Практичні заняття за темою лекції від 20.03.2020
(20.03.2020)

1. Розв'язати задачу Коші:

1) $y' - y\cos x = 2\cos x$, $y(0) = 3$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, перенесемо доданок, який не містить y' вправо. Маємо:

$\frac{dy}{dx} = 2\cos x + y\cos x$,

Виносимо за дужки $\cos x$: $\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot (2 + y)$

Збираємо «*y*» зліва, «*x*» справа: $\frac{dy}{(2+y)} = \cos x dx$.

Змінні розділені. Інтегруємо ліву та праву частини рівності:

$\int \frac{dy}{(2+y)} = \int \cos x dx$.

$\ln(2+y) = \sin x + C$. Це загальний інтеграл диференціального рівняння.

Для знаходження частинного інтегралу (частинного розв'язку) скористаємося початковими умовами. $y(0) = 3$. Тобто підставляємо в загальний інтеграл $x = 0,\ y = 3$. Маємо:

$\ln(2+3) = \sin 0 + C \Rightarrow \ln 5 = C \Rightarrow$

Частинний інтеграл набуває вигляду $\ln(2+y) = \sin x + \ln 5$.

Завдання для самостійного розв'язання:

2) $y' + \frac{y}{x} = 0$, $y(4) = 1$.

3) $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0, \quad y(1) = 0$

2. Визначити тип та розв'язати наступні диференціальні рівняння:

1) $(y + xy)\cdot dx + (x - xy)\cdot dy = 0$

Розв'язання. $(y + xy)\cdot dx = -(x - xy)\cdot dy$,

$y(1+x)\cdot dx = x(y-1)\cdot dy$ – це рівняння з відокремлюваними змінними.

Розділяємо змінні та інтегруємо:

$\frac{(1+x)}{x}dx = \frac{(y-1)}{y}dy$,

$\int \frac{(1+x)}{x}dx = \int \frac{(y-1)}{y}dy$,

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy,$$
$$\ln|x|+x=y-\ln|y|+C$$
Виконаємо перетворення. Представимо сталу $C=-\ln C_1$.
$$\ln|x|+\ln|y|+x-y=C.$$
Скористаємося властивостями логарифма:
$\ln|xy|+x-y=C$. – це загальний інтеграл рівняння.

2) $2xyy'+x^2-y^2=0$.

Розв'язання. Розділимо все рівняння на *xy*: $2y'+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=0$. – це рівняння з однорідною функцією. Вводимо нову функцію $z(x)=\frac{y}{x}\Rightarrow y=zx,\ y'=z'x+z$. Відносно нових змінних рівняння має вигляд:
$$2z'x+2z+\frac{1}{z}-z=0.\ \Rightarrow\ 2z'x=-\frac{1}{z}-z.$$
Маємо рівняння з відокремлюваними змінними.
$$2\frac{dz}{dx}x=-\frac{1+z^2}{z},$$
$$\frac{2zdz}{1+z^2}=-\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{2zdz}{1+z^2}=-\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln\left(1+z^2\right)=-\ln|x|+C.$$
Представимо сталу у вигляді натурального логарифму сталої C_1: $C=\ln C_1$.
$$\ln\left(1+z^2\right)+\ln|x|=\ln C_1.$$
Скористаємося властивостями логарифмів.
$$\ln\left(1+z^2\right)x|=\ln C_1\ \Rightarrow\ \left(1+z^2\right)x=C_1.$$
Замінимо *z*: $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x=C_1$. Остаточно маємо: $x^2+y^2=C_1x$.

Завдання для самостійного розв'язання:

3) $y'\operatorname{tg}x=y\ln y$**;**

4) $x'+x\cos y=\cos y$**;**

5) $\operatorname{ctg}xdy+(y-2)dx=0$**;**

6) $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$**;**

7) $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$**.**