Лекція 20.03.2020

Поняття диференціального рівняння.
Диференціальні рівняння I порядку. Задача Коші. Теорема Коші

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує невідому функцію, її похідні та незалежні змінні.

Якщо функція, що входить у рівняння, залежить від однієї незалежної змінної, то рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*.

Порядок старшої похідної, що входить у дане рівняння, називається *порядком рівняння*. Звичайне диференціальне рівняння *n-го* порядку має вигляд:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Наприклад, рівняння $y''' - 3y'' + 2y = 0$ – звичайне диференціальне рівняння третього порядку, а рівняння $x^2 y' + 5xy = y^2$ – першого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння замість невідомої функції перетворює його у правильну рівність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння *n*-го порядку називається функція $y = \varphi(x, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \ldots, \tilde{N}_n)$, що залежить від *x* та *n* довільних незалежних сталих C_1, $C_2, \ldots, C_n$ і перетворює дане рівняння в тотожність.

Розв'язок, отриманий у вигляді неявної функції $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, називається *загальним інтегралом* цього рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається його *інтегральною кривою*. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається його інтегруванням.

Диференціальні рівняння I порядку

Загальний вигляд диференціального рівняння I порядку: $F(x, y, y') = 0$. Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно похідної. Тоді воно набуває вигляду:

$$y' = f(x, y).$$

Задача знаходження розв'язку рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє *початковій умові* $\boxed{y\big|_{x=x_0} = y_0}$, називається *задачею Коші*.

Розв'язок, що задовольняє початковій умові, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо права частина $f(x, y)$ рівняння $y' = f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні в області *D* зміни *x* і *y*, то яка б не була внутрішня точка (x_0, y_0) цієї області, дане рівняння має єдиний розв'язок, який набуває при $x = x_0$ заданого значення $y = y_0$.

Геометрично це означає, що через кожну точку області D проходить (і лише одна) інтегральна крива.

Загальним розв'язком диференціального рівняння I порядку називається функція $y=\varphi(x,C)$, що залежить від однієї довільної сталої C і задовольняє дві умови:

1) функція $y=\varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння при будь-яких припустимих значеннях довільної сталої C;

2) довільну сталу C завжди можна вибрати так, щоб задовольнити будь-яку початкову умову $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

Співвідношення $\Phi(x,y,C)=0$, що визначає загальний розв'язок у неявному вигляді, називається *загальним інтегралом* рівняння $y'=f(x,y)$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ називається розв'язок, який одержаний з загального розв'язку при певному значенні довільної сталої C. Розв'язок задачі Коші, тобто розв'язок, що задовольняє початкові умови, є частинним розв'язком.

Розглянемо методи інтегрування диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ для окремих випадків правої частини $f(x,y)$.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його права частина $f(x,y)$ може бути подана як добуток двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної:

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Тоді рівняння можна переписати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y).$$

Поділимо обидві частини рівняння на $\psi(y)$ $(\psi(y)\neq 0)$ і помножимо на dx:

$$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx.$$

В останньому рівнянні змінні відокремлені. Вважаючи, що $y=y(x)$ є розв'язок рівняння, одержимо тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння

$$\int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx+C.$$

Якщо існують значення y, при яких функція $\psi(y)$ обертається в нуль $\psi(y_1)=0,\ \psi(y_2)=0,\ldots,$ то рівняння (13.3) буде мати ще і розв'язки $y=y_1, y=y_2,\ldots$

Приклад. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Припускаючи, що $y \neq 0$, відокремимо змінні.

Замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$. Маємо $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Інтегруємо ліву і праву частини рівності. Після інтегрування одержимо: $\ln|y| = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln|C|$.

Звідки $y = C\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ (загальний розв'язок рівняння).

Розв'язок $y = 0$ міститься в загальному розв'язку при $C = 0$.

Зауваження. Рівняння $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + Q_2(y)\cdot P_2(x)\cdot dy = 0$ теж є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx = -Q_2(y)\cdot P_2(x)\cdot dy,$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy,$$

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy.$$

Отже, маємо загальний інтеграл рівняння $\varphi(x) = \psi(y) + C$, де $\varphi(x) = \int\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}dx$, $\psi(y) = -\int\dfrac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$.

Диференціальні рівняння I порядку з однорідною функцією

Розглянемо диференціальні рівняння першого порядку, які пов'язані з поняттям однорідної функції.

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією* $k-$*того степеня*, якщо виконується тотожність $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$.

Наприклад, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ – однорідна функція з показником однорідності $k = -1$, бо

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{t^2x^2+t^2y^2} = \frac{1}{t}\frac{x+y}{x^2+y^2} = t^{-1}f(x,y).$$

Функція $f(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 8y^3$ – однорідна 3-ого степеня.

Дійсно $f(tx,ty) = (tx)^2ty + 3tx(ty)^2 + 8(ty)^3 = t^3\left(x^2y+3xy^2+8y^3\right) = t^3 f(x,y)$.

Функція $f(x,y) = \dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}$ – однорідна нульового степеня.

Дійсно $f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}\sin\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}=t^0 f(x,y)$.

Якщо функція $f(x,y)$ є однорідною нульового степеня, то вона задовольняє тотожності $f(tx,ty)=f(x,y)$ й її завжди можна подати як функцію відношення $\frac{y}{x}$. Дійсно, поклавши в тотожності $t=\frac{1}{x}$, одержимо $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$. Ліва частина одержаної рівності залежить лише від $\frac{y}{x}\Rightarrow f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається *однорідним*, якщо його права частина $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеня.

