

8.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

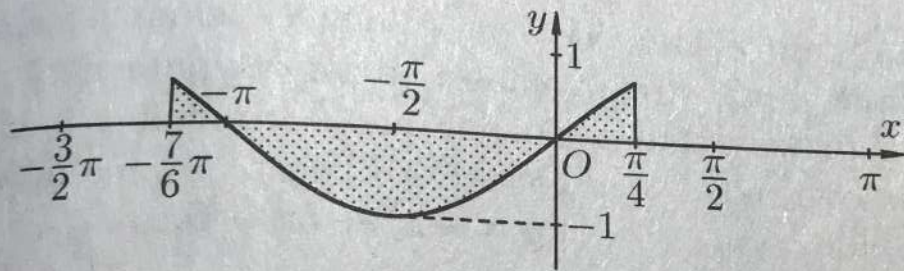


Рис. 91

○ Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 91. Площадь фигуры находим по формуле (3.3):

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} \sin x dx - \int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \\
 &= -\cos x \Big|_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} + \cos x \Big|_{-\pi}^0 - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \\
 &= \frac{1}{2}(8 - \sqrt{3} - \sqrt{2}). \quad \bullet
 \end{aligned}$$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.2. $y = -x^3, y = -9x.$

9.3.3. $y = \arccos x, x = -1, x = 0, y = 0.$

9.3.4. $y = \operatorname{tg}^2 x, x = \frac{\pi}{4}, y = 0.$

9.3.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6.$

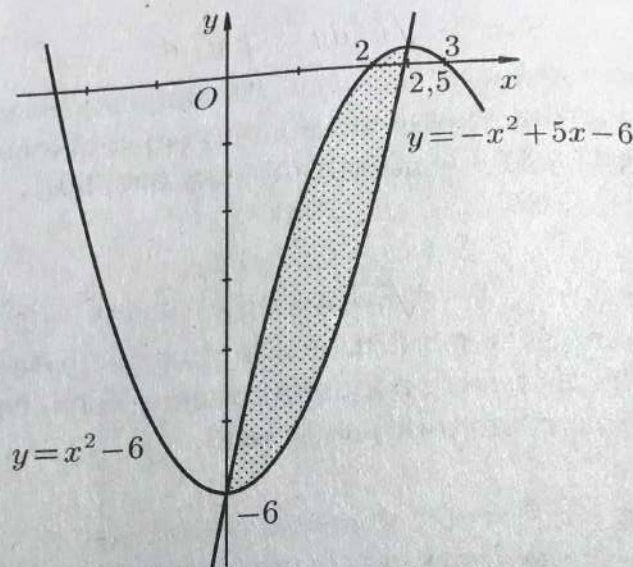


Рис. 92

○ Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = 0, x_2 = 2,5$. Искомую площадь (см. рис. 92) находим по формуле (3.4):

$$S = \int_0^{2,5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6) dx = \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x) dx = 5\frac{5}{24}.$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.6. $y = \sin x, y = 2 \sin x, x = 0, x = \frac{7}{4}\pi.$

9.3.7. $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 0, x = 3.$

9.3.8. $y^2 = 2x + 1, y = x - 1.$

9.3.9. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6, y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$

9.3.10. $y = x^2, y = 2x, y = x.$

9.3.11. $y = x^3 - 3x, y = x.$

9.3.12. $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1.$

9.3.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3, y = 8, x = 0.$

○ Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой (3.5):

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{y^2} dy = \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = \frac{96}{5}.$$

Заметим, что искомую площадь можно найти, используя формулу (3.1) как разность площадей прямоугольника $OABC$ и трапеции OBC (см. рис. 93):

$$S = 4 \cdot 8 - \int_0^4 \sqrt{x^3} dx = 32 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{5} = \frac{96}{5}.$$

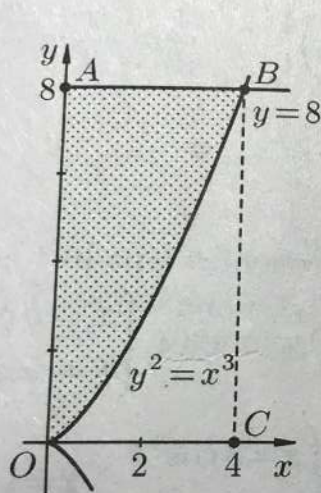


Рис. 93

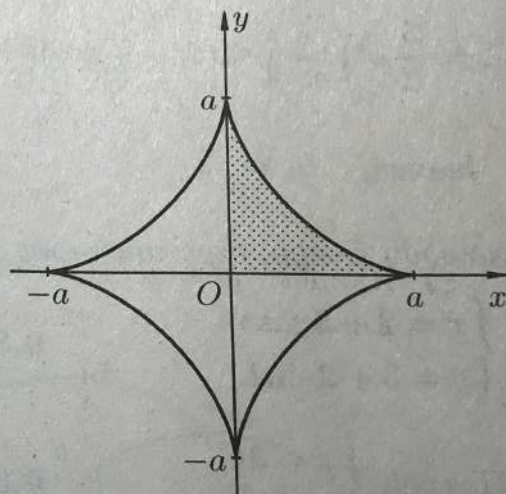


Рис. 94

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.14. $y = \arcsin x, \pi x = 2y.$

9.3.15. $xy = 8, y = 8x^3, y = 27.$

9.3.16. $y^2 = (4-x)^3, x = 0.$

9.3.17. $(y-x)^2 = x^3, x = 1.$

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$ (рис. 9.23.)

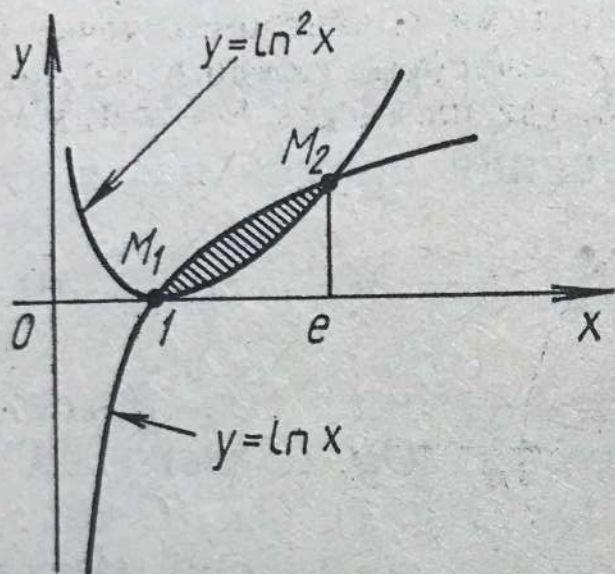


Рис. 9.23

► Найдем точки пересечения данных кривых: $M_1(1, 0)$, $M_2(e, 1)$. Теперь воспользуемся формулой (9.7). Имеем:

$$S = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx,$$

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = \\ &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx, \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C.$$

Тогда

$$S = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \ln^2 x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e - (x \ln^2 x -$$

$$- 2x \ln x + 2x) \Big|_1^e = e \ln e - e + 1 - (e \ln^2 e - 2e \ln e +$$

$$+ 2e) + 2 = 3 - e \approx 0,28. \blacktriangleleft$$