Практичні заняття за темою лекції (10.04.2020, 13.04.2020,)

Приклад 4.1.

$$y'' - 2y = 0, \tag{4.11}$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -1. \tag{4.12}$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого поряду (4.11):

$$\lambda^2 - 2 = 0. \tag{4.13}$$

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.13):

$$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\lambda + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Характеристичне рівняння має два дійсні та різні корені, тому диференціальне рівняння (4.11) має два частинних розв'язка:

$$y_1 = e^{-\sqrt{2}x}, \quad y_2 = e^{\sqrt{2}x}, \tag{4.14}$$

підставимо y_1 та y_2 вигляду (4.14) в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x}. \tag{4.15}$$

(4.15)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.11).

Розв'яжемо тепер задачу Коші (4.12) диференціального рівняння (4.11). Знайдемо y' від загального розв'язку (4.15) однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.11):

$$y' = \left(C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 x e^{\sqrt{2}x}\right)' = \left(C_1 e^{-\sqrt{2}x}\right)' + \left(C_2 e^{\sqrt{2}x}\right)' = C_1\left(e^{-\sqrt{2}x}\right)' + C_2\left(e^{\sqrt{2}x}\right)' = C_1 e^{-\sqrt{2}x} \cdot \left(-\sqrt{2}x\right)' +$$

$$+ C_2 e^{\sqrt{2}x} \cdot \left(\sqrt{2}x\right)' = C_1 e^{-\sqrt{2}x} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + C_2 e^{\sqrt{2}x} \cdot \sqrt{2} = C_1\left(-\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}x} + C_2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x}). \tag{4.16}$$

Початкові умови (4.12) підставимо в (4.15) та (4.16) відповідно:

$$3 = C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0}, \tag{4.17}$$

$$-1 = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0}). \tag{4.18}$$

Рівності (4.17) та (4.18) утворюють систему рівнянь відносно невідомих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0} \\ -1 = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ -1 = \sqrt{2}(-C_1 e^0 + C_2 e^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2C_2 = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C_1 = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2C_2 = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}\left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}. \tag{4.19}$$

Підставимо знайдені значення C_1 та C_2, вигляду (4.19) в загальний розв'язок (4.15) та запишемо розв'язок задачі Коші рівняння (4.11) з початковими умовами (4.12):

$$y = \frac{3}{2}\left(e^{-\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{-\sqrt{2}x} - e^{\sqrt{2}x}\right). \tag{4.20}$$

Таким чином, однорідне диференціальне рівняння другого порядку (4.11) має загальний розв'язок (4.15) та розв'язок (4.20) задачі Коші з початковими умовами (4.12).

Приклад 4.2.

$$y'' - 6y' + 8y = 0. \qquad (4.15)$$

Розв'язання.

Складемо відповідне (4.15) характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0. \qquad (4.16)$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.16) є дійсні та різні між собою числа: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$ Запишемо частинні розв'язки диференціального рівняння (4.15):

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{4x}, \qquad (4.17)$$

підставимо y_1 та y_2 вигляду (4.17) в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}. \qquad (4.18)$$

(4.18)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.15).

Приклад 4.3.

$$y'' - y' - 2y = 0. \qquad (4.19)$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.19), має вигляд:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \qquad (4.20)$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.20) є дійсні та різні між собою числа: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$, тому частинні розв'язки диференціального рівняння (4.19) матимуть вигляд:

$$y_1 = e^{-x}, \qquad y_2 = e^{2x}, \qquad (4.21)$$

y_1 та y_2 вигляду (4.21) підставимо в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}. \qquad (4.22)$$

(4.22)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.19).

Приклад 4.4.

$$y'' - y = 0. \qquad (4.23)$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.23), має вигляд:

$$\lambda^2 - 1 = 0. \qquad (4.24)$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.23) є дійсні та різні між собою числа: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1$, тому частинні розв'язки диференціального рівняння (4.23) матимуть вигляд:

$$y_1 = e^{-x}, \qquad y_2 = e^{x}, \qquad (4.25)$$

y_1 та y_2 вигляду (4.25) підставимо в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}. \qquad (4.26)$$

(4.26)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.23).

Приклад 4.5.

$$y'' + y = 0. \tag{4.27}$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого поряду (4.27):

$$\lambda^2 + 1 = 0. \tag{4.28}$$

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.28):

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-1} \Rightarrow \lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = i.$$

Як бачимо, характеристичне рівняння має два різних комплексних кореня, тому, за формулами (4.6) диференціальне рівняння (4.27) має два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x, \tag{4.29}$$

використовуючи формулу (4.8) та отримані значення y_1 та y_2 вигляду (4.29), маємо:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{4.30}$$

(4.30)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.27).

Приклад 4.6.

$$y'' + 4y = 0. \tag{4.31}$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.31), має вигляд:

$$\lambda^2 + 4 = 0. \tag{4.32}$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.20) є комплексними числами: $\lambda_1 = -2i, \quad \lambda_2 = 2i$, тому частинні розв'язки диференціального рівняння (4.19) матимуть вигляд:

$$y_1 = \cos 2x, \qquad y_2 = \sin 2x, \tag{4.33}$$

Значення y_1 та y_2 вигляду (4.21) підставимо в формулу (4.8):

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \tag{4.34}$$

(4.34)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.31).

Приклад 4.7.

$$y'' + y' + 3y = 0. \tag{4.35}$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого поряду (4.35):

$$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0. \tag{4.36}$$

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.36):

$$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Як бачимо, характеристичне рівняння має два різних комплексних кореня, тому, за формулами (4.6) диференціальне рівняння (4.35) має два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x, \qquad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x, \tag{4.37}$$

підставимо y_1 та y_2 вигляду (4.37) у формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x. \tag{4.38}$$

(4.38)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.35), який також можна записати у вигляді:

$$y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Приклад 4.8.

$$y'' + 10y' + 25y = 0. \qquad (4.39)$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого поряду (4.38):

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0. \qquad (4.40)$$

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.40):

$$(\lambda + 5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -5.$$

Як бачимо, характеристичне рівняння має два однакових дійсних кореня, тому, за формулами (4.9) диференціальне рівняння (4.39) має два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{-5x}, \qquad y_2 = xe^{-5x}, \qquad (4.41)$$

тепер, щоб отримати загальний розв'язок рівняння (4.39), y_1 та y_2 вигляду (4.41) підставимо у формулу (4.10):

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}. \qquad (4.42)$$

(4.42) - загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.39).

Завдання для самостійного розв'язання:

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, знайти їх частинні та загальні розв'язки. У випадку, якщо задані початкові умови, розв'язати задачу Коші.

4.1. $y'' + 5y' + 4y = 0$.

4.2. $y'' - 7y' + 10y = 0$.

4.3. $y'' - 2y' + 10y = 0$.

4.4. $y'' - 2y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

4.5. $y'' - 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 7.$

Домашнє завдання

Виконати завдання 2, 3 III частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки.