Лекція 13.03.2020

Похідна функції, заданої неявно

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ – диференційована функція двох змінних x і y й $F'_y(x, y) \neq 0$. Похідна неявної функції дорівнює

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}} \qquad (1)$$

Частинні похідні неявної функції двох змінних $z = f(x, y)$ заданої неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ – диференційована функція змінних x, y, z та $F'_{\ddot{y}}(x, y, z) \neq 0$, обчислюються за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_z(x, y)}}, \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_z(x, y)}}. \qquad (2)$$

Приклад 1. Задана функція $y^3 + 2xy = 5x$. Знайти $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $y^3 + 2xy - 5x = 0$. Отже, $F = y^3 + 2xy - 5x$. Скористаємося формулою (1):

$F'_x = 2y - 5$, $F'_y = 3y^2 + 2x$. Маємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y - 5}{3y^2 + 2x}$.

Приклад 2. Задана функція $y^2 + 2\sin(2y + z) - 5xz = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y, z)$ і скористаємося формулою (2):

$F'_x = -5z$, $F'_y = 2y + 4\cos(2y + z)$, $F'_z = 2\cos(2y + z) - 5x$. Отже

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-5z}{2\cos(2y + z) - 5x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y + 4\cos(2y + z)}{2\cos(2y + z) - 5x}.$$

Градієнт функції та похідна у заданому напрямку

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають *скалярним полем*.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають *стаціонарним*, а скалярне поле, яке змінюється з часом – *нестаціонарним*.

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, то відповідне скалярне поле $u=u(x,y)$ називають плоским. Якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних, то скалярне поле $u=u(x,y,z)$ називають просторовим.

Для плоского скалярного поля розглядають *лінії рівня*, на яких функція $u(x,y)$ має стале значення. Рівняння лінії рівня – $u(x,y)=C$, де $C=const$.

Поверхнею рівня скалярного поля, заданого функцією $u(x,y,z)$ називають поверхню, на якій функція має стале значення. Рівняння поверхні рівня – $u(x,y,z)=C$, де $C=const$.

Геометрично плоскі скалярні поля зображують за допомогою ліній рівня, а просторові – за допомогою поверхонь рівня.

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття **похідної за напрямом**.

Нехай функція $u=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M(x_0,y_0)$ l – деякий промінь з початком у точці $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ – точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається, Δl – довжина відрізка M_0M. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{\Delta l}$, то вона називається *похідною функції* $u=f(x,y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ в *точці* M_0 і позначається $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Похідна за напрямом $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$ *характеризує швидкість змінювання функції* $u=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $u=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ за будь-яким напрямом $\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$, причому

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta}, \qquad (3)$$

де $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$ – значення частинних похідних функції $u=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$, $\cos\alpha,\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Приклад. Знайти похідну функції $u=x^2+y^2$ в точці $M_0(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=(4;3)$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в заданій точці.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2x\big|_{M_0} = 2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2y\big|_{M_0} = 2.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$: $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{16+9} = 5$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}$.

За формулою (3) маємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 2\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{3}{5} = \frac{14}{5}.$$

Вектор з координатами $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $u = f(x,y)$ в точці $M(x,y)$, називається *градієнтом функції* $u = f(x,y)$ в цій точці і позначається $\overrightarrow{grad}u$:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}}. \qquad (4)$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$ похідна за напрямом подається у вигляді:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}, \qquad (5)$$

Для функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$ градієнт в точці $M(x,y,z)$ визначається так:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}} \qquad (6)$$

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $u=u(x,y,z)$ та градієнт пов'язані співвідношенням

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{grad}u \cdot \vec{l}^{\,0}}. \qquad (7)$$

Приклад. Для заданої функції $u = x^2 + 3xy - y^2z^3$ знайти:

1) похідну функції u в точці $M(1;\ 2;\ -1)$ за напрямком вектора $\vec{l} = \{3,-4,1\}$
2) градієнт функції u в точці $M(1;\ 2;\ -1)$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2x+3y)\big|_M = 2\cdot1+3\cdot2 = 8,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left(3x-2yz^3\right)_M = 3\cdot1-2\cdot2(-1)^3 = 7,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -3y^2z^2\big|_M = -3\cdot2^2(-1)^2 = -12$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26},\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{26}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Отже маємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = 8\cdot\frac{3}{\sqrt{26}} - 7\cdot\frac{4}{\sqrt{26}} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{24-28-12}{\sqrt{26}} = -\frac{16}{\sqrt{26}},$$

$$\left.\overrightarrow{grad u}\right|_M = 8\vec{i} + 7\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Розглянемо поверхню, задану рівнянням $F(x,y,z)=0$.

Площина, у якій розташовані всі дотичні прямі до ліній на поверхні, що проходять через дану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, називається *дотичною площиною* до поверхні в точці M_0.

Точка M_0 називається звичайною (неособливою) точкою поверхні, якщо в цій точці частинні похідні F'_x, F'_y та F'_z існують і неперервні, причому хоча б одна з них відмінна від нуля.

