Лекція 17.04.2020

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) II порядку

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{8.5}$$

$a_1(x), a_2(x), f(x) \in C_{[a;b]}$. Нехай

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),\ c_1, c_2 = \text{const}, \tag{8.6}$$

— загальний розв'язок відповідного ЛОДР (y_1, y_2 утворюють фундаментальну систему розв'язків).

Для розв'язання ЛНДР (8.5) застосуємо *метод варіації довільних сталих* (*Лагранжа*), який полягає в наступному. Загальний розв'язок ЛНДР (8.5) шукаємо у вигляді

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \tag{8.7}$$

де $c_1(x), c_2(x)$ — невідомі функції від x.

Для знаходження двох функцій $c_1(x), c_2(x)$ треба задати дві умови. Перша умова — функції $c_1(x), c_2(x)$ повинні задовольняти задане ЛНДР. Другу умову виберемо з наступних міркувань. Продиференціюємо рівність (8.7):

$$y' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x). \tag{8.8}$$

Накладемо на функції $c_1(x), c_2(x)$ таку умову, щоб вираз (8.8) для похідної y' мав вигляд, як і у випадку сталих c_1, c_2, тобто запровадимо

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{8.9}$$

Тоді

$$y' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Продиференціюємо ще раз

$$y'' = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо y, y', y'' в рівняння (8.5) :

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x) +$$
$$+a_1(x)(c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)) + a_2(x)(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)) = f(x).$$

Групуючи доданки в лівій частині рівності, дістанемо

$$c_1(x)(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + c_2(x)(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) +$$
$$+c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Вирази в дужках тотожньо дорівнюють нулю, оскільки $y_1(x), y_2(x)$ — розв'язки відповідного ЛОДР. Отже, одержали ще одну умову для знаходження $c_1(x), c_2(x)$:

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{8.10}$$

Таким чином, функція $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ буде розв'язком ЛНДР (8.1), якщо функції $c_1(x), c_2(x)$ задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{8.11}$$

Визначник системи (8.11) $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ як визначник Вронського лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x)$. Розв'язуючи цю систему за правилом Крамера, одержимо

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}; \; c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}},$$

звідки

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + c_1^*; \quad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx + c_2^*. \tag{8.12}$$

Отже, загальний розв'язок ЛНДР матиме вигляд

$$y_{з.н.} = \left(-\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + c_1^*\right)y_1(x) + \left(\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx + c_2^*\right)y_2(x).$$

Приклад 8.1. Знайдемо методом варіації довільних сталих (Лагранжа) загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0.$$

❍ Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку. Корені характеристичного рівняння

$$k^2 + 1 = 0$$

комплексно-спряжені $k_{1,2} = \pm i$. Функції

$$y_1 = \cos x, \; y_2 = \sin x$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР. Отже, його загальний розв'язок має вигляд

$$y_{з.о.} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Загальний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$$

Система (8.11) для визначення $c_1'(x), c_2'(x)$ в даному випадку набуває вигляду

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = -\mathrm{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно $c_1'(x), c_2'(x)$, одержимо:

$$c_1'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}, \qquad c_2'(x) = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x};$$

$$c_1(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + c_1^*,$$

$$c_2(x) = -\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}d(\sin x) = \sin x + \frac{1}{\sin x} + c_2^*.$$

Підставивши знайдені вирази $c_1(x), c_2(x)$ в $y_{\text{з.н.}}$, дістанемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння

$$y = c_1^* \cos x + c_2^* \sin x + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|\cos x + 2. \bullet$$

Розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду

Для побудови загального розв'язку ЛНДР

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

за теоремою про структуру загального розв'язку ЛНДР необхідно знати загальний розв'язок відповідного ЛОДР та деякий частинний розв'язок заданого ЛНДР. У випадку, коли права частина $f(x)$ ЛНДР має *спеціальний вигляд*, частинний розв'язок ЛНДР можна знаходити **методом невизначених коефіцієнтів**. Спеціальною правою частиною диференціального рівняння називають вираз:

I. $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$,

II. $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$,

де α, β – дійсні числа, $P_m(x)$, $Q_l(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степені m та l відповідно. ($P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$).

Метод невизначених коефіцієнтів полягає в підбиранні вигляду частинного розв'язку ЛНДР. *Вигляд частинного розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння та від правої частини заданого неоднорідного рівняння*. Розглянемо наступні випадки.

