ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ФУНКЦІЙ, ІНТЕГРАЛІВ ТА РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Примеры #1. Приближенные вычисления

1. Вычислить $\sin 28^0 13' 15''$.

Для того, чтобы представить заданный угол в радианах, воспользуемся соотношениями:

$$1^0 = \frac{\pi}{180}; \qquad 28^0 = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180}; \qquad 13' = \frac{13\pi}{60 \cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; \qquad 15'' = \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180};$$

$$28^0 13' 15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60 \cdot 180} + \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{28 \cdot 60 \cdot 60 + 60 \cdot 13 + 15}{60 \cdot 60}\right) = 0{,}492544\,рад$$

Если при разложении по формуле Тейлора ограничиться тремя первыми членами, получим: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0{,}492544 - 0{,}019915 + 0{,}000242 = 0{,}472871$.

Сравнивая полученный результат с более точным значением синуса этого угла,

$$\sin 28^0 13' 15'' = 0{,}472869017612759812,$$

видим, что даже при ограничении всего тремя членами разложения, точность составила 0,000002, что более чем достаточно для большинства практических технических задач.

2. С точностью до 0,001 вычислить интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$$

Т.к. интегрирование производится в окрестности точки x=0, то можно воспользоваться для разложения подинтегральной функции формулой Маклорена.

Разложение функции cos$x$ имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Зная разложение функции cos$x$ легко найти функцию 1 – cos$x$:

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности. Это – не ошибка, так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подинтегральное выражение.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}+\ldots+=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Теперь представим наш интеграл в виде:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx$$

В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда. (Т.е. интеграл от суммы будет представлен в виде суммы интегралов членов ряда).

Вообще говоря, со строго теоретической точки зрения для применения этой теоремы надо доказать, что ряд сходится и, более того, сходится равномерно на отрезке интегрирования [0, 0,5]. Эти вопросы будут подробно рассмотрены позже (См. *Действия со степенными рядами*.) Отметим лишь, что в нашем случае подобное действие справедливо хотя бы по свойствам определенного интеграла (интеграл от суммы равен сумме интегралов).

Итак:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int_0^{0,5}x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big|_0^{0,5}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 0,5^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}$$

Итого, получаем:

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!(2n-1)2^{2n-1}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 6!}-\ldots=$$

$$=0,25-0,00174+0,0000086-\ldots\approx 0,248$$

Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

Для справки: Точное (вернее – более точное) значение этого интеграла: 0,2482725418…

3.

11.2. Вычислить: а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ с точностью до 0,001;

б) $\int_0^{1/4}\left(1+x^3\right)dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. а) Раскладывая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, будем иметь

$$\int_0^1\left(x^{1/2}-\frac{x^{5/2}}{3!}+\frac{x^{9/2}}{5!}-\frac{x^{13/2}}{7!}+\ldots\right)dx=\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{2x^{7/2}}{7\cdot 3!}+$$

$$+\frac{2x^{11/2}}{11\cdot 5!}-\frac{2x^{15/2}}{15\cdot 7!}+\ldots\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{2}{7\cdot 3!}+\frac{2}{11\cdot 5!}-\frac{2}{15\cdot 7!}+\ldots=0,621.$$

При вычислении интеграла с заданной точностью достаточно ограничиться первыми тремя членами, т.к. четвертый член знакочередующегося ряда по абсолютной величине равен 0,00002 и, следовательно, остаток ряда меньше 0,001.

б) Пользуясь биноминальным разложением и интегрируя, имеем

$$\int_0^{1/4}\left(1+\frac{1}{2}x^3-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{2!}x^6+\ldots\right)dx=x+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2^2\cdot 7\cdot 2!}+\ldots\Bigg|_0^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 4^4}-\frac{1}{2^2\cdot 7\cdot 2!4^7}+\ldots=0,2505.$$

Третий член этого знакочередующегося ряда, равный 0,000001, меньше требуемой точности, поэтому для вычисления исходного приближенного значения достаточно суммы первых двух членов.

4.

10.4. Вычислить lg 5 с точностью 0,001.

Решение. Перейдем от десятичного логарифма к натуральным $\lg=\frac{\ln 5}{\ln 10}$. Для разложения функции в ряд воспользуемся разложением в ряд $\ln\frac{1+x}{1-x}$ (9.2,г):

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n+1}+\ldots\right).$$

Полагая $x=\frac{1}{2n+1}$, получим $\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=\frac{n+1}{n}$ и

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right].$$

При $n = 1$, получим разложение для ln 2

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\frac{1}{9^2}+\ldots\right).$$

Ограничиваясь первыми тремя членами, можно найти ln 2 с тремя правильными десятичными знаками. Действительно, рассмотрим поправку, начиная с четвертого члена

$$\Delta=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{7}\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9}\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11}\frac{1}{9^5}+\ldots\right)<\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 7\cdot 9^2}<\frac{1}{1000}.$$

Отсюда ln 2 = 0,693. Полагая $n = 4$, получим

$$\ln 5=2\ln 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{9^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{9^4}+\ldots\right)=1,609.$$

Пользуясь вычисленными значениями ln 2 и ln 5, находим

$\ln 10=\ln 2+\ln 5=2,302$. Таким образом, $\lg 5=\frac{1,609}{2,302}=0,699$.

Примеры #2. С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i.

Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**. Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые

действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.)

Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

1. Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями *y(0)=1, y'(0)=0.*

Решение уравнения будем искать в виде

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$
$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$
$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots) = 0$$
$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \ldots = 0$$

Отсюда получаем: $2c_2 = 0$

$$6c_3 - c_0 = 0$$
$$12c_4 - c_1 = 0$$
$$20c_5 - c_2 = 0$$
$$30c_6 - c_3 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 0$$

Окончательно получим: $c_0 = 1;\quad c_1 = 0;\quad c_2 = 0;\quad c_3 = \frac{1}{6};\quad c_4 = 0;\quad c_5 = 0;\quad c_6 = \frac{1}{180};\quad \ldots$

Итого: $\boxed{y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots}$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия *y(0)=1, y'(0)=0* подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0)=0.$

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y''=xy$ и будем последовательно дифференцировать его по *x*.

$$y'''=y+xy'; \qquad y'''(0)=y(0)=1;$$

$$y^{IV}=y'+y'+xy''; \quad y^{IV}(0)=0;$$

$$y^{V}=2y''+y''+xy'''; \quad y^{V}(0)=0;$$

$$y^{VI}=3y'''+y'''+xy^{IV}; \quad y^{VI}(0)=4;$$

.....

После подстановки полученных значений получаем:

$$\boxed{y=1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+\ldots}$$