7.2.1. Обчислення площ плоских фігур

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$, ($a<b$) $y = 0$ і $f(x) \geq 0$, то її площа дорівнює $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо $f_1(x) \geq f(x)$, то площа, обмежена цими кривими та прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює $S = \int_a^b (f_1(x) - f(x))dx$.

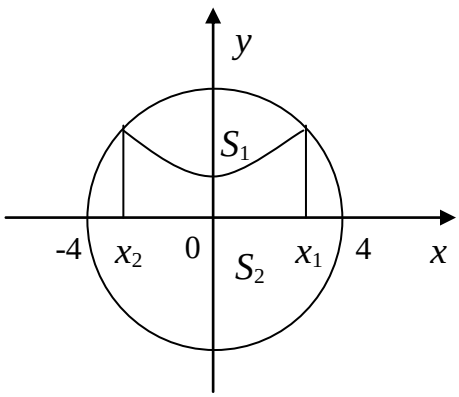
У випадку параметричного завдання кривої $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (t_1 \leq t \leq t_2)$ за умови, що обхід контуру здійснюється проти годинникової стрілки, площа обчислюється

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt.$$

У полярних координатах площа фігури, обмеженої променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$, дорівнює $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Приклади:

1. Обчислити площу, що міститься між колом $x^2 + y^2 = 16$ і параболою $x^2 = 12(y-1)$.



Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривих $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 = 12(y-1) \end{cases} \Rightarrow$

$16 - y^2 = 12y - 12$, $y^2 + 12y - 12 = 0$

$y_1 = -14$ не підходить, тому що $y \geq 0$.

$y_2 = 2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$.

Даними кривими обмежені 2 фігури. Знайдемо площу S_1, тоді S_2 можна знайти як різницю площі круга $S = \pi R^2$ та S_1.

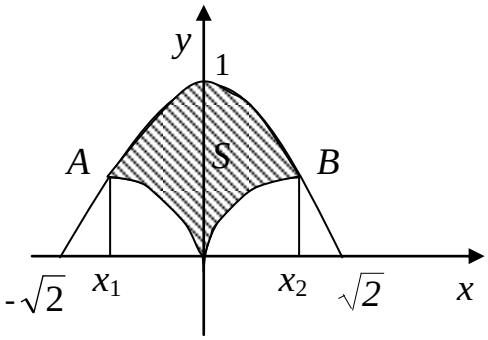
$$S_1 = 2\left(\int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}dx - \frac{1}{12}\int_0^{2\sqrt{3}} (x^2 + 12)dx\right) = 2\left(I_1 - \frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3} + 12\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{3}}\right) = 2\left(I_1 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$I_1=\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,dx=\left\|\begin{matrix}x=4\sin t & dx=4\cos t dt\\ \sqrt{16-x^2}=4\cos t & \end{matrix}\right\|=$$

$$=16\int_0^{\pi/3}\cos^2 t dt=8\int_0^{\pi/3}(1+\cos 2t)dt=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/3}=8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$S_1=\frac{16}{3}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\Rightarrow S_2=16\pi-\frac{16}{3}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{32}{3}\pi+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

2. Обчислити площу S, що знаходиться між кривими $y=2-x^2$ і $y^2=x^3$.



Розв'язання. Розв'язуючи спільно систему рівнянь $\begin{cases}y=2-x^2\\ y^2=x^3\end{cases}$, знаходимо межі інтегрування $x_1=-1$ і x_2=1.

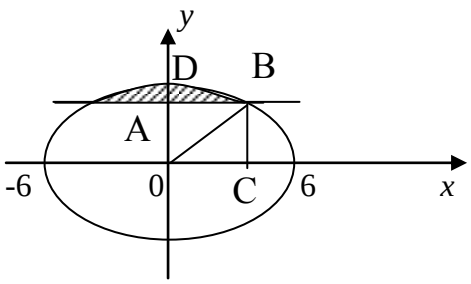
За формулою $S=\int_a^b(y_1-y)dx$ одержимо:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^{2/3}\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}x^{5/3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2\frac{2}{15}.$$

3. Знайти площу фігури, обмежену кривими, що задано параметричними рівняннями $\begin{cases}x=6\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$ і $y=2\sqrt{3}\left(y\ge 2\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину еліпса та прямої: $2\sqrt{3}=4\sin t$; $\Rightarrow \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=6\cos\frac{\pi}{3}=3.$

Фігура являє собою сегмент еліпса, заданого параметрично. В силу симетрії заданої фігури обчислимо половину площі



$$\frac{S}{2}=S_1-S_2=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt-S_2,$$

де S_2 – площа прямокутника OABC. Очевидно, $S_2=3\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

Для криволінійної трапеції ODBC параметр t змінюється від $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$. Оскільки x при цьому спадає, то необхідно змінити знак перед інтегралом на протилежний.

$$S_1 = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin t \cdot 6(-\sin t)dt = 24\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 dt = 24\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 12\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 12\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 12\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi + 3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $S = 2\left(2\pi + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\right) = 4\pi - 6\sqrt{3}$.