I. Нехай права частина ЛНДР має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$

а) частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} \widetilde{P_m}(x),$$

якщо число *α – не є розв'язком характеристичного рівняння;*

б) частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} \widetilde{P_m}(x),$$

якщо число *α – є розв'язком кратності r характеристичного рівняння;*

$\widetilde{P_m}(x)$ – многочлен степені m з невизначеними коефіцієнтами

$\widetilde{P_m}(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0.$

Приклад 9.1. Знайдемо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - y = 3x^2.$$

❍ Характеристичне рівняння

$$k^2 - 1 = 0$$

має корені $k_1 = 1, k_2 = -1$. Права частина неоднорідного рівняння

$$f(x) = 3x^2 = 3x^2 e^{0x}.$$

Частинний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx + C,$$

оскільки

$$\alpha = 0, \alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2,$$

$P_m(x) = 3x^2$ — многочлен другого степеня, отже, $\tilde{P}_m(x)$ повинен бути многочленом другого степеня з невизначеними коефіцієнтами, який містить всі степені x від 0 до 2.

Невідомі коефіцієнти A, B, C шукаємо методом невизначених коефіцієнтів: підставимо (9.8) у задане неоднорідне рівняння:

$$y' = 2Ax + B, \; y'' = 2A,$$

тоді одержимо

$$2A - Ax^2 - Bx - C = 3x^2.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & -A = 3, \\ x & -B = 0, \\ x^0 & 2A - C = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -3, \\ B = 0, \\ C = -6. \end{cases}$$

Таким чином, задане рівняння має частинний розв'язок

$$y_{\text{ч.н.}} = -3x^2 - 6. \; \bullet$$

II. Нехай права частина ЛНДР має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$$

а) частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_m}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x\right),$$

якщо число *α+i β – не є розв'язком характеристичного рівняння;*

б) частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_m}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x\right),$$

якщо число *α+i β – є розв'язком кратності r характеристичного рівняння;*

$\widetilde{P_n}(x)$, $\widetilde{Q_n}(x)$ – многочлен степені n з невизначеними коефіцієнтами

$\widetilde{P_n}(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$.

$\widetilde{Q_n}(x) = B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + Bx + B$,

$n = max(m,l)$.

Приклад 9.2. Знайдемо частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 9y = \cos 2x + 3\sin 2x.$$

❍ Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3i.$$

Шукаємо $y_{\text{ч.н.}}$:

$$f(x) = \cos 2x + 3\sin 2x = e^{0x}(1\cdot\cos 2x + 3\cdot\sin 2x),$$

тобто

$$\alpha \pm i\beta = 0 \pm i\cdot 2 = \pm 2i.$$

Маємо: $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння $P_m(x) = 1\ (m = 0), Q_s(x) = 3\ (s = 0)$, тому $\tilde{P}_n(x) = A$, $\tilde{Q}_n(x) = B$ — многочлени нульового степеня. Таким чином,

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Коефіцієнти A, B знаходимо методом невизначених коефіцієнтів:

$$y'_{\text{ч.н.}} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставляємо знайдені вирази в задане ЛНДР:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9(A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x + 3\sin 2x,$$

звідки

$$5A\cos 2x + 5B\sin 2x = \cos 2x + 3\sin 2x.$$

Коефіцієнти A і B знаходимо, прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в правій та лівій частинах рівності (9.11):

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 5A = 1, \\ \sin 2x & 5B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{5}, \\ B = \dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Отже, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{3}{5}\sin 2x. \ \bullet$$

Зауваження. Вигляд частинного розв'язку залишається і у випадку, коли в правій частині рівняння один із многочленів тотожно дорівнює нулю, тобто коли права частина має вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x \text{ або } f(x) = e^{\alpha x} Q_l(x) \sin \beta x.$$

Приклад 9.3. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = \cos x.$$

❍ За теоремою про структуру загального розв'язку ЛНДР маємо

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}.$$

Знаходимо $y_{з.о.}$:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i \Rightarrow$$

$$y_{з.о.} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Шукаємо $y_{ч.н.}$:

$$f(x) = \cos x = e^{0x}(1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x),$$

тобто

$$\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 0 \pm i \cdot 1 = \pm i.$$

