### 6.2.2. Застосування методу заміни змінної при обчисленні невизначених інтегралів від ірраціональних функцій

(продовження)

**4. Інтеграли вигляду** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ обчислюються за допомогою *виділення повного квадрата* під коренем.

**Приклади**

**1.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} =$

$= \frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2+1}\right| + C.$

**2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x^2+2x+1-1)}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{6-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{6}} + C.$

**3.** $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} + \int \frac{-5/2\cdot 2+2}{\sqrt{(x+1)^2-5}} d(x+1) =$

$= \frac{5}{2}2\sqrt{x^2+2x-4} - 3\ln\left|x+1-\sqrt{(x+1)^2-5}\right| + C\ .$

**4.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(-1-2x)dx}{\sqrt{1-x-x^2}} + \int \frac{-1/2d(x+1/2)}{\sqrt{5/4-(x+1/2)^2}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{1-x-x^2} -$

$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1/2}{\sqrt{5/4}} + C.$

**5. Інтеграли вигляду:**

$$\text{а)}\ \boxed{\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}},\ \text{б)}\ \boxed{\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}}.$$

Інтеграл б) підстановкою $x-\alpha = \frac{1}{z}$ зводиться до інтегралу а). Інтеграл а) обчислюється *методом невизначених коефіцієнтів* за формулою:

$$\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $P_m$ – багаточлен $m$-го степеня; $Q_{m-1}$ – багаточлен степеня $m$–1 з невизначеними коефіцієнтами; $A$ – стала. Для знаходження невизначених коефіцієнтів диференціюють обидві частини рівності і приводячи до спільного знаменника, порівнюють коефіцієнти при однакових степенях $x$.

**Приклади**

**1.** $I=\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

**Розв'язання**

$$\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = (ax+b)\sqrt{-x^2+3x-2} + c\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманої рівності:

$$\frac{\left(x^2+1\right)}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = (ax+b)\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} + a\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{c}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

Помножимо обидві частини рівності на $\sqrt{-x^2+3x-2}$:

$x^2+1=-ax^2+\frac{3}{2}ax-bx+\frac{3}{2}b-ax^2+3ax-2a+c$, або

$$x^2+1=-2ax^2+x\left(\frac{3}{2}a-b+3a\right)+\frac{3}{2}b-2a+c.$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях $x$:

$-2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

$\frac{9}{2}a-b=0 \Rightarrow b=\frac{9}{2}a=\frac{-9}{2\cdot 2}=-\frac{9}{4}$.

$\frac{3}{2}b-2a+c=1 \Rightarrow c=1+2a-\frac{3}{2}b=1-1+\frac{27}{8}=\frac{27}{8}$.

Тоді

$$I=-\frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{27}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=-\frac{2x+9}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+$$

$$+\frac{27}{8}\arcsin\ (2x-3)+C.$$

**2.** $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

**Розв'язання.** Продиференціюємо ліву і праву частини:

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}};$$

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{(2Ax+B)(x^2-2x+5)}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}};$$

$3x^3-7x^2+1\equiv(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda$ ;

при $x^3$: $3 = 2A + A$, звідси $A = 1$.

$x^2$: $-7= -4A + B - A + B$, звідси $B = -1$.

$x$: $0= 10A - 2B - B + C$, звідси $C = -13$.

$x^0$: $1= 5B - C + \lambda$, звідси $\lambda = -7$.

$$\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$$

$$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln\left|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}\right|+C.$$

**6. Підстановки Ейлера.** Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R\left(x\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(t)dt\ .$$

При обчисленні інтегралів подібного типу застосовують одну з підстановок:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$, якщо $a>0$.
2. $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$, якщо $c>0$.
3. $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t$,

якщо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1, x_2$ – дійсні корені.

Застосування підстановок Ейлера зводить інтеграли такого типу до інтегралів від раціональної функції. Однак при розв'язанні задач підстановки Ейлера призводять до громіздких обчислень, тому на практиці використовують інші, більш практичні способи інтегрування.

**Приклад 1.** $\int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-x^2-10})^3}$.

Застосуємо підстановку Ейлера:

$$\sqrt{7x-x^2-10}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=t(x-2); t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2};\ x=\frac{5+2t^2}{1+t^2};\quad dx=-\frac{6tdt}{(1+t^2)^2};$$

$$(\sqrt{7x-x^2-10})^3=\frac{27t^3}{(1+t^2)^3}.\quad \int\frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}(-\frac{5}{t}+2t)+C=$$

$$=\frac{10}{9}\frac{x-2}{\sqrt{7x-10-x^2}}-\frac{4}{9}\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}+C.$$

### 7. Диференційний біном

Чебишовим була доведена теорема про те, що інтеграл від *диференціального бінома*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

де $n, m, p$ – раціональні числа, обчислюється через елементарні функції тільки в трьох випадках:

**1)** якщо $p$ – ціле число. (Покладемо $x=t^N$, де $N$ – спільний знаменник дробів $m, n$).

**2)** $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. (Заміна змінних $a+bx^n=t^N$, де $N$ – знаменник дробу $p$).

**3)** $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число. (Заміна змінних $b+ax^{-n}=t^N$, де $N$ – знаменник дробу $p$).

Інших випадків інтегрування цих виразів в елементарних функціях немає.

**Приклад**

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left\| \begin{matrix} p=\frac{1}{3}, n=\frac{1}{4} \\ m=-\frac{1}{2}, t^3=1+\sqrt[4]{x}, x=(t^3-1)^4, dx=12(t^3-1)^3t^2dt \end{matrix} \right\| =$$

$$=\int 12(t^3-1)t^3dt = 12(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4})+c=\frac{12}{7}(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^7-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$$