Якщо точка M_0 – звичайна, то в ній існує, причому єдина, дотична площина, рівняння якої буде мати вигляд:

$$\boxed{F'_x\big|_{M_0}\cdot(x-x_0) + F'_y\big|_{M_0}\cdot(y-y_0) + F'_z\big|_{M_0}\cdot(z-z_0) = 0}. \qquad (8)$$

Пряма, що проходить через точку M_0 поверхні перпендикулярно до дотичної площини, називається ***нормаллю*** *до поверхні*. Рівняння цієї прямої визначають в такий спосіб:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{F'_x\big|_{M_0}} = \frac{(y-y_0)}{F'_y\big|_{M_0}} = \frac{(z-z_0)}{F'_z\big|_{M_0}}}. \qquad (9)$$

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x^2 + 4y^2$ в точці M_0 (2, 1, 12).

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні у вигляді $2x^2 + 4y^2 - z = 0$. Знаходимо частинні похідні в точці M_0:

$$F'_x\big|_{M_0} = 4x\big|_{M_0} = 4\cdot 2 = 8,\ F'_y\big|_{M_0} = 8y\big|_{M_0} = 8\cdot 1 = 8 \text{ та } F'_z\big|_{M_0} = -1.$$

Отже, рівняння дотичної площини, згідно з (8), буде мати вигляд:

$$8(x-2) + 8(y-1) - (z-12) = 0 \text{ або } 8x + 8y - z - 12 = 0.$$

Рівняння нормалі згідно з (9): $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-12}{-1}$.

Екстремум функції двох змінних, необхідна та достатня умови екстремуму

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки $M_0(x_0, y_0)$ такий, що для будь-якої точки $M(x, y)$ з цього околу виконується нерівність $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$).

Оскільки екстремум функції $z = f(x, y)$ визначається лише в малому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, то його називають локальним. Сформулюємо необхідні і достатні умови існування екстремуму для функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Теорема 1 (необхідні умови). Якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, або не існують. Тобто, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$ (або не існує), $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$ (або не існує).

Точки, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, або не існують, називаються *стаціонарними точками* функції $z = f(x, y)$.

Теорема 2 (достатні умови). Нехай в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно і нехай, крім того, точка $M_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною точкою функції $z = f(x, y)$. Позначимо $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C$. Обчислимо значення виразу $\Delta = AC - B^2$. Тоді в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$

1) має максимум, якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, $A < 0$ $(C < 0)$;

2) має мінімум, якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, $A > 0$ $(C > 0)$;

3) немає екстремуму, якщо $\Delta = AC - B^2 < 0$;

4) екстремум може бути, а може і не бути, якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$. (В цьому випадку потрібні подальші дослідження).

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язання. Область визначення функції – всі дійсні значення змінних *x* та *y*. Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12. \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему і знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 5 = 0, \\ y = \dfrac{2}{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \\ y = \dfrac{2}{x}. \end{cases} \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0, \text{ äå } t = x^2 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = .\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_{1,2} = \pm 1, \\ x_{3,4} = \pm 2, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_{1,2} = \pm 2, \\ y_{3,4} = \pm 1. \end{matrix}$$

Отже, маємо чотири стаціонарні точки $M_1(1,2)$, $M_2(-1,-2)$, $M_3(2,1)$ і $M_4(-2,-1)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку, та значення виразу $\Delta = AC - B^2$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = B, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = C, \ \Delta = 36x^2 - 36y^2.$$

Перевіримо достатні умови екстремуму для кожної стаціонарної точки.

В точці $M_1(1,2)$ $\Delta = 36 - 36 \cdot 4 < 0$, отже, екстремуму немає.

В точці $M_2(-1,-2)$ $\Delta = 36 - 36 \cdot 4 < 0$, отже, екстремуму немає.

В точці $M_3(2,1)$ $\Delta = 36 \cdot 4 - 36 > 0$, $A = 12 > 0$, отже, маємо мінімум.

В точці $M_4(-2,-1)$ $\Delta = 36 \cdot 4 - 36 > 0$, $A = -12 < 0$, отже, маємо максимум.

Практичні заняття за темою лекції (13.03.2020, 16.03.2020, 19.03.2020, 20.03.2020)

1. Знайти похідні від неявно заданих функцій

1) $z^3 + 3x^2 z = 2xy$

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$. Скористаємося формулою (2), де $F = z^3 + 3x^2 z - 2xy$:

$$F'_x = 6xz - 2y,$$
$$F'_y = -2x,$$
$$F'_z = 3z^2 + 3x^2,$$

Отже $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{6xy - 2y}{3z^2 + 3x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{-2x}{3z^2 + 3x^2} = \dfrac{2x}{3z^2 + 3x^2}$.