Маємо: $\alpha \pm i\beta = \pm i$ є коренем характеристичного рівняння кратності один $r = 1$; $P_m(x) = 1\ (m = 0), Q_s(x) = 0\ (s = 0)$, тому $\tilde{P}_n(x), \tilde{Q}_n(x)$ $n = 0$ — многочлени нульового степеня. Таким чином,

$$y_{ч.н.} = x(A \cos x + B \sin x).$$

Коефіцієнти A, B знаходимо методом невизначених коефіцієнтів:

$$y'_{ч.н.} = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x),$$
$$y''_{ч.н.} = -2A \sin x + 2B \cos x - x(A \cos x + B \sin x).$$

Підставляємо знайдені вирази у задане неоднорідне диференціальне рівняння:

$$-2A \sin x + 2B \cos x - x(A \cos x + B \sin x) +$$
$$+x(A \cos x + B \sin x) = \cos x,$$

звідки

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \cos x.$$

Коефіцієнти A, B знаходимо, прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$ в правій та лівій частинах рівності:

$$\begin{array}{c|l} \cos x & 2B = 1, \\ \sin x & -2A = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{2}, \\ A = 0. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок ЛНДР задається рівністю:

$$y_{ч.н.} = \frac{x}{2} \sin x.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.н.} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x. \quad \bullet$$

Системи лінійних диференціальних рівнянь

При розв'язанні багатьох задач потрібно знайти функції $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, що задовольняють системі диференціальних рівнянь, які містять незалежну змінну x, шукані функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ та їхні похідні.

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканої функції та їхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \qquad (2.1)$$

де функції $a_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ визначені й неперервні при $x \in (a,b)$.

Інтегрування нормальних систем

Одним з основних методів інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь є *метод виключення*. Суть цього методу полягає в послідовному виключенню невідомих функцій з рівнянь системи, внаслідок чого система зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку від однієї невідомої функції.

Розглянемо цей метод на прикладі нормальної *системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* 1-го порядку вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_t' = a_1 x + a_2 y, \\ y_t' = b_1 x + b_2 y, \end{cases}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ - диференційовані функції незалежної змінної t, а коефіцієнти a_i і b_i - сталі, але можуть бути і функціями змінної t.

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x_{tt}'' = a_1 x_t' + a_2 y_t'.$$

2. Підставимо в цю рівність вираз y_t' із другого рівняння системи:

$$x_{tt}'' = a_1 x_t' + a_2 (b_1 x + b_2 y).$$

3. Замінимо функцію y її виразом з першого рівняння системи, тобто

$$y = \frac{1}{a_2}\left(x'_t - a_1 x\right). \qquad (*)$$

Тоді $\quad x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2\left(b_1 x + b_2 \frac{1}{a_2}\left(x'_t - a_1 x\right)\right)$ Спростимо отриманий вираз

$$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2 b_1 x + b_2 x'_t - b_2 a_1 x \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = \left(a_1 + b_2\right)x'_t + \left(a_2 b_1 - b_2 a_1\right)x,$$

$$x''_{tt} - \left(a_1 + b_2\right)x'_t - \left(a_2 b_1 - b_2 a_1\right)x = 0, \qquad \text{або}$$

$$x''_{tt} + Ax'_t + Bx = 0,$$

де $A = -\left(a_1 + b_2\right)$, а $B = -\left(a_2 b_1 - b_2 a_1\right)$.

4. Одержали *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо *загальний розв'язок відносно функції* $x(t)$:

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2).$$

5. Для знаходження функції $y(t)$, підставимо в рівняння $(*)$ знайдену функцію $x(t)$ та її похідну $x'(t)$.

В результаті отримаємо *загальний розв'язок відносно функції* $y(t)$:

$$y(t) = \psi(t, C_1, C_2).$$

Сукупність двох знайдених функцій є *загальним розв'язком заданої системи*: $\quad x(t) = \varphi(t, C_1, C_2), \quad y(t) = \psi(t, C_1, C_2).$

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y, \\ y'_t = 4x + 5y. \end{cases}$$

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4y'_t.$$

2. Підставляючи в цю рівність вираз y'_t із другого рівняння системи, маємо

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4\left(4x + 5y\right) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20y.$$

$$x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20\frac{1}{4}\left(x'_t - 5x\right) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 5x'_t - 25x,$$

$$x''_{tt} = 10x'_t - 9x, \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} - 10x'_t + 9x = 0$$

- *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$.

