і $y=\ln\left(x^3-2\right)$ складені: $y=\left(x^9+x\right)^5=q^5$, $q=x^9+x$ та $y=\ln\left(x^3-2\right)=\ln q$, $q=x^3-2$. Для кожної з цих функцій маємо ланцюжок з двох похідних: $y'_x=y'_q\cdot q'_x$.

$$\left(\left(x^9+x\right)^5\right)'=\left(q^5\right)'\cdot q'=5q^4\cdot\left(x^9+x\right)'=5\left(x^9+x\right)^4\cdot\left(9x^8+1\right),$$

$$\left(\ln\left(x^3-2\right)\right)'=\left(\ln q\right)'\cdot q'=\frac{1}{q}\cdot\left(x^3-2\right)'=\frac{1}{x^3-2}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3-2}.$$

Після підстановки отриманих виразів, знайдемо похідну заданої функції:

$$y'=\frac{\left(\left(x^9+x\right)^5\right)'\ln\left(x^3-2\right)-\left(x^9+x\right)^5\left(\ln\left(x^3-2\right)\right)'}{\left(\ln\left(x^3-2\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{5\left(x^9+x\right)^4\cdot\left(9x^8+1\right)\cdot\ln\left(x^3-2\right)-\left(x^9+x\right)^5\cdot\dfrac{3x^2}{x^3-2}}{\left(\ln\left(x^3-2\right)\right)^2}.$$

Приклад 11. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3}{2\left(x+1\right)^2}$ та за результатами дослідження побудувати її графік.

Розв'язання. При побудові графіка функції доцільно дотримуватись наступної схеми:

1. Знайти область визначення функції; встановити точки розриву та інтервали неперервності функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

3. Знайти асимптоти графіка функції; дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.

4. Знайти точки перетину функції з осями координат.

5. Знайти інтервали монотонності, точки екстремуму.

6. Знайти інтервали опуклості і вгнутості, та точки перегину.

7. За результатами дослідження побудувати графік.

Виходячи із запропонованої схеми маємо:

1. $x \neq -1$; $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $x = -1$ точка розриву функції; $(-\infty, -1)$ та $(-1, +\infty)$ – інтервали неперервності функції.

2. $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = \dfrac{-x^3}{2(-x+1)^2} \Rightarrow$ задана функція є загального вигляду (не є ні парною, ні непарною). Також наша функція не є періодичною.

3. Дослідимо поведінку функції поблизу точки розриву $x = -1$

$$\lim_{x \to -1+0} y = \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Таким чином, при $x = -1$ функція має нескінченний розрив, а, отже, $x = -1$ – вертикальна асимптота. Похилу асимптоту шукаємо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 \cdot x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -1;$$

тобто $y=\frac{1}{2}x-1-$ похила асимптота.

4. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат:
при $x=0$, $y=0$; при $y=0$, $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0,0)-$ початок координат.

5. Знайдемо інтервали монотонності, критичні точки першого роду функції та точки екстремуму функції:

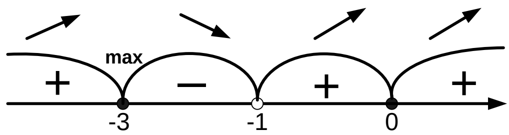
$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x+1)^2-x^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x+1)-2x^3}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3};$$

$$y'=0\Rightarrow x^3+3x^2=0,\quad x^2(x+3)=0;\quad x_1=0,\quad x_2=-3.$$

$$y'=\infty\Rightarrow x=-1.$$

Маємо



$$y_{\max}(-3)=\frac{(-3)^3}{2(-3+1)}=\frac{-27}{8}\approx-3,38.$$

6. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість, точки перегину.

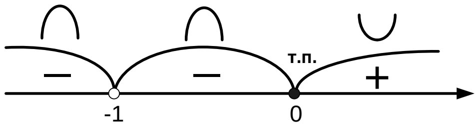
$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{(3x^2+6x)(x+1)^3-(x^3+3x^2)3(x+1)^2}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^2\cdot\left((3x^2+6x)(x+1)-(x^3+3x^2)3\right)}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^3+6x^2+3x^2+6x-3x^3-9x^2}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x}{(x+1)^4}=\frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Очевидно, що $y'' = 0$, якщо $x = 0$, та $y'' = \infty$, якщо $x = -1$.

Маємо



При $x = 0$ маємо точку перегину. Графік функції наведено на рисунку 2.

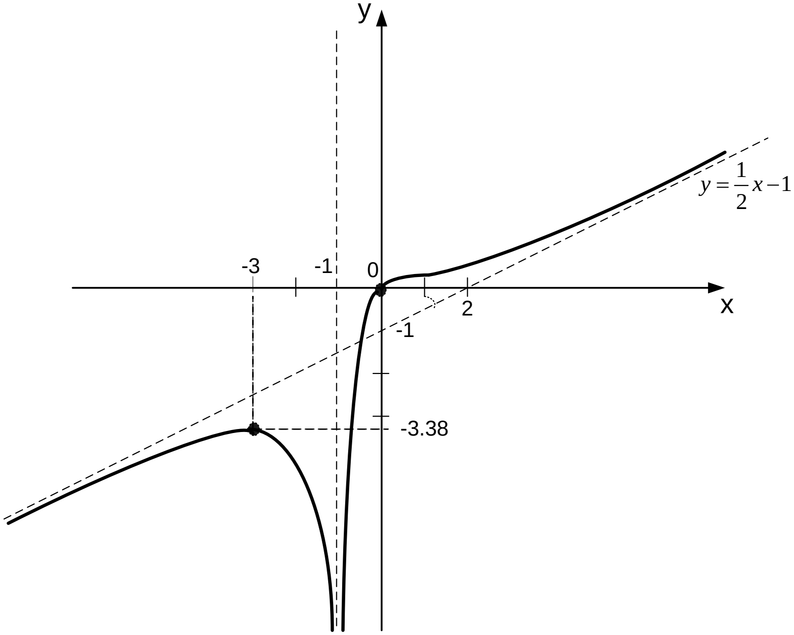


Рисунок 2