2) $z\ln(x+y) = \dfrac{xy}{2}$

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $z\ln(x+y) - \dfrac{xy}{2} = 0$. Скористаємося формулою (2), де $F = z\ln(x+y) - \dfrac{xy}{2}$:

$$F'_x = \frac{z}{x+y} - \frac{y}{2} = \frac{2z - y}{2(x+y)},$$
$$F'_y = \frac{z}{x+y} - \frac{x}{2} = \frac{2z - x}{2(x+y)},$$
$$F'_z = \ln(x+y),$$

Отже $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2z - y}{2(x+y)\ln(x+y)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2z - y}{2(x+y)\ln(x+y)}$.

Завдання для самостійного розв'язання:

3) $5z^2 + 3x^2 y - 2xy = 0$,

4) $x^3 y^2 - xy^5 + 2x - y = 0$.

2. Для заданої функції знайти:

а) похідну функції u в точці M_1 за напрямком вектора $\vec{l}$.

б) градієнт функції u в точці M_1.

1) $u = x^2 y + 3xz - yz$, $\vec{l} = \overline{I_1 I_2}$, якщо $M_1(1,3,-1)$, $M_2(2,2,-4)$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці M_1:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = \left.(2xy+3z)\right|_{M_1} = 2\cdot 1\cdot 3+3\cdot(-1)=3,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = \left.\left(x^2-z\right)\right|_{M_1} = 1-(-1)=2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = \left.(3x-y)\right|_{M_1} = 3\cdot 1-3=0.$$

Знайдемо вектор $\vec{l} = \overline{\vec{M}_1\vec{M}_2} = (1,-1,-3)$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}},\quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{11}},\quad \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{11}}.$$

Отже маємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_1} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} - 0\cdot\frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3-2}{\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}},$$

$$\left.\overrightarrow{grad}u\right|_{M} = 3\vec{i}+2\vec{j} \text{ або } \left.\overrightarrow{grad}u\right|_{M_1} = (3,2,0).$$

Завдання для самостійного розв'язання:

2) $u = xy + x^3z + 2yz^2$, $\vec{l} = \overline{\vec{M}_1\vec{M}_2}$, якщо $M_1(1,-3,1)$, $M_2(2,2,4)$.,

3) $u = x^2 + y + 3xy - yz$, $\vec{l} = (4,3,0)$, $M_1(2,0,1)$.

3. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні *S* в точці M_0

1) *S:* $xy^2 + x^2z - 2z^3 + 5 = 0$, $M_0(2,1,1)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції $F = xy^2 + x^2z - 2z^3 + 5$ в точці M_0:

$$\left.F'_x\right|_{M_0} = \left.\left(y^2+2xz\right)\right|_{M_0} = 1+4=5,$$

$$\left.F'_y\right|_{M_0} = \left.2xy\right|_{M_0} = 4,$$

$$\left.F'_z\right|_{M_0} = \left.\left(x^2-6z^2\right)\right|_{M_0} = 4-6=-2.$$

Отже, рівняння дотичної площини, згідно з (8), буде мати вигляд:

$$5(x-2)+4(y-1)-2(z-1)=0 \text{ або } 5x+4y-2z-12=0.$$

Рівняння нормалі згідно з (9): $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Завдання для самостійного розв'язання:

2) *S:* $xy + 5xz = 2zy$, $M_0(-2,1,1)$.

3) *S:* $3xy^2 - x^2y - 2z^4 + 5 = 0$, $M_0(3,-2,1)$.

4. Дослідити на екстремум функцію

1) $z = -x^3 + 3x^2 y - y^4$.

Розв'язання. Область визначення функції – всі дійсні значення змінних *x* та *y*. Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 + 6xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему і знайдемо стаціонарні точки.

З першого рівняння системи знаходимо $y = \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$.

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$3x^2 - \frac{4x^3}{8} = 0, \Rightarrow 6x^2 - x^3 = 0, \Rightarrow x^2(6 - x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, \\ x_2 = 6, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 0, \\ y_2 = 3. \end{matrix}$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x + 6y = A, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x = B, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2 = C, \ \Delta = 36x^2 - 36y^2.$$

Обчислюємо значення виразу $\Delta = AC - B^2$ та перевіримо достатні умови екстремуму для кожної стаціонарної точки окремо.

Для точки $M_1(6,3)$:

$A = -36 + 18 = -18 < 0$, $B = 36$, $C = -12 \cdot 9 = -108$

$\Delta = -18 \cdot (-108) - 36^{\cdot 4} 2 = 864 > 0$, отже, маємо максимум ($A < 0$).

$z_{\max} = z(6,3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$

Для точки $M_2(0,0)$:

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $\Delta = 0$, отже, поведемо додаткові дослідження. Значення функції *z* в точці $M_2(0,0)$ дорівнює 0: $z(0,0) = 0$. Можна помітити, що

$z = -y^4 < 0$, якщо $x = 0, \quad y \neq 0$;

$z = -x^3 > 0$, якщо $x < 0, \quad y = 0$.

Це означає, що в околі точки $M_2(0,0)$ функція набуває як додатних, так і від'ємних значень. Отже, в точці $M_2(0,0)$ екстремуму немає.

Завдання для самостійного розв'язання:

2) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

3) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

Домашнє завдання

Закінчити виконання II частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки на адресу i.morachkovska@gmail.com