### 6.2.1. Метод заміни змінної, або підстановки

Одним з основних методів обчислення інтегралів є метод заміни змінної, суть якого полягає в тому, що якщо функція $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну на певному інтервалі та монотонна, то на цьому інтервалі справедлива формула

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Нижче цей метод проілюстровано на ряді прикладів.

**Приклад 1.** $I=\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

**Розв'язання**. Виділимо повний квадрат у знаменнику

$4x^2-4x+17=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+16=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16.$ Тоді

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}dx=\left\|\begin{array}{l}x-\frac{1}{2}=u\\ x=u+\frac{1}{2}\\ dx=du\end{array}\right\|=\frac{1}{4}\int\frac{3\left(u+\frac{1}{2}\right)-1}{u^2+4}du=\frac{3}{4}\int\frac{udu}{u^2+4}+$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{3}{8}\ln\ u^2+4\ +\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}+C=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C.$$

**Приклад 2.** $I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx.$

**Розв'язання**. Перетворимо підкореневий вираз, виділяючи повний квадрат $x^2+6x+2=(x+3)^2-7$, тоді

$$I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{(x+3)^2-7}}dx=\left\|\begin{array}{l}x+3=u\\ x=u-3\\ dx=du\end{array}\right\|=\int\frac{2(u-3)+5}{\sqrt{u^2-7}}du=\int\frac{d\left(u^2-7\right)}{\sqrt{u^2-7}}-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-7}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{u^2-7}}-\ln\left|u+\sqrt{u^2-7}\right|+C=\frac{2}{\sqrt{x^2+6x+2}}-\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right|+C.$$

**Приклад 3.** $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.$

*Перший спосіб* (заміна змінної)

$$I=\left\|\begin{matrix} x=\operatorname{arctg} t \quad dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ x^2+1^{\;3/2}=\dfrac{1}{\cos^3 t}\end{matrix}\right\|=\int \cos t dt=\sin t+C=\left\|\begin{matrix} 1+\operatorname{ctg}^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t} \\ \sin t=\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}^2 t}{1+tg^2 t}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

*Другий спосіб* (безпосереднє обчислення)

$$I=\int\frac{dx}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(-2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

**Приклад 4.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+6\dfrac{\sin x}{\cos x}-16\right)}=\int\frac{d\ \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg} x-16}=\|t=\operatorname{tg} x\|=$$

$$=\int\frac{dt}{t+3^{\;2}-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t-2}{t+8}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-2}{\operatorname{tg} x+8}\right|+C.$$

**Приклад 5.** $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx=\|t=\sin x\|=\int\frac{1-t^2\ \ dt}{2+t}=$

$$=\int\left(-t+2-\frac{3}{2+t}\right)dt=-\frac{t^2}{2}+2t-3\ln\ 2+t\ +C=$$

$$=-\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x-3\ln\ 2+\sin x\ +C.$$

### 6.2.2. Застосування методу заміни змінної при обчисленні невизначених інтегралів від ірраціональних функцій

**1. Інтеграли вигляду** $\int R\left(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{l}{s}}, \ldots, x^{\frac{p}{r}}\right)dx$, де $R$ – раціональна функція своїх аргументів, обчислюються заміною $x = t^k$ ($k$ – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \frac{l}{s}, \ldots, \frac{p}{r}$), що дозволяє позбутися ірраціональності.

*Зауваження.* Функція $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – деякі функції від $x$, називається раціональною від $x$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, якщо значення цієї функції для певних значень аргументів дістаємо застосуванням лише арифметичних операцій: додаванням, відніманням, множенням і діленням.

**Приклади**

**1.** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

**Розв'язання**

*Перший спосіб.* У даному прикладі $k$=2, тому варто зробити заміну $x = t^2$. Тоді

$$I = \int \frac{2tdt}{t\ t^2+1} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Цей інтеграл можна обчислити й безпосередньо.

