Лекція 1. Первісна. Невизначений інтеграл

Розділ 1.1. Первісна функції і невизначений інтеграл
Розділ 1.2. Геометричний зміст невизначеного інтеграла
Розділ 1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла
Розділ 1.4. Основні правила і формули інтегрування

Короткий зміст

У цій лекції:

— запроваджено поняття первісної функції в інтервалі і невизначеного інтеграла від функції;

— сформульовано і доведено основні властивості невизначеного інтеграла від функції;

— подано основні правила інтегрування і таблицю основних інтегралів.

1.1. Первісна функції і невизначений інтеграл

Основна задача диференціального числення — це знаходження похідної $f'(x)$ або диференціала $df = f'(x)dx$ функції f. Слушно поставити зворотну задачу:

за заданою функцією f відшукати таку функцію F, що

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Означення 1.1. Функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо вона диференційовна для будь-якого $x \in (a;b)$ і

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx.$$

Операцію відшукання первісної F для функції f називають *інтегруванням*.

Отже, основна задача інтегрального числення — відновити функцію F за відомою похідною (диференціалом) цієї функції. Інтегральне числення широко застосовують у геометрії, механіці, фізиці та техніці.

Природно виникає питання: чи існує первісна $F(x)$ для будь-якої функції $f(x)$? Виявляється, ні.

Теорема 1.1. (***достатня умова існування первісної***). Будь-яка неперервна в інтервалі $(a;b)$ функція f має в цьому інтервалі первісну F.

Теорема 1.2. Якщо $F(x)$ є первісною функції f в інтервалі $(a;b)$, то будь-яка інша первісна функції f в цьому інтервалі має вигляд

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

де $C \in \mathbb{R}$ є сталою.

►Доведімо, що якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C — стала, є первісною функції $f(x)$:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Нехай $\Phi(x)$ є деякою відмінною від $F(x)$ первісною функції $f(x)$. Тоді, для будь-якого $x \in (a;b)$ маємо

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

За наслідком з теореми Лаґранжа випливає, що

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

де C — стала. Отже,

$$\Phi(x) = F(x) + C. \blacktriangleleft$$

Приміром, для функції $f(x) = e^x$ первісною на $\mathbb{R}$ є не лише $F(x) = e^x$, але й будь-яка функція $e^x + C$, де C — довільна стала.

Означення 1.2. Сукупність $\{F(x)+C\}$ всіх первісних функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, x — *змінною інтегрування*, $C \in \mathbb{R}$ — *сталою інтегрування*.

1.2. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Геометрично невизначений інтеграл є однопараметричною сукупністю кривих

$$y = F(x)+C$$

де C — параметр, що мають спільну властивість:

усі дотичні до кривих у точках з абсцисами $x = x_0$ паралельні між собою. Справді,

$$(F(x)+C)'\,|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0) = k_{\text{дот}}.$$

Приміром, оскільки $(x^2)' = 2x$, то

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Графіком цього невизначеного інтеграла є сукупність парабол $\{y = x^2 + C\}$ (рис. 1.1).

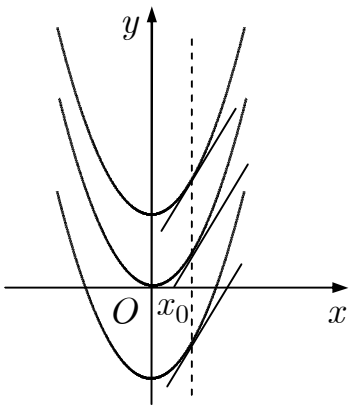

Рис. 1.1. Графік $\int 2xdx$

Криві сукупності $\{F(x)+C\}$ називають *інтегральними кривими*. Вони не перетинають одна одну і не дотикаються одна до одної. Через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла

Розгляньмо властивості невизначеного інтеграла, що випливають із його означення.

Властивості.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразові:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3 (***лінійність***). Невизначений інтеграл від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації інтегралів:

$$\int [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]dx =$$
$$= \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx,$$

де сталі α_1 та α_2 не дорівнюють нулеві одночасно.

4 (***інваріантність формул інтегрування***). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити будь-якою диференційовною функцією цієї змінної:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

де u — диференційовна функція.

► **1.** Нехай

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тоді

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

2. Справді, оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

3. Справді, нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ — первісні функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$, тобто:

$$F_1'(x) = f_1(x), F_2'(x) = f_2(x).$$

Тоді

$$\int [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]dx = \int [\alpha_1 F_1'(x) + \alpha_2 F_2'(x)]dx =$$
$$= \int [\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)]'dx = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + C =$$
$$= \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx.$$

4. Скористаємося властивістю інваріантності форми диференціала 1-го порядку: з того, що

$$dF(x) = F'(x)dx$$

випливає

$$dF(u) = F'(u)du,$$

де $u = u(x)$. Нехай $F(x)$ є первісною функції $f(x)$. Тоді

$$d\Big(\int f(u)du\Big) = f(u)du;$$

$$d(F(u) + C) = F'(u)du = f(u)du.$$

З рівності цих диференціалів випливає правдивість властивості 4.◀

1.4. Основні правила і формули інтегрування

Властивості 1—4 невизначеного інтеграла виражають основні правила інтегрального числення.

Основні правила інтегрування:

I. $\Big(\int f(u)du\Big)' = f(u)$.

II. $d\Big(\int f(u)du\Big) = f(u)du$.

III. $\int dF(u) = F(u) + C$.

IV. $\int kf(u)du = k\int f(u)du, k \neq 0$.

V. $\int [f_1(u) + f_2(u)]du = \int f_1(u)du + \int f_2(u)du$.

Оскільки інтегрування — це дія, обернена до диференціювання, то формули інтегрування можна одержати оберненням відповідних формул диференціювання. Інакше кажучи, таблицю основних формул інтегрування можна одержати з таблиці похідних елементарних функцій при зворотному її читанні (справа наліво). Тобто, з того що

$$(\sin x + C)' = \cos x$$

випливає

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Загальніше з того що

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

випливає

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Подамо таблицю основних невизначених інтегралів (тут літера u може позначати як незалежну змінну $(u = x)$, так і функцію від незалежної змінної $(u = u(x))$.

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C$.

3. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C \ \ (a > 0, a \neq 1)$.

4. $\int e^{u} du = e^{u} + C$.

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

6. $\int \cos u du = \sin u + C$.

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.

9. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$.

10. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$.

11. $\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

12. $\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.

13. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C \ \ (a \neq 0)$.

14. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C \ \ (a \neq 0)$.

15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \ \ (\left|u\right| > \left|a\right|)$.

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C \ \ (\left|u\right| < \left|a\right|)$.

17. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$.

18. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\left|\sin x\right| + C$.

Приклад 1.1. Переконаймося, що

1) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$;

2) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$;

3) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\left|\sin x\right| + C$.

❍ Справді,

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$$(-\ln\left|\cos x\right|+C)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

$$(\ln\left|\sin x\right|+C)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x. \bullet$$

Якщо первісна F для функції f є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражається в елементарних функціях. Але не будь-який інтеграл від елементарних функцій виражається в елементарних функціях.

Приміром, доведено, що такі інтеграли не виражаються через елементарні функції:

1) $\int e^{-x^2}dx$ (Пуассонів інтеграл);

2) $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ (Френелеві інтеграли);

3) $\int \dfrac{dx}{\ln x}, 0 < x < 1$ (інтегральний логарифм);

4) $\int \dfrac{\sin x}{x}dx, x \neq 0$ (інтегральний синус);

5) $\int \dfrac{\cos x}{x}dx, x \neq 0$ (інтегральний косинус).