Для його розв'язання складемо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

Отже, частинні лінійно незалежні розв'язки (фундаментальна система розв'язків) - $x_1(t) = e^x$ і $x_2(t) = e^{9x}$, а загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

4. Щоб знайти $y(t)$, підставимо в рівняння $(*)$ знайдену функцію $x(t)$ та її похідну: $x'(t) = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}$.

Маємо:

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5\left(C_1 e^x + C_2 e^{9x}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5C_1 e^x - 5C_2 e^{9x}\right) =$$

$$= -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Сукупність двох знайдених функцій дає нам *загальний розв'язок заданої системи*: $x(t) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \quad y(t) = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$

Практичні заняття за темою лекції (17.04.2020, 20.04.2020, 23.04.2020, 24.04.2020)

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 4y = x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}.$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' + 4y = 0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, корені якого будуть $k_{1,2} = \pm 2i$. Звідки можна записати:

$$y_{з.о.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина заданого рівняння має спеціальний вигляд, причому контрольне число $\gamma = \alpha + \beta i = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. А тому $y_{ч.н.} = Ax + B$. Для обчислення коефіцієнтів A та B знайдемо похідні $y'_{ч.н.} = A$ і $y''_{ч.н.} = 0$ та підставимо їх значення в умову диференціального рівняння $4(Ax + B) = x$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 4A = 1, \\ x^0 & 4B = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = 0.$$

Отже, $y_{ч.н.} = \frac{1}{4}x$, відповідно $y_{з.н.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Відповідь: $y_{з.н.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' = 2 - 3x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо у вигляді: $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - 3y' = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 - 3k = 0$, корені якого будуть $k_1 = 0$ та $k_2 = 3$. Отже $y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Права частина заданого рівняння є спеціального виду. де $\alpha = 0, \beta = 0, f(x) = 2 - 3x$. Контрольне число $\gamma = 0$ та дорівнює одному кореню характеристичного рівняння. Таким чином, $y_{\text{ч.н.}}$ можна підібрати за правою частиною, тобто:

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx .$$

Коефіцієнти A та B знаходимо вже відомим методом:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A .$$

$$2A - 3(2Ax + B) = 2 - 3x ,$$

$$2A - 6Ax - 3B = 2 - 3x ,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & -6A = -3 \\ x^0 & 2A - 3B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{3} .$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$, а $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3 .$$

Розв'язання. Як відомо, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.н.}}$: $y'' - 6y' + 9y = 0$, $k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = 3 \Rightarrow y_{\text{з. о.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

Визначимо контрольне число:

$$\gamma = \alpha + \beta i,\ \alpha = 0,\ \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0,\ \ \gamma \neq k_{1,\,2} .$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx + C$. Знаходимо $y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A$ та підставимо ці вирази у задане диференціальне рівняння:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3 ,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 9A = 2, \\ x^1 & -12A + 9B = -1, \\ x^0 & 2A - 6B + 9C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{2}{9},\ B = \frac{5}{27},\ C = \frac{11}{27}.$$

Таким чином:

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27} ,$$

а $y_{з.н.} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

Відповідь: $y_{з.н.} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Розв'язання. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$

Виконуючи всі дії, аналогічно попереднім, маємо:

$$2y'' - y' - y = 0,\ 2k^2 - k - 1 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так як $\alpha = 2, \beta = 0$, то $\gamma = 2,\ \gamma \neq k_{1,2}$ тоді:

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)e^{2x},$$

$$y'_{ч.н.} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$y''_{ч.н.} = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}(2A) = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Маємо:

$$2e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Скоротимо обидві частини рівняння на e^{2x}:

$$8Ax + 8A + 8B - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x,$$

$$5Ax + 7A + 5B = 4x.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 5A = 4, \\ x^0 & 7A + 5B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{4}{5},\ B = -\frac{28}{25}.$$

$$y_{ч.н.} = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}, \text{ а } y_{з.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

Відповідь: $y_{з.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = e^x(5 - x)$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}},\ y'' - 2y' + y = 0,\ k^2 - 2k + 1 = 0,\ k_{1,2} = 1,$$

$$y_{\text{з.о.}} = e^x(C_1 + C_2 x).$$

Враховуючи праву частину рівняння, маємо:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 1 = k_{1.2},$$

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x(Ax + B)\cdot x^2 = e^x(Ax^3 + Bx^2),$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx),$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2B) =$$

$$= e^x(Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B).$$

Підставимо $y_{\text{ч.н.}}, y'_{\text{ч.н.}}, y''_{\text{ч.н.}}$ в задане рівняння та скоротимо обидві частини на e^x:

$$6Ax + 2B = 5 - x,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 6A = -1, \\ x^0 & 2B = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{6},\ B = \frac{5}{2}.$$

$$y_{\text{ч.н.}} = x^2 e^x\left(-\frac{x}{6} + \frac{5}{2}\right) = e^x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2\right),$$

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2\right).$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2\right)$.