*Другий спосіб.*

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\ x+1} = \left\| \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\ \sqrt{x} \right\| = 2\int \frac{d\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}^{\ 2}+1} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

**2.** $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} = \left\| \begin{matrix} x = t^4 \\ \sqrt[4]{x} = t \\ dx = 4t^3dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{4t^3dt}{t+t^2} = 4\int \frac{t^2dt}{t+1} = 4\int \frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt =$$

$$= 4\left(\int\ t-1\ dt + \int \frac{dt}{t+1}\right) = 4\left(\frac{t-1^{\ 2}}{2} + \ln\ t+1\right) + C =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt[4]{x}-1^{\ 2}}{2} + \ln\ \sqrt[4]{x}+1\right) + C.$$

**3.** $$\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})} = \left\| \begin{matrix} x = t^{12},\ t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12t^{11}dt \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x} = t^4+t^3 \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^2 12t^{11}dt}{t^{12}(t^4+t^3)} =$$

$$=12\int\frac{1}{t^2(t+1)}dt=12\int\frac{(1-t^2)+t^2}{t^2(t+1)}dt=12\int\frac{(1-t^2)dt}{t^2(t+1)}+$$

$$+\,12\int\frac{t^2dt}{t^2(t+1)}=12\int\frac{dt}{t^2}-12\int\frac{dt}{t}+12\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=12\left(-\frac{1}{t}-\ln t+\ln(t+1)\right)+C=12\left[\ln\left|\frac{t+1}{t}\right|-\frac{1}{t}\right]+C=$$

$$=12\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}}\right|-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C=\ln\frac{(\sqrt[12]{x}+1)^{12}}{x}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C.$$

**2. Інтеграли вигляду**

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx,$$

де $R$ – раціональна функція своїх аргументів, обчислюються заміною $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^k$ ($k$ – найменше спільне кратне знаменників показників $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},\ldots,\frac{m_s}{n_s}$), що дозволяє позбутися ірраціональності.

**Приклад 1**. $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\left\|\begin{matrix}1+x=t^6;x=t^6-1;dx=6t^5dt\\ \sqrt{1+x}=\sqrt{t^6}=t^3;\sqrt[3]{1+x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2\end{matrix}\right\|=$

$$=\int\frac{(t^6-1)^2+t^3}{t^2}6t^5dt=6\int\left[(t^6-1)^2+t^3\right]t^3dt=6\int(t^{15}-2t^9+t^6+t^3)dt=$$

$$=6\left[\frac{t^{16}}{16}-\frac{2t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right]+C=6t^4\left[\frac{t^{12}}{16}-\frac{t^6}{5}+\frac{t}{7}+\frac{1}{4}\right]+C=\left|t=\sqrt[6]{1+x}\right|=$$

$$=6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt[6]{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C.$$

**Приклад 2.** $\int\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx=\int\sqrt{\frac{(2-x)(2-x)}{(x-6)(2-x)}}dx=\int\frac{(2-x)dx}{\sqrt{8x-x^2-12}}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{8-2x}{\sqrt{8x-x^2-12}}dx+\int\frac{(-4+2)d(x-4)}{\sqrt{4-(x-4)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}2\sqrt{8x-x^2-12}-2\arcsin\frac{x-4}{2}+C.$$

**Приклад 3.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

**Розв'язання**. Перетворимо знаменник

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3(x-1)^5(x+2)^5}{(x-1)^5}}=\sqrt[4]{(x-1)^8\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^5}=$$

$=(x-1)^2\frac{x+2}{x-1}\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$. Тоді

$$I=\int\frac{dx}{\frac{x+2}{x-1}(x-1)^2\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}=\left\|\begin{array}{l}\frac{x+2}{x-1}=t^4,\ \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}dx=4t^3dt\\ \frac{-3dx}{(x-1)^2}=4t^3dt,\ \frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{4}{3}t^3dt\end{array}\right\|=$$

$$=-\frac{4}{3}\int\frac{t^3dt}{t^4\cdot t}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3\cdot\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

**Приклад 4**. $\int\frac{e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}dx}{(3+x)^2\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}=$

$$=\left\|\begin{array}{c}t=\sqrt{\frac{3-x}{3+x}};t^2=\frac{3-x}{3+x}\\ 2tdt=\frac{-(3+x)-(3-x)dx}{(3+x)^2}=\frac{-6dx}{(3+x)^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{e^t\,2tdt}{t(-6)}=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}+C.$$