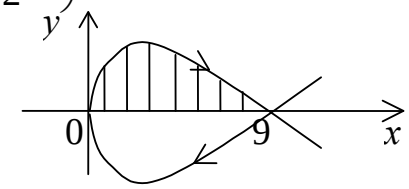
4. Обчислити площу, обмежену віссю абсцис і однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Розв'язання. Площа $S =$

$$\int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2\left(\frac{3}{2}2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{\sin 4\pi}{2}\right) = 3\pi a^2$$

од.кв.



5. Знайти площу фігури, що обмежена петлею лінії:

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}.$$

Розв'язання. Оскільки $x = x(t)$ – парна, а $y = y(t)$ – непарна, то $x = x(y)$ –парна, тобто

графік буде симетричним відносно осі Ox.

$$y = t\left(3 - t^2\right), \quad y = 0.$$

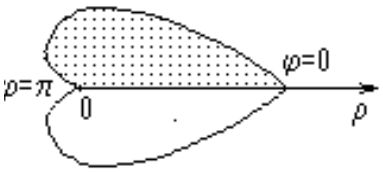
При $t_1 = 0 \Rightarrow x = 0$. $t_{2,3} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 9$.

З огляду на симетрію обчислимо площу і результат подвоїмо:

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(3t - t^3\right)6tdt = 12\int_0^{\sqrt{3}}\left(3t^2 - t^4\right)dt = 12\left(t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 12\left(3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{5}\right) =$$

$$= \frac{12\cdot 6\sqrt{3}}{5} = \frac{72\sqrt{3}}{5}.$$

6. Обчислити площу фігури, що обмежена кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$.



Розв'язання. Площа фігури в полярних координатах знаходиться за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

З міркувань симетрії одержимо

$$S = \frac{1}{2}a^2\cdot 2\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

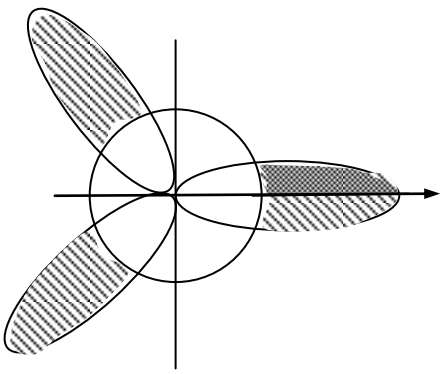
$$= a^2\int_0^\pi\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

7. Знайти площу, що обмежена кривою $r = 2a\cos 3\varphi$ і лежить поза колом $r = a$.

Розв'язання. $r = 2a\cos 3\varphi$ – трипелюсткова троянда, тому що

$$r \ge 0 \quad \cos 3\varphi \ge 0 \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 3\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Таким чином, одержимо фігуру з трьох пелюстків з осями:



$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}\ \ \varphi_3 = \frac{4\pi}{3};$$

$$r_{\min} = 0,\ r_{\max} = 2a.$$

З огляду на симетрію обчислимо $\frac{1}{6}$ частину площі за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi.$$

Знайдемо точки перетину кривої та кола:

$$\begin{cases} r = 2a\cos 3\varphi \\ r = a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

1) Знайдемо $\frac{1}{2}$ площі одного з трьох пелюстків:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/9} 4a^2\cos^2 3\varphi d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/9}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\pi/9}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right).$$

2) S_2 – площа сектора круга радіуса a, з кутом, що дорівнює $\frac{\pi}{9}$.

$$S_2 = \frac{R^2\varphi}{2} = \frac{a^2\pi}{2\cdot 9} = \frac{\pi a^2}{18}.$$

Оскільки $\frac{1}{6}S = S_1 - S_2$, то $S = 6\left(\frac{\pi a^2}{9} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi a^2}{18}\right) = \frac{a^2}{6}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right).$