Практичні заняття за темою лекції від 13.03.2020
(13.03.2020, 16.03.2020)

1. Знайти похідні від неявно заданих функцій

1) $z^3 + 3x^2 z = 2xy$

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$. Скористаємося формулою (2), де $F = z^3 + 3x^2 z - 2xy$:

$$F'_x = 6xz - 2y,$$
$$F'_y = -2x,$$
$$F'_z = 3z^2 + 3x^2,$$

Отже $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{6xy - 2y}{3z^2 + 3x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{-2x}{3z^2 + 3x^2} = \dfrac{2x}{3z^2 + 3x^2}$.

2) $z\ln(x+y) = \dfrac{xy}{2}$

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $z\ln(x+y) - \dfrac{xy}{2} = 0$. Скористаємося формулою (2), де $F = z\ln(x+y) - \dfrac{xy}{2}$:

$$F'_x = \frac{z}{x+y} - \frac{y}{2} = \frac{2z - y}{2(x+y)},$$
$$F'_y = \frac{z}{x+y} - \frac{x}{2} = \frac{2z - x}{2(x+y)},$$
$$F'_z = \ln(x+y),$$

Отже $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2z - y}{2(x+y)\ln(x+y)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2z - y}{2(x+y)\ln(x+y)}$.

Завдання для самостійного розв'язання:

3) $5z^2 + 3x^2 y - 2xy = 0$,

4) $x^3 y^2 - xy^5 + 2x - y = 0$.

2. Для заданої функції знайти:

а) похідну функції u в точці M_1 за напрямком вектора $\vec{l}$.

б) градієнт функції u в точці M_1.

1) $u = x^2 y + 3xz - yz$, $\vec{l} = \overline{M_1 M_2}$, якщо $M_1(1,3,-1)$, $M_2(2,2,-4)$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці M_1:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = \left.(2xy + 3z)\right|_{M_1} = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = \left.(x^2 - z)\right|_{M_1} = 1 - (-1) = 2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = \left.(3x - y)\right|_{M_1} = 3 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Знайдемо вектор $\vec{l} = \overline{M_1 M_2} = (1,-1,-3)$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}},\quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{11}},\quad \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{11}}.$$

Отже маємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_1} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} - 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3-2}{\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}},$$

$$\left.\overrightarrow{grad}u\right|_M = 3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ або } \left.\overrightarrow{grad}u\right|_{M_1} = (3,2,0).$$

Завдання для самостійного розв'язання:

2) $u = xy + x^3 z + 2yz^2$, $\vec{l} = \overline{M_1 M_2}$, якщо $M_1(1,-3,1)$, $M_2(2,2,4)$.,

3) $u = x^2 + y + 3xy - yz$, $\vec{l} = (4,3,0)$, $M_1(2,0,1)$.

3. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні *S* в точці M_0

1) *S*: $xy^2 + x^2 z - 2z^3 + 5 = 0$, $M_0(2,1,1)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції $F = xy^2 + x^2 z - 2z^3 + 5$ в точці M_0:

$$F'_x\big|_{M_0} = \left.(y^2 + 2xz)\right|_{M_0} = 1 + 4 = 5,$$

$$F'_y\big|_{M_0} = \left.2xy\right|_{M_0} = 4,$$

$$F'_z\big|_{M_0} = \left.(x^2 - 6z^2)\right|_{M_0} = 4 - 6 = -2.$$

Отже, рівняння дотичної площини, згідно з (8), буде мати вигляд:

$$5(x-2) + 4(y-1) - 2(z-1) = 0 \text{ або } 5x + 4y - 2z - 12 = 0.$$

Рівняння нормалі згідно з (9): $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Завдання для самостійного розв'язання:

2) *S:* $xy + 5xz = 2zy$, $M_0(-2,1,1)$.

3) *S:* $3xy^2 - x^2y - 2z^4 + 5 = 0$, $M_0(3,-2,1)$.

4. Дослідити на екстремум функцію

1) $z = -x^3 + 3x^2y - y^4$.

Розв'язання. Область визначення функції – всі дійсні значення змінних *x* та *y*.

Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 + 6xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему і знайдемо стаціонарні точки.

З першого рівняння системи знаходимо $y = \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$.

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$3x^2 - \frac{4x^3}{8} = 0, \Rightarrow 6x^2 - x^3 = 0, \Rightarrow x^2(6 - x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, \\ x_2 = 6, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 0, \\ y_2 = 3. \end{matrix}$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x + 6y = A, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x = B, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2 = C, \ \Delta = 36x^2 - 36y^2.$$

Обчислюємо значення виразу $\Delta = AC - B^2$ та перевіримо достатні умови екстремуму для кожної стаціонарної точки окремо.

Для точки $M_1(6,3)$:

$A = -36 + 18 = -18 < 0$, $B = 36$, $C = -12 \cdot 9 = -108$

$\Delta = -18 \cdot (-108) - 36^{\cdot 4}2 = 864 > 0$, отже, маємо максимум ($A < 0$).

$z_{\max} = z(6,3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$

Для точки $M_2(0,0)$:

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $\Delta = 0$, отже, поведемо додаткові дослідження. Значення функції *z* в точці $M_2(0,0)$ дорівнює 0: $z(0,0) = 0$. Можна помітити, що

$z = -y^4 < 0$, якщо $x = 0, \quad y \neq 0$;

$z = -x^3 > 0$, якщо $x < 0, \quad y = 0$.

Це означає, що в околі точки $M_2(0,0)$ функція набуває як додатних, так і від'ємних значень. Отже, в точці $M_2(0,0)$ екстремуму немає.

Завдання для самостійного розв'язання:

2) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

3) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

Домашнє завдання

Закінчити виконання II частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки на адресу

i.morachkovska@gmail.com