**3. Інтеграли вигляду** $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2}\right)dx$, де $R$ – раціональна функція своїх аргументів. При знаходженні цих інтегралів використовують заміни:

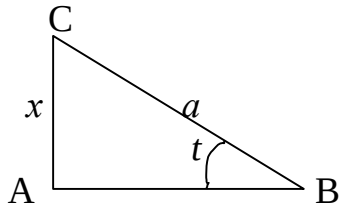
а) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Підстановкою $x=a\sin t$ $(a\cos t)$, $a>0$ інтеграл зводиться до раціональної функції від $\sin t$ і $\cos t$.

$x=a\sin t,\ dx=a\cos tdt,\ a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2 t=a^2\cos^2 t$;

$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$, $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx=\int R(a\sin t,a\cos t)a\cos t dt$.

Після інтегрування потрібно повернутися до колишньої змінної.




Розглянемо трикутник:

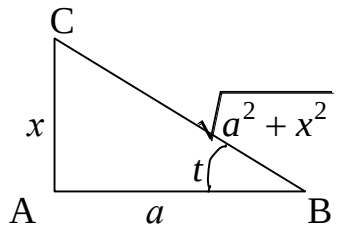
$\frac{x}{a}=\sin t$, катет $AB=\sqrt{a^2-x^2}$, $\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, $\operatorname{tg} t=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

б) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$.

Застосуємо підстановку $x=a\cdot\operatorname{tg} t$ $(a\cdot\operatorname{ctg} t)$, $dx=a\frac{1}{\cos^2 t}dt$,

$a^2+x^2=a^2(1+\operatorname{tg}^2 t)=a^2\frac{1}{\cos^2 t}$, $\int R\ x,\sqrt{a^2+x^2}\ dx=\int R\left(a\operatorname{tg} t,a\frac{1}{\cos t}\right)\frac{adt}{\cos^2 t}$.

Повернемося до старої змінної, використовуючи трикутник:




$\frac{x}{a}=\operatorname{tg} t$, $CB=\sqrt{a^2+x^2}$, $\sin t=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\cos t=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

в) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$.

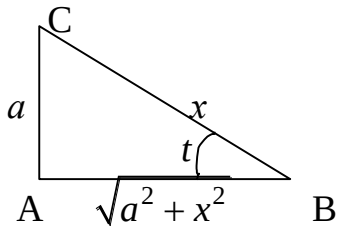
Для того щоб позбутися радикала в підінтегральному виразі, зручною буде підстановка:

$x=\frac{a}{\sin t}$ або $x=\frac{a}{\cos t}$ $dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$,

$x^2-a^2=\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2=\frac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}=\frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}$, $\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a\cos t}{\sin t}$,

$\int R\ x,\sqrt{x^2-a^2}\ dx=\int R\left(\frac{a}{\sin t};\frac{a\cos t}{\sin t}\right)\cdot\left(-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\right)dt$.

Повернемося до колишньої змінної:




$$\sin t=\frac{a}{x},\ \cos t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},\ \operatorname{tg} t=\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

**Приклади**

**1.** $$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx=\left\|\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos tdt\end{matrix}\right\|=\int\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\sin^2 t\cos^2 tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2tdt=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\arcsin x-\frac{\sin\ 4\arcsin x}{4}\right)+C.$$

**2.** $$I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\left\|\begin{matrix}x=\operatorname{ch} t\\ dx=\operatorname{sh} tdt\end{matrix}\right\|=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t\ \operatorname{sh} tdt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}}=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t\ \operatorname{sh} tdt}{\operatorname{sh} t}=\int\operatorname{ch}^2 tdt=$$

$$=\int\frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t\right)+C=\frac{1}{2}\left(arc\operatorname{ch} x+\frac{1}{2}\operatorname{sh}\ 2arc\operatorname{ch} x\right)+C\ .\square$$

**3.** $$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Розв’язання**

*Перший спосіб* (заміна змінної)