Запишемо однорідне рівняння у вигляді: $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

За допомогою заміни змінної $\frac{y}{x}=z(x)\Rightarrow y=xz,\ y'=z+xz'$ це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.
Підставивши ці вирази до рівняння, знайдемо

$$z+xz'=\varphi(z) \text{ або } xz'=\varphi(z)-z.$$

Поділяючи змінні й інтегруючи, одержимо загальний інтеграл рівняння

$$\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\ln|x|+\ln|C|.$$

При відокремлюванні змінних ми ділимо на $\varphi(z)-z$, припускаючи, що цей вираз відмінний від нуля. Якщо ж існує таке значення z_0, при якому $\varphi(z_0)-z_0=0$, то маємо ще розв'язок $z=z_0$ або $y=xz_0$.

Приклад. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Розв'язання. Це однорідне диференціальне рівняння, бо $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$ – однорідна функція нульового степеня. Для його розв'язання вводимо нову функцію $z(x)=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xz,\ y'=z+xz'$. Відносно нових змінних рівняння має вигляд:

$$\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування знайдемо: $\ln|z|-\ln\left(1+z^2\right)=\ln|x|+\ln|C|$ або $\frac{z}{1+z^2}=Cx\ (C\neq 0)$. Підставляючи значення $z=\frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння $\left(x^2+y^2\right)C=y\ (C\neq 0)$. Крім того, розв'язком є $z=0\Rightarrow y=0$.

Практичні заняття за темою лекції (20.03.2020, 23.03.2020, 26.03.2020, 27.03.2020)

1. Розв'язати задачу Коші:

1) $y' - y\cos x = 2\cos x$, $y(0) = 3$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, перенесемо доданок, який не містить y' вправо. Маємо:

$\frac{dy}{dx} = 2\cos x + y\cos x$,

Виносимо за дужки $\cos x$: $\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot (2 + y)$

Збираємо «y» зліва, «x» справа: $\frac{dy}{(2+y)} = \cos x dx$.

Змінні розділені. Інтегруємо ліву та праву частини рівності:

$\int \frac{dy}{(2+y)} = \int \cos x dx$.

$\ln(2+y) = \sin x + C$. Це загальний інтеграл диференціального рівняння.

Для знаходження частинного інтегралу (частинного розв'язку) скористаємося початковими умовами. $y(0) = 3$. Тобто підставляємо в загальний інтеграл $x = 0,\ y = 3$. Маємо:

$\ln(2+3) = \sin 0 + C \ \Rightarrow\ \ln 5 = C \ \Rightarrow$

Частинний інтеграл набуває вигляду $\ln(2+y) = \sin x + \ln 5$.

Завдання для самостійного розв'язання:

2) $y' + \frac{y}{x} = 0$, $y(4) = 1$.

3) $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0, \quad y(1) = 0$

2. Визначити тип та розв'язати наступні диференціальні рівняння:

1) $(y + xy)\cdot dx + (x - xy)\cdot dy = 0$

Розв'язання. $(y + xy)\cdot dx = -(x - xy)\cdot dy$,

$y(1+x)\cdot dx = x(y-1)\cdot dy$ – це рівняння з відокремлюваними змінними.

Розділяємо змінні та інтегруємо:

$\frac{(1+x)}{x}dx = \frac{(y-1)}{y}dy$,

$\int \frac{(1+x)}{x}dx = \int \frac{(y-1)}{y}dy$,

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy,$$
$$\ln|x|+x=y-\ln|y|+C$$
Виконаємо перетворення. Представимо сталу $C=-\ln C_1$.
$$\ln|x|+\ln|y|+x-y=C.$$
Скористаємося властивостями логарифма:
$\ln|xy|+x-y=C$. – це загальний інтеграл рівняння.

2) $2xyy'+x^2-y^2=0$.

Розв'язання. Розділимо все рівняння на *xy*: $2y'+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=0$. – це рівняння з однорідною функцією. Вводимо нову функцію $z(x)=\frac{y}{x}\Rightarrow y=zx,\ y'=z'x+z$. Відносно нових змінних рівняння має вигляд:
$$2z'x+2z+\frac{1}{z}-z=0.\ \Rightarrow\ 2z'x=-\frac{1}{z}-z.$$
Маємо рівняння з відокремлюваними змінними.
$$2\frac{dz}{dx}x=-\frac{1+z^2}{z},$$
$$\frac{2zdz}{1+z^2}=-\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{2zdz}{1+z^2}=-\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln\left(1+z^2\right)=-\ln|x|+C.$$
Представимо сталу у вигляді натурального логарифму сталої C_1: $C=\ln C_1$.
$$\ln\left(1+z^2\right)+\ln|x|=\ln C_1.$$
Скористаємося властивостями логарифмів.
$$\ln\left(1+z^2\right)x|=\ln C_1\ \Rightarrow\ \left(1+z^2\right)x=C_1.$$
Замінимо *z*: $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x=C_1$. Остаточно маємо: $x^2+y^2=C_1x$.

Завдання для самостійного розв'язання:

3) $y'\operatorname{tg}x=y\ln y$**;**

4) $x'+x\cos y=\cos y$**;**

5) $\operatorname{ctg}xdy+(y-2)dx=0$**;**

6) $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$**;**

7) $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$**.**