Приклад 6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y' + 10y = 5\sin 4x - 3\cos 4x .$$

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} .$$

Для того, щоб знайти $y_{з.о.}$ запишемо однорідне диференціальне рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$, корені якого $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Таким чином, $y_{з.о.} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

За правою частиною рівняння $\alpha = 0, \beta = 4$, тобто $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 4i, \gamma \neq k_{1,2}$, а отже, $y_{ч.н.} = A\sin 4x + B\cos 4x$. Знайдемо

$$y'_{ч.н.} = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x \text{ та } y''_{ч.н.} = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x .$$

Підставимо їх значення в умову. Тоді маємо:

$$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x + 8A\cos 4x - 8B\sin 4x + 10A\sin 4x + 10B\cos 4x =$$
$$= 5\sin 4x - 3\cos 4x .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 4x$ та $\cos 4x$ одержимо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} \cos 4x & -6A - 8B = 5, \\ \sin 4x & 8A - 6B = -3 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = -0,54, \ B = -0,22 .$$

Отже, $y_{ч.н.} = -0,54\sin 4x - 0,22\cos 4x$, а відповідно

$$y_{з.н.} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0,54\sin 4x - 0,22\cos 4x .$$

Відповідь:

$$y_{з.н.} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0,54\sin 4x - 0,22\cos 4x.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому випадку $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$ Знайдемо $y_{з.о.}$:

$$y'' + 9y = 0, k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = \pm 3i \Rightarrow \ y_{з.о.} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x .$$

За правою частиною рівняння маємо $\alpha = 0,\ \beta = 2,$ тоді $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 2i, \gamma \neq k_{1,2} \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = A\cos 2x + B\sin 2x$ Знайдемо A та B. Для цього запишемо:

$y'_{\text{ч.н.}} = -A\sin 2x + 2B\cos 2x$ та $y''_{\text{ч.н.}} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Підставимо одержані вирази в задане диференціальне рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9A\cos 2x + 9B\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\text{тоді } 5A\cos 2x + 5B\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 5A = -\dfrac{17}{2}, \\ \sin 2x & 5B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B = 0,\ A = -\frac{17}{10} = -1,7.$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = -1,7\cos 2x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 1,7\cos 2x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 1,7\cos 2x$.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' - 5y = 2\sin 3x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Розв'язання. У даному випадку необхідно спочатку повторити всі дії, які були наведені в попередніх прикладах, а потім скористатися початковими умовами. Отже, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$$y'' + 4y' - 5y = 0,\ k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -5.$$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1e^x + C_2e^{-5x}.$$

Так як $\alpha = 0,\ \beta = 3 \Rightarrow \gamma = \alpha \pm \beta i = 3i,\ \gamma \neq k_{1,2}$, то:

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Обчислимо A та B:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 12A\sin 3x + 12B\cos 3x - 5A\cos 3x - 5B\sin 3x = 2\sin 3x,$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 3x & \\ \sin 3x & \end{array}\begin{cases} -9A+12B-5A=0, \\ -9B-12A-5B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14A+12B=0, \\ -12A-14B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7A+6B=0, \\ -6A-7B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{6}{85},\ B=-\frac{7}{85}.$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -\frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x.$$

Скористаємось початковою умовою $y(0)=1$:

$$1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}.$$

Запишемо $y'_{\text{з.н.}} = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x} + \frac{18}{85}\sin 3x - \frac{21}{85}\cos 3x$, та скористаємось умовою $y'(0)=0$:

$$0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}.$$

Об'єднаємо одержані рівняння в систему:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}, \\ 0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}, \end{cases}$$

та знайдемо $C_1 = \frac{238}{255}, C_2 = \frac{7}{51}$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковим умовам:

$$y = \frac{238}{255}e^x + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x.$$

Відповідь: $y = \frac{238}{255}e^x + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x$.

Домашнє завдання

Завершити виконання III частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки на адресу i.morachkovska@gmail.com або TELEGRAM 0502983683