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}\left\|\begin{matrix}x=\sin t,\ \ dx=\cos tdt\\ \sqrt{1-x^2}=\cos t\end{matrix}\right\|=\int\sin^5 tdt=-\int\ 1-\cos^2 t\ ^2 d\cos t=$$

$$=-\int\ 1-2\cos^2 t+\cos^4 t\ d\cos t=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x=\sin t\\ \cos t=\sqrt{1-x^2}\end{matrix}\right\|=-\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{2}{3}\ 1-x^2\ \ +\frac{1}{5}\ 1-x^2\ ^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left(8+4x^2+3x^4\right)+C.$$

*Другий спосіб.*

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{matrix}t^2=1-x^2,\ 2tdt=-2xdx\\ x^4=1-2t^2+t^4,\ \ x^5dx=-\left(1-2t^2+t^4\right)tdt\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\int\frac{t\left(1-2t^2+t^4\right)}{t}dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=-\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C=$$

$$-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C.$$

**4.** $$\int\frac{x^4dx}{(4-x^2)^{3/2}}=\left\|\begin{matrix}x=2\sin t,\frac{x}{2}=\sin t\\ dx=2\cos tdt;(4-x^2)=4\cos^2 t\\ \cos t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2};\operatorname{tg}t=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\end{matrix}\right\|=\int\frac{2^4\sin^4 t2\cos tdt}{(2\cos t)^3}=$$

$$=4\int\frac{\sin^4 t}{\cos^2 t}dt=4\int\frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}dt=4\int\frac{1-2\cos^2 t+\cos^4 t}{\cos^2 t}dt=4\int\frac{dt}{\cos^2 t}-8\int dt+\ +$$

$$4\int\cos^2 tdt=4\operatorname{tg}t-8t+2\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=4\operatorname{tg}t-8t+2t+\sin 2t+C=4\operatorname{tg}t-6t+2\sin t\cos t+C=$$

$$=4\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-6\arcsin\frac{x}{2}+2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C=\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}-6\arcsin\frac{x}{2}+$$

$$+C.$$

**5.** $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left\|\begin{matrix}x=a\cdot\operatorname{tg}t;\frac{x}{a}=\operatorname{tg}t\\ dx=\frac{adt}{\cos^2 t};t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\\ a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t};\sin t=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\end{matrix}\right\|=\int\frac{adt\cos t}{\cos^2 ta^4\operatorname{tg}^4 ta}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)\cos tdt}{\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}-\frac{1}{a^4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{a^4}\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{a^4}\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x}+C.$$

**6.** $\int \frac{dx}{x(x^2-9)^{5/2}} = \left\| \begin{array}{c} x = \frac{3}{\cos t}; \cos t = \frac{3}{x}; t = \arccos\frac{3}{x} \\ dx = \frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}; \operatorname{ctg} t = \frac{3}{\sqrt{x^2-9}} \\ x^2 - 9 = \frac{9}{\cos^2 t} - 9 = \frac{9(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t} = 9\operatorname{tg}^2 t \end{array} \right\| =$

$= \int \frac{3\sin t \cos t dt}{3\cos^2 t (3\operatorname{tg} t)^5} = \frac{1}{3^5}\int \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^5 t} dt =$

$= \frac{1}{3^5}\int \operatorname{ctg}^4 t dt = \left\| \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right\| = \frac{1}{243}\int \operatorname{ctg}^2 t (\frac{1}{\sin^2 t} - 1) dt = \frac{1}{243}\int \operatorname{ctg}^2 t \frac{dt}{\sin^2 t} -$

$- \frac{1}{243}\int \left( \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{243}\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} + \frac{1}{243}\operatorname{ctg} t + t + C -$

$- \frac{27}{729\sqrt{(x^2-9)^3}} + \frac{1}{243}\frac{3}{\sqrt{(x^2-9)}} + \arccos\frac{3}{x} + C =$

$= -\frac{1}{27\sqrt{(x^2-9)^3}} + \frac{1}{81\sqrt{(x^2-9)}} + \arccos\frac{3}{x} + C.$

**7.** $I = \int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \left\| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\| = -\int \frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2 - 1}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left| \frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2} - 1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-\cos^2 x}}{\cos x} \